

不作治疗	1.9	0.5	0.9	2.1	
接受治疗	3.1	5.3	1.4	4.6	2.8

设治疗与否的存活时间的概率密度至多只差一个平移. 取 $\alpha=0.05$, 问这种血清对白血病是否有抑制作用?

解 本题需检验接受治疗的老鼠的存活期是否有增长. 分别以 μ_1, μ_2 表示不作治疗和接受治疗的老鼠的存活时间总体的均值. 需要检验的假设是

$$H_0: \mu_1 = \mu_2, \quad H_1: \mu_1 < \mu_2.$$

这里, $n_1=4, n_2=5, \alpha=0.05$. 先计算对应于 $n_1=4$ 的一组观察值的秩和. 将两组数据放在一起按自小到大的次序排列. 对来自第 1 个总体 ($n_1=4$) 的数据下面加一表示之. 即有

数据	0.5	0.9	1.4	1.9	2.1	2.8	3.1	4.6	5.3
秩	1	2	3	4	5	6	7	8	9

所以 R_1 的观察值为 $r_1=1+2+4+5=12$. 查附表 9 知 $C_U(0.05)=12$, 即拒绝域为 $r_1 \leq 12$. 而现在 $r_1=12$, 故拒绝 H_0 , 即认为这种血清对白血病有抑制作用. $\square$

可以证明, 当 H_0 为真时 (即 $a=0$ 时)

$$\begin{aligned} \mu_{R_1} &= E(R_1) = \frac{n_1(n_1 + n_2 + 1)}{2}, \\ \sigma_{R_1}^2 &= D(R_1) = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

而当 $n_1, n_2 \geq 10$, 当 H_0 为真时, 近似地有

$$R_1 \sim N(\mu_{R_1}, \sigma_{R_1}^2). \quad (7.8)$$

因此, 当 $n_1, n_2 \geq 10$ 时我们可以采用

$$Z = \frac{R_1 - \mu_{R_1}}{\sigma_{R_1}}$$

作为检验统计量. 在显著性水平 α 下双边检验、右边检验、左边检验的近似拒绝域分别为

$$|z| \geq z_{\alpha/2}, \quad z \geq z_{\alpha}, \quad z \leq -z_{\alpha}.$$

这里 z 是 Z 的观察值.

例 2 某商店为了确定向公司 A 或公司 B 购买某种商品, 将 A, B 公司以往各次进货的次品率进行比较, 数据如下, 设两样本独立. 问两公司的商品的质量有无显著差异. 设两公司的商品的次品率的密度至多只差一个平移, 取显著性水平 $\alpha=0.05$.

A	7.0	3.5	9.6	8.1	6.2	5.1	10.4	4.0	2.0	10.5			
B	5.7	3.2	4.2	11.0	9.7	6.9	3.6	4.8	5.6	8.4	10.1	5.5	12.3

解 分别以 μ_A, μ_B 记公司 A, B 的商品次品率总体的均值. 所需检验的假设是

$$H_0: \mu_A = \mu_B, \quad H_1: \mu_A \neq \mu_B.$$

先将数据按自小到大的次序排列, 得到对应于 $n_1 = 10$ 的样本的秩和为

$$r_1 = 1 + 3 + 5 + 8 + 12 + 14 + 15 + 17 + 20 + 21 = 116.$$

又当 H_0 为真时,

$$E(R_1) = \frac{1}{2} n_1 (n_1 + n_2 + 1) = \frac{1}{2} \times 10(10 + 13 + 1) = 120,$$

$$D(R_1) = \frac{1}{12} n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1) = 260.$$

故知当 H_0 为真时近似地有

$$R_1 \sim N(120, 260).$$

拒绝域为

$$\frac{|r_1 - 120|}{\sqrt{260}} \geq z_{0.025} = 1.96.$$

现在 R_1 的观察值为 $r_1 = 116$, 得 $|r_1 - 120| / \sqrt{260} = 0.25 < 1.96$, 故接受 H_0 , 认为两个公司商品的质量无显著差异. $\square$

在实际问题中(7.5)式中会出现某些观察值相等的情况, 对于这种观察值的秩定义为足标的平均值. 例如, 若抽得的样本按次序排成 0, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 则三个 1 的秩均为 $(2 + 3 + 4) / 3 = 3$, 两个 3 的秩均为 $(6 + 7) / 2 = 6.5$.

将两个样本 $n_1 + n_2 = n$ 个元素按自小到大的次序排列, 若出现 k 个秩相同的组, 设其中有 t_i 个数的秩为 $a_i, i = 1, 2, \dots, k, a_1 < \dots < a_k$, 则当 H_0 为真时 R_1 的均值仍为 $\mu_{R_1} = n_1(n_1 + n_2 + 1) / 2$, 而 R_1 的方差修正为

$$\sigma_{R_1}^2 = \frac{n_1 n_2 [n(n^2 - 1) - \sum_{i=1}^k t_i(t_i^2 - 1)]}{12n(n-1)}. \quad (7.9)$$

当 k 不大时, 附表 9 仍可使用, 但表载值为近似值. 又当 $n_1, n_2 \geq 10, H_0$ 为真, 且 k 不大时, 近似地有

$$R_1 \sim N(\mu_{R_1}, \sigma_{R_1}^2),$$

其中 $\mu_{R_1} = n_1(n_1 + n_2 + 1) / 2$, 而 $\sigma_{R_1}^2$ 由(7.9)式确定. 这时我们就采用

$$Z = \frac{R_1 - \mu_{R_1}}{\sigma_{R_1}}$$

作为检验统计量来检验假设检验问题 $(7.2)' \sim (7.4)'$.

例 3 两位化验员各自读得某种液体黏度如下:

化验员 A	82	73	91	84	77	98	81	79	87	85	
化验员 B	80	76	92	86	74	96	83	79	80	75	79

设数据可以认为分别来自仅均值可能有差异的两个总体的样本. 试在 $\alpha=0.05$ 下, 检验假设

$$H_0: \mu_1 = \mu_2, \quad H_1: \mu_1 > \mu_2,$$

其中 μ_1, μ_2 分别为两总体的均值.

解 将两个样本的元素混合, 按自小到大次序排列. 并求出各个元素的秩如下:

数据	73	74	75	76	77	79	79	79	80	80	81	82	83	84	85	86	87	91	92	96	98
秩	1	2	3	4	5	7	7	7	9.5	9.5	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21

现在 $n_1=10, n_2=11, n=21, \mu_{R_1} = 10 \times 22/2 = 110, k=2, \sum_{i=1}^2 t_i(t_i^2-1) = 3 \times (9-1) + 2 \times (4-1) = 30$, 按(7.9)式得 $\sigma_{R_1}^2 = 201$. 当 H_0 为真时近似地有 $R_1 \sim N(110, 201)$.

拒绝域为

$$\frac{r_1 - 110}{\sqrt{201}} \geq z_{0.05} = 1.645.$$

现在 R_1 的观察值为 $r_1=121$, 得 $(r_1 - 110)/\sqrt{201} = 0.776 < 1.645$. 故接受 H_0 , 认为两位化验员所测得的数据无显著差异. $\square$

§ 8 假设检验问题的 p 值检验法

以上讨论的假设检验方法称为临界值法. 本节介绍另一种被称为 p 值检验法的检验方法. 先从一个例题讲起.

例 1 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ 未知, $\sigma^2=100$, 现有样本 $x_1, x_2, \dots, x_{52}$, 算得 $\bar{x}=62.75$. 现在来检验假设

$$H_0: \mu = \mu_0 = 60, \quad H_1: \mu > 60.$$

采用 Z 检验法, 检验统计量为

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

以数据代入,得 Z 的观察值为

$$z_0 = \frac{62.75 - 60}{10/\sqrt{52}} = 1.983.$$

概率

$$P\{Z \geq z_0\} = P\{Z \geq 1.983\} = 1 - \Phi(1.983) = 0.0238.$$

此即为图 8-7 中标准正态曲线下位于 z_0 右边的尾部面积.

此概率称为 Z 检验法的右边检验的 p 值. 记为

$$P\{Z \geq z_0\} = p \text{ 值} (=0.0237).$$

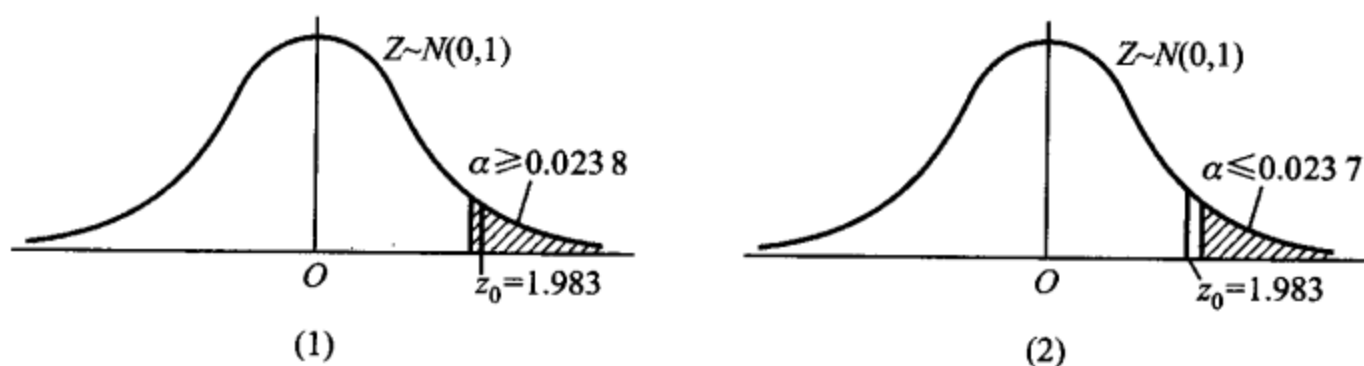


图 8-7

若显著性水平 $\alpha \geq p = 0.0238$, 则对应的临界值 $z_\alpha \leq 1.983$, 这表示观察值 $z_0 = 1.983$ 落在拒绝域内(图 8-7(1)), 因而拒绝 H_0 ; 又若显著性水平 $\alpha < p = 0.0238$, 则对应的临界值 $z_\alpha > 1.983$, 这表示观察值 $z_0 = 1.983$ 不落在拒绝域内(图 8-7(2)), 因而接受 H_0 .

据此, p 值 $= P\{Z \geq z_0\} = 0.0238$ 是原假设 H_0 可被拒绝的最小显著性水平.

一般, p 值的定义是:

定义 假设检验问题的 p 值(probability value)是由检验统计量的样本观察值得出的原假设可被拒绝的最小显著性水平.

任一检验问题的 p 值可以根据检验统计量的样本观察值以及检验统计量在 H_0 下一个特定的参数值(一般是 H_0 与 H_1 所规定的参数的分界点)对应的分布求出. 例如在正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 均值的检验中, 当 σ 未知时, 可采用检验统计量 $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$, 在以下三个检验问题中, 当 $\mu = \mu_0$ 时 $t \sim t(n-1)$. 如果由样本求得统计量 t 的观察值为 t_0 , 那么在检验问题

$H_0: \mu \leq \mu_0, H_1: \mu > \mu_0$ 中,

p 值 $= P_{\mu_0}\{t \geq t_0\} = t_0$ 右侧尾部面积, 如图(8-8(1));

$H_0: \mu \geq \mu_0, H_1: \mu < \mu_0$ 中,

p 值 $= P_{\mu_0} \{t \leq t_0\} = t_0$ 左侧尾部面积, 如图(8-8(2))

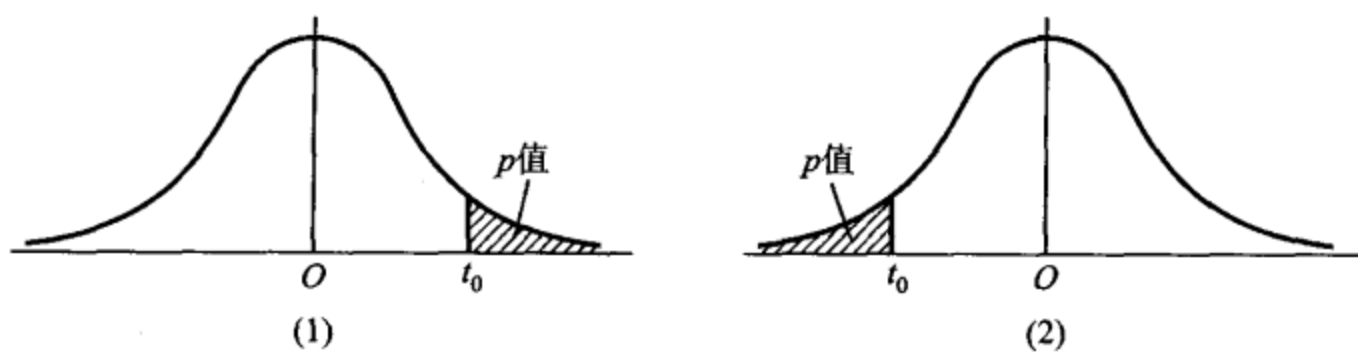


图 8-8

$H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$ 中,

(i) 当 $t_0 > 0$ 时

$$\begin{aligned} p \text{ 值} &= P_{\mu_0} \{|t| \geq t_0\} = P_{\mu_0} \{(t \leq -t_0) \cup (t \geq t_0)\} \\ &= 2 \times (t_0 \text{ 右侧尾部面积}) \quad (\text{如图 8-9(1)}). \end{aligned}$$

(ii) 当 $t_0 < 0$ 时

$$\begin{aligned} p \text{ 值} &= P_{\mu_0} \{|t| \geq -t_0\} = P_{\mu_0} \{(t \leq t_0) \cup (t \geq -t_0)\} \\ &= 2 \times (t_0 \text{ 左侧尾部面积}) \quad (\text{如图 8-9(2)}). \end{aligned}$$

综合(i)(ii), p 值 $= 2 \times$ (由 t_0 界定的尾部面积).

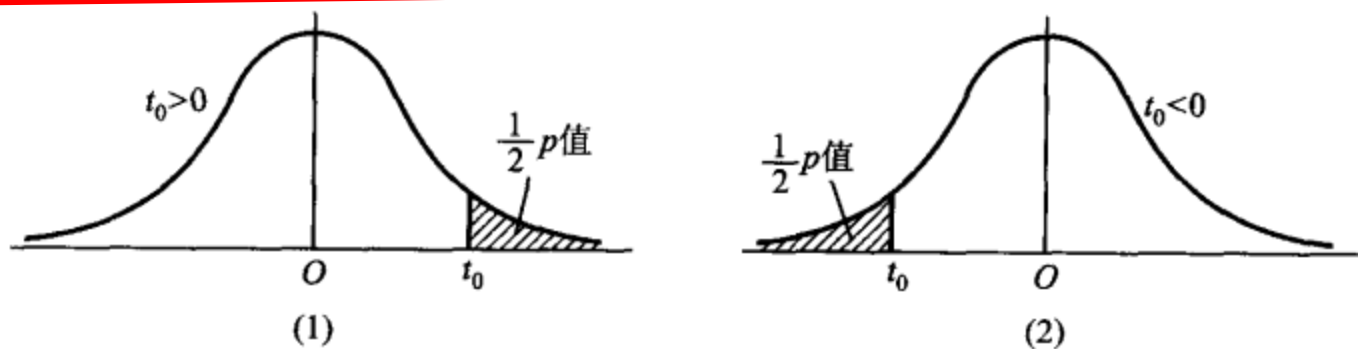


图 8-9

上述各图中的曲线均为 $t(n-1)$ 分布的概率密度曲线.

在现代计算机统计软件中,一般都给出检验问题的 p 值.

按 p 值的定义,对于任意指定的显著性水平 α ,就有

(1) 若 $p \text{ 值} \leq \alpha$,则在显著性水平 α 下拒绝 H_0 .

(2) 若 $p \text{ 值} > \alpha$,则在显著性水平 α 下接受 H_0 .

有了这两条结论就能方便地确定 H_0 的拒绝域. 这种利用 p 值来确定检验拒绝域的方法,称为 p 值检验法.

用临界值法来确定 H_0 的拒绝域时,例如当取 $\alpha = 0.05$ 时知道要拒绝 H_0 ,再取 $\alpha = 0.01$ 也要拒绝 H_0 ,但不能知道将 α 再降低一些是否也要拒绝 H_0 . 而 p 值法给出了拒绝 H_0 的最小显著性水平. 因此 p 值法比临界值法给出了有关拒

绝域的更多的信息.

例 2 用 p 值法检验本章 § 1 例 2 的检验问题

$$H_0: \mu \leq \mu_0 = -0.545, \quad H_1: \mu > \mu_0 \quad \alpha = 0.05.$$

解 用 Z 检验法, 现在检验统计量 $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ 的观察值为

$$z_0 = \frac{-0.535 - (-0.545)}{0.008/\sqrt{5}} = 2.7955.$$

$$p \text{ 值} = P\{Z \geq 2.7955\} = 1 - \Phi(2.7955) = 0.0026.$$

$p \text{ 值} < \alpha = 0.05$, 故拒绝 H_0 . □

例 3 用 p 检验法检验本章 § 2 例 1 的检验问题

$$H_0: \mu \leq \mu_0 = 225, \quad H_1: \mu > 225, \quad \alpha = 0.05.$$

解 用 t 检验法, 现在检验统计量 $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$ 的观察值为

$$t_0 = \frac{241.5 - 225}{98.7259/\sqrt{16}} = 0.6685,$$

由计算机算得

$$p \text{ 值} = P\{t \geq 0.6685\} = 0.2570,$$

$p \text{ 值} > \alpha = 0.05$, 故接受 H_0 . □

例 4 用 p 值检验法检验本章 § 3 例 1 中检验问题

$$H_0: \sigma^2 = 5000, \quad H_1: \sigma^2 \neq 5000, \quad \alpha = 0.02.$$

解 用 χ^2 检验法. 现在检验统计量 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ 的观察值为

$$\chi^2 = \frac{25 \times 9200}{5000} = 46,$$

由计算机得

$$p \text{ 值} = 2 \times P\{\chi^2 \geq 46\} = 0.0128,$$

$p \text{ 值} < \alpha = 0.02$, 故拒绝 H_0 . □

p 值表示反对原假设 H_0 的依据的强度, p 值越小, 反对 H_0 的依据越强、越充分(譬如对于某个检验问题的检验统计量的观察值的 $p \text{ 值} = 0.0009$, p 值如此的小, 以至于几乎不可能在 H_0 为真时出现目前的观察值, 这说明拒绝 H_0 的理由很强, 我们就拒绝 H_0).

一般, 若 $p \text{ 值} \leq 0.01$, 称推断拒绝 H_0 的依据很强或称检验是高度显著的; 若 $0.01 < p \text{ 值} \leq 0.05$ 称推断拒绝 H_0 的依据是强的或称检验是显著的; 若 $0.05 < p \text{ 值} \leq 0.1$ 称推断拒绝 H_0 的理由是弱的, 检验是不显著的; 若 $p \text{ 值} > 0.1$ 一般来说没有理由拒绝 H_0 . 基于 p 值, 研究者可以使用任意希望的显著性水平来

作计算. 在杂志上或在一些技术报告中, 许多研究者在讲述假设检验的结果时, 常不明显地论及显著性水平以及临界值, 代之以简单地引用假设检验的 p 值, 利用或让读者利用它来评价反对原假设的依据的强度, 作出推断.

小结

统计推断就是由样本来推断总体, 它包括两个基本问题: 统计估计和假设检验. 上一章讲述了参数估计, 本章讨论假设检验问题. 有关总体分布的未知参数或未知分布形式的种种论断叫统计假设, 人们要根据样本所提供的信息对所考虑的假设作出接受或拒绝的决策. 假设检验就是作出这一决策的过程.

一般, 人们总是对原假设 H_0 作出接受或拒绝的决策. 由于作出判断原假设 H_0 是否为真的依据是一个样本, 由于样本的随机性, 当 H_0 为真时, 检验统计量的观察值也会落入拒绝域, 致使我们作出拒绝 H_0 的错误决策; 而当 H_0 为不真时, 检验统计量的观察值也会未落入拒绝域, 致使我们作出接受 H_0 的错误决策.

假设检验的两类错误		
真实情况 (未知)	所作决策	
	接受 H_0	拒绝 H_0
H_0 为真	正确	犯第 I 类错误
H_0 不真	犯第 II 类错误	正确

我们使用“接受假设”或“拒绝假设”这样的术语. 接受一个假设并不意味着确信它是真的, 它只意味着决定采取某种行动(例如 A); 拒绝一个假设也不意味着它是假的, 这也仅仅是作出采取另一种不同的行动(例如 B). 不论哪种情况, 都存在作出错误选择的可能性.

当样本容量 n 固定时, 减小犯第 I 类错误的概率, 就会增大犯第 II 类错误的概率, 反之亦然. 我们的做法是控制犯第 I 类错误的概率, 使

$$P\{\text{当 } H_0 \text{ 为真拒绝 } H_0\} \leq \alpha,$$

其中 $0 < \alpha < 1$ 是给定的小的数. α 称为检验的显著性水平. 这种只对犯第 I 类错误的概率加以控制而不考虑犯第 II 类错误的概率的检验称为显著性检验.

在进行显著性检验时, 犯第 I 类错误的概率是由我们控制的. α 取得小, 则概率 $P\{\text{当 } H_0 \text{ 为真拒绝 } H_0\}$ 就小, 这保证了当 H_0 为真时错误地拒绝 H_0 的可能性很小. 这意味着 H_0 是受到保护的, 也表明 H_0 、 H_1 的地位不是对等的. 于是, 在一对对立假设中, 选哪一个作为 H_0 需要小心. 例如, 考虑某种药品是否为真, 这里可能犯两种错误: (1) 将假药误作为真药, 则冒着伤害病人的健康甚至生命的风险; (2) 将真药误作为假药, 则冒着造成经济损失的风险. 显然, 犯错误(1)比犯错误(2)的后果严重, 因此, 我们选取“ H_0 : 药品为假, H_1 : 药品为真”, 即是使得犯第 I 类错误“当药品为假时错判药品为真”的概率 $\leq \alpha$. 就是说, 选择 H_0 、 H_1 使得两类错误中后果严重的错误成为第 I 类错误. 这是选择 H_0 、 H_1 的一个原则.

如果在两类错误中, 没有一类错误的后果严重更需要避免时, 常常取 H_0 为维持现状, 即

取 H_0 为“无效益”、“无改进”、“无价值”等等. 例如, 取

H_0 : 新技术未提高效益, H_1 : 新技术提高效益.

实际上, 我们感兴趣的是 H_1 “提高效益”, 但对采用新技术应持慎重态度. 选取 H_0 为“新技术未提高效益”, 一旦 H_0 被拒绝了, 表示有较强的理由去采用新技术.

在实际问题中, 情况比较复杂, 如何选取 H_0 、 H_1 只能在实践中积累经验, 根据实际情况去判断了.

注意, 拒绝域的形式是由 H_1 确定的.

我们还介绍了置信区间与假设检验的关系. 知道了置信区间就能容易判明是否接受原假设; 反之, 知道了检验的接受域就得到了相应的置信区间.

■ 重要术语及主题

原假设 备择假设 检验统计量 单边检验 双边检验 显著性水平 拒绝域 显著性检验 一个正态总体的参数的检验 两个正态总体均值差、方差比的检验 成对数据的检验 χ^2 分布拟合检验 偏度、峰度检验 秩和检验

习题

1. 某批矿砂的 5 个样品中的镍含量, 经测定为(%)

3.25 3.27 3.24 3.26 3.24

设测定值总体服从正态分布, 但参数均未知, 问在 $\alpha=0.01$ 下能否接受假设: 这批矿砂的镍含量的均值为 3.25.

2. 如果一个矩形的宽度 w 与长度 l 的比 $w/l = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \approx 0.618$, 这样的矩形称为黄金矩形. 这种尺寸的矩形使人们看上去有良好的感觉. 现代的建筑构件(如窗架)、工艺品(如图片镜框), 甚至司机的执照、商业的信用卡等常常都是采用黄金矩形. 下面列出某工艺品工厂随机取的 20 个矩形的宽度与长度的比值:

0.693 0.749 0.654 0.670 0.662 0.672 0.615 0.606 0.690 0.628

0.668 0.611 0.606 0.609 0.601 0.553 0.570 0.844 0.576 0.933

设这一工厂生产的矩形的宽度与长度的比值总体服从正态分布, 其均值为 μ , 方差为 σ^2 , μ, σ^2 均未知. 试检验假设(取 $\alpha=0.05$)

$H_0: \mu=0.618, H_1: \mu \neq 0.618.$

3. 要求一种元件平均使用寿命不得低于 1 000 h, 生产者从一批这种元件中随机抽取 25 件, 测得其寿命的平均值为 950 h. 已知该种元件寿命服从标准差为 $\sigma=100$ h 的正态分布. 试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下判断这批元件是否合格? 设总体均值为 μ , μ 未知. 即需检验假设 $H_0: \mu \geq 1\,000, H_1: \mu < 1\,000.$

4. 下面列出的是某工厂随机选取的 20 只部件的装配时间(min):

9.8 10.4 10.6 9.6 9.7 9.9 10.9 11.1 9.6 10.2

10.3 9.6 9.9 11.2 10.6 9.8 10.5 10.1 10.5 9.7

设装配时间的总体服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 均未知. 是否可以认为装配时间的均值显著大于 10 (取 $\alpha=0.05$)?

5. 按规定, 100 g 罐头番茄汁中的平均维生素 C 含量不得少于 21 mg/g. 现从工厂的产品中抽取 17 个罐头, 其 100 g 番茄汁中, 测得维生素 C 含量 (mg/g) 记录如下:

16 25 21 20 23 21 19 15 13 23 17 20 29 18 22 16 22

设维生素含量服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 均未知, 问这批罐头是否符合要求 (取显著性水平 $\alpha=0.05$).

6. 下表分别给出两位文学家马克·吐温 (Mark Twain) 的 8 篇小品文以及斯诺特格拉斯 (Snodgrass) 的 10 篇小品文中由 3 个字母组成的单字的比例.

马克·吐温	0.225	0.262	0.217	0.240	0.230	0.229	0.235	0.217		
斯诺特格拉斯	0.209	0.205	0.196	0.210	0.202	0.207	0.224	0.223	0.220	0.201

设两组数据分别来自正态总体, 且两总体方差相等, 但参数均未知. 两样本相互独立. 问两位作家所写的小品文中包含由 3 个字母组成的单字的比例是否有显著的差异 (取 $\alpha=0.05$)?

7. 在 20 世纪 70 年代后期人们发现, 在酿造啤酒时, 在麦芽干燥过程中形成致癌物质亚硝基二甲胺 (NDMA). 到了 20 世纪 80 年代初期开发了一种新的麦芽干燥过程. 下面给出分别在新老两种过程中形成的 NDMA 含量 (以 10 亿份中的份数计):

老过程	6	4	5	5	6	5	5	6	4	6	7	4
新过程	2	1	2	2	1	0	3	2	1	0	1	3

设两样本分别来自正态总体, 且两总体的方差相等, 但参数均未知. 两样本独立. 分别以 μ_1 , μ_2 记对应于老、新过程的总体的均值, 试检验假设 ($\alpha=0.05$)

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 2, \quad H_1: \mu_1 - \mu_2 > 2.$$

8. 随机地选了 8 个人, 分别测量了他们在早晨起床时和晚上就寝时的身高 (cm), 得到以下的数据.

序号	1	2	3	4	5	6	7	8
早上 (x_i)	172	168	180	181	160	163	165	177
晚上 (y_i)	172	167	177	179	159	161	166	175

设各对数据的差 $D_i = X_i - Y_i$ ($i=1, 2, \dots, 8$) 是来自正态总体 $N(\mu_D, \sigma_D^2)$ 的样本, μ_D, σ_D^2 均未知. 问是否可以认为早晨的身高比晚上的身高要高 (取 $\alpha=0.05$)?

9. 为了比较用来做鞋子后跟的两种材料的质量, 选取了 15 名男子 (他们的生活条件各不相同), 每人穿一双新鞋, 其中一只以材料 A 做后跟, 另一只以材料 B 做后跟, 其厚度均为 10 mm. 过了一个月再测量厚度, 得到数据如下:

男子	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
材料 A (x_i)	6.6	7.0	8.3	8.2	5.2	9.3	7.9	8.5	7.8	7.5	6.1	8.9	6.1	9.4	9.1
材料 B (y_i)	7.4	5.4	8.8	8.0	6.8	9.1	6.3	7.5	7.0	6.5	4.4	7.7	4.2	9.4	9.1

设 $D_i = X_i - Y_i$ ($i=1, 2, \dots, 15$) 是来自正态总体 $N(\mu_D, \sigma_D^2)$ 的样本, μ_D, σ_D^2 均未知. 问是否可以认为以材料 A 制成的后跟比材料 B 的耐穿(取 $\alpha=0.05$)?

10. 为了试验两种不同的某谷物的种子的优劣, 选取了 10 块土质不同的土地, 并将每块土地分为面积相同的两部分, 分别种植这两种种子. 设在每块土地的两部分人工管理等条件完全一样. 下面给出各块土地上的单位面积产量:

土地编号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
种子 A(x_i)	23	35	29	42	39	29	37	34	35	28
种子 B(y_i)	26	39	35	40	38	24	36	27	41	27

设 $D_i = X_i - Y_i$ ($i=1, 2, \dots, 10$) 是来自正态总体 $N(\mu_D, \sigma_D^2)$ 的样本, μ_D, σ_D^2 均未知. 问以这两种种子种植的谷物的产量是否有显著的差异(取 $\alpha=0.05$)?

11. 一种混杂的小麦品种, 株高的标准差为 $\sigma_0 = 14$ cm, 经提纯后随机抽取 10 株, 它们的株高(以 cm 计)为

90 105 101 95 100 100 101 105 93 97

考察提纯后群体是否比原群体整齐? 取显著性水平 $\alpha=0.01$, 并设小麦株高服从 $N(\mu, \sigma^2)$.

12. 某种导线, 要求其电阻的标准差不得超过 0.005Ω , 今在生产的一批导线中取样品 9 根, 测得 $s=0.007 \Omega$, 设总体为正态分布, 参数均未知. 问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下能否认为这批导线的标准差显著地偏大?

13. 在第 2 题中记总体的标准差为 σ , 试检验假设(取 $\alpha=0.05$)

$$H_0: \sigma^2 = 0.11^2, \quad H_1: \sigma^2 \neq 0.11^2.$$

14. 测定某种溶液中的水分, 它的 10 个测定值给出 $s=0.037\%$, 设测定值总体为正态分布, σ^2 为总体方差, σ^2 未知. 试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验假设

$$H_0: \sigma \geq 0.04\%, \quad H_1: \sigma < 0.04\%.$$

15. 在第 6 题中分别记两个总体的方差为 σ_1^2 和 σ_2^2 . 试检验假设(取 $\alpha=0.05$)

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \quad H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2,$$

以说明在第 6 题中我们假设 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 是合理的.

16. 在第 7 题中分别记两个总体的方差为 σ_1^2 和 σ_2^2 . 试检验假设(取 $\alpha=0.05$)

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \quad H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

以说明在第 7 题中我们假设 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 是合理的.

17. 两种小麦品种从播种到抽穗所需的天数如下:

x	101	100	99	99	98	100	98	99	99	99
y	100	98	100	99	98	99	98	98	99	100

设两样本依次来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$, μ_i, σ_i ($i=1, 2$) 均未知, 两样本相互独立.

(1) 试检验假设 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (取 $\alpha=0.05$).

(2) 若能接受 H_0 , 接着检验假设 $H_0': \mu_1 = \mu_2, H_1': \mu_1 \neq \mu_2$ (取 $\alpha=0.05$).

18. 用一种叫“混乱指标”的尺度去衡量工程师的英语文章的可理解性,对混乱指标的打分越低表示可理解性越高. 分别随机选取 13 篇刊载在工程杂志上的论文,以及 10 篇未出版的学术报告,对它们的打分行于下表:

工程杂志上的论文(数据 I)	未出版的学术报告(数据 II)
1.79 1.75 1.67 1.65	2.39 2.51 2.86
1.87 1.74 1.94	2.56 2.29 2.49
1.62 2.06 1.33	2.36 2.58
1.96 1.69 1.70	2.62 2.41

设数据 I, II 分别来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ 均未知, 两样本独立.

(1) 试检验假设 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (取 $\alpha = 0.1$).

(2) 若能接受 H_0 , 接着检验假设 $H'_0: \mu_1 = \mu_2, H'_1: \mu_1 \neq \mu_2$ (取 $\alpha = 0.1$).

19. 有两台机器生产金属部件. 分别在两台机器所生产的部件中各取一容量 $n_1 = 60, n_2 = 40$ 的样本, 测得部件重量(以 kg 计)的样本方差分别为 $s_1^2 = 15.46, s_2^2 = 9.66$. 设两样本相互独立. 两总体分别服从 $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 分布. μ_i, σ_i^2 ($i = 1, 2$) 均未知. 试在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验假设

$$H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2, \quad H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2.$$

20. 设需要对某一正态总体的均值进行假设检验

$$H_0: \mu \geq 15, \quad H_1: \mu < 15.$$

已知 $\sigma^2 = 2.5$. 取 $\alpha = 0.05$. 若要求当 H_1 中的 $\mu \leq 13$ 时犯第 II 类错误的概率不超过 $\beta = 0.05$, 求所需的样本容量.

21. 电池在货架上滞留的时间不能太长. 下面给出某商店随机选取的 8 只电池的货架滞留时间(以天计):

108 124 124 106 138 163 159 134

设数据来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 未知.

(1) 试检验假设 $H_0: \mu \leq 125, H_1: \mu > 125$, 取 $\alpha = 0.05$.

(2) 若要求在上述 H_1 中 $(\mu - 125)/\sigma \geq 1.4$ 时, 犯第 II 类错误的概率不超过 $\beta = 0.1$, 求所需的样本容量.

22. 一药厂生产一种新的止痛片, 厂方希望验证服用新药片后至开始起作用的时间间隔较原有止痛片至少缩短一半, 因此厂方提出需检验假设

$$H_0: \mu_1 \leq 2\mu_2, \quad H_1: \mu_1 > 2\mu_2.$$

此处 μ_1, μ_2 分别是服用原有止痛片和服用新止痛片后至起作用的时间间隔的总体的均值. 设两总体均为正态且方差分别为已知值 σ_1^2, σ_2^2 . 现分别在两总体中取一样本 $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ 和 $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$, 设两个样本独立. 试给出上述假设 H_0 的拒绝域, 取显著性水平为 α .

23. 检查了一本书的 100 页, 记录各页中印刷错误的个数, 其结果为

错误个数 f_i	0	1	2	3	4	5	6	≥ 7
含 f_i 个错误的页数	36	40	19	2	0	2	1	0

问能否认为一页的印刷错误的个数服从泊松分布(取 $\alpha=0.05$).

24. 在一批灯泡中抽取 300 只作寿命试验,其结果如下:

寿命 $t(\text{h})$	$0 \leq t \leq 100$	$100 < t \leq 200$	$200 < t \leq 300$	$t > 300$
灯泡数	121	78	43	58

取 $\alpha=0.05$, 试检验假设

H_0 : 灯泡寿命服从指数分布

$$f(t) = \begin{cases} 0.005e^{-0.005t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

25. 下面给出了随机选取的某大学一年级学生(200 名)一次数学考试的成绩.

(1) 画出数据的直方图.

(2) 试取 $\alpha=0.1$ 检验数据来自正态总体 $N(60, 15^2)$.

分数 x	$20 \leq x \leq 30$	$30 < x \leq 40$	$40 < x \leq 50$	$50 < x \leq 60$
学生数	5	15	30	51
分数 x	$60 < x \leq 70$	$70 < x \leq 80$	$80 < x \leq 90$	$90 < x \leq 100$
学生数	60	23	10	6

26. 袋中装有 8 只球,其中红球数未知.在其中任取 3 只,记录红球的只数 X ,然后放回,再任取 3 只,记录红球的只数,然后放回.如此重复进行了 112 次,其结果如下:

x	0	1	2	3
次数	1	31	55	25

试取 $\alpha=0.05$ 检验假设

H_0 : X 服从超几何分布

$$P\{X=k\} = \frac{\binom{5}{k} \binom{3}{3-k}}{\binom{8}{3}}, \quad k=0,1,2,3.$$

即检验假设 H_0 : 红球的只数为 5.

27. 一农场 10 年前在一鱼塘中按比例 20 : 15 : 40 : 25 投放了四种鱼:鲑鱼、鲈鱼、竹夹鱼和鲇鱼的鱼苗,现在在鱼塘里获得一样本如下:

序号	1	2	3	4
种类	鲑鱼	鲈鱼	竹夹鱼	鲇鱼
数量(条)	132	100	200	168
	$\Sigma=600$			

试取 $\alpha=0.05$, 检验各类鱼数量的比例较 10 年前是否有显著的改变.

28. 某种鸟在起飞前,双足齐跳的次数 X 服从几何分布,其分布律为

$$P\{X=x\} = p^{x-1}(1-p), \quad x=1,2,\dots.$$

今获得一样本如下:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	≥ 13
观察到 x 的次数	48	31	20	9	6	5	4	2	1	1	2	1	0

(1) 求 p 的最大似然估计值.

(2) 取 $\alpha=0.05$, 检验假设: H_0 : 数据来自总体 $P\{X=x\}=p^{x-1}(1-p), x=1, 2, \dots$.

29. 分别抽查了两球队部分队员行李的重量(kg)为:

1 队	34	39	41	28	33	
2 队	36	40	35	31	39	36

设两样本独立且 1, 2 两队队员行李重量总体的概率密度至多差一个平移. 记两总体的均值分别为 μ_1, μ_2 , 且 μ_1, μ_2 均未知. 试检验假设: $H_0: \mu_1 = \mu_2, H_1: \mu_1 < \mu_2$ (取 $\alpha=0.05$).

30. 下面给出两种型号的计算器充电以后所能使用的时间(h):

型号 A	5.5	5.6	6.3	4.6	5.3	5.0	6.2	5.8	5.1	5.2	5.9	
型号 B	3.8	4.3	4.2	4.0	4.9	4.5	5.2	4.8	4.5	3.9	3.7	4.6

设两样本独立且数据所属的两总体的概率密度至多差一个平移, 试问能否认为型号 A 的计算器平均使用时间比型号 B 来得长($\alpha=0.01$)?

31. 下面给出两个工人五天生产同一种产品每天生产的件数:

工人 A	49	52	53	47	50
工人 B	56	48	58	46	55

设两样本独立且数据所属的两总体的概率密度至多差一个平移. 问能否认为工人 A、工人 B 平均每天完成的件数没有显著差异($\alpha=0.1$)?

32. (1) 设总体服从 $N(\mu, 100)$, μ 未知, 现有样本: $n=16, \bar{x}=13.5$, 试检验假设 $H_0: \mu \leq 10, H_1: \mu > 10$, (i) 取 $\alpha=0.05$, (ii) 取 $\alpha=0.10$, (iii) H_0 可被拒绝的最小显著性水平.

(2) 考察生长在老鼠身上的肿块的大小. 以 X 表示在老鼠身上生长了 15 天的肿块的直径(以 mm 计), 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 均未知. 今随机地取 9 只老鼠(在它们身上的肿块都长了 15 天), 测得 $\bar{x}=4.3, s=1.2$, 试取 $\alpha=0.05$, 用 p 值检验法检验假设 $H_0: \mu=4.0, H_1: \mu \neq 4.0$, 求出 p 值.

(3) 用 p 值检验法检验 §2 例 4 的检验问题.

(4) 用 p 值检验法检验第 27 题中的检验问题.

第九章 方差分析及回归分析

方差分析和回归分析都是数理统计中具有广泛应用的内容. 本章对它们的最基本部分作一介绍.

§ 1 单因素试验的方差分析

(一) 单因素试验

在科学试验和生产实践中, 影响一事物的因素往往是很多的. 例如, 在化工生产中, 有原料成分、原料剂量、催化剂、反应温度、压力、溶液浓度、反应时间、机器设备及操作人员的水平等因素. 每一因素的改变都有可能影响产品的数量和质量. 有些因素影响较大, 有些较小. 为了使生产过程得以稳定, 保证优质、高产, 就有必要找出对产品质量有显著影响的那些因素. 为此, 我们需进行试验. 方差分析就是根据试验的结果进行分析, 鉴别各个有关因素对试验结果影响的有效方法.

在试验中, 我们将要考察的指标称为**试验指标**. 影响试验指标的条件称为**因素**. 因素可分为两类, 一类是人们可以控制的(可控因素); 一类是人们不能控制的. 例如, 反应温度、原料剂量、溶液浓度等是可以控制的, 而测量误差、气象条件等一般是难以控制的. 以下我们所说的因素都是指可控因素. 因素所处的状态, 称为该因素的水平(见下述各例). 如果在一项试验的过程中只有一个因素在改变称为**单因素试验**, 如果多于一个因素在改变称为**多因素试验**.

例 1 设有三台机器, 用来生产规格相同的铝合金薄板. 取样, 测量薄板的厚度精确至千分之一厘米. 得结果如表 9-1 所示.

表 9-1 铝合金板的厚度

机器 I	机器 II	机器 III
0.236	0.257	0.258
0.238	0.253	0.264
0.248	0.255	0.259
0.245	0.254	0.267
0.243	0.261	0.262

这里,试验的指标是薄板的厚度.机器为因素,不同的三台机器就是这个因素的三个不同的水平.我们假定除机器这一因素外,材料的规格、操作人员的水平等其他条件都相同.这是单因素试验.试验的目的是为了考察各台机器所生产的薄板的厚度有无显著的差异,即考察机器这一因素对厚度有无显著的影响.如果厚度有显著差异,就表明机器这一因素对厚度的影响是显著的. □

例 2 表 9-2 列出了随机选取的、用于计算器的四种类型的电路的响应时间(以毫秒计).

表 9-2 电路的响应时间

类型 I	类型 II	类型 III	类型 IV
19 15	20 40	16 17	18
22	21	15	22
20	33	18	19
18	27	26	

这里,试验的指标是电路的响应时间.电路类型为因素,这一因素有 4 个水平.这是一个单因素的试验.试验的目的是为了考察各种类型电路的响应时间有无显著差异,即考察电路类型这一因素对响应时间有无显著的影响. □

例 3 一火箭使用四种燃料,三种推进器作射程试验.每种燃料与每种推进器的组合各发射火箭两次,得射程如表 9-3(以海里计):

表 9-3 火箭的射程

推进器(B)		B_1	B_2	B_3
燃料(A)	A_1	58.2	56.2	65.3
		52.6	41.2	60.8
	A_2	49.1	54.1	51.6
		42.8	50.5	48.4
	A_3	60.1	70.9	39.2
		58.3	73.2	40.7
	A_4	75.8	58.2	48.7
		71.5	51.0	41.4

这里试验指标是射程.推进器和燃料是因素,它们分别有 3 个、4 个水平.这是一

个双因素的试验. 试验的目的在于考察在各种因素的各个水平下射程有无显著的差异, 即考察推进器和燃料这两个因素对射程是否有显著的影响. $\square$

本节限于讨论单因素试验. 我们就例 1 来讨论. 在例 1 中, 我们在因素的每一个水平下进行独立试验, 其结果是一个样本. 表中数据可看成来自三个不同总体(每个水平对应一个总体)的样本值. 将各个总体的均值依次记为 μ_1, μ_2, μ_3 . 按题意需检验假设

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3,$$

$$H_1: \mu_1, \mu_2, \mu_3 \text{ 不全相等.}$$

现在进而假设各总体均为正态变量, 且各总体的方差相等, 但参数均未知. 那么这是一个检验同方差的多个正态总体均值是否相等的问题. 下面所要讨论的方差分析法, 就是解决这类问题的一种统计方法.

现在开始讨论单因素试验的方差分析. 设因素 A 有 s 个水平 $A_1, A_2, \dots, A_s$, 在水平 $A_j (j=1, 2, \dots, s)$ 下, 进行 $n_j (n_j \geq 2)$ 次独立试验, 得到如表 9-4 的结果.

表 9-4

水平 观察结果	A_1	A_2	$\dots$	A_s
	X_{11}	X_{12}	$\dots$	X_{1s}
	X_{21}	X_{22}	$\dots$	X_{2s}
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	$X_{n_1 1}$	$X_{n_2 2}$	$\dots$	$X_{n_s s}$
样本总和	$T_{\cdot 1}$	$T_{\cdot 2}$	$\dots$	$T_{\cdot s}$
样本均值	$\bar{X}_{\cdot 1}$	$\bar{X}_{\cdot 2}$	$\dots$	$\bar{X}_{\cdot s}$
总体均值	μ_1	μ_2	$\dots$	μ_s

我们假定: 各个水平 $A_j (j=1, 2, \dots, s)$ 下的样本 $X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{n_j j}$ 来自具有相同方差 σ^2 , 均值分别为 $\mu_j (j=1, 2, \dots, s)$ 的正态总体 $N(\mu_j, \sigma^2)$, μ_j 与 σ^2 未知. 且设不同水平 A_j 下的样本之间相互独立.

由于 $X_{ij} \sim N(\mu_j, \sigma^2)$, 即有 $X_{ij} - \mu_j \sim N(0, \sigma^2)$, 故 $X_{ij} - \mu_j$ 可看成是随机误差. 记 $X_{ij} - \mu_j = \epsilon_{ij}$, 则 X_{ij} 可写成

$$\left. \begin{aligned} X_{ij} &= \mu_j + \epsilon_{ij}, \\ \epsilon_{ij} &\sim N(0, \sigma^2), \text{ 各 } \epsilon_{ij} \text{ 独立,} \\ i &= 1, 2, \dots, n_j, j = 1, 2, \dots, s, \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

其中 μ_j 与 σ^2 均为未知参数. (1.1) 式称为单因素试验方差分析的数学模型. 这

是本节的研究对象.

方差分析的任务是对于模型(1.1),

1° 检验 s 个总体 $N(\mu_1, \sigma^2), \dots, N(\mu_s, \sigma^2)$ 的均值是否相等, 即检验假设

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_s, \quad (1.2)$$

$$H_1: \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s \text{ 不全相等.}$$

2° 作出未知参数 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s, \sigma^2$ 的估计.

为了将问题(1.2)写成便于讨论的形式, 我们将 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ 的加权平均值

$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^s n_j \mu_j$ 记为 μ , 即

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^s n_j \mu_j, \quad (1.3)$$

其中 $n = \sum_{j=1}^s n_j$, μ 称为总平均. 再引入

$$\delta_j = \mu_j - \mu, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (1.4)$$

此时有 $n_1 \delta_1 + n_2 \delta_2 + \dots + n_s \delta_s = 0$, δ_j 表示水平 A_j 下的总体平均值与总平均的差异, 习惯上将 δ_j 称为水平 A_j 的效应.

利用这些记号, 模型(1.1)可改写成

$$\left. \begin{aligned} X_{ij} &= \mu + \delta_j + \epsilon_{ij}, \\ \epsilon_{ij} &\sim N(0, \sigma^2), \text{ 各 } \epsilon_{ij} \text{ 独立,} \\ i &= 1, 2, \dots, n_j, j = 1, 2, \dots, s, \\ \sum_{j=1}^s n_j \delta_j &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.1)'$$

而假设(1.2)等价于假设

$$\begin{aligned} H_0: \delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_s = 0, \\ H_1: \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s \text{ 不全为零.} \end{aligned} \quad (1.2)'$$

这是因为当且仅当 $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_s$ 时 $\mu_j = \mu$, 即 $\delta_j = 0, j = 1, 2, \dots, s$.

(二) 平方和的分解

下面我们从平方和的分解着手, 导出假设检验问题(1.2)' 的检验统计量.

引入总偏差平方和

$$S_T = \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X})^2, \quad (1.5)$$

其中

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij} \quad (1.6)$$

是数据的总平均. S_T 能反映全部试验数据之间的差异, 因此 S_T 又称为总变差.

又记水平 A_j 下的样本平均值为 $\bar{X}_{.j}$, 即

$$\bar{X}_{.j} = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}. \quad (1.7)$$

我们将 S_T 写成

$$\begin{aligned} S_T &= \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} [(X_{ij} - \bar{X}_{.j}) + (\bar{X}_{.j} - \bar{X})]^2 \\ &= \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{.j})^2 + \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2 + 2 \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{.j})(\bar{X}_{.j} - \bar{X}). \end{aligned}$$

注意到上式第三项(即交叉项)

$$\begin{aligned} &2 \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{.j})(\bar{X}_{.j} - \bar{X}) \\ &= 2 \sum_{j=1}^s (\bar{X}_{.j} - \bar{X}) \left[\sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{.j}) \right] = 2 \sum_{j=1}^s (\bar{X}_{.j} - \bar{X}) \left(\sum_{i=1}^{n_j} X_{ij} - n_j \bar{X}_{.j} \right) = 0. \end{aligned}$$

于是我们就将 S_T 分解成为

$$S_T = S_E + S_A, \quad (1.8)$$

其中
$$S_E = \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{.j})^2, \quad (1.9)$$

$$S_A = \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2 = \sum_{j=1}^s n_j (\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2 = \sum_{j=1}^s n_j \bar{X}_{.j}^2 - n \bar{X}^2. \quad (1.10)$$

上述 S_E 的各项 $(X_{ij} - \bar{X}_{.j})^2$ 表示在水平 A_j 下, 样本观察值与样本均值的差异, 这是由随机误差所引起的. S_E 叫做误差平方和. S_A 的各项 $n_j (\bar{X}_{.j} - \bar{X})^2$ 表示 A_j 水平下的样本平均值与数据总平均的差异, 这是由水平 A_j 的效应的差异以及随机误差引起的. S_A 叫做因素 A 的效应平方和. (1.8) 式就是我们所需要的平方和分解式.

(三) S_E, S_A 的统计特性

为了引出检验问题(1.2)' 的检验统计量, 我们依次来讨论 S_E, S_A 的一些统计特性. 先将 S_E 写成

$$S_E = \sum_{i=1}^{n_1} (X_{i1} - \bar{X}_{.1})^2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n_s} (X_{is} - \bar{X}_{.s})^2. \quad (1.11)$$

注意到 $\sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{.j})^2$ 是总体 $N(\mu_j, \sigma^2)$ 的样本方差的 $n_j - 1$ 倍, 于是有

$$\frac{\sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{.j})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_j - 1).$$

因各 X_{ij} 相互独立, 故(1.11) 式中各平方和相互独立. 由 χ^2 分布的可加性知

$$\frac{S_E}{\sigma^2} \sim \chi^2\left(\sum_{j=1}^s (n_j - 1)\right),$$

即

$$\frac{S_E}{\sigma^2} \sim \chi^2(n - s), \quad (1.12)$$

这里 $n = \sum_{j=1}^s n_j$. 由(1.12) 式还可知, S_E 的自由度为 $n - s$, 且有

$$E(S_E) = (n - s)\sigma^2. \quad (1.13)$$

下面讨论 S_A 的统计特性, 我们看到 S_A 是 s 个变量 $\sqrt{n_j}(\bar{X}_{\cdot j} - \bar{X})$ ($j = 1, 2, \dots, s$) 的平方和, 它们之间仅有一个线性约束条件

$$\sum_{j=1}^s \sqrt{n_j} [\sqrt{n_j}(\bar{X}_{\cdot j} - \bar{X})] = \sum_{j=1}^s n_j(\bar{X}_{\cdot j} - \bar{X}) = \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij} - n\bar{X} = 0,$$

故知 S_A 的自由度是 $s - 1$.

再由(1.3), (1.6) 及 X_{ij} 的独立性, 知

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right). \quad (1.14)$$

即得

$$\begin{aligned} E(S_A) &= E\left[\sum_{j=1}^s n_j \bar{X}_{\cdot j}^2 - n\bar{X}^2\right] = \sum_{j=1}^s n_j E(\bar{X}_{\cdot j}^2) - nE(\bar{X}^2) \\ &= \sum_{j=1}^s n_j \left[\frac{\sigma^2}{n_j} + (\mu + \delta_j)^2\right] - n\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) \\ &= (s-1)\sigma^2 + 2\mu \sum_{j=1}^s n_j \delta_j + n\mu^2 + \sum_{j=1}^s n_j \delta_j^2 - n\mu^2. \end{aligned}$$

由(1.1)' 式 $\sum_{j=1}^s n_j \delta_j = 0$, 故有

$$E(S_A) = (s-1)\sigma^2 + \sum_{j=1}^s n_j \delta_j^2. \quad (1.15)$$

进一步还可以证明 S_A 与 S_E 独立, 且当 H_0 为真时

$$\frac{S_A}{\sigma^2} \sim \chi^2(s-1). \quad (1.16)$$

(证略)

(四) 假设检验问题的拒绝域

现在我们可以来确定假设检验问题(1.2)' 的拒绝域了.

由(1.15) 式知, 当 H_0 为真时

$$E\left(\frac{S_A}{s-1}\right) = \sigma^2, \quad (1.17)$$

即 $\frac{S_A}{s-1}$ 是 σ^2 的无偏估计. 而当 H_1 为真时, $\sum_{j=1}^s n_j \delta_j^2 > 0$, 此时

$$E\left(\frac{S_A}{s-1}\right) = \sigma^2 + \frac{1}{s-1} \sum_{j=1}^s n_j \delta_j^2 > \sigma^2 \quad (1.18)$$

又由(1.13)知,

$$E\left(\frac{S_E}{n-s}\right) = \sigma^2, \quad (1.19)$$

即不管 H_0 是否为真, $\frac{S_E}{n-s}$ 都是 σ^2 的无偏估计.

综上所述, 分式 $F = \frac{S_A/(s-1)}{S_E/(n-s)}$ 的分子与分母独立, 分母 $\frac{S_E}{n-s}$ 不论 H_0 是否为真, 其数学期望总是 σ^2 . 当 H_0 为真时, 分子的数学期望为 σ^2 , 当 H_0 不真时, 由(1.18)式分子的取值有偏大的趋势. 故知检验问题(1.2)' 的拒绝域具有形式

$$F = \frac{S_A/(s-1)}{S_E/(n-s)} \geq k,$$

其中 k 由预先给定的显著性水平 α 确定. 由(1.12), (1.16) 式及 S_E 与 S_A 的独立性知, 当 H_0 为真时,

$$\frac{S_A/(s-1)}{S_E/(n-s)} = \frac{S_A/\sigma^2}{s-1} \bigg/ \frac{S_E/\sigma^2}{n-s} \sim F(s-1, n-s).$$

由此得检验问题(1.2)' 的拒绝域为

$$F = \frac{S_A/(s-1)}{S_E/(n-s)} \geq F_\alpha(s-1, n-s). \quad (1.20)$$

上述分析的结果可排成表 9-5 的形式, 称为方差分析表.

表 9-5 单因素试验方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方	F 比
因素 A	S_A	$s-1$	$\bar{S}_A = \frac{S_A}{s-1}$	$F = \frac{\bar{S}_A}{\bar{S}_E}$
误差	S_E	$n-s$	$\bar{S}_E = \frac{S_E}{n-s}$	
总和	S_T	$n-1$		

表中 $\bar{S}_A = S_A/(s-1)$, $\bar{S}_E = S_E/(n-s)$ 分别称为 S_A, S_E 的均方. 另外, 因在 S_T 中 n 个变量 $X_{ij} - \bar{X}$ 之间仅满足一个约束条件(1.6), 故 S_T 的自由度为 $n-1$.

在实际中, 我们可以按以下较简便的公式来计算 S_T, S_A 和 S_E .

$$\text{记 } T_{.j} = \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}, j = 1, 2, \dots, s, \quad T_{..} = \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij},$$

即有

$$\left. \begin{aligned} S_T &= \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}^2 - n\bar{X}^2 = \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{n}, \\ S_A &= \sum_{j=1}^s n_j \bar{X}_{.j}^2 - n\bar{X}^2 = \sum_{j=1}^s \frac{T_{.j}^2}{n_j} - \frac{T_{..}^2}{n}, \\ S_E &= S_T - S_A. \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

例 4 设在例 1 中符合模型(1.1) 条件, 检验假设($\alpha = 0.05$):

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3,$$

$$H_1: \mu_1, \mu_2, \mu_3 \text{ 不全相等.}$$

解 现在 $s = 3, n_1 = n_2 = n_3 = 5, n = 15$,

$$\begin{aligned} S_T &= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^5 X_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{15} \\ &= 0.963\ 912 - \frac{3.8^2}{15} = 0.001\ 245\ 33, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_A &= \sum_{j=1}^3 \frac{T_{.j}^2}{n_j} - \frac{T_{..}^2}{n} \\ &= \frac{1}{5}(1.21^2 + 1.28^2 + 1.31^2) - 3.8^2/15 \\ &= 0.001\ 053\ 33, \end{aligned}$$

$$S_E = S_T - S_A = 0.000\ 192.$$

S_T, S_A, S_E 的自由度依次为 $n-1 = 14, s-1 = 2, n-s = 12$, 得方差分析表如下:

表 9-6 例 4 的方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方	F 比
因素	0.001 053 33	2	0.000 526 67	32.92
误差	0.000 192	12	0.000 016	
总和	0.001 245 33	14		

因 $F_{0.05}(2, 12) = 3.89 < 32.92$, 故在显著性水平 0.05 下拒绝 H_0 , 认为各台机器生产的薄板厚度有显著的差异. $\square$

(五) 未知参数的估计

上面已讲到过, 不管 H_0 是否为真,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S_E}{n-s}$$

是 σ^2 的无偏估计.

又由(1.14), (1.7) 式知

$$E(\bar{X}) = \mu, E(\bar{X}_{.j}) = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} E(X_{ij}) = \mu_j, j = 1, 2, \dots, s.$$

故 $\hat{\mu} = \bar{X}$, $\hat{\mu}_j = \bar{X}_{.j}$ 分别是 μ, μ_j 的无偏估计.

又若拒绝 H_0 , 这意味着效应 $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s$ 不全为零. 由于

$$\delta_j = \mu_j - \mu, j = 1, 2, \dots, s,$$

知 $\hat{\delta}_j = \bar{X}_{.j} - \bar{X}$ 是 δ_j 的无偏估计. 此时还有关系式

$$\sum_{j=1}^s n_j \hat{\delta}_j = \sum_{j=1}^s n_j \bar{X}_{.j} - n\bar{X} = 0.$$

当拒绝 H_0 时, 常需要作出两总体 $N(\mu_j, \sigma^2)$ 和 $N(\mu_k, \sigma^2), j \neq k$ 的均值差 $\mu_j - \mu_k = \delta_j - \delta_k$ 的区间估计. 其做法如下.

由于

$$E(\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{.k}) = \mu_j - \mu_k,$$

$$D(\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{.k}) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_k} \right),$$

由第六章附录知 $\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{.k}$ 与 $\hat{\sigma}^2 = S_E/(n-s)$ 独立. 于是

$$\begin{aligned} & \frac{(\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{.k}) - (\mu_j - \mu_k)}{\sqrt{S_E \left(\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_k} \right)}} \\ &= \frac{(\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{.k}) - (\mu_j - \mu_k)}{\sigma \sqrt{1/n_j + 1/n_k}} \bigg/ \sqrt{\frac{S_E}{\sigma^2} (n-s)} \sim t(n-s). \end{aligned}$$

据此得均值差 $\mu_j - \mu_k = \delta_j - \delta_k$ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X}_{.j} - \bar{X}_{.k} \pm t_{\alpha/2}(n-s) \sqrt{S_E \left(\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_k} \right)} \right). \quad (1.22)$$

例 5 求例 4 中的未知参数 $\sigma^2, \mu_j, \delta_j (j = 1, 2, 3)$ 的点估计及均值差的置信水平为 0.95 的置信区间.

解 $\hat{\sigma}^2 = S_E/(n-s) = 0.000\ 016,$

$$\hat{\mu}_1 = \bar{x}_{.1} = 0.242, \hat{\mu}_2 = \bar{x}_{.2} = 0.256, \hat{\mu}_3 = \bar{x}_{.3} = 0.262, \hat{\mu} = \bar{x} = 0.253,$$

$$\hat{\delta}_1 = \bar{x}_{.1} - \bar{x} = -0.011, \hat{\delta}_2 = \bar{x}_{.2} - \bar{x} = 0.003, \hat{\delta}_3 = \bar{x}_{.3} - \bar{x} = 0.009.$$

均值差的区间估计如下:

由 $t_{0.025}(n-s) = t_{0.025}(12) = 2.178\ 8$ 得

$$t_{0.025}(12) \sqrt{S_E \left(\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_k} \right)} = 2.178\ 8 \sqrt{16 \times 10^{-6} \times \frac{2}{5}} = 0.006,$$

故 $\mu_1 - \mu_2, \mu_1 - \mu_3$ 及 $\mu_2 - \mu_3$ 的置信水平为 0.95 的置信区间分别为

$$(0.242 - 0.256 \pm 0.006) = (-0.020, -0.008),$$

$$(0.242 - 0.262 \pm 0.006) = (-0.026, -0.014),$$

$$(0.256 - 0.262 \pm 0.006) = (-0.012, 0). \quad \square$$

例 6 设在例 2 中的四种类型电路的响应时间的总体均为正态, 且各总体的方差相同, 但参数均未知. 又设各样本相互独立. 试取显著性水平 $\alpha = 0.05$ 检验各类型电路的响应时间是否有显著差异.

解 分别以 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ 记类型 I, II, III, IV 四种电路响应时间总体的平均值. 我们需检验 ($\alpha = 0.05$)

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4,$$

$$H_1: \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 \text{ 不全相等.}$$

现在 $n = 18, s = 4, n_1 = n_2 = n_3 = 5, n_4 = 3,$

$$S_T = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{18} = 8992 - 386^2/18 = 714.44,$$

$$\begin{aligned} S_A &= \sum_{j=1}^4 \frac{T_{.j}^2}{n_j} - \frac{T_{..}^2}{18} \\ &= \left[\frac{1}{5}(94^2 + 141^2 + 92^2) + \frac{59^2}{3} \right] - \frac{386^2}{18} = 318.98, \end{aligned}$$

$$S_E = S_T - S_A = 395.46.$$

S_T, S_A, S_E 的自由度依次为 17, 3, 14, 结果载于表 9-7.

表 9-7 例 6 的方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方	F 比
因素	318.98	3	106.33	3.76
误差	395.46	14	28.25	
总和	714.44	17		

因 $F_{0.05}(3, 14) = 3.34 < 3.76$, 故在显著性水平 0.05 下拒绝 H_0 , 认为各类型电路的响应时间有显著差异. $\square$

§ 2 双因素试验的方差分析

本节介绍双因素试验的方差分析.

(一) 双因素等重复试验的方差分析

设有两个因素 A, B 作用于试验的指标. 因素 A 有 r 个水平 $A_1, A_2, \dots, A_r$, 因

素 B 有 s 个水平 $B_1, B_2, \dots, B_s$. 现对因素 A, B 的水平的每对组合 $(A_i, B_j), i = 1, 2, \dots, r, j = 1, 2, \dots, s$ 都作 t ($t \geq 2$) 次试验 (称为等重复试验), 得到如表 9-8 的结果.

表 9-8

因素A \ 因素B	B_1	B_2	...	B_s
A_1	$X_{111}, X_{112}, \dots, X_{11t}$	$X_{121}, X_{122}, \dots, X_{12t}$	...	$X_{1s1}, X_{1s2}, \dots, X_{1st}$
A_2	$X_{211}, X_{212}, \dots, X_{21t}$	$X_{221}, X_{222}, \dots, X_{22t}$	...	$X_{2s1}, X_{2s2}, \dots, X_{2st}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
A_r	$X_{r11}, X_{r12}, \dots, X_{r1t}$	$X_{r21}, X_{r22}, \dots, X_{r2t}$	...	$X_{rs1}, X_{rs2}, \dots, X_{rst}$

并设

$$X_{ijk} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2), i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, s; k = 1, 2, \dots, t,$$

各 X_{ijk} 独立. 这里, μ_{ij}, σ^2 均为未知参数. 或写成

$$\left. \begin{aligned} X_{ijk} &= \mu_{ij} + \epsilon_{ijk}, \\ \epsilon_{ijk} &\sim N(0, \sigma^2), \text{各 } \epsilon_{ijk} \text{ 独立}, \\ i &= 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, s; \\ k &= 1, 2, \dots, t. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

引入记号

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{rs} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \mu_{ij}, \\ \mu_{i\cdot} &= \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s \mu_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\ \mu_{\cdot j} &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \mu_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, s, \\ \alpha_i &= \mu_{i\cdot} - \mu, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\ \beta_j &= \mu_{\cdot j} - \mu, \quad j = 1, 2, \dots, s. \end{aligned}$$

易见

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i = 0, \quad \sum_{j=1}^s \beta_j = 0.$$

称 μ 为总平均, 称 α_i 为水平 A_i 的效应, 称 β_j 为水平 B_j 的效应. 这样可将 μ_{ij} 表示成

$$\begin{aligned}\mu_{ij} &= \mu + \alpha_i + \beta_j + (\mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu), \\ i &= 1, 2, \dots, r; \quad j = 1, 2, \dots, s.\end{aligned}\quad (2.2)$$

记 $\gamma_{ij} = \mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu, \quad i = 1, 2, \dots, r; \quad j = 1, 2, \dots, s,$ (2.3)

此时

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}. \quad (2.4)$$

γ_{ij} 称为水平 A_i 和水平 B_j 的交互效应, 这是由 A_i, B_j 搭配起来联合起作用而引起的. 易见

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^r \gamma_{ij} &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \\ \sum_{j=1}^s \gamma_{ij} &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, r.\end{aligned}$$

这样, (2.1) 可写成

$$\left. \begin{aligned}X_{ijk} &= \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \epsilon_{ijk}, \\ \epsilon_{ijk} &\sim N(0, \sigma^2), \text{各 } \epsilon_{ijk} \text{ 独立}, \\ i &= 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, s; k = 1, 2, \dots, t, \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i &= 0, \sum_{j=1}^s \beta_j = 0, \sum_{i=1}^r \gamma_{ij} = 0, \sum_{j=1}^s \gamma_{ij} = 0,\end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

其中 $\mu, \alpha_i, \beta_j, \gamma_{ij}$ 及 σ^2 都是未知参数.

(2.5) 式就是我们所要研究的双因素试验方差分析的数学模型. 对于这一模型我们要检验以下三个假设:

$$\begin{cases} H_{01}: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0, \\ H_{11}: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \text{ 不全为零}, \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} H_{02}: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_s = 0, \\ H_{12}: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s \text{ 不全为零}, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} H_{03}: \gamma_{11} = \gamma_{12} = \dots = \gamma_{rs} = 0, \\ H_{13}: \gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{rs} \text{ 不全为零}. \end{cases} \quad (2.8)$$

与单因素情况类似, 对这些问题的检验方法也是建立在平方和的分解上的. 先引入以下的记号:

$$\bar{X} = \frac{1}{rst} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t X_{ijk},$$

$$\bar{X}_{ij.} = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t X_{ijk}, \quad i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, s,$$

$$\bar{X}_{i..} = \frac{1}{st} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t X_{ijk}, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

$$\bar{X}_{.j.} = \frac{1}{rt} \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^t X_{ijk}, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

再引入总偏差平方和(称为总变差)

$$S_T = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t (X_{ijk} - \bar{X})^2.$$

我们可将 S_T 写成

$$\begin{aligned} S_T &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t (X_{ijk} - \bar{X})^2 \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t [(X_{ijk} - \bar{X}_{ij.}) + (\bar{X}_{i..} - \bar{X}) + (\bar{X}_{.j.} - \bar{X}) \\ &\quad + (\bar{X}_{ij.} - \bar{X}_{i..} - \bar{X}_{.j.} + \bar{X})]^2 \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t (X_{ijk} - \bar{X}_{ij.})^2 + st \sum_{i=1}^r (\bar{X}_{i..} - \bar{X})^2 \\ &\quad + rt \sum_{j=1}^s (\bar{X}_{.j.} - \bar{X})^2 + t \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s (\bar{X}_{ij.} - \bar{X}_{i..} - \bar{X}_{.j.} + \bar{X})^2, \end{aligned}$$

即得平方和的分解式

$$S_T = S_E + S_A + S_B + S_{A \times B}, \quad (2.9)$$

其中

$$S_E = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t (X_{ijk} - \bar{X}_{ij.})^2, \quad (2.10)$$

$$S_A = st \sum_{i=1}^r (\bar{X}_{i..} - \bar{X})^2, \quad (2.11)$$

$$S_B = rt \sum_{j=1}^s (\bar{X}_{.j.} - \bar{X})^2, \quad (2.12)$$

$$S_{A \times B} = t \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s (\bar{X}_{ij.} - \bar{X}_{i..} - \bar{X}_{.j.} + \bar{X})^2. \quad (2.13)$$

S_E 称为误差平方和, S_A, S_B 分别称为因素 A、因素 B 的效应平方和, $S_{A \times B}$ 称为 A、B 交互效应平方和.

可以证明 $S_T, S_E, S_A, S_B, S_{A \times B}$ 的自由度依次为 $rst - 1, rs(t-1), r-1, s-1, (r-1)(s-1)$, 且有

$$E\left(\frac{S_E}{rs(t-1)}\right) = \sigma^2, \quad (2.14)$$

$$E\left(\frac{S_A}{r-1}\right) = \sigma^2 + \frac{st \sum_{i=1}^r \alpha_i^2}{r-1}, \quad (2.15)$$

$$E\left(\frac{S_B}{s-1}\right) = \sigma^2 + \frac{rt \sum_{j=1}^s \beta_j^2}{s-1}, \quad (2.16)$$

$$E\left(\frac{S_{A \times B}}{(r-1)(s-1)}\right) = \sigma^2 + \frac{t \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \gamma_{ij}^2}{(r-1)(s-1)}. \quad (2.17)$$

当 $H_{01}: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$ 为真时, 可以证明

$$F_A = \frac{S_A/(r-1)}{S_E/(rs(t-1))} \sim F(r-1, rs(t-1)). \quad (2.18)$$

取显著性水平为 α , 得假设 H_{01} 的拒绝域为

$$F_A = \frac{S_A/(r-1)}{S_E/(rs(t-1))} \geq F_\alpha(r-1, rs(t-1)). \quad (2.19)$$

类似地, 在显著性水平 α 下, 假设 H_{02} 的拒绝域为

$$F_B = \frac{S_B/(s-1)}{S_E/(rs(t-1))} \geq F_\alpha(s-1, rs(t-1)). \quad (2.20)$$

在显著性水平 α 下, 假设 H_{03} 的拒绝域为

$$\begin{aligned} F_{A \times B} &= \frac{S_{A \times B}/((r-1)(s-1))}{S_E/(rs(t-1))} \\ &\geq F_\alpha((r-1)(s-1), rs(t-1)). \end{aligned} \quad (2.21)$$

上述结果可汇总成下列的方差分析表:

表 9-9 双因素试验的方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方	F 比
因素 A	S_A	$r-1$	$\bar{S}_A = \frac{S_A}{r-1}$	$F_A = \frac{\bar{S}_A}{\bar{S}_E}$
因素 B	S_B	$s-1$	$\bar{S}_B = \frac{S_B}{s-1}$	$F_B = \frac{\bar{S}_B}{\bar{S}_E}$
交互作用	$S_{A \times B}$	$(r-1)(s-1)$	$\bar{S}_{A \times B} = \frac{S_{A \times B}}{(r-1)(s-1)}$	$F_{A \times B} = \frac{\bar{S}_{A \times B}}{\bar{S}_E}$
误差	S_E	$rs(t-1)$	$\bar{S}_E = \frac{S_E}{rs(t-1)}$	
总和	S_T	$rst-1$		

记

$$\begin{aligned} T_{...} &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t X_{ijk}, \\ T_{ij.} &= \sum_{k=1}^t X_{ijk}, \quad i=1, 2, \dots, r; j=1, 2, \dots, s, \\ T_{i..} &= \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t X_{ijk}, \quad i=1, 2, \dots, r, \\ T_{.j.} &= \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^t X_{ijk}, \quad j=1, 2, \dots, s. \end{aligned}$$

我们可以按照下述(2.22)式来计算上表中的各个平方和.

$$\left. \begin{aligned}
 S_T &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t X_{ijk}^2 - \frac{T_{...}^2}{rst}, \\
 S_A &= \frac{1}{st} \sum_{i=1}^r T_{i..}^2 - \frac{T_{...}^2}{rst}, \\
 S_B &= \frac{1}{rt} \sum_{j=1}^s T_{.j.}^2 - \frac{T_{...}^2}{rst}, \\
 S_{A \times B} &= \left(\frac{1}{t} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s T_{ij.}^2 - \frac{T_{...}^2}{rst} \right) - S_A - S_B, \\
 S_E &= S_T - S_A - S_B - S_{A \times B}.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

例 1 在上一节例 3 中, 假设符合双因素方差分析模型所需的条件. 试在显著性水平 0.05 下, 检验不同燃料(因素 A)、不同推进器(因素 B) 下的射程是否有显著差异? 交互作用是否显著?

解 需检验假设 H_{01}, H_{02}, H_{03} (见 (2.6) ~ (2.8)). $T_{...}, T_{i..}, T_{.j.}, T_{ij.}$ 的计算如表 9-10.

表 9-10

$\begin{matrix} B \\ A \end{matrix}$	B_1	B_2	B_3	$T_{i..}$
A_1	58.2 (110.8) 52.6	56.2 (97.4) 41.2	65.3 (126.1) 60.8	334.3
A_2	49.1 (91.9) 42.8	54.1 (104.6) 50.5	51.6 (100) 48.4	296.5
A_3	60.1 (118.4) 58.3	70.9 (144.1) 73.2	39.2 (79.9) 40.7	342.4
A_4	75.8 (147.3) 71.5	58.2 (109.2) 51.0	48.7 (90.1) 41.4	346.6
$T_{.j.}$	468.4	455.3	396.1	1 319.8

表中括弧内的数是 $T_{ij.}$. 现在 $r=4, s=3, t=2$, 故有

$$S_T = (58.2^2 + 52.6^2 + \cdots + 41.4^2) - \frac{1\,319.8^2}{24} = 2\,638.298\,33,$$

$$S_A = \frac{1}{6} (334.3^2 + 296.5^2 + 342.4^2 + 346.6^2) - \frac{1\,319.8^2}{24} = 261.675\,00,$$

$$S_B = \frac{1}{8} (468.4^2 + 455.3^2 + 396.1^2) - \frac{1\,319.8^2}{24} = 370.980\,83,$$

$$S_{A \times B} = \frac{1}{2} (110.8^2 + 91.9^2 + \cdots + 90.1^2) - \frac{1\,319.8^2}{24} - S_A - S_B = 1\,768.692\,50,$$

$$S_E = S_T - S_A - S_B - S_{A \times B} = 236.950\ 00.$$

得方差分析表如下:

表 9-11 例 1 的方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方	F 比
因素 A (燃料)	261.675 00	3	87.225 0	$F_A = 4.42$
因素 B (推进器)	370.980 83	2	185.490 4	$F_B = 9.39$
交互作用 $A \times B$	1 768.692 50	6	294.782 1	$F_{A \times B} = 14.9$
误差	236.950 00	12	19.745 8	
总和	2 638.298 33	23		

由于 $F_{0.05}(3,12) = 3.49 < F_A$, $F_{0.05}(2,12) = 3.89 < F_B$, 所以在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下, 我们拒绝假设 H_{01}, H_{02} , 即认为不同燃料或不同推进器下的射程有显著差异. 也就是说, 燃料和推进器这两个因素对射程的影响都是显著的. 又, $F_{0.05}(6,12) = 3.00 < F_{A \times B}$, 故拒绝 H_{03} . 值得注意的是, $F_{0.001}(6,12) = 8.38$ 也远小于 $F_{A \times B} = 14.9$. 故交互作用效应是高度显著的. 从表 9-10 可以看出, A_4 与 B_1 或 A_3 与 B_2 的搭配都使火箭射程较之其他水平的搭配要远得多. 在实际中我们就选最优的搭配方式来实施. $\square$

例 2 在某种金属材料的生产过程中, 对热处理温度(因素 B)与时间(因素 A)各取两个水平, 产品强度的测定结果(相对值)如表 9-12 所示. 在同一条件下每个试验重复两次. 设各水平搭配下强度的总体服从正态分布且方差相同. 各样本独立. 问热处理温度、时间以及这两者的交互作用对产品强度是否有显著的影响(取 $\alpha = 0.05$)?

表 9-12

$A \backslash B$	B_1	B_2	$T_{i..}$
A_1	38.0 (76.6) 38.6	47.0 (91.8) 44.8	168.4
A_2	45.0 (88.8) 43.8	42.4 (83.2) 40.8	172
$T_{.j.}$	165.4	175	340.4

解 按题意需检验假设(2.6)~(2.8), 作计算如下:

$$S_T = (38.0^2 + 38.6^2 + \cdots + 40.8^2) - \frac{340.4^2}{8} = 71.82,$$

$$S_A = \frac{1}{4}(168.4^2 + 172^2) - \frac{340.4^2}{8} = 1.62,$$

$$S_B = \frac{1}{4}(165.4^2 + 175^2) - \frac{340.4^2}{8} = 11.52,$$

$$S_{A \times B} = 14\,551.24 - 14\,484.02 - 1.62 - 11.52 = 54.08,$$

$$\begin{aligned} S_E &= S_T - S_A - S_B - S_{A \times B} \\ &= 71.82 - 1.62 - 11.52 - 54.08 = 4.6. \end{aligned}$$

得方差分析表如下:

表 9-13 例 2 的方差分析表^①

方差来源	平方和	自由度	均方	F 比
因素 A	1.62	1	1.62	$F_A = 1.4$
因素 B	11.52	1	11.52	$F_B = 10.0$
$A \times B$	54.08	1	54.08	$F_{A \times B} = 47.0$
误差	4.6	4	1.15	
总和	71.82	7		

由于 $F_{0.05}(1, 4) = 7.71$, 所以认为时间对强度的影响不显著, 而温度的影响显著, 且交互作用的影响显著. □

(二) 双因素无重复试验的方差分析

在以上的讨论中, 我们考虑了双因素试验中两个因素的交互作用. 为要检验交互作用的效应是否显著, 对于两个因素的每一组合 (A_i, B_j) 至少要做 2 次试验. 这是因为在模型 (2.5) 中, 若 $k = 1$, $\gamma_{ij} + \epsilon_{ijk}$ 总以结合在一起的形式出现, 这样就不能将交互作用与误差分离开来. 如果在处理实际问题时, 我们已经知道不存在交互作用, 或已知交互作用对试验的指标影响很小, 则可以不考虑交互作用. 此时, 即使 $k = 1$, 也能对因素 A、因素 B 的效应进行分析. 现设对于两个因素的每一组合 (A_i, B_j) 只做一次试验, 所得结果如下:

^① 在实际应用中, 总是先计算 $F_{A \times B}$, 对交互作用进行检验. 如果交互作用不显著, 则将 $A \times B$ 一栏的平方和与自由度分别加到误差这一栏中去, 重新计算 F_A, F_B , 用新的 F_A, F_B 对因素 A, 因素 B 进行检验.

表 9-14

因素A \ 因素B	因素B			
	B_1	B_2	...	B_s
A_1	X_{11}	X_{12}	...	X_{1s}
A_2	X_{21}	X_{22}	...	X_{2s}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
A_r	X_{r1}	X_{r2}	...	X_{rs}

并设

$$X_{ij} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2),$$

各 X_{ij} 独立, $i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, s,$

其中 μ_{ij}, σ^2 均为未知参数. 或写成

$$\left. \begin{aligned} X_{ij} &= \mu_{ij} + \epsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, r; \\ &\quad j = 1, 2, \dots, s, \\ \epsilon_{ij} &\sim N(0, \sigma^2), \\ \text{各 } \epsilon_{ij} &\text{ 独立.} \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

沿用(一)中的记号, 注意到现在假设不存在交互作用, 此时 $\gamma_{ij} = 0, i = 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, s.$ 故由(2.4)式知 $\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j.$ 于是(2.23)可写成

$$\left. \begin{aligned} X_{ij} &= \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ij}, \\ \epsilon_{ij} &\sim N(0, \sigma^2), \text{ 各 } \epsilon_{ij} \text{ 独立,} \\ i &= 1, 2, \dots, r; j = 1, 2, \dots, s, \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i &= 0, \sum_{j=1}^s \beta_j = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

这就是现在要研究的方差分析的模型. 对这个模型我们所要检验的假设有以下两个:

$$\begin{cases} H_{01}: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0, \\ H_{11}: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \text{ 不全为零.} \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\begin{cases} H_{02}: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_s = 0, \\ H_{12}: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s \text{ 不全为零.} \end{cases} \quad (2.26)$$

与在(一)中同样的讨论可得方差分析表如下:

表 9-15

方差来源	平方和	自由度	均方	F 比
因素 A	S_A	$r-1$	$\bar{S}_A = \frac{S_A}{r-1}$	$F_A = \bar{S}_A / \bar{S}_E$
因素 B	S_B	$s-1$	$\bar{S}_B = \frac{S_B}{s-1}$	$F_B = \bar{S}_B / \bar{S}_E$
误差	S_E	$(r-1)(s-1)$	$\bar{S}_E = \frac{S_E}{(r-1)(s-1)}$	
总和	S_T	$rs-1$		

取显著性水平为 α , 得假设 $H_{01}: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$ 的拒绝域为

$$F_A = \frac{\bar{S}_A}{\bar{S}_E} \geq F_{\alpha}((r-1), (r-1)(s-1)).$$

假设 $H_{02}: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_s = 0$ 的拒绝域为

$$F_B = \frac{\bar{S}_B}{\bar{S}_E} \geq F_{\alpha}((s-1), (r-1)(s-1)).$$

表 9-15 中的平方和可按下述式子来计算:

$$\left. \begin{aligned} S_T &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s X_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{rs}, \\ S_A &= \frac{1}{s} \sum_{i=1}^r T_{i.}^2 - \frac{T_{..}^2}{rs}, \\ S_B &= \frac{1}{r} \sum_{j=1}^s T_{.j}^2 - \frac{T_{..}^2}{rs}, \\ S_E &= S_T - S_A - S_B, \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

其中 $T_{..} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s X_{ij}$, $T_{i.} = \sum_{j=1}^s X_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, r$,

$$T_{.j} = \sum_{i=1}^r X_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

例 3 下面给出了在某 5 个不同地点、不同时间空气中的颗粒状物(以 mg/m^3 计)的含量的数据:

		因素 B(地点)					
		1	2	3	4	5	$T_{i\cdot}$
因素 A (时间)	1975 年 10 月	76	67	81	56	51	331
	1976 年 1 月	82	69	96	59	70	376
	1976 年 5 月	68	59	67	54	42	290
	1996 年 8 月	63	56	64	58	37	278
$T_{\cdot j}$		289	251	308	227	200	1 275

设本题符合模型(2.24)中的条件. 试在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验: 在不同时间下颗粒状物含量的均值有无显著差异, 在不同地点下颗粒状物含量的均值有无显著差异.

解 按题意需检验假设(2.25)、(2.26). $T_{i\cdot}$, $T_{\cdot j}$ 的值已算出载于上表. 现在 $r = 4$, $s = 5$. 由(2.27)得到:

$$S_T = 76^2 + 67^2 + \cdots + 37^2 - \frac{1 \ 275^2}{20} = 3 \ 571.75,$$

$$S_A = \frac{1}{5}(331^2 + 376^2 + 290^2 + 278^2) - \frac{1 \ 275^2}{20} = 1 \ 182.95,$$

$$S_B = \frac{1}{4}(289^2 + 251^2 + \cdots + 200^2) - \frac{1 \ 275^2}{20} = 1 \ 947.50,$$

$$S_E = 3 \ 571.75 - (1 \ 182.95 + 1 \ 947.50) = 441.30.$$

得方差分析表如下:

表 9-16 例 3 的方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方	F 比
因素 A	$S_A = 1 \ 182.95$	3	394.32	$F_A = 10.72$
因素 B	$S_B = 1 \ 947.50$	4	486.88	$F_B = 13.24$
误差	$S_E = 441.30$	12	36.78	
总和	$S_T = 3 \ 571.75$	19		

由于 $F_{0.05}(3,12) = 3.49 < 10.72$, $F_{0.05}(4,12) = 3.26 < 13.24$, 故拒绝 H_{01} 及 H_{02} , 即认为不同时间下颗粒状物含量的均值有显著差异, 也认为不同地点下颗粒状物含量的均值有显著差异. 即认为在本题中, 时间和地点对颗粒状物的含量的影响均为显著. $\square$

§ 3 一元线性回归

在客观世界中普遍存在着变量之间的关系. 变量之间的关系一般来说可分为确定性的与非确定性的两种. 确定性关系是指变量之间的关系可以用函数关系来表达的. 另一种非确定性的关系即所谓相关关系. 例如人的身高与体重之间存在着关系, 一般来说, 人高一些, 体重要重一些, 但同样高度的人, 体重往往不相同. 人的血压与年龄之间也存在着关系, 但同年龄的人的血压往往不相同. 气象中的温度与湿度之间的关系也是这样. 这是因为我们涉及的变量(如体重、血压、湿度)是随机变量, 上面所说的变量关系是非确定性的. 回归分析是研究相关关系的一种数学工具. 它能帮助我们从一个变量取得的值去估计另一变量所取的值.

(一) 一元线性回归

设随机变量 Y 与 x 之间存在着某种相关关系. 这里, x 是可以控制或可以精确观察的变量, 如年龄、试验时的温度、施加的压力、电压与时间等. 换句话说我们可以随意指定 n 个值 $x_1, x_2, \dots, x_n$. 因此我们干脆不把 x 看成是随机变量, 而将它当作普通的变量. 本章中我们只讨论这种情况.

设随机变量 Y (因变量) 与普通变量 x (自变量) 之间存在着相关关系, 由于 Y 是随机变量, 对于 x 的各个确定值, Y 有它的分布(如图 9-1, 图中 C_1, C_2 分别是 x_1, x_2 处 Y 的概率密度曲线). 用 $F(y|x)$ 表示当 x 取确定的 x 值时, 所对应的 Y 的分布函数, 如果我们掌握了 $F(y|x)$ 随着 x 的取值而变化的规律, 那么就能完全掌握 Y

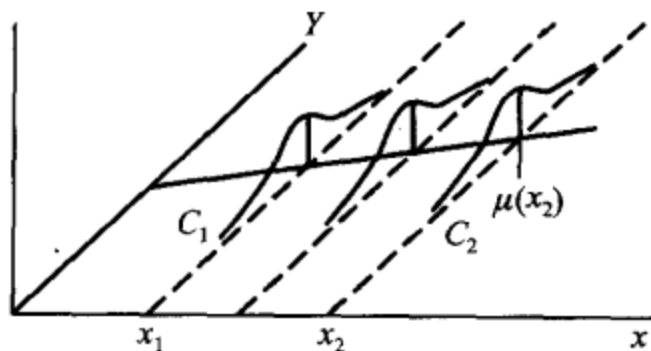


图 9-1

与 x 之间的关系了. 然而这样做往往比较复杂. 作为一种近似, 我们转而去考察 Y 的数学期望, 若 Y 的数学期望 $E(Y)$ 存在, 则其值随 x 的取值而定, 它是 x 的函数. 将这一函数记为 $\mu_{Y|x}$ 或 $\mu(x)$, 称为 Y 关于 x 的回归函数(如图 9-1). 这样, 我们就将讨论 Y 与 x 的相关关系的问题转换为讨论 $E(Y) = \mu(x)$ 与 x 的函数关系了.

我们知道, 若 η 是一个随机变量, 则 $E[(\eta - c)^2]$ 作为 c 的函数, 在 $c = E(\eta)$ 时 $E[(\eta - c)^2]$ 达到最小(参见第四章习题第 17 题). 这表明在一切 x 的函数中以回归函数 $\mu(x)$ 作为 Y 的近似, 其均方误差 $E[(Y - \mu(x))^2]$ 为最小. 因此, 作为一种近似, 为了研究 Y 与 x 的关系转而去研究 $\mu(x)$ 与 x 的关系是合适的.

在实际问题中,回归函数 $\mu(x)$ 一般是未知的,回归分析的任务是在于根据试验数据去估计回归函数,讨论有关的点估计、区间估计、假设检验等问题.特别重要的是对随机变量 Y 的观察值作出点预测和区间预测.

我们对于 x 取定一组不完全相同的值 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 设 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 分别是在 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 处对 Y 的独立观察结果,称

$$(x_1, Y_1), (x_2, Y_2), \dots, (x_n, Y_n) \quad (3.1)$$

是一个样本^①,对应的样本值记为

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n).$$

我们首先要解决的问题是如何利用样本来估计 Y 关于 x 的回归函数 $\mu(x)$. 为此,首先需要推测 $\mu(x)$ 的形式. 在一些问题中,我们可以由专业知识知道 $\mu(x)$ 的形式. 否则,可将每对观察值 (x_i, y_i) 在直角坐标系中描出它的相应的点(如下例中的图 9-2),这种图称为散点图. 散点图可以帮助我们粗略地看出 $\mu(x)$ 的形式.

例 1 为研究某一化学反应过程中,温度 $x(^{\circ}\text{C})$ 对产品得率 $Y(\%)$ 的影响,测得数据如下.

温度 $x(^{\circ}\text{C})$	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
得率 $Y(\%)$	45	51	54	61	66	70	74	78	85	89

这里自变量 x 是普通变量, Y 是随机变量. 画出散点图如图 9-2 所示. 由图大致看出 $\mu(x)$ 具有线性函数 $a + bx$ 的形式. $\square$

设 Y 关于 x 的回归函数为 $\mu(x)$. 利用样本来估计 $\mu(x)$ 的问题称为求 Y 关于 x 的回归问题. 特别,若 $\mu(x)$ 为线性函数: $\mu(x) = a + bx$, 此时估计 $\mu(x)$ 的问题称为求一元线性回归问题. 本节只讨论这个问题.

我们假设对于 x (在某个区间内) 的每一个值有

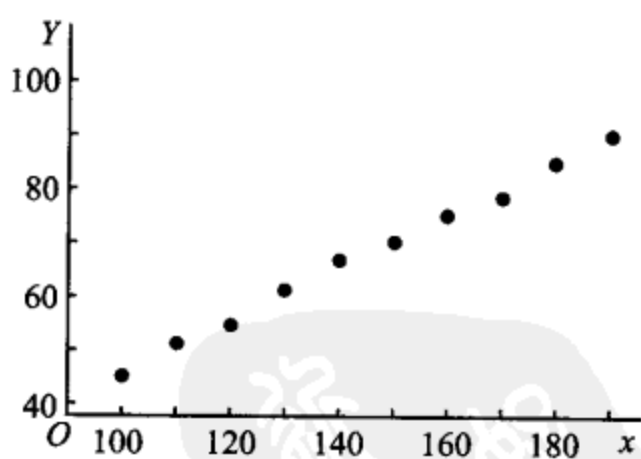


图 9-2

^① 这里 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 是相互独立的随机变量, 但一般未必同分布, 为方便计, 也称 $(x_1, Y_1), (x_2, Y_2), \dots, (x_n, Y_n)$ 是一个样本.

$$Y \sim N(a + bx, \sigma^2),$$

其中 a, b 及 σ^2 都是不依赖于 x 的未知参数. 记 $\varepsilon = Y - (a + bx)$, 对 Y 作这样的正态假设, 相当于假设

$$Y = a + bx + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2), \quad (3.2)$$

其中未知参数 a, b 及 σ^2 都不依赖于 x . (3.2) 称为一元线性回归模型, 其中 b 称为回归系数.

(3.2) 式表明, 因变量 Y 由两部分组成, 一部分是 x 的线性函数 $a + bx$, 另一部分 $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ 是随机误差, 是人们不可控制的.

(二) a, b 的估计

取 x 的 n 个不全相同的值 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 作独立试验, 得到样本 $(x_1, Y_1), (x_2, Y_2), \dots, (x_n, Y_n)$. 由 (3.2) 式

$$Y_i = a + bx_i + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2), \quad \text{各 } \varepsilon_i \text{ 相互独立.} \quad (3.3)$$

于是 $Y_i \sim N(a + bx_i, \sigma^2), i = 1, 2, \dots, n$. 由 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 的独立性, 知 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 的联合密度为

$$\begin{aligned} L &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - a - bx_i)^2\right] \\ &= \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2\right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

现用最大似然估计法来估计未知参数 a, b . 对于任意一组观察值 $y_1, y_2, \dots, y_n$, (3.4) 式就是样本的似然函数. 显然, 要 L 取最大值, 只要 (3.4) 式右端方括弧中的平方和为最小, 即只需函数

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2 \quad (3.5)$$

取最小值^①.

取 Q 分别关于 a, b 的偏导数, 并令它们等于零:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial a} &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i) = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial b} &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)x_i = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

① 如果 Y 不是正态变量, 则直接用 (3.5) 式估计 a, b , 使 Y 的观察值 y_i 与 $a + bx_i$ 偏差的平方和 $Q(a, b)$ 为最小. 这种方法叫最小二乘法, 它是求经验公式的一种常用方法. 若 Y 是正态变量, 则最小二乘法与最大似然估计法给出相同的结果.

得方程组

$$\begin{cases} na + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)b = \sum_{i=1}^n y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)a + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)b = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{cases} \quad (3.7)$$

(3.7) 式称为正规方程组.

由于 x_i 不全相同, 正规方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{vmatrix} = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = n \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \neq 0.$$

故(3.7)有唯一的一组解. 解得 b, a 的最大似然估计值为

$$\left. \begin{aligned} \hat{b} &= \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \\ \hat{a} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \frac{\hat{b}}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}, \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

其中 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$.

在得到 a, b 的估计 $\hat{a}, \hat{b}$ 后, 对于给定的 x , 我们就取 $\hat{a} + \hat{b}x$ 作为回归函数 $\mu(x) = a + bx$ 的估计, 即 $\hat{\mu}(x) = \hat{a} + \hat{b}x$, 称为 Y 关于 x 的经验回归函数. 记 $\hat{a} + \hat{b}x = \hat{y}$, 方程

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x \quad (3.9)$$

称为 Y 关于 x 的经验回归方程, 简称回归方程, 其图形称为回归直线.

将(3.8)中 $\hat{a}$ 的表达式代入(3.9)式, 则回归方程可写成

$$\hat{y} = \bar{y} + \hat{b}(x - \bar{x}). \quad (3.10)$$

(3.10) 表明, 对于样本值 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, 回归直线通过散点图的几何中心 $(\bar{x}, \bar{y})$.

今后我们将视方便而使用(3.9)或(3.10).

为了计算上的方便, 我们引入下述记号:

$$\left. \begin{aligned} S_{xx} &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2, \\ S_{yy} &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2, \\ S_{xy} &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right). \end{aligned} \right\} (3.11)$$

这样, a, b 的估计值可写成

$$\left. \begin{aligned} \hat{b} &= \frac{S_{xy}}{S_{xx}}, \\ \hat{a} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \hat{b}. \end{aligned} \right\} (3.12)$$

例 2(续例 1) 设在例 1 中的随机变量 Y 符合(3.2)式所述的条件, 求 Y 关于 x 的线性回归方程.

解 现在 $n = 10$, 为求线性回归方程, 所需计算列表如下:

表 9-17

x	y	x^2	y^2	xy
100	45	10 000	2 025	4 500
110	51	12 100	2 601	5 610
120	54	14 400	2 916	6 480
130	61	16 900	3 721	7 930
140	66	19 600	4 356	9 240
150	70	22 500	4 900	10 500
160	74	25 600	5 476	11 840
170	78	28 900	6 084	13 260
180	85	32 400	7 225	15 300
190	89	36 100	7 921	16 910
Σ 1 450	673	218 500	47 225①	101 570

由表 9-17 得

$$S_{xx} = 218\,500 - \frac{1}{10} \times 1\,450^2 = 8\,250,$$

① $\sum_{i=1}^n y_i^2$ 的值下面要用到.

$$S_{xy} = 101\,570 - \frac{1}{10} \times 1\,450 \times 673 = 3\,985,$$

故得

$$\hat{b} = S_{xy}/S_{xx} = 0.483\,03,$$

$$\hat{a} = \frac{1}{10} \times 673 - \frac{1}{10} \times 1\,450 \times 0.483\,03 = -2.739\,35,$$

于是得到回归直线方程

$$\hat{y} = -2.739\,35 + 0.483\,03x,$$

或写成

$$\hat{y} = 67.3 + 0.483\,03(x - 145).$$

□

(三) σ^2 的估计

由(3.2)式,

$$E\{[Y - (a + bx)]^2\} = E(\epsilon^2) = D(\epsilon) + [E(\epsilon)]^2 = \sigma^2,$$

这表示 σ^2 愈小, 以回归函数 $\mu(x) = a + bx$ 作为 Y 的近似导致的均方误差就愈小. 这样, 利用回归函数 $\mu(x) = a + bx$ 去研究随机变量 Y 与 x 的关系就愈有效. 然而 σ^2 是未知的, 因而我们需要利用样本去估计 σ^2 . 为了估计 σ^2 , 先引入下述残差平方和.

记 $\hat{y}_i = \hat{y}|_{x=x_i} = \hat{a} + \hat{b}x_i$, 称

$y_i - \hat{y}_i$ 为 x_i 处的残差. 平方和

$$Q_e = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)^2 \quad (3.13)$$

称为残差平方和(图 9-3). 它是经验回归函数在 x_i

处的函数值 $\hat{\mu}(x_i) = \hat{a} + \hat{b}x_i$ 与 x_i 处的观察值 y_i 的偏差的平方和. 为了计算 Q_e , 我们将 Q_e 作如下的分解:

$$\begin{aligned} Q_e &= \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - \bar{y} - \hat{b}(x_i - \bar{x})]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 - 2\hat{b} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \\ &\quad + (\hat{b})^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = S_{yy} - 2\hat{b}S_{xy} + (\hat{b})^2 S_{xx}. \end{aligned}$$

由(3.12)式 $\hat{b} = S_{xy}/S_{xx}$ 得 Q_e 的一个分解式

$$Q_e = S_{yy} - \hat{b}S_{xy}. \quad (3.14)$$

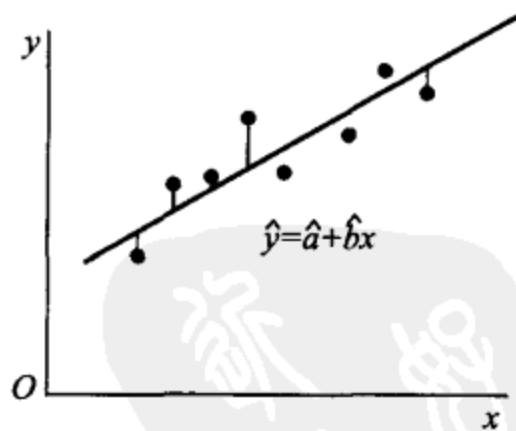


图 9-3

由(3.8)式知, b, a 的估计量分别为^①

$$\left. \begin{aligned} \hat{b} &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})Y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \\ \hat{a} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i - \frac{\hat{b}}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{Y} - \hat{b}\bar{x}, \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

其中 $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$. 在 S_{yy}, S_{xy} 的表达式(3.11)式中, 将 y_i 改为 Y_i ($i = 1, 2, \dots, n$), 并把它们分别记为 S_{YY}, S_{XY} , 即

$$S_{YY} = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2, S_{XY} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y}).$$

则(3.14)式中的残差平方和 Q_e 的相应的统计量(仍记为 Q_e) 为

$$Q_e = S_{YY} - \hat{b}S_{XY}. \quad (3.16)$$

残差平方和 Q_e 服从分布(见本章附录 4°):

$$\frac{Q_e}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2), \quad (3.17)$$

于是

$$E\left(\frac{Q_e}{\sigma^2}\right) = n-2,$$

即知 $E(Q_e/(n-2)) = \sigma^2$. 这样就得到了 σ^2 的无偏估计量:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{Q_e}{n-2} = \frac{1}{n-2}(S_{YY} - \hat{b}S_{XY}). \quad (3.18)$$

在这里, 还看到, 只要算出表 9-17 中各栏的和, 不但能算出 $\hat{a}, \hat{b}$, 且能算出 σ^2 的估计值 $\hat{\sigma}^2$.

例 3(续例 2) 求例 2 中 σ^2 的无偏估计.

解 由表 9-17, 得

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 = 47\,225 - \frac{1}{10} \times 673^2 = 1\,932.1.$$

又已知 $S_{xy} = 3\,985, \hat{b} = 0.483\,03$, 即得

$$Q_e = S_{yy} - \hat{b}S_{xy} = 7.23,$$

$$\hat{\sigma}^2 = Q_e/(n-2) = 7.23/8 = 0.90. \quad \square$$

^① 为方便计, 在这里, 将 a, b 的估计值和估计量都写成 $\hat{a}, \hat{b}$, 在用到它们时, 视上下文, 是能区分 $\hat{a}, \hat{b}$ 是估计值还是估计量的.

(四) 线性假设的显著性检验

在以上的讨论中,我们假定 Y 关于 x 的回归 $\mu(x)$ 具有形式 $a+bx$,在处理实际问题时, $\mu(x)$ 是否为 x 的线性函数,首先要根据有关专业知识和实践来判断,其次就要根据实际观察得到的数据运用假设检验的方法来判断.这就是说,求得的线性回归方程是否具有实用价值,一般来说,需要经过假设检验才能确定.若线性假设(3.2)符合实际,则 b 不应为零,因为若 $b=0$,则 $E(Y)=\mu(x)$ 就不依赖于 x 了.因此我们需要检验假设

$$\begin{aligned} H_0: b &= 0, \\ H_1: b &\neq 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

我们使用 t 检验法来进行检验.我们有(见附录 2°):

$$\hat{b} \sim N(b, \sigma^2/S_{xx}). \quad (3.20)$$

又由(3.17)式,(3.18)式知

$$\frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{Q_e}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2), \quad (3.21)$$

且 $\hat{b}$ 与 Q_e 独立(见附录 5°).故有

$$\frac{\hat{b}-b}{\sqrt{\sigma^2/S_{xx}}} \bigg/ \sqrt{\frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}} \sqrt{(n-2)} \sim t(n-2),$$

$$\text{即} \quad \frac{\hat{b}-b}{\hat{\sigma}} \sqrt{S_{xx}} \sim t(n-2). \quad (3.22)$$

这里 $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2}$.

当 H_0 为真时 $b=0$,此时

$$t = \frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}} \sqrt{S_{xx}} \sim t(n-2), \quad (3.23)$$

且 $E(\hat{b}) = b = 0$,即得 H_0 的拒绝域为

$$|t| = \frac{|\hat{b}|}{\hat{\sigma}} \sqrt{S_{xx}} \geq t_{\alpha/2}(n-2), \quad (3.24)$$

此处 α 为显著性水平.

当假设 $H_0: b=0$ 被拒绝时,认为回归效果是显著的,反之,就认为回归效果不显著.回归效果不显著的原因可能有如下几种:

- 1° 影响 Y 取值的,除 x 及随机误差外还有其他不可忽略的因素.
- 2° $E(Y)$ 与 x 的关系不是线性的,而存在着其他的.
- 3° Y 与 x 不存在关系.

因此需要进一步的分析原因,分别处理.

例 4(续例 2) 检验例 2 中的回归效果是否显著,取 $\alpha = 0.05$.

解 由例 2、例 3 已知 $\hat{b} = 0.483\ 03$, $S_{xx} = 8\ 250$, $\hat{\sigma}^2 = 0.90$. 查表得 $t_{0.05/2}(n-2) = t_{0.025}(8) = 2.306\ 0$. 由(3.24)式,假设 $H_0: b = 0$ 的拒绝域为

$$|t| = \frac{|\hat{b}|}{\hat{\sigma}} \sqrt{S_{xx}} \geq 2.306\ 0.$$

现在

$$|t| = \frac{0.483\ 03}{\sqrt{0.90}} \times \sqrt{8\ 250} = 46.25 > 2.306\ 0,$$

故拒绝 $H_0: b = 0$, 认为回归效果是显著的. □

(五) 系数 b 的置信区间

当回归效果显著时,我们常需要对系数 b 作区间估计. 事实上,可由(3.22)式得到 b 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\left(\hat{b} \pm t_{\alpha/2}(n-2) \times \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{S_{xx}}} \right). \quad (3.25)$$

例如,例 1 中 b 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$\left(0.483\ 03 \pm 2.306\ 0 \times \sqrt{\frac{0.90}{8\ 250}} \right) = (0.458\ 94, 0.507\ 12).$$

(六) 回归函数 $\mu(x) = a + bx$ 函数值的点估计和置信区间

设 x_0 是自变量 x 的某一指定值. 由(3.9)式可以用经验回归函数 $\hat{y} = \hat{\mu}(x) = \hat{a} + \hat{b}x$ 在 x_0 的函数值 $\hat{y}_0 = \hat{\mu}(x_0) = \hat{a} + \hat{b}x_0$ 作为 $\mu(x_0) = a + bx_0$ 的点估计. 即

$$\hat{y}_0 = \hat{\mu}(x_0) = \hat{a} + \hat{b}x_0. \quad (3.26)$$

考虑相应的估计量

$$\hat{Y}_0 = \hat{a} + \hat{b}x_0, \quad (3.27)$$

由本章附录 3° 知, $E(\hat{Y}_0) = a + bx_0$, 因此这一估计量是无偏的. 下面来求 $\mu(x_0) = a + bx_0$ 的置信区间. 由本章附录 3° 知

$$\frac{\hat{Y}_0 - (a + bx_0)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}} \sim N(0, 1).$$

又由(3.17)式, (3.18)式知

$$\frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{Q_e}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2), \quad (3.28)$$

且由本章附录 6° 知 $Q_e, \hat{Y}_0$ 相互独立. 于是

$$\frac{\hat{Y}_0 - (a + bx_0)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}} \bigg/ \sqrt{\frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}} (n-2) \sim t(n-2),$$

即

$$\frac{\hat{Y}_0 - (a + bx_0)}{\hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}} \sim t(n-2).$$

于是得到 $\mu(x_0) = a + bx_0$ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间为

$$\left(\hat{Y}_0 \pm t_{\alpha/2}(n-2) \hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}} \right), \quad (3.29)$$

或即

$$\left(\hat{a} + \hat{b}x_0 \pm t_{\alpha/2}(n-2) \hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}} \right). \quad (3.29)'$$

这一置信区间的长度是 x_0 的函数, 它随 $|x_0 - \bar{x}|$ 的增加而增加, 当 $x_0 = \bar{x}$ 时为最短.

(七) Y 的观察值的点预测和预测区间

若我们对指定点 $x = x_0$ 处因变量 Y 的观察值 Y_0 感兴趣, 然而我们在 $x = x_0$ 处并未进行观察或者暂时无法观察. 经验回归函数的一个重要应用是, 可利用它对因变量 Y 的新观察值 Y_0 进行点预测或区间预测.

若 Y_0 是在 $x = x_0$ 处对 Y 的观察结果, 由 (3.2) 式知它满足:

$$Y_0 = a + bx_0 + \epsilon_0, \quad \epsilon_0 \sim N(0, \sigma^2). \quad (3.30)$$

随机误差 ϵ_0 可正也可负, 其值无法预料, 我们就用 x_0 处的经验回归函数值

$$\hat{Y}_0 = \mu(x_0) = \hat{a} + \hat{b}x_0$$

作为 $Y_0 = a + bx_0 + \epsilon_0$ 的点预测. 下面来求 Y_0 的预测区间.

因 Y_0 是将要做的一次独立试验的结果, 因此它与已经得到的试验的结果 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 相互独立. 由 (3.15) 式知 $\hat{b}$ 是 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 的线性组合, 故 $\hat{Y}_0 = \bar{Y} + \hat{b}(x_0 - \bar{x})$ 是 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 的线性组合, 故 Y_0 与 $\hat{Y}_0$ 相互独立. 由 (3.30) 式和本章附 3° 得

$$\hat{Y}_0 - Y_0 \sim N\left(0, \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right]\sigma^2\right),$$

即

$$\frac{\hat{Y}_0 - Y_0}{\sigma \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}} \sim N(0, 1). \quad (3.31)$$

再由(3.28)式、(3.31)式及 $Y_0, \hat{Y}_0, Q_e$ 的相互独立性(附录 6°) 知

$$\frac{\hat{Y}_0 - Y_0}{\sigma \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}} \bigg/ \sqrt{\frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} / (n-2)} \sim t(n-2),$$

即

$$\frac{\hat{Y}_0 - Y_0}{\hat{\sigma} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}} \sim t(n-2).$$

于是对于给定的置信水平 $1-\alpha$ 有

$$P\left\{\frac{|\hat{Y}_0 - Y_0|}{\hat{\sigma} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}} \leq t_{\alpha/2}(n-2)\right\} = 1 - \alpha,$$

或

$$P\left\{\hat{Y}_0 - t_{\alpha/2}(n-2)\hat{\sigma} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}} < Y_0 < \hat{Y}_0 + t_{\alpha/2}(n-2)\hat{\sigma} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}\right\} = 1 - \alpha.$$

区间

$$\left(\hat{Y}_0 \pm t_{\alpha/2}(n-2)\hat{\sigma} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}\right), \quad (3.32)$$

即

$$\left(\hat{a} + \hat{b}x_0 \pm t_{\alpha/2}(n-2)\hat{\sigma} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}}\right) \quad (3.32)'$$

称为 Y_0 的置信水平为 $1-\alpha$ 的预测区间^①. 这一预测区间的长度是 x_0 的函数, 它随 $|x_0 - \bar{x}|$ 的增加而增加. 当 $x_0 = \bar{x}$ 时为最短. 将(3.32)式与(3.29)式比较, 知道在相同的置信水平下, 回归函数值 $\mu(x_0)$ 的置信区间要比 Y_0 的预测区间要短. 这是因为 $Y_0 = a + bx_0 + \varepsilon_0$ 比 $\mu(x_0) = a + bx_0$ 多了一项 ε_0 的缘故.

例 5(续例 2) (1) 求回归函数 $\mu(x)$ 在 $x = 125$ 处的值 $\mu(125)$ 的置信水平为 0.95 的置信区间, 求在 $x = 125$ 处 Y 的新观察值 Y_0 的置信水平为 0.95 的预测区间; (2) 求在 $x = x_0$ 处 Y 的新观察值 Y_0 的置信水平为 0.95 预测区间.

解 (1) 由例 2, 例 3 已知 $\hat{b} = 0.483\ 03, \hat{a} = -2.739\ 35, S_{xx} = 8\ 250, \hat{\sigma}^2 = 0.90, \bar{x} = 145$, 查表得 $t_{0.05/2}(8) = 2.306\ 0$, 即得

$$\hat{Y}_0 = \hat{Y}|_{x=125} = [-2.739\ 35 + 0.483\ 03x]_{x=125} = 57.64,$$

$$\begin{aligned} & t_{\alpha/2}(n-2)\hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}} \\ &= 2.306\ 0 \times \sqrt{0.90} \times \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{(125 - 145)^2}{8\ 250}} = 0.84, \end{aligned}$$

① 预测区间的含义与置信区间的含义相似, 只是后者对未知参数而言, 前者对随机变量而言.

$$t_{\alpha/2}(n-2)\hat{\sigma}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{S_{xx}}} = 2.34,$$

得回归函数 $\mu(x)$ 在 $x = 125$ 处的值 $\mu(125)$ 的一个置信水平为 0.95 的置信区间为

$$(57.64 \pm 0.84).$$

又得 $x_0 = 125$ 处得率 Y_0 的置信水平为 0.95 的预测区间为

$$(57.64 \pm 2.34).$$

(2) 在 $x = x_0$ 处 Y 的新观察值 Y_0 的一个置信水平为 0.95 的预测区间为

$$\left(\hat{Y} |_{x=x_0} \pm t_{0.025}(8)\hat{\sigma}\sqrt{1+\frac{1}{10}+\frac{(x_0-145)^2}{8250}} \right).$$

取 x_0 为不同的值, 得到各点处对应的 Y 的新观察值 Y_0 的预测区间(置信水平为 0.95) 如下:

x_0	Y_0 的预测区间	x_0	Y_0 的预测区间
125	(57.64 ± 2.34)	150	(69.72 ± 2.30)
130	(60.05 ± 2.32)	155	(72.13 ± 2.31)
135	(62.47 ± 2.31)	160	(74.55 ± 2.32)
140	(64.88 ± 2.30)	165	(76.96 ± 2.34)
145	(67.30 ± 2.29)		

将这些区间的下端点联结起来, 又将这些区间的上端点联结起来, 得到两条曲线 L_1 和 L_2 , 回归直线位于由 L_1, L_2 所围成的带域的中心线上. $\square$

(八) 可化为一元线性回归的例子

以上讨论了一元线性回归问题, 在实际中常会遇到更为复杂的回归问题, 但在某些情况下, 可以通过适当的变量变换, 可以将它化成一元线性回归来处理. 下面介绍几种常见的可转化为一元线性回归的模型.

$$1^\circ Y = \alpha e^{\beta x} \cdot \epsilon, \quad \ln \epsilon \sim N(0, \sigma^2), \quad (3.33)$$

其中 α, β, σ^2 是与 x 无关的未知参数. 将 $Y = \alpha e^{\beta x} \cdot \epsilon$ 两边取对数, 得

$$\ln Y = \ln \alpha + \beta x + \ln \epsilon.$$

令 $\ln Y = Y', \ln \alpha = a, \beta = b, x = x', \ln \epsilon = \epsilon', (3.33)$ 式可转化为一元线性回归模型

$$Y' = a + bx' + \epsilon', \quad \epsilon' \sim N(0, \sigma^2). \quad (3.34)$$

$$2^\circ Y = \alpha x^\beta \cdot \epsilon, \quad \ln \epsilon \sim N(0, \sigma^2), \quad (3.35)$$

其中 α, β, σ^2 是与 x 无关的未知参数. 将 $Y = \alpha x^\beta \cdot \epsilon$ 两边取对数, 得

$$\ln Y = \ln \alpha + \beta \ln x + \ln \epsilon.$$

令 $\ln Y = Y'$, $\ln \alpha = a$, $\beta = b$, $\ln x = x'$, $\ln \epsilon = \epsilon'$, (3.35) 式可转化为一元线性回归模型

$$Y' = a + bx' + \epsilon', \quad \epsilon' \sim N(0, \sigma^2). \quad (3.36)$$

$$3^\circ \quad Y = \alpha + \beta h(x) + \epsilon, \quad \epsilon \sim N(0, \sigma^2), \quad (3.37)$$

其中 α, β, σ^2 是与 x 无关的未知参数. $h(x)$ 是 x 的已知函数, 令 $\alpha = a$, $\beta = b$, $h(x) = x'$, (3.37) 式可转化为一元线性回归模型

$$Y = a + bx' + \epsilon, \quad \epsilon \sim N(0, \sigma^2). \quad (3.38)$$

若在原模型下, 例如在原模型 (3.37) 下, 对于 (x, Y) 有样本 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 就相当于在新模型 (3.38) 下有样本 $(x'_1, y_1), (x'_2, y_2), \dots, (x'_n, y_n)$, 其中 $x'_i = h(x_i)$. 于是就能利用上节的方法来估计 a, b 或对 b 作假设检验, 或对 Y 进行预测. 在得到 Y 关于 x' 的回归方程后, 再将原自变量 x 代回, 就得到 Y 关于 x 的回归方程, 它的图形是一条曲线, 也称为曲线回归方程.

例 6 下表是 1957 年美国旧轿车价格的调查资料, 今以 x 表示轿车的使用年数, Y 表示相应的平均价格, 求 Y 关于 x 的回归方程.

使用年数 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
平均价格(美元) Y	2651	1943	1494	1087	765	538	484	290	226	204

解 作散点图如图 9-4, 看起来 Y 与 x 呈指数关系, 于是采用模型 (3.33), 即

$$Y = \alpha e^{\beta x} \cdot \epsilon, \quad \ln \epsilon \sim N(0, \sigma^2).$$

经变量变换后就转化为 (3.34) 式.

$$Y' = a + bx' + \epsilon', \quad \epsilon' \sim N(0, \sigma^2),$$

其中 $Y' = \ln Y$, $a = \ln \alpha$, $b = \beta$, $x' = x$, $\epsilon' = \ln \epsilon$. 数据经变换后得到

$x' = x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y' = \ln y$	7.882 7	7.572 0	7.309 2	6.991 2	6.639 9	6.287 9	6.182 1	5.669 9	5.420 5	5.318 1

经计算得

$$\hat{b} = -0.297\ 68, \quad \hat{a} = 8.164\ 585,$$

从而有

$$\hat{y}' = 8.164\ 585 - 0.297\ 68x.$$

又可求得

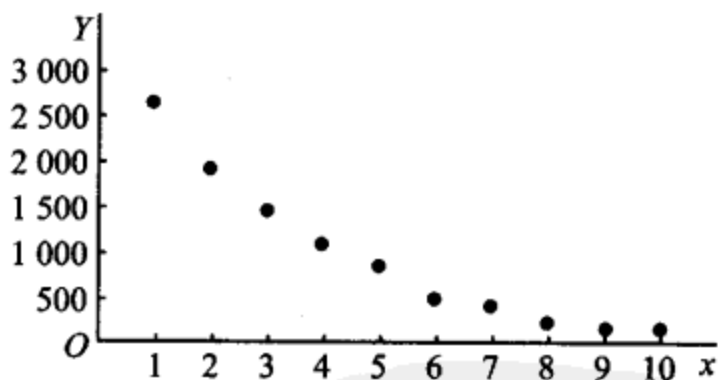


图 9-4

$$|t| = \frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}} \sqrt{S_{xx}} = 32.3693 > t_{0.05/2}(8) = 2.3060,$$

即知线性回归效果是高度显著的. 代回原变量, 得曲线回归方程

$$\hat{y} = \exp(\hat{y}') = 3514.26e^{-0.29768x}.$$

□

上面所讨论的一元线性回归模型是

$$Y = a + bx + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2). \quad (3.2)$$

一般情况, 一元回归模型为

$$Y = \mu(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p) + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2), \quad (3.39)$$

其中 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p, \sigma^2$ 是与 x 无关的未知参数.

如果回归函数 $\mu(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$ 是参数 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ 的线性函数(不必是 x 的线性函数), 则称(3.39)为**线性回归模型**; 若 $\mu(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$ 是 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ 的非线性函数, 则称为**非线性回归模型**. 上述模型(3.37)是线性回归模型, 而模型(3.33), (3.35)都不是线性回归模型, 但是它们都能经过变量变换转化为线性回归模型. 又如

$$Y = \theta_1 e^{\theta_2 x} + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2). \quad (3.40)$$

它是非线性回归模型. 它不能经过变量变换将它转化为线性回归模型^①, 称为**本质的非线性回归模型**, 又如

$$Y = (\theta_1 + \theta_2 x + \theta_3 x^2)^{-1} + \varepsilon \quad (\text{Holliday 模型}),$$

$$Y = \frac{\theta_1}{1 + \exp(\theta_2 - \theta_3)} + \varepsilon \quad (\text{Logistic 模型}),$$

都是本质的非线性回归模型. 非线性回归模型的解法参见《近代非线性回归分析》(韦博成, 南京: 东南大学出版社, 1989).

§ 4 多元线性回归

在实际问题中, 随机变量 Y 往往与多个普通变量 $x_1, x_2, \dots, x_p$ ($p > 1$) 有

① 将(3.40)式两边取对数, 得

$$\begin{aligned} \ln Y &= \ln(\theta_1 e^{\theta_2 x} + \varepsilon) = \ln \left[\theta_1 e^{\theta_2 x} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\theta_1} e^{-\theta_2 x} \right) \right] \\ &= \ln \theta_1 + \theta_2 x + \ln \left(1 + \frac{\varepsilon}{\theta_1} e^{-\theta_2 x} \right). \end{aligned}$$

令 $\ln Y = Y', \ln \theta_1 = a, \theta_2 = b, \ln \left(1 + \frac{\varepsilon}{\theta_1} e^{-\theta_2 x} \right) = \varepsilon'$, 则有

$$Y' = a + bx + \varepsilon'.$$

从形式上看, 上式好像是线性回归模型. 但因误差项 ε' 中包含未知参数 θ_1, θ_2 , 甚至包含自变量 x . 这在线性回归模型中是不允许的.

关. 对于自变量 $x_1, x_2, \dots, x_p$ 的一组确定的值, Y 有它的分布. 若 Y 的数学期望存在, 则它是 $x_1, x_2, \dots, x_p$ 的函数, 记为 $\mu_{Y|x_1, x_2, \dots, x_p}$ 或 $\mu(x_1, x_2, \dots, x_p)$, 它就是 Y 关于 x 的回归函数. 我们感兴趣的是 $\mu(x_1, x_2, \dots, x_p)$ 是 $x_1, x_2, \dots, x_p$ 的线性函数的情况. 在这里, 仅讨论下述多元线性回归模型:

$$Y = b_0 + b_1 x_1 + \dots + b_p x_p + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2), \quad (4.1)$$

其中 $b_0, b_1, \dots, b_p, \sigma^2$ 都是与 $x_1, x_2, \dots, x_p$ 无关的未知参数.

设

$$(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1p}, y_1), \dots, (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{np}, y_n) \quad (4.2)$$

是一个样本. 和一元线性回归的情况一样, 我们用最大似然估计法来估计参数.

即取 $\hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_p$ 使当 $b_0 = \hat{b}_0, b_1 = \hat{b}_1, \dots, b_p = \hat{b}_p$ 时

$$Q = \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_{i1} - \dots - b_p x_{ip})^2 \quad (4.3)$$

达到最小.

求 Q 分别关于 $b_0, b_1, \dots, b_p$ 的偏导数, 并令它们等于零, 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial b_0} &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_{i1} - \dots - b_p x_{ip}) = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial b_j} &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_{i1} - \dots - b_p x_{ip}) x_{ij} = 0, \\ &\quad j = 1, 2, \dots, p. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

化简(4.4)式得

$$\left. \begin{aligned} b_0 n + b_1 \sum_{i=1}^n x_{i1} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{i2} + \dots + b_p \sum_{i=1}^n x_{ip} &= \sum_{i=1}^n y_i, \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_{i1} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{i1}^2 + b_2 \sum_{i=1}^n x_{i1} x_{i2} + \dots + b_p \sum_{i=1}^n x_{i1} x_{ip} &= \sum_{i=1}^n x_{i1} y_i, \\ &\vdots \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_{ip} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{ip} x_{i1} + b_2 \sum_{i=1}^n x_{ip} x_{i2} + \dots + b_p \sum_{i=1}^n x_{ip}^2 &= \sum_{i=1}^n x_{ip} y_i. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

(4.5) 式称为正规方程组. 为了求解的方便, 将(4.5)式写成矩阵的形式. 为此, 引入矩阵

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{因} \quad \mathbf{X}^T \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1p} & x_{2p} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^n x_{ip} \\ \sum_{i=1}^n x_{i1} & \sum_{i=1}^n x_{i1}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^n x_{i1} x_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_{ip} & \sum_{i=1}^n x_{ip} x_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^n x_{ip}^2 \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{X}^T \mathbf{Y} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{1p} & x_{2p} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_{i1} y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_{ip} y_i \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

于是(4.5)式即可写成

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{B} = \mathbf{X}^T \mathbf{Y}, \quad (4.5)'$$

这就是正规方程组的矩阵形式. 在(4.5)'式两边左乘 $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ 的逆矩阵 $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$ (设 $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$ 存在)得到(4.5)'的解

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \vdots \\ \hat{b}_p \end{pmatrix} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}, \quad (4.6)$$

这就是我们要求的 $(b_0, b_1, \dots, b_p)^T$ 的最大似然估计. 我们取

$$\hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_1 + \cdots + \hat{b}_p x_p \stackrel{\text{记成}}{=} \hat{y}$$

作为 $\mu(x_1, x_2, \dots, x_p) = b_0 + b_1 x_1 + \cdots + b_p x_p$ 的估计. 方程

$$\hat{y} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_1 + \cdots + \hat{b}_p x_p \quad (4.7)$$

称为 p 元经验线性回归方程, 简称回归方程.

例 下面给出了某种产品每件平均单价 Y (元)与批量 x (件)之间的关系的一组数据

x	20	25	30	35	40	50	60	65	70	75	80	90
y	1.81	1.70	1.65	1.55	1.48	1.40	1.30	1.26	1.24	1.21	1.20	1.18

画出散点图如图 9-5 所示. 我们选取模型

$$Y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0, \sigma^2) \quad (4.8)$$

来拟合它, 现在来求回归方程.

令 $x_1 = x, x_2 = x^2$, 则 (4.8) 式可写成

$$Y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0, \sigma^2),$$

这是一个二元线性回归模型, 现在

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 20 & 400 \\ 1 & 25 & 625 \\ 1 & 30 & 900 \\ 1 & 35 & 1\,225 \\ 1 & 40 & 1\,600 \\ 1 & 50 & 2\,500 \\ 1 & 60 & 3\,600 \\ 1 & 65 & 4\,225 \\ 1 & 70 & 4\,900 \\ 1 & 75 & 5\,625 \\ 1 & 80 & 6\,400 \\ 1 & 90 & 8\,100 \end{bmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1.81 \\ 1.70 \\ 1.65 \\ 1.55 \\ 1.48 \\ 1.40 \\ 1.30 \\ 1.26 \\ 1.24 \\ 1.21 \\ 1.20 \\ 1.18 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

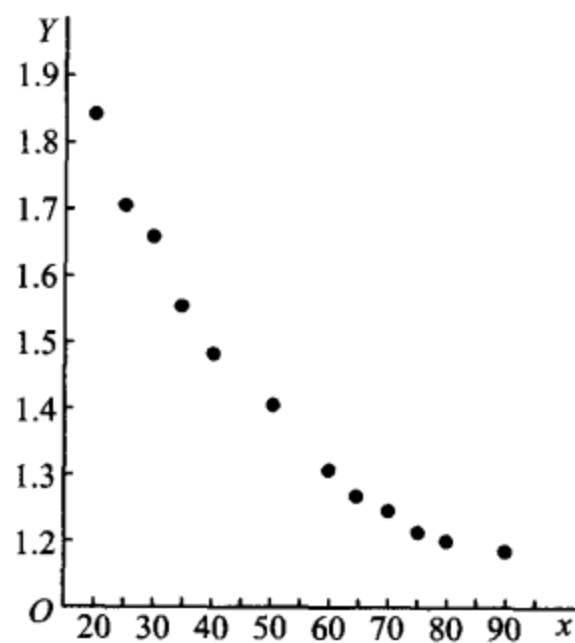


图 9-5

经计算

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 12 & 640 & 40\,100 \\ 640 & 40\,100 & 2\,779\,000 \\ 40\,100 & 2\,779\,000 & 204\,702\,500 \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 4.857\,292\,5 \times 10^{11} & -1.957\,17 \times 10^{10} & 170\,550\,000 \\ -1.957\,17 \times 10^{10} & 848\,420\,000 & -7\,684\,000 \\ 170\,550\,000 & -7\,684\,000 & 71\,600 \end{bmatrix},$$

$\Delta = 1.419\,18 \times 10^{11}$. 即得正规方程组的解为

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \begin{bmatrix} 16.98 \\ 851.3 \\ 51\,162 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2.198\ 266\ 29 \\ -0.022\ 522\ 36 \\ 0.000\ 125\ 07 \end{pmatrix}.$$

于是得到回归方程为

$$\hat{y} = 2.198\ 266\ 29 - 0.022\ 522\ 36x + 0.000\ 125\ 07x^2. \quad \square$$

像一元线性回归一样,模型(4.1)往往是一种假定,为了考察这一假定是否符合实际观察结果,还需进行以下的假设检验:

$$H_0: b_1 = b_2 = \cdots = b_p = 0,$$

$$H_1: b_i \text{ 不全为零.}$$

若在显著性水平 α 下拒绝 H_0 ,我们就认为回归效果是显著的.

另外,也与一元线性回归一样,多元线性回归方程的一个重要应用是确定给定点 $(x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0p})$ 处对应的 Y 的观察值的预测区间.

最后我们指出,在实际问题中,与 Y 有关的因素往往很多,如果将它们都取作自变量必然会导致所得到的回归方程很庞大.实际上,有些自变量对 Y 的影响很小,如果将这些自变量剔除,不但能使回归方程较为简洁,便于应用,且能明确哪些因素(即自变量)的改变对 Y 有显著的影响,从而使人们对事物有进一步的认识.通常可用逐步回归法达到这一目的.上述关于模型的线性假设的检验、观察值的预测区间、逐步回归等内容,读者可参阅华东师范大学出版社出版的《回归分析及其试验设计》一书.

在实际中,需要考虑的影响 Y 的因素较多,即自变量的个数较多.因此要求解一个多元线性回归的问题,计算工作量是相当大的,这就需要借助于计算机来进行计算.

小结

本章介绍了两种用途广泛的统计模型:方差分析模型和回归分析模型.

在实际中试验的指标往往要受到一种或多种因素的影响.方差分析就是通过对试验数据进行分析,检验方差相同的多个(多于两个)正态总体的均值是否相等,用以判断各因素对试验指标的影响是否显著.方差分析按影响试验指标的因素的个数分为单因素方差分析、双因素方差分析和多因素方差分析,本章只介绍前面两种.

考虑单因素方差分析的情况.观察到的数据总是参差不齐的,我们用总偏差平方和 S_T

$$= \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X})^2 \text{ 来度量数据间总的变异(即离散程度),将它分解为可追溯到来源的部分}$$

$$\text{变异(也用平方和来度量)} S_E = \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{\cdot j})^2 \text{ (它是由随机误差引起的) 与 } S_A =$$

$$\sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} (X_{\cdot j} - \bar{X})^2 \text{ (它是由各水平效应的差异及随机误差引起的) 之和.若后者较前者大得}$$

多,则有理由认为因素的各个水平对应的试验结果有显著差异,从而拒绝因素各水平对应的正态总体的均值相等这一原假设.这就是单因素方差分析法的基本思想.双因素方差分析的基本思想类似.

“方差分析”事实上不是真正分析方差,而是分析用偏差平方和度量的数据的变异.Snedecor 说过:“它是从可比组的数据中分解出可追溯到某些指定来源的变异的一种技巧.”

双因素方差分析分考虑交互作用的与不考虑交互作用的两种情况,读者需分辨清楚.

单因素方差分析表和双因素方差分析表分别记录了单因素和双因素方差分析的全部结果,读者应很好掌握.

回归分析是研究自变量为一般变量(非随机变量),因变量为随机变量时两者之间的相关关系的统计分析方法.设随机变量 Y (因变量) 与自变量 x (一般变量) 存在着相关关系,为了研究这种关系,作为一种近似转而去研究 Y 的数学期望 $E(Y) = \mu(x)$ 与 x 的确定性关系,即函数关系,这里 $\mu(x)$ 叫做 Y 关于 x 的回归函数.一元线性回归是研究 $\mu(x)$ 为 x 的线性函数 $\mu(x) = a + bx$ 的情况.一元线性回归模型为

$$Y = a + bx + \epsilon, \quad \epsilon \sim N(0, \sigma^2),$$

其中 a, b 及 σ 都不依赖于 x , 且 a, b, σ^2 均未知.

我们要讨论的问题是:

1° 利用样本值 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 来估计 a, b , 从而得到 $\mu(x)$ 的最大似然估计 $\hat{\mu}(x) = \hat{a} + \hat{b}x$, 记 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$, 我们称 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 为回归方程, 其图形称为回归直线.

2° 求出误差 ϵ 的方差 $D(\epsilon) = \sigma^2$ 的无偏估计:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{Q_e}{n-2},$$

其中 $Q_e = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i)^2 = S_{yy} - \hat{b}S_{xy}$ 为残差平方和.

3° 作线性假设: $H_0: b = 0, H_1: b \neq 0$ 的显著性检验. H_0 的拒绝域为

$$|t| = \frac{|\hat{b}|}{\hat{\sigma}} \sqrt{S_{xx}} \geq t_{\alpha/2}(n-2) \quad (\alpha \text{ 为显著性水平}),$$

如果拒绝 H_0 , 认为回归效果是显著的; 否则, 则认为回归效果不显著, 此时不宜用线性回归模型, 需另行研究.

4° 求出回归系数 b 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\hat{b} \pm t_{\alpha/2}(n-2) \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{S_{xx}}} \right).$$

5° 求出回归函数 $\mu(x)$ 在点 x_0 处的函数值 $\mu(x_0)$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$(\hat{a} + \hat{b}_0 x_0 \pm t_{\alpha/2}(n-2) \hat{\sigma} \sqrt{1/n + (x_0 - \bar{x})^2 / S_{xx}}).$$

6° 以 x_0 处的回归值 $\hat{y}_0 = \hat{a} + \hat{b}x_0$ 作为 Y 在 x_0 处的观察值 $Y_0 = a + bx_0 + \epsilon_0$ 的预测值, 求出 Y_0 的置信水平为 $1-\alpha$ 的预测区间为

$$(\hat{a} + \hat{b}x_0 \pm t_{\alpha/2}(n-2) \hat{\sigma} \sqrt{1 + 1/n + (x_0 - \bar{x})^2 / S_{xx}}).$$

对随机变量 Y 的观察值进行预测是回归方程最重要的应用.

■ 重要术语及主题

单因素试验方差分析的数学模型 $S_T = S_E + S_A$ 单因素方差分析表 双因素方差分析表

一元线性回归的数学模型 回归直线 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 中的系数 $\hat{a}, \hat{b}$ 误差 ϵ 的方差 $D(\epsilon) = \sigma^2$ 的无偏估计 线性假设的显著性检验 回归系数 $\hat{b}$ 的区间估计 回归函数值 $\mu(x_0)$ 的点估计和区间估计 观察值 $Y_0 = a + bx_0 + \epsilon_0$ 的点预测和区间预测

附录

下面将证明 §3 中涉及的有关统计量的一些结果.

$$1^\circ \quad \bar{Y} \sim N(a + b\bar{x}, \sigma^2/n).$$

$$2^\circ \quad \hat{b} \sim N(b, \sigma^2/S_{xx}).$$

$$3^\circ \quad \hat{Y}_0 = \hat{a} + \hat{b}x_0 = \bar{Y} + \hat{b}(x_0 - \bar{x}) \sim N\left(a + bx_0, \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right]\sigma^2\right).$$

$$4^\circ \quad Q_e/\sigma^2 \sim \chi^2(n-2).$$

$$5^\circ \quad \bar{Y}, \hat{b}, Q_e \text{ 相互独立.}$$

$$6^\circ \quad \text{若 } Y_0 = a + bx_0 + \epsilon_0 \text{ 与 } Y_1, \dots, Y_n \text{ 独立, 则 } Y_0, \hat{Y}_0, Q_e \text{ 相互独立.}$$

证明的工具是正交变换. 首先注意到由于 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 是相互独立的正态变量, 故 $\bar{Y}, \hat{b}, \hat{Y}_0$ 都是正态变量. 现在令

$$V_i = \epsilon_i/\sigma = [Y_i - (a + bx_i)]/\sigma, i = 1, 2, \dots, n,$$

即知 $V_1, V_2, \dots, V_n$ 相互独立. 引入向量

$$\mathbf{V} = (V_1, V_2, \dots, V_n)^T,$$

再取一个 n 阶正交矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})$, 它的前两行元素分别为

$$a_{1j} = 1/\sqrt{n}, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$a_{2j} = (x_j - \bar{x})/\sqrt{S_{xx}}, j = 1, 2, \dots, n.$$

令

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A}\mathbf{V},$$

其中 $\mathbf{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)^T$, 则 $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ 相互独立, 且 $Z_i \sim N(0, 1), i = 1, 2, \dots, n$ (参见第六章附录). 而且有

$$Z_1 = \sum_{j=1}^n a_{1j} V_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n V_j = \sqrt{n} \bar{V} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} [\bar{Y} - (a + b\bar{x})].$$

即得

$$\bar{Y} \sim N(a + b\bar{x}, \sigma^2/n).$$

即为 1° . 而

$$Z_2 = \sum_{j=1}^n a_{2j} V_j = \frac{\sum_{j=1}^n V_j (x_j - \bar{x})}{\sqrt{S_{xx}}} = \frac{\sum_{j=1}^n (Y_j - a - bx_j)(x_j - \bar{x})}{\sigma \sqrt{S_{xx}}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{j=1}^n Y_j (x_j - \bar{x}) - b \sum_{j=1}^n x_j (x_j - \bar{x})}{\sigma \sqrt{S_{xx}}} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(Y_j - \bar{Y}) - b \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2}{\sigma \sqrt{S_{xx}}} \\
&= \frac{(\hat{b} - b) \sqrt{S_{xx}}}{\sigma}.
\end{aligned}$$

即得 2°. 又

$$\begin{aligned}
Q_e &= \sum_{j=1}^n [Y_j - \bar{Y} - \hat{b}(x_j - \bar{x})]^2 \\
&= \sum_{j=1}^n [(Y_j - a - bx_j) - (\bar{Y} - a - b\bar{x}) - (\hat{b} - b)(x_j - \bar{x})]^2 \\
&= \sum_{j=1}^n \left[\sigma V_j - \sigma \bar{V} - \frac{\sigma Z_2 (x_j - \bar{x})}{\sqrt{S_{xx}}} \right]^2 \\
&= \sigma^2 \left[\sum_{j=1}^n (V_j - \bar{V})^2 + \frac{Z_2^2 \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2}{S_{xx}} - 2 \frac{Z_2 \sum_{j=1}^n (V_j - \bar{V})(x_j - \bar{x})}{\sqrt{S_{xx}}} \right] \\
&= \sigma^2 \left[\sum_{j=1}^n V_j^2 - n\bar{V}^2 + Z_2^2 - 2Z_2 \sum_{j=1}^n V_j (x_j - \bar{x}) / \sqrt{S_{xx}} \right].
\end{aligned}$$

由于 $\sum_{j=1}^n V_j^2 = \sum_{j=1}^n Z_j^2$ (参见第六章附录), 并注意到 $\sum_{j=1}^n V_j (x_j - \bar{x}) / \sqrt{S_{xx}} = Z_2$ 故有

$$Q_e = \sigma^2 \left(\sum_{j=1}^n Z_j^2 - Z_1^2 + Z_2^2 - 2Z_2^2 \right) = \sigma^2 \sum_{j=3}^n Z_j^2,$$

因此

$$\frac{Q_e}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2).$$

4° 得证. 又因 $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ 相互独立, 故 $Z_1, Z_2, (Z_3, \dots, Z_n)$ 相互独立. 而 $\bar{Y}, \hat{b}, Q_e$ 依次是 $Z_1, Z_2, (Z_3, \dots, Z_n)$ 的函数, 故 $\bar{Y}, \hat{b}, Q_e$ 独立. 即为 5°. 由 1°, 2°, 5° 易得 3°.

最后来证明 6°. 因 $Y_0 = a + bx_0 + \epsilon_0$ 与 $Y_1, \dots, Y_n$ 独立, 若记 $V_0 = \epsilon_0 / \sigma$, 则 $V_0 \sim N(0, 1)$, 且 $V_0, V_1, \dots, V_n$ 相互独立. 从而由

$$\begin{pmatrix} Z_0 \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V \end{pmatrix}$$

知各分量 $Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ 相互独立. 因 $Z_0 = V_0$, 故 $V_0, Z_1, Z_2, (Z_3, \dots, Z_n)$ 相互独立. 而 $Y_0, \bar{Y}, \hat{b}, Q_e$ 依次是 $V_0, Z_1, Z_2, (Z_3, \dots, Z_n)$ 的函数, 因而 $Y_0, \bar{Y}, \hat{b}, Q_e$ 相互独立. 从而 $Y_0, (\bar{Y}, \hat{b}), Q_e$ 相互独立, 故 $Y_0, \hat{Y}_0$ (它是 $\bar{Y}$ 与 $\hat{b}$ 的函数), Q_e 相互独立. 6° 得证.

习题

以下约定各个习题均符合涉及的方差分析模型或回归分析模型所要求的条件.

1. 今有某种型号的电池三批, 它们分别是 A、B、C 三个工厂所生产的. 为评比其质量, 各随机抽取 5 只电池为样品, 经试验得其寿命(h) 如下:

A		B		C	
40	42	26	28	39	50
48	45	34	32	40	50
38		30		43	

试在显著性水平 0.05 下检验电池的平均寿命有无显著的差异. 若差异是显著的, 试求均值差 $\mu_A - \mu_B$, $\mu_A - \mu_C$ 和 $\mu_B - \mu_C$ 的置信水平为 95% 的置信区间.

2. 为了寻找飞机控制板上仪器表的最佳布置, 试验了三个方案, 观察领航员在紧急情况下的反应时间(以 1/10 秒计), 随机地选择 28 名领航员, 得到他们对于不同的布置方案的反应时间如下:

方案 I	14	13	9	15	11	13	14	11				
方案 II	10	12	7	11	8	12	9	10	13	9	10	9
方案 III	11	5	9	10	6	8	8	7				

试在显著性水平 0.05 下检验各个方案的反应时间有无显著差异. 若有差异, 试求 $\mu_1 - \mu_2$, $\mu_1 - \mu_3$, $\mu_2 - \mu_3$ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

3. 某防治站对 4 个林场的松毛虫密度进行调查, 每个林场调查 5 块地得资料如下表:

地点	松毛虫密度(头 / 标准地)				
A_1	192	189	176	185	190
A_2	190	201	187	196	200
A_3	188	179	191	183	194
A_4	187	180	188	175	182

判断 4 个林场松毛虫密度有无显著差异, 取显著性水平 $\alpha = 0.05$.

4. 一试验用来比较 4 种不同药品解除外科手术后疼痛的延续时间(h), 结果如下表:

药品	时间长度(h)				
A	8	6	4	2	
B	6	6	4	4	
C	8	10	10	10	12
D	4	4	2		

试在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验各种药品对解除疼痛的延续时间有无显著差异.

5. 将抗生素注入人体产生抗生素与血浆蛋白质结合的现象,以致减少了药效.下表列出 5 种常用的抗生素注入牛的体内时,抗生素与血浆蛋白质结合的百分比.

青霉素	四环素	链霉素	红霉素	氯霉素
29.6	27.3	5.8	21.6	29.2
24.3	32.6	6.2	17.4	32.8
28.5	30.8	11.0	18.3	25.0
32.0	34.8	8.3	19.0	24.2

试在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验这些百分比的均值有无显著的差异.

6. 下表给出某种化工过程在三种浓度、四种温度水平下得率的数据:

		温度(因素 B)			
		10℃	24℃	38℃	52℃
浓度(因素 A)	2%	14 10	11 11	13 9	10 12
	4%	9 7	10 8	7 11	6 10
	6%	5 11	13 14	12 13	14 10

试在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验:在不同浓度下得率的均值是否有显著差异,在不同温度下得率的均值是否有显著差异,交互作用的效应是否显著.

7. 为了研究某种金属管防腐蚀的功能,考虑了 4 种不同的涂料涂层.将金属管埋设在 3 种不同性质的土壤中,经历了一定时间,测得金属管腐蚀的最大深度如下表所示(以 mm 计):

涂层(因素 A)	土壤类型(因素 B)		
	1	2	3
	1.63	1.35	1.27
	1.34	1.30	1.22
	1.19	1.14	1.27
	1.30	1.09	1.32

试取显著性水平 $\alpha = 0.05$ 检验在不同涂层下腐蚀的最大深度的平均值有无显著差异,在不同土壤下腐蚀的最大深度的平均值有无显著差异.设两因素间没有交互作用效应.

8. 下表数据是退火温度 $x(^{\circ}\text{C})$ 对黄铜延性 Y 效应的试验结果, Y 是以延长度计算的.

$x(^{\circ}\text{C})$	300	400	500	600	700	800
$y(\%)$	40	50	55	60	67	70

画出散点图并求 Y 对于 x 的线性回归方程.

9. 在钢线碳含量对于电阻的效应的研究中, 得到以下的数据:

碳含量 $x(\%)$	0.10	0.30	0.40	0.55	0.70	0.80	0.95
20℃ 时电阻 $y(\mu\Omega)$	15	18	19	21	22.6	23.8	26

(1) 画出散点图.

(2) 求线性回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$.

(3) 求 ϵ 的方差 σ^2 的无偏估计.

(4) 检验假设 $H_0: b = 0, H_1: b \neq 0$.

(5) 若回归效果显著, 求 b 的置信水平为 0.95 的置信区间.

(6) 求 $x = 0.50$ 处 $\mu(x)$ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

(7) 求 $x = 0.50$ 处观察值 Y 的置信水平为 0.95 的预测区间.

10. 下表列出了 18 名 5~8 岁儿童的体重(这是容易测得的)和体积(这是难以测量的):

体重 $x(\text{kg})$	17.1	10.5	13.8	15.7	11.9	10.4	15.0	16.0	17.8
体积 $y(\text{dm}^3)$	16.7	10.4	13.5	15.7	11.6	10.2	14.5	15.8	17.6
体重 $x(\text{kg})$	15.8	15.1	12.1	18.4	17.1	16.7	16.5	15.1	15.1
体积 $y(\text{dm}^3)$	15.2	14.8	11.9	18.3	16.7	16.6	15.9	15.1	14.5

(1) 画出散点图.

(2) 求 Y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$.

(3) 求 $x = 14.0$ 时 Y 的置信水平为 0.95 的预测区间.

11. 蟋蟀用一个翅膀在另一翅膀上快速地滑动, 从而发出吱吱喳喳的叫声. 生物学家知道叫声的频率 x 与气温 Y 具有线性关系. 下表列出了 15 对频率与气温间的对应关系的观察结果:

频率 x_i (叫声数 / 秒)	20.0	16.0	19.8	18.4	17.1	15.5	14.7	17.1
气温 y_i (℃)	31.4	22.0	34.1	29.1	27.0	24.0	20.9	27.8
频率 x_i (叫声数 / 秒)	15.4	16.2	15.0	17.2	16.0	17.0	14.4	
气温 y_i (℃)	20.8	28.5	26.4	28.1	27.0	28.6	24.6	

试求 Y 关于 x 的线性回归方程.

12. 下面列出了自 1952 年~2004 年各届奥林匹克运动会男子 10 000 米赛跑的冠军的成绩(时间以 min 计):

年份(x)	1952	1956	1960	1964	1968	1972	1976
成绩(y)	29.3	28.8	28.5	28.4	29.4	27.6	27.7
年份(x)	1980	1984	1988	1992	1996	2000	2004
成绩(y)	27.7	27.8	27.4	27.8	27.1	27.3	27.1

(1) 求 Y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$.

(2) 检验假设 $H_0: b = 0, H_1: b \neq 0$ (显著性水平 $\alpha = 0.05$)

(3) 求 2008 年冠军成绩的预测值.

13. 以 x 与 Y 分别表示人的脚长(英寸①)与手长(英寸),下面列出了 15 名女子的脚的长度 x 与手的长度 Y 的样本值:

x	9.00	8.50	9.25	9.75	9.00	10.00	9.50	9.00
y	6.50	6.25	7.25	7.00	6.75	7.00	6.50	7.00
x	9.25	9.50	9.25	10.00	10.00	9.75	9.50	
y	7.00	7.00	7.00	7.50	7.25	7.25	7.25	

试求(1) Y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$.

(2) 求 b 的置信水平为 0.95 的置信区间.

14. 槲寄生是一种寄生在大树上部树枝上的寄生植物.它喜欢寄生在年轻的大树上.下面给出在一定条件下完成的试验中采集的数据:

大树的年龄 x (年)	3	4	9	15	40
每株大树上槲寄生的株数 y	28	10	15	6	1
	33	36	22	14	1
	22	24	10	9	

(1) 作出 (x_i, y_i) 的散点图.

(2) 令 $z_i = \ln y_i$, 作出 (x_i, z_i) 的散点图.

(3) 以模型 $Y = ae^{bx}\epsilon$, $\ln \epsilon \sim N(0, \sigma^2)$ 拟合数据, 其中 a, b, σ^2 与 x 无关. 试求曲线回归方程 $\hat{y} = \hat{a}\exp(\hat{b}x)$.

15. 一种合金在某种添加剂的不同浓度之下,各做三次试验,得数据如下:

浓度 x	10.0	15.0	20.0	25.0	30.0
抗压强度 y	25.2	29.8	31.2	31.7	29.4
	27.3	31.1	32.6	30.1	30.8
	28.7	27.8	29.7	32.3	32.8

① 1 英寸 = 2.54 厘米.

(1) 作散点图.

(2) 以模型 $Y = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \epsilon, \epsilon \sim N(0, \sigma^2)$ 拟合数据, 其中 b_0, b_1, b_2, σ^2 与 x 无关.

求回归方程 $\hat{y} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1x + \hat{b}_2x^2$.

16. 某种化工产品的得率 Y 与反应温度 x_1 、反应时间 x_2 及某反应物浓度 x_3 有关. 今得试验结果如下表所示, 其中 x_1, x_2, x_3 均为二水平且均以编码形式表达.

x_1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
x_2	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
x_3	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
得率	7.6	10.3	9.2	10.2	8.4	11.1	9.8	12.6

(1) 设 $\mu(x_1, x_2, x_3) = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$, 求 Y 的多元线性回归方程.

(2) 若认为反应时间不影响得率, 即认为

$$\mu(x_1, x_2, x_3) = \beta_0 + \beta_1x_1 + \beta_3x_3,$$

求 Y 的多元线性回归方程.



第十章 bootstrap 方法

§ 1 非参数 bootstrap 方法

设总体的分布 F 未知,但已经有一个容量为 n 的来自分布 F 的数据样本,自这一样本按放回抽样的方法抽取一个容量为 n 的样本,这种样本称为 **bootstrap 样本**或称为**自助样本**.相继地、独立地自原始样本中取很多个 bootstrap 样本,利用这些样本对总体 F 进行统计推断.这种方法称为**非参数 bootstrap 方法**,又称**自助法**.这一方法可以用于当人们对总体知之甚少情况,它是近代统计中的一种用于数据处理的重要实用方法.这种方法的实现需要在计算机上作大量的计算,随着计算机威力的增长,它已成为一种流行的方法.

bootstrap 方法是 Efron 在 20 世纪 70 年代后期建立的.

(一) 估计量的标准误差的 bootstrap 估计

在估计总体未知参数 θ 时,人们不但要给出 θ 的估计 $\hat{\theta}$,还需指出这一估计 $\hat{\theta}$ 的精度.通常我们用估计量 $\hat{\theta}$ 的标准差 $\sqrt{D(\hat{\theta})}$ 来度量估计的精度.估计量 $\hat{\theta}$ 的标准差 $\sigma_{\hat{\theta}} = \sqrt{D(\hat{\theta})}$ 也称为估计量 $\hat{\theta}$ 的标准误差.

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自以 $F(x)$ 为分布函数的总体的样本, θ 是我们感兴趣的未知参数,用 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 作为 θ 的估计量,在应用中 $\hat{\theta}$ 的抽样分布常是很难处理的,这样, $\sqrt{D(\hat{\theta})}$ 常没有一个简单的表达式,不过我们可以用计算机模拟的方法来求得 $\sqrt{D(\hat{\theta})}$ 的估计.为此,自 F 产生很多容量为 n 的样本(例如 B 个),对于每一个样本计算 $\hat{\theta}$ 的值,得 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_B$,则 $\sqrt{D(\hat{\theta})}$ 可以用

$$\hat{\sigma}_{\hat{\theta}} = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{i=1}^B (\hat{\theta}_i - \bar{\theta})^2} \quad (1.1)$$

来估计,其中 $\bar{\theta} = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \hat{\theta}_i$.然而 F 常常是未知的,这样就无法产生模拟样本,不能得到(1.1)式的结果,需要另外的方法.

现在设分布 F 未知, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是来自 F 的样本值, F_n 是相应的经验分

布函数. 当 n 很大时, F_n 接近 F (见第六章 § 3 格里汶科定理). 我们用 F_n 代替上一段中的 F , 在 F_n 中抽样. 在 F_n 中抽样, 就是在原始样本 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 中每次随机地取一个个体作放回抽样. 如此得到一个容量为 n 的样本 $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$. 这就是第一段中所说的 bootstrap 样本. 用 bootstrap 样本按上一段中计算估计 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 那样求出 θ 的估计 $\hat{\theta}^* = \hat{\theta}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, 估计 $\hat{\theta}^*$ 称为 θ 的 bootstrap 估计. 相继地、独立地抽得 B 个 bootstrap 样本, 以这些样本分别求出 θ 的相应的 bootstrap 估计如下:

bootstrap 样本 1 $x_1^{*1}, x_2^{*1}, \dots, x_n^{*1}$, bootstrap 估计 $\hat{\theta}_1^*$

bootstrap 样本 2 $x_1^{*2}, x_2^{*2}, \dots, x_n^{*2}$, bootstrap 估计 $\hat{\theta}_2^*$

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

bootstrap 样本 B $x_1^{*B}, x_2^{*B}, \dots, x_n^{*B}$, bootstrap 估计 $\hat{\theta}_B^*$

则 $\hat{\theta}$ 的标准误差 $\sqrt{D(\hat{\theta})}$, 就以

$$\hat{\sigma}_{\hat{\theta}} = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{i=1}^B (\hat{\theta}_i^* - \bar{\theta}^*)^2} \quad (1.2)$$

来估计, 其中 $\bar{\theta}^* = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \hat{\theta}_i^*$. (1.2) 式就是 $\sqrt{D(\hat{\theta})}$ 的 bootstrap 估计.

综上所述得到求 $\sqrt{D(\hat{\theta})}$ 的 bootstrap 估计的步骤是

1° 自原始数据样本 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 按放回抽样的方法, 抽得容量为 n 的样本 $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ (称为 bootstrap 样本);

2° 相继地、独立地求出 B 个 ($B \geq 1000$) 容量为 n 的 bootstrap 样本, $\mathbf{x}^{*i} = (x_1^{*i}, x_2^{*i}, \dots, x_n^{*i})$, $i=1, 2, \dots, B$. 对于第 i 个 bootstrap 样本, 计算 $\hat{\theta}_i^* = \hat{\theta}(x_1^{*i}, x_2^{*i}, \dots, x_n^{*i})$, $i=1, 2, \dots, B$ ($\hat{\theta}_i^*$ 称为 θ 的第 i 个 bootstrap 估计.)

3° 计算

$$\hat{\sigma}_{\hat{\theta}} = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{i=1}^B (\hat{\theta}_i^* - \bar{\theta}^*)^2}, \quad \text{其中 } \bar{\theta}^* = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \hat{\theta}_i^*.$$

例 1 某种基金的年回报率是具有分布函数 F 的连续型随机变量, F 未知, F 的中位数 θ 是未知参数. 现有以下的数据(%率):

18.2 9.5 12.0 21.1 10.2

以样本中位数作为总体中位数 θ 的估计. 试求中位数估计的标准误差的 bootstrap 估计.

解 将原始样本自小到大排序, 中间一个数为 12.0, 得样本中位数为 12.0.

相继地、独立地在上述 5 个数据中, 按放回抽样的方法取样, 取 $B=10$ 得到

下述 10 个 bootstrap 样本:①

样本 1	9.5	18.2	12.0	10.2	18.2
样本 2	21.1	18.2	12.0	9.5	10.2
样本 3	21.1	10.2	10.2	12.0	10.2
样本 4	18.2	12.0	9.5	18.2	10.2
样本 5	21.1	12.0	18.2	12.0	18.2
样本 6	10.2	10.2	9.5	21.1	10.2
样本 7	9.5	21.1	12.0	10.2	12.0
样本 8	10.2	18.2	10.2	21.1	21.1
样本 9	10.2	10.2	18.2	18.2	18.2
样本 10	18.2	10.2	18.2	10.2	10.2

对以上每个 bootstrap 样本,求得样本中位数分别为

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_1^* &= 12.0, \hat{\theta}_2^* = 12.0, \hat{\theta}_3^* = 10.2, \hat{\theta}_4^* = 12.0, \hat{\theta}_5^* = 18.2, \\ \hat{\theta}_6^* &= 10.2, \hat{\theta}_7^* = 12.0, \hat{\theta}_8^* = 18.2, \hat{\theta}_9^* = 18.2, \hat{\theta}_{10}^* = 10.2,\end{aligned}$$

于是以原始样本确定的样本中位数 $\hat{\theta} = 12.0$ 作为总体中位数 θ 的估计,由(1.2)式知其标准误差的 bootstrap 估计为

$$\hat{\sigma}_{\hat{\theta}} = \sqrt{\frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (\hat{\theta}_i^* - \bar{\theta}^*)^2} = 3.4579. \quad \square$$

本题中取 $B=10$,这只是为了说明计算方法,是不能实际运用的,在实际中应取 $B \geq 1000$.

(二) 估计量的均方误差及偏差的 bootstrap 估计

设 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是来自总体 F 的样本, F 未知, $R = R(\mathbf{X})$ 是感兴趣

① 一般是用计算机取样,这里因 $n=5, B=10$ 较小,可利用随机数表(这种数表载有很多伪随机数)进行取样,具体做法如下:

先将原始样本的个体自左至右编号为 1, 2, 3, 4, 5. 需产生分布律为 $P\{X=i\} = \frac{1}{5}, i=1, 2, 3, 4, 5$ 的 5 个随机数. 为此先在随机数表中得到 5 个伪随机数

$$0.21500 \quad 0.01011 \quad 0.47435 \quad 0.91312 \quad 0.12775$$

于是得分布 $P\{X=i\} = \frac{1}{5}, i=1, 2, 3, 4, 5$ 的 5 个随机数

$$\begin{aligned}x_1 &= [5 \times 0.21500] + 1 = 2, \quad x_2 = [5 \times 0.01011] + 1 = 1, \quad x_3 = [5 \times 0.47435] + 1 = 3, \\ x_4 &= [5 \times 0.91312] + 1 = 5, \quad x_5 = [5 \times 0.12775] + 1 = 1\end{aligned}$$

即 2, 1, 3, 5, 1, 于是得对应的本题的样本

$$9.5 \quad 18.2 \quad 12.0 \quad 10.2 \quad 18.2$$

这就是这里的样本 1. (参见第 377 页参读材料例 2)

的随机变量,它依赖于样本 $\mathbf{X}$. 假设我们希望去估计 R 的分布的某些特征,例如 R 的数学期望 $E_F(R)$ ①,就可以按照上面所说的三个步骤 1°, 2°, 3° 进行,只是在 2° 中对于第 i 个 bootstrap 样本 $\mathbf{x}_i^* = (x_1^{*i}, x_2^{*i}, \dots, x_n^{*i})$, 计算 $R_i^* = R(\mathbf{x}_i^*)$ 代替计算 θ_i^* , 且在 3° 中计算感兴趣的 R 的特征. 例如如果希望估计 $E_F(R)$ 就计算

$$E_*(R^*)^{②} = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B R_i^*.$$

例 2(均方误差) 设金属元素铂的升华热是具有分布函数 F 的连续型随机变量, F 的中位数 θ 是未知参数, 现测得以下的数据(以 kcal/mol 计)③:

136.3 136.6 135.8 135.4 134.7 135.0 134.1 143.3 147.8
148.8 134.8 135.2 134.9 149.5 141.2 135.4 134.8 135.8
135.0 133.7 134.4 134.9 134.8 134.5 134.3 135.2

以样本中位数 $M = M(\mathbf{X})$ 作为总体中位数 θ 的估计, 试求均方误差 $MSE = E[(M - \theta)^2]$ 的 bootstrap 估计.

解 将原始样本自小到大排序, 左起第 13 个数为 135.0, 左起第 14 个数为 135.2, 于是样本中位数为 $\frac{1}{2}(135.0 + 135.2) = 135.1$. 以 135.1 作为总体中位数 θ 的估计, 即 $\hat{\theta} = 135.1$. 取 $R = R(\mathbf{X}) = (M - \hat{\theta})^2$, 需估计 $R(\mathbf{X})$ 的均值 $E[(M - \hat{\theta})^2]$.

相继地、独立地抽取 10 000 个 bootstrap 样本如下:

样本 1

133.2 134.1 134.1 134.1 134.8 134.8 134.8 134.9 134.9
134.9 135.0 135.2 135.2 135.4 135.4 135.8 135.8 136.3
136.3 136.6 136.6 141.2 143.3 143.3 147.8 148.8

得样本中位数为 135.3

⋮

样本 10 000

134.3 134.5 134.5 134.5 134.7 134.8 134.8 134.8 134.8
134.8 134.9 134.9 134.9 134.9 135.0 135.4 135.4 135.4
135.4 135.4 135.8 136.6 146.5 146.5 147.8 148.8

得样本中位数为 134.9

对于用第 i 个样本计算

$$R_i^* = R(\mathbf{x}_i^*) = (M_i^* - \hat{\theta})^2 = (M_i^* - 135.1)^2, i = 1, 2, \dots, 10\,000.$$

① $E_F(R)$ 表示以 F 为分布函数时 R 的数学期望.

② $E_*(R^*)$ 表示以 F_n 为分布函数时 R^* 的数学期望.

③ 1 千卡/摩尔 = 4 186.8 焦耳/摩尔 (1 kcal/mol = 4 186.8 J/mol).

即有对于样本 1 $(M_1^* - 135.1)^2 = (135.3 - 135.1)^2 = 0.04$,

⋮

对于样本 10 000 $(M_{10\,000}^* - 135.1)^2 = (134.9 - 135.1)^2 = 0.04$.

用这 10 000 个数的平均值

$$\frac{1}{10\,000} \sum_{i=1}^{10\,000} (M_i^* - 135.1)^2 = 0.07$$

近似 $E[(M - \theta)^2]$, 即得 $MSE[(M - \theta)^2]$ 的 bootstrap 估计为 0.07.

例 3(偏差) 设 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是来自总体 F 的样本, $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是参数 θ 的估计量, θ 的估计 $\hat{\theta}$ 关于 θ 的偏差定义为

$$b = E(\hat{\theta} - \theta) = E(\hat{\theta}) - \theta. \quad (1.3)$$

当 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计时 $b = 0$.

试在例 2 中, 以样本中位数 $M = M(\mathbf{X})$ 作为总体 F 的中位数 θ 的估计, 求偏差 $b = E(M - \theta)$ 的 bootstrap 估计.

由例 2 知原始样本的中位数为 135.1. 以 135.1 作为总体中位数 $R = \theta$ 的估计, 即 $\hat{\theta} = 135.1$, 取 $R = R(\mathbf{X}) = M - \hat{\theta}$, 需估计 $R(\mathbf{X})$ 的均值 $E(M - \hat{\theta})$. 对于例 2 中第 i 个样本计算

$$R_i^* = R(\mathbf{x}^*) = (M_i^* - \hat{\theta}) = (M_i^* - 135.1), i = 1, 2, \dots, 10\,000.$$

即有对于样本 1 $M_1^* - 135.1 = 0.02$.

⋮

⋮

对于样本 10 000 $M_{10\,000}^* - 135.1 = -0.02$.

将上述 10 000 个数取平均值得到偏差 b 的 bootstrap 估计为

$$\begin{aligned} b^* &= \frac{1}{10\,000} \sum_{i=1}^{10\,000} (M_i^* - 135.1) = \frac{1}{10\,000} \sum_{i=1}^{10\,000} M_i^* - 135.1 \\ &= 135.14 - 135.1 = 0.04. \end{aligned}$$

□

(三) bootstrap 置信区间

下面介绍一种求未知参数 θ 的 bootstrap 置信区间的方法.

设 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是来自总体 F 容量为 n 的样本, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是一个已知的样本值. F 中含有未知参数 θ , $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是 θ 的估计量. 现在来求 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间.

相继地、独立地从样本 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 中抽出 B 个容量为 n 的 bootstrap 样本, 对于每个 bootstrap 样本求出 θ 的 bootstrap 估计: $\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \dots, \hat{\theta}_B^*$. 将它们自小到大排序, 得

$$\hat{\theta}_{(1)}^* \leq \hat{\theta}_{(2)}^* \leq \cdots \leq \hat{\theta}_{(B)}^*. \quad (1.4)$$

取 $R(\mathbf{X}) = \hat{\theta}$, 用对应的 $R(\mathbf{X}^*) = \hat{\theta}^*$ 的分布作为 $R(\mathbf{X})$ 的分布的近似, 求出 $R(\mathbf{X}^*)$ 的分布的近似分位数 $\hat{\theta}_{\alpha/2}^*$ 和 $\hat{\theta}_{1-\alpha/2}^*$ 使

$$P\{\hat{\theta}_{\alpha/2}^* < \hat{\theta}^* < \hat{\theta}_{1-\alpha/2}^*\} = 1 - \alpha,$$

于是近似地有

$$P\{\hat{\theta}_{\alpha/2}^* < \theta < \hat{\theta}_{1-\alpha/2}^*\} = 1 - \alpha. \quad (1.5)$$

记 $k_1 = \left[B \times \frac{\alpha}{2} \right]$, $k_2 = \left[B \times \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right]$, 在 (1.5) 式中以 $\hat{\theta}_{(k_1)}^*$ 和 $\hat{\theta}_{(k_2)}^*$ 分别作为分位数 $\hat{\theta}_{\alpha/2}^*$, $\hat{\theta}_{1-\alpha/2}^*$ 的估计, 得到近似等式

$$P\{\hat{\theta}_{(k_1)}^* < \theta < \hat{\theta}_{(k_2)}^*\} = 1 - \alpha. \quad (1.6)$$

于是由上式就得到 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的近似置信区间

$$(\hat{\theta}_{(k_1)}^*, \hat{\theta}_{(k_2)}^*) \quad (1.7)$$

这一区间称为 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的 **bootstrap 置信区间**. 这种求置信区间的方法称为分位数法.

例 4 在例 2 中

(1) 以样本中位数作为总体中位数 θ 的估计求 θ 的置信水平为 0.95 的 bootstrap 置信区间;

(2) 以样本 20% 截尾均值作为总体 20% 截尾均值 μ_t 的估计, 求 μ_t 的置信水平为 0.95 的 bootstrap 置信区间.

解 $n=26$, $B=10\,000$, 原始样本以及 10 000 个模拟 bootstrap 样本见例 2.

(1) 对于每一个 bootstrap 样本算出中位数 $M_1^*, M_2^*, \dots, M_{10\,000}^*$. 将它们自小到大排序得到

$$M_{(1)}^* \leq M_{(2)}^* \leq \cdots \leq M_{(250)}^* \leq M_{(251)}^* \leq \cdots \leq M_{(9\,750)}^* \leq M_{(9\,751)}^* \leq \cdots \leq M_{(10\,000)}^*.$$

由 $B=10\,000$, $1-\alpha=0.95$, $\alpha=0.05$,

$$k_1 = \left[10\,000 \times \frac{0.05}{2} \right] = 250, k_2 = \left[10\,000 \times \left(1 - \frac{0.05}{2} \right) \right] = 9\,750. \text{ bootstrap}$$

置信区间为

$$(M_{(250)}^*, M_{(9\,750)}^*) = (134.8, 135.8).$$

(2) 对于例 2 中的 10 000 个 bootstrap 样本中的每一个, 算出样本 20% 截尾均值: $\bar{x}_{t1}^*, \bar{x}_{t2}^*, \dots, \bar{x}_{t10\,000}^*$, 将它们自小到大排序得到

$$\begin{aligned} \bar{x}_{t(1)}^* &\leq \bar{x}_{t(2)}^* \leq \cdots \leq \bar{x}_{t(250)}^* \leq \bar{x}_{t(251)}^* \leq \cdots \leq \bar{x}_{t(9\,750)}^* \\ &\leq \bar{x}_{t(9\,751)}^* \leq \cdots \leq \bar{x}_{t(10\,000)}^*. \end{aligned}$$

按分位数法由 (1.7) 式得到 20% 截尾均值的一个置信水平为 0.95 的 bootstrap

置信区间为

$$(\bar{x}_{r(250)}^*, \bar{x}_{r(9750)}^*) = (134.85, 136.92).$$

□

例 5 有 30 窝仔猪出生时各窝猪的存活只数为

9 8 10 12 11 12 7 9 11 8 9 7 7 8 9 7
9 9 10 9 9 9 12 10 10 9 13 11 13 9

以样本均值 $\bar{x}$ 作为总体均值 μ 的估计, 以样本标准差 s 作为总体标准差 σ 的估计, 按分位数法求 μ 以及 σ 的置信水平为 0.90 的 bootstrap 置信区间.

解 相继地、独立地自原始样本数据用放回抽样的方法, 得到 10 000 个容量均为 30 的 bootstrap 样本:

样本 1

8 8 10 12 7 11 11 8 10 12 7 9 10 8 9 11 10
13 9 9 9 10 8 13 8 9 9 7 10 8
⋮ ⋮

样本 10 000

9 10 7 10 9 7 9 7 10 7 9 9 13 11 12 10
12 12 10 9 8 11 9 9 9 11 12 11 12 9

对上述每个 bootstrap 样本算出样本均值 $\bar{x}_i^*$ ($i=1, 2, \dots, 10\,000$), 将 10 000 个 $\bar{x}_i^*$ 按自小到大排序, 左起第 500 位为 $\bar{x}_{(500)}^* = 9.03$, 左起第 9 500 位为 $\bar{x}_{(9\,500)}^* = 10.038$. 于是按 (1.7) 式得 μ 的一个置信水平为 0.90 的 bootstrap 置信区间为

$$(\bar{x}_{(500)}^*, \bar{x}_{(9\,500)}^*) = (9.03, 10.038).$$

对上述 10 000 个 bootstrap 样本的每一个算出标准差 s_i^* ($i=1, 2, \dots, 10\,000$), 将 10 000 个 s_i^* 按自小到大排序. 左起第 500 位为 $s_{(500)}^* = 1.35$, 左起第 9 500 位为 $s_{(9\,500)}^* = 1.98$, 于是按 (1.7) 式得 σ 的一个置信水平为 0.90 的 bootstrap 置信区间为

$$(s_{(500)}^*, s_{(9\,500)}^*) = (1.35, 1.98).$$

□

(四) 用 bootstrap- t 法求均值 μ 的 bootstrap 的置信区间

设 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是来自总体 F 的容量为 n 的样本, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是一个已知的样本值. 均值 μ 和方差 σ^2 均为未知参数, 我们要利用样本值 $\mathbf{x}$ 来估计 μ .

考虑函数

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}, \quad (1.8)$$

在第七章 §5 中假设总体 F 具有正态分布, 此时 t 的分布与参数 μ 无关, 它是一个枢轴量而且有 $t \sim t(n-1)$, 利用枢轴量 t , 就能求得 μ 的置信区间. 现在, 总体 F 不具有正态分布, 但可证 t 仍是一个枢轴量. 然而 t 的分布就不是 $t(n-1)$ 分布, 这样就不能按第七章的方法求得 μ 的置信区间了, 下面我们用 bootstrap 方法来求 μ 的近似置信区间.

以原始样本 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的样本均值 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ 作为 μ 的估计, 考虑与 t 相应的枢轴量

$$W^* = \frac{\bar{X}^* - \bar{x}}{S^* / \sqrt{n}}, \quad (1.9)$$

此处 $\bar{X}^*, S^*$ 分别为与 $\bar{X}, S$ 相应的 bootstrap 样本均值与样本标准差. 用 W^* 的分布近似 t 的分布, 求出 W^* 的近似分位数 $w_{\alpha/2}^*, w_{1-\alpha/2}^*$, 使

$$P\left\{w_{\alpha/2}^* < \frac{\bar{X}^* - \bar{x}}{S^* / \sqrt{n}} < w_{1-\alpha/2}^*\right\} = 1 - \alpha. \quad (1.10)$$

于是近似地有

$$P\left\{w_{\alpha/2}^* < \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} < w_{1-\alpha/2}^*\right\} = 1 - \alpha$$

$$\text{或即} \quad P\left\{\bar{X} - w_{1-\alpha/2}^* \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} - w_{\alpha/2}^* \frac{S}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha. \quad (1.11)$$

将 W^* 的 B 个 bootstrap 值从小到大排序

$$w_{(1)}^* \leq w_{(2)}^* \leq \dots \leq w_{(B)}^*,$$

记 $k_1 = \left\lceil B \times \frac{\alpha}{2} \right\rceil, k_2 = \left\lceil B \times \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \right\rceil$, 在 (1.11) 式中以 $w_{(k_1)}^*$ 和 $w_{(k_2)}^*$ 分别作为分位数 $w_{\alpha/2}^*, w_{1-\alpha/2}^*$ 的估计, 由 (1.11) 式得到近似等式

$$P\left\{\bar{X} - w_{(k_2)}^* \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} - w_{(k_1)}^* \frac{S}{\sqrt{n}}\right\} = 1 - \alpha. \quad (1.12)$$

由 (1.12) 式得到 μ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的 bootstrap 置信区间

$$\left(\bar{X} - w_{(k_2)}^* \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} - w_{(k_1)}^* \frac{S}{\sqrt{n}}\right). \quad (1.13)$$

这一方法称为 **bootstrap-t 法**.

例 6 在例 5 中用 bootstrap-t 法求 μ 的置信水平为 0.90 的置信区间.

解 原始样本以及 10 000 个模拟 bootstrap 样本见例 5. 在原始样本中 $n = 30, \bar{x} = 9.53, s = 1.72, s^2 = 2.95$.

对于第 i 个 ($i = 1, 2, \dots, 10\,000 = B$) bootstrap 样本, 求出它的均值 $\bar{x}_i^*$ 和

样本标准差 s_i^* , 从而得到 w_i^* 的第 i 个值

$$w_i^* = \frac{\bar{x}_i^* - \bar{x}}{s_i^* / \sqrt{n}}, \quad i=1, 2, \dots, 10\,000.$$

其中 $\bar{x}$ 是由原始样本确定的样本均值. 将 w_i^* 自小到大排序得到

$$w_{(1)}^* \leq w_{(2)}^* \leq \dots \leq w_{(10\,000)}^*.$$

取置信水平 $1-\alpha=0.90$, 此时 $\alpha=0.10$, $\alpha/2=0.05$, $1-\alpha/2=0.95$. 取 $k_1 = \left[B \times \frac{\alpha}{2} \right] = 500$, $k_2 = \left[B \times (1 - \frac{\alpha}{2}) \right] = 9\,500$, 得 $w_{(500)}^* = -1.781\,3$, $w_{(9\,500)}^* = 1.629\,9$. 于是按(1.13)式得到 μ 的置信水平为 0.90 的 bootstrap- t 置信区间为

$$\left(9.53 - 1.629\,9 \times \frac{1.72}{\sqrt{30}}, \quad 9.53 + 1.781\,3 \times \frac{1.72}{\sqrt{30}} \right) = (9.018\,2, \quad 10.089\,4).$$

□

用非参数 bootstrap 法来求参数的近似置信区间的优点是, 不需要对总体分布的类型作任何的假设, 而且可以适用于小样本, 且能用于各种统计量 (不限于样本均值).

以上介绍的 bootstrap 方法, 没有假设所研究的总体的分布函数 F 的形式, bootstrap 样本是来自已知的数据 (原始样本), 所以称之为 **非参数 bootstrap 方法**.

§ 2 参数 bootstrap 方法

假设所研究的总体的分布函数 $F(x; \beta)$ 的形式已知, 但其中包含未知参数 β (β 可以是向量). 现在已知有一个来自 $F(x; \beta)$ 的样本

$$X_1, X_2, \dots, X_n.$$

利用这一样本求出 β 的最大似然估计 $\hat{\beta}$. 在 $F(x; \beta)$ 中以 $\hat{\beta}$ 代替 β 得到 $F(x; \hat{\beta})$, 接着在 $F(x; \hat{\beta})$ 中产生容量为 n 的样本

$$X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^* \sim F(x; \hat{\beta}) \text{ ①.}$$

这种样本可以产生很多个, 例如产生 B 个 ($B \geq 1\,000$), 就可以利用这些样本对总体进行统计推断, 其做法与非参数 bootstrap 方法一样. 这种方法称为 **参数 bootstrap 法**.

例 1 已知某种电子元件的寿命 (以 h 计) 服从韦布尔分布, 其分布函数为

① 意指样本 $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$ 来自以 $F(x; \hat{\beta})$ 为分布函数的总体.

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x/\eta)^\beta}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad \beta > 0, \eta > 0.$$

概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\eta^\beta} x^{\beta-1} e^{-(x/\eta)^\beta}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

已知参数 $\beta=2$. 今有样本

142.84 97.04 32.46 69.14 85.67 114.43 41.76 163.07 108.22 63.28

(1) 确定参数 η 的最大似然估计.

(2) 对于时刻 $t_0=50$, 求可靠性 $R(50)=1-F(50)=e^{-(50/\eta)^2}$ 的置信水平分别为 0.95, 0.90 的 bootstrap 单侧置信下限.

解 (1) 设有样本 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 似然函数为 (已将 $\beta=2$ 代入)

$$L = \prod_{i=1}^n \frac{2}{\eta^2} x_i e^{-(x_i/\eta)^2} = \frac{2^n}{\eta^{2n}} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2 / \eta^2},$$

$$\ln L = C + [-2n \ln \eta - \frac{1}{\eta^2} \sum_{i=1}^n x_i^2], \quad C \text{ 为常数.}$$

令 $\frac{d}{d\eta} \ln L = 0$ 得

$$-\frac{2n}{\eta} + \frac{2}{\eta^3} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0,$$

$$\hat{\eta} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}.$$

以数据代入得 η 的最大似然估计为 $\hat{\eta}=100.0696$.

(2) 先说一下如何产生韦布尔分布的随机数. 设 $U \sim U(0,1)$, 令 $U=1-e^{-(X/\eta)^2}$, 解得

$$X = \eta [-\ln(1-U)]^{1/2}.$$

因 $1-U \sim U(0,1)$, 故

$$X = \eta [-\ln U]^{1/2}$$

也具有参数 $\beta=2, \eta$ 的韦布尔分布. 以 $\hat{\eta}=100.0696$ 作为 η , 按 $X=100.0696[-\ln U]^{1/2}$ 就能产生韦布尔分布的随机数. 以 $F(x, \hat{\eta})=F(x, 100.0696)$ 为分布函数产生 5 000 个容量为 10 的 bootstrap 样本:

样本 1 $x_1^{*1}, x_2^{*1}, \dots, x_{10}^{*1}$, 得 η 的 bootstrap 估计

$$\eta_1^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i^{*1})^2}{10}}.$$

⋮

样本 5 000 $x_1^{*5\,000}, x_2^{*5\,000}, \dots, x_{10}^{*5\,000}$, 得 η 的 bootstrap 估计

$$\eta_{5\,000}^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i^{*5\,000})^2}{10}}.$$

将以上 5 000 个 η_i^* 自小到排序, 取左起第 250 位, 得

$$\hat{\eta}_{(250)}^* = 73.257\,36,$$

取左起第 500 位得

$$\hat{\eta}_{(500)}^* = 79.036\,52.$$

于是在 $t=50$ 时, 可靠性 $R(50)$ 的置信水平为 0.95 的 bootstrap 单侧置信下限为

$$e^{-(50/\hat{\eta}_{(250)}^*)^2} = 0.627\,6.$$

在 $t=50$ 时, 可靠性 $R(50)$ 的置信水平为 0.90 的 bootstrap 单侧置信下限为

$$e^{-(50/\hat{\eta}_{(500)}^*)^2} = 0.670\,2. \quad \square$$

例 2 据 Hardy-Weinberg 定律, 若基因频率处于平衡状态, 则在一总体中个体具有血型 M 、 MN 、 N 的概率分别是 $(1-\theta)^2$, $2\theta(1-\theta)$, θ^2 , 其中 $0 < \theta < 1$. 据 1937 年对香港地区的调查有以下的数:

血型	M	MN	N	
人数	342	500	187	共 1 029

(1) 求 θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}$;

(2) 求 θ 的置信水平为 0.90 的 bootstrap 置信区间.

解 分别记 x_1, x_2, x_3 为具有血型为 M, MN, N 的人数, 记 $x_1 + x_2 + x_3 = n$. 似然函数为

$$\begin{aligned} L &= [(1-\theta)^2]^{x_1} [2\theta(1-\theta)]^{x_2} [\theta^2]^{x_3} \\ &= 2^{x_2} \theta^{x_2+2x_3} (1-\theta)^{2x_1+x_2}, \end{aligned}$$

$$\ln L = x_2 \ln 2 + (x_2 + 2x_3) \ln \theta + (2x_1 + x_2) \ln(1-\theta).$$

$$\text{令 } \frac{d}{d\theta} \ln L = \frac{x_2 + 2x_3}{\theta} + \frac{-(2x_1 + x_2)}{1-\theta} = 0,$$

$$\text{解得 } \hat{\theta} = \frac{x_2 + 2x_3}{2x_1 + 2x_2 + 2x_3} = \frac{x_2 + 2x_3}{2n}.$$

以数据 $x_1 = 342, x_2 = 500, x_3 = 187, n = 1\,029$, 代入得到 $\hat{\theta} = 0.424\,7$. 以 $\hat{\theta}$ 代替 θ , 得到 $(1-\theta)^2 = 0.331, 2\theta(1-\theta) = 0.489, \theta^2 = 0.180$. 于是血型的近似分布律为

血型	M	MN	N
概率	0.331	0.489	0.180

(2.1)

以(2.1)为分布律产生 1 000 个 bootstrap 样本,从而得到 θ 的 1 000 个 bootstrap 估计 $\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \dots, \hat{\theta}_{1\,000}^*$. 将这 1 000 个数按自小到大的次序排序得到

$$\hat{\theta}_{(1)}^* \leq \hat{\theta}_{(2)}^* \leq \dots \leq \hat{\theta}_{(50)}^* \leq \dots \leq \hat{\theta}_{(950)}^* \leq \dots \leq \hat{\theta}_{(1\,000)}^*.$$

取 $(\hat{\theta}_{(50)}^*, \hat{\theta}_{(950)}^*) = (0.378\,5, 0.409\,6)$ 为 θ 的置信水平为 0.90 的 bootstrap 置信区间. $\square$

小结

设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是来自分布函数为 F 的总体的样本, F 未知. $R(x)$ 是 x 的函数, F_n 是相应的经验分布函数. 假如我们感兴趣的是 $R(x)$ 的某些特征, 例如 R 的均值或中位数. 非参数 bootstrap 方法的第一步是用已知的经验分布函数 F_n 代替 F , 在 F_n 中抽样, 得到数据样本 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, 然后计算 $R(x^*)$ 的均值或中位数, 作为所需求的均值或中位数的估计 (bootstrap 估计). 通常的情况, $R(x^*)$ 的分布过于复杂, 不能用解析的方法计算得到 $R(x^*)$ 的特征, 而需要采用模拟的方法. 在参数 bootstrap 方法中 $F = F(x; \beta)$ 的形式已知, 但包含未知参数 β . 先利用样本 x 求出 β 的最大似然估计 $\hat{\beta}$, 以 $F(x; \hat{\beta})$ 代替 F , 在 $F(x; \hat{\beta})$ 中抽样得到数据样本 x^* , 然后计算 $R(x^*)$ 的均值或中位数, 作为所需求的均值或中位数的 bootstrap 估计. 非参数和参数 bootstrap 方法可用于当人们对总体知之甚少的情況, 它们是近代统计中的一种用于数据处理的重要的实用方法.



第十一章 在数理统计中应用 Excel 软件

§ 1 概 述

(一) 计算机技术在数理统计中的应用

随着现代科学技术的迅猛发展,人类社会已开始进入一个利用和开发信息资源的信息社会.信息数据数量大、范围广、变化快,传统的人工处理手段无法适应社会.经济高速发展对统计提出的要求,也难以提高数据处理的速度和精度.计算机技术在数理统计中的应用,主要是在统计信息的存贮和检索、统计资料的分析和检验等方面的应用,解决了统计工作中的难题.

不仅是在实际的技术和经济工作中要将计算机技术应用于数理统计,在学习概率论与数理统计课程的阶段,同样也需要应用计算机技术.掌握了计算机技术在数理统计中的应用以后,读者的分析和研究问题的能力将极大地提高,研究问题的规模、分析计算的效率将极大地提高.

(二) 在数理统计研究中应用 Excel 软件

功能强大的统计分析软件有 SAS (Statistical Analysis Software)、SPSS(原名为 Statistical Package for the Social Science,2000 年改为 Statistical Product and Service Solutions)等等,但是所有这些专业软件往往系统庞大、结构复杂,大多数非统计专业人员难以运用自如,而且价格昂贵,是一般人难以承受的.

微软(Microsoft)公司推出的办公软件包 Office,得到了广泛的应用,Excel 是 Office 的重要成员之一. Excel 是一个功能多、技术先进、使用方便的表格式数据综合管理和分析系统,它采用电子表格方式进行数据处理,工作直观方便;它提供了丰富的函数,可以进行数据处理、统计分析和决策辅助;还具有较好的制图功能.

只要读者使用的计算机上安装了 Office,随之就有了 Excel,不需要另加投资,而 Excel 的使用是不难学会的.

Office 有不同的版本,例如 Office 2000 和 Office XP. Excel 也有不同的版本,例如 Excel 2000,Excel 2002 和 Excel 2003. 这些版本大同小异,相互之间兼容性好.

本书中,应用 Excel 处理数理统计问题.

计算机开机后,单击显示屏左下角的“开始”按钮,然后单击“所有程序”按钮,若弹出的菜单有“Microsoft Excel”,即可调用.

启动 Excel 后就会打开 Excel 的用户界面窗口,如图 11-1 所示.该窗口自上而下有标题栏、菜单栏、常用工具栏、格式工具栏、编辑栏、工作表区、工作表标签、水平滚动条和状态栏.

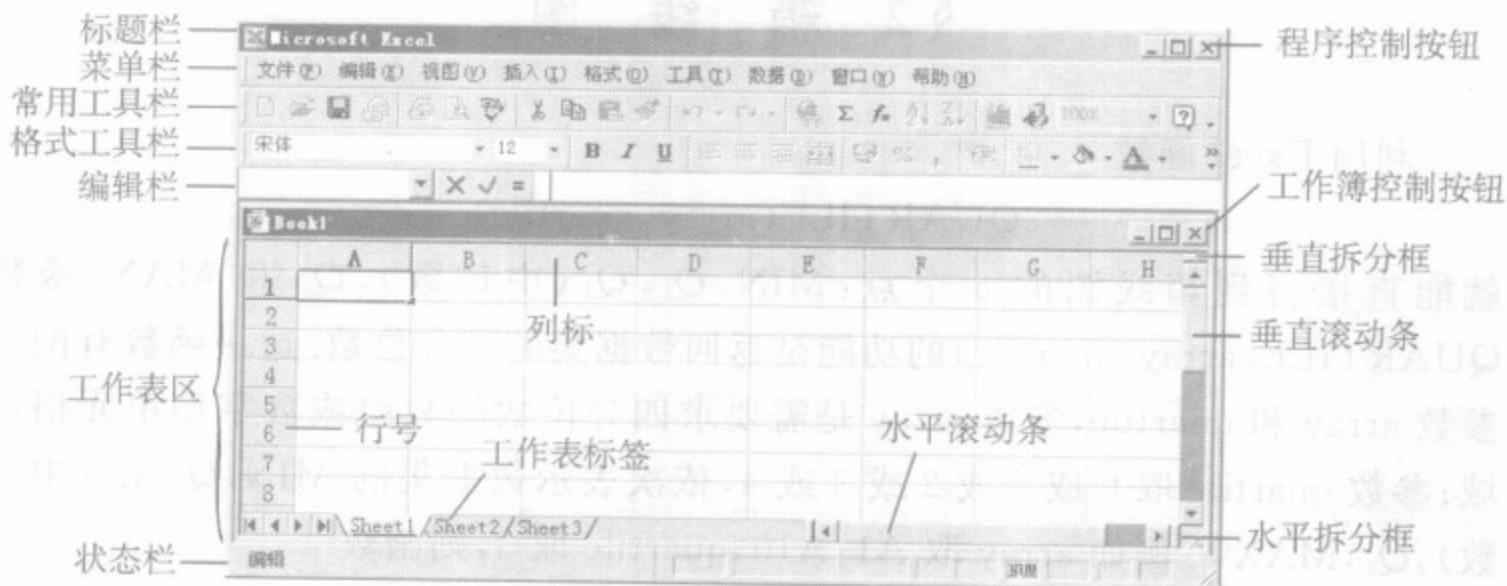


图 11-1 Excel 的用户界面窗口

工作表区由单元格组成,每个单元格由列标和行号标识.工作表区的最上面一行为列标,用 A, ..., Z, AA, ..., AZ, BA, ..., BZ, ..., IA, ..., IV 表示,最多可使用 256 列.工作表区左边一列为行号,用 1, 2, ..., 65 536 表示,最多可使用 65 536 行.单元格“A1”表示单元格位于 A 列第 1 行.单元格区域则规定为矩形,例如,“A1:F5”表示一矩形区域, A1 和 F5 为其主对角线两端的单元格.每张工作表有一个标签与之对应,例如,“sheet 1”.工作表隶属于工作簿,一个工作簿最多可由 255 个不同的工作表组成.

(三) Excel 的分析工具库

检查 Excel 的“工具”菜单,看是否已安装了分析工具.如果在“工具”菜单中没有“数据分析”项,则需调用“加载宏”来安装“分析工具库”.

“工具”菜单中有了“数据分析”命令项,单击它,就出现“数据分析”对话框,其中有 19 个模块,它们分别属于五类:

1. 基础分析:(1)随机数发生器;(2)抽样;(3)描述统计;(4)直方图;(5)排位与百分比排位.

2. 检验分析:(6) t 检验,平均值的成对两样本分析;(7) t 检验,双样本等方差假设;(8) t 检验,双样本异方差假设;(9) Z 检验,双样本平均差检验;(10) F 检验,双样本方差.

3. 相关、回归:(11)相关系数;(12)协方差;(13)回归.
 4. 方差分析:(14)方差分析,单因素方差分析;(15)方差分析,可重复双因素分析;(16)方差分析,无重复双因素分析.
 5. 其他分析工具:(17)移动平均;(18)指数平滑;(19)傅里叶分析.
- 在本书中,只讲述 Excel 在几个问题上的应用.

§ 2 箱 线 图

利用 Excel 函数

QUARTILE(array,quartile)

就能直接得到箱线图的 5 个点:MIN, Q_1 , Q_2 (中位数), Q_3 和 MAX. 函数 QUARTILE(array,quartile)的功能是返回数据集的四分位数. 这一函数有两个参数 array 和 quartile,参数 array 是需要求四分位数的数组或数字型单元格区域;参数 quartile 取 0 或 1 或 2 或 3 或 4,依次表示数据集的 MIN, Q_1 , Q_2 (中位数), Q_3 , MAX^①. 例如 array 取 A1:A10, quartile 取 3,则函数

QUARTILE(A1:A10,3)

表示返回数组 A1~A10 的 Q_3 . 函数

QUARTILE(A1:A10,4)

表示返回数组 A1~A10 的 MAX.

例 1 分别画出第六章 § 2 例 3 中女子、男子组肺活量的箱线图.

解 打开 Excel 工作表,将“女子组”以及“男子组”分别键入单元格 A1 和 E1 以及 B1 和 G1,将数据分别键入单元格区域 A2:B26. 将“MIN, Q_1 , Q_2 , Q_3 , MAX”分别键入单元格 D2:D6. 在单元格 E2, E3, ..., E6, G2, G3, ..., G6, 分别键入有关 Excel 函数式如下.

E2“=QUARTILE(A2:A26,0)”, G2“=QUARTILE(B2:B26,0)”,

E3“=QUARTILE(A2:A26,1)”, G3“=QUARTILE(B2:B26,1)”,

E4“=QUARTILE(A2:A26,2)”, G4“=QUARTILE(B2:B26,2)”,

E5“=QUARTILE(A2:A26,3)”, G5“=QUARTILE(B2:B26,3)”,

E6“=QUARTILE(A2:A26,4)”, G6“=QUARTILE(B2:B26,4)”,

即得所需结果如图 11-2 中的表格所示.

由所得数据即可由手工画出箱线图如图 6-4 所示.

我们也可以借助 Excel 的绘图工具栏,使用鼠标作出箱线图.

以女子的肺活量数据作箱线图为例. 先在草稿纸上画一草图,考虑将箱线图的“线”放在

① 在 Excel 中所用的算法与 132 页所说的稍有不同,所得的 Q_1 , Q_3 与按 132 页所得的会稍有不同.

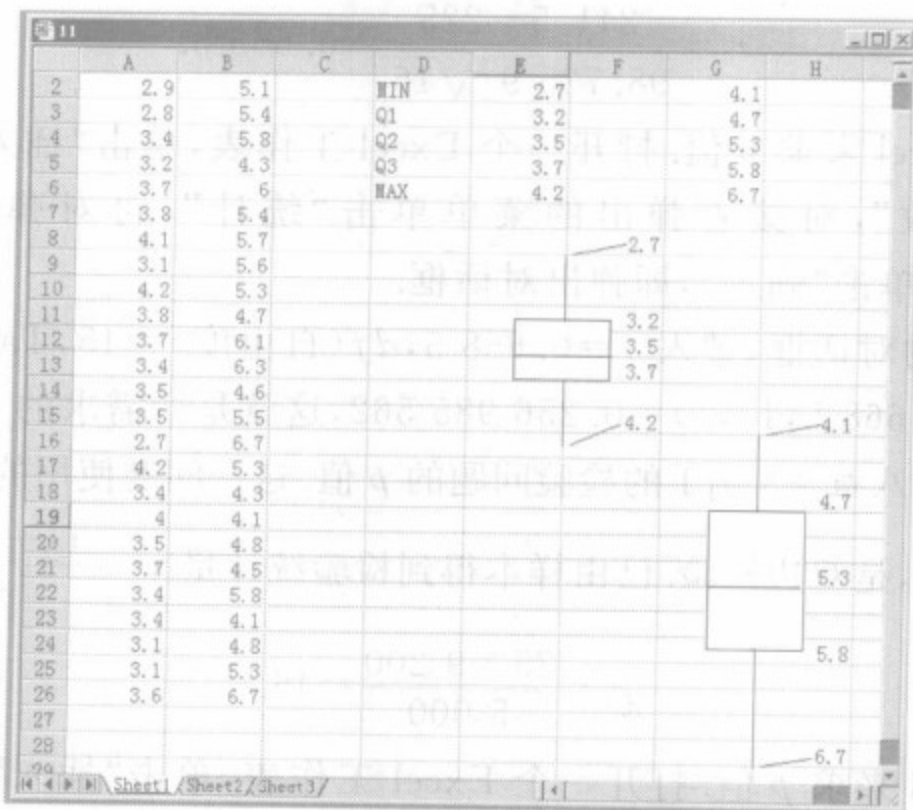


图 11-2

E 列和 F 列之间的分隔线上. 在这根线上确定箱线图的 5 个点的位置: 将第 8 行下面的线与 EF 列分隔线相交的点定为 2.7, 这就是 MIN 的位置. 每一行的高度定为 0.2, 于是, Q_1 , Q_2 , Q_3 和 MAX 的位置就相应地确定.

在绘图工具栏中单击“矩形”图标, 将鼠标箭头放到矩形拟放的位置单击左键, 即产生一个矩形. 在矩形的四个角点和四条边的中点共有 8 个控点, 单击矩形的边线中间的控点 (此时出现两箭头的光标) 就可以在纵或横方向缩放, 单击矩形角点上的控点 (此时出现两箭头的斜光标) 可以在纵横方向同步缩放; 单击矩形内部的点 (此时出现四箭头的光标) 可以移动矩形的位置. 经调整, 矩形的下边和上边分别落在拟放的位置上^①. 矩形的宽度不拘, 应使矩形关于 EF 列分隔线对称.

在绘图工具栏中单击直线图标, 将光标指向要画的直线的起点, 单击左键, 按住鼠标拖到直线终点, 松开, 就画成了一条直线. 画上 Q_2 线, Q_3-Q_1 线和 Q_3-Q_4 线, 箱线图就完成了.

§ 3 假设检验

(一) 假设检验问题 p 值的求法

例 1 求第八章 § 2 例 1 的检验问题的 p 值. 这一问题使用的是 t 检验法. 样本容量为 $n=16$, 是单边检验. 已由样本得到检验统计量 $t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$ 的观察值为

^① 单击图范围以外任意处, 边、角上的控点会消失, 在图的范围以内单击, 控点会重现.

$$t_0 = \frac{241.5 - 225}{98.7259 / \sqrt{16}} = 0.6685.$$

下面用 Excel 来求 p 值. 打开一个 Excel 工作表, 单击“插入”, 对于弹出的菜单单击“函数”, 对接着弹出的菜单单击“统计”, 再对弹出的菜单单击“TDIST”, 然后单击“确定”, 即弹出对话框.

对于显示的对话框, 键入 $x=0.6685$, df (自由度) $=15$, $Tails$ (尾数) $=1$ ①, 即得 $TDIST(0.6685, 15, 1) = 0.256985562$, 这就是所需求的 p 值. $\square$

例 2 求第八章 §3 例 1 的检验问题的 p 值. 这一问题使用的是 χ^2 检验法. 样本容量为 $n=26$, 是双边检验. 已由样本得到检验统计量 $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$ 的观察值为

$$\chi_0^2 = \frac{25 \times 9200}{5000} = 46.$$

现用 Excel 来求 p 值. 打开一个 Excel 工作表, 单击“插入”, 对于弹出的菜单单击“函数”, 对弹出的菜单单击“统计”, 再对弹出的菜单单击“CHIDIST”, 然后单击“确定”. 即弹出对话框.

对显示的对话框键入 $x=46$, df (自由度) $=25$, 即得 $CHIDIST(46, 25) = 0.006417833$, 这是单边检验的 p 值. 本题是双边检验, 故所求的 p 值 $= 2 \times 0.006417833 = 0.012835666$. $\square$

例 3 求第八章习题第 19 题的检验问题的 p 值. 这一问题使用的是 F 检验法, 是单边检验. 已由样本得到统计量 $F = s_1^2 / s_2^2$ 的观察值为

$$F_0 = s_1^2 / s_2^2 = 1.60$$

可得 p 值为 $FDIST(1.60, 59, 39) = 0.0605188$. $\square$

(二) 两个等方差正态总体 $N(\mu_1, \sigma^2), N(\mu_2, \sigma^2)$ 均值差的检验(t 检验)

设 $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ 是来自正态总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 的样本, $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ 是来自正态总体 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 的样本, 两样本独立. μ_1, μ_2, σ^2 均未知, 现用 Excel 来求解假设检验问题

$$H_0: \mu_1 \leq \mu_2, \quad H_1: \mu_1 > \mu_2;$$

$$H_0: \mu_1 \geq \mu_2, \quad H_1: \mu_1 < \mu_2;$$

$$H_0: \mu_1 = \mu_2, \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2.$$

举例来说明.

例 4 在两批电阻器中分别随机地取 6 只, 测得以下的电阻值(以 Ω 计)

① 这里, $Tails=1$ 表示求单边检验的 p 值, 若所求的是双边检验的 p 值, 则应写 $Tails=2$.

A 批(x)	0.140	0.138	0.143	0.142	0.144	0.137
B 批(y)	0.135	0.140	0.142	0.136	0.138	0.140

设两批电阻器电阻分别来自总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$, $N(\mu_2, \sigma^2)$, μ_1, μ_2, σ^2 均未知. 两样本独立. 试取 $\alpha=0.05$, 检验假设

$$H_0: \mu_1 = \mu_2, \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2.$$

解 用 Excel 求解的操作步骤如下.

1° 打开 Excel 工作表, 将数据输入单元格 A1:A7 和 B1:B7.

2° 依次单击“工具”, “数据分析”, “t-检验: 双样本等方差假设”和“确定”, 跳出对话框.

3° 在对话框中键入变量 1 的范围 A1:A7, 键入变量 2 的范围 B1:B7; 在假定均值差空格中键入“0”; 单击“标志”, 确认 $\alpha=0.05$ ①, 单击“确定”, 跳出一个新工作表如下:

t-检验: 双样本等方差假设

	A(x)	B(y)
平均	0.140 667	0.138 5
方差	7.87E-06	7.1E-06
观测值	6	6
合并方差	7.48E-06	
假设平均差	0	
df	10	
t Stat	1.371 845	
P(T<=t)单	0.100 051	
t 单尾临界	1.812 461	
P(T<=t)双	0.200 102	
t 双尾临界	2.228 139	

4° 结果分析 可以用两种方法来判别检验的结果.

(1) 临界值法 这是双边检验. 因此需将“t Stat”(t 统计量)与“t 双边临界值”的大小进行比较. 现在 t 统计量的值为 1.371 845, 它小于 t 双边临界值 2.228 139. 故以 $\alpha=0.05$ 的显著性水平接受 H_0 .

(2) p 值法 由于双边检验的 p 值为 0.200 102, 大于 0.05, 故接受 H_0 . □

§4 方差分析

(一) 单因素方差分析

例 1 在 7 个不同实验室中测量某种扑尔敏药片的扑尔敏有效含量(以 mg

① 如给出的 $\alpha \neq 0.05$, 则在对话框中将给出的 α 的值代替 0.05.

计). 得到以下的结果(Lab 表示实验室):

Lab 1	Lab 2	Lab 3	Lab 4	Lab 5	Lab 6	Lab 7
4.13	3.86	4.00	3.88	4.02	4.02	4.00
4.07	3.85	4.02	3.88	3.95	3.86	4.02
4.04	4.08	4.01	3.91	4.02	3.96	4.03
4.07	4.11	4.01	3.95	3.89	3.97	4.04
4.05	4.08	4.04	3.92	3.91	4.00	4.10
4.04	4.01	3.99	3.97	4.01	3.82	3.81
4.02	4.02	4.03	3.92	3.89	3.98	3.91
4.06	4.04	3.97	3.90	3.89	3.99	3.96
4.10	3.97	3.98	3.97	3.99	4.02	4.05
4.04	3.95	3.98	3.90	4.00	3.93	4.06

设各样本分别来自正态总体 $N(\mu_i, \sigma^2)$, $i=1, 2, \dots, 7$, 各样本相互独立. 试取显著性水平 $\alpha=0.05$ 检验各实验室测量的扑尔敏的有效含量的均值是否有显著差异.

解 我们画出各实验室测量结果的箱线图如图 11-3 所示. 从图上可以看出各实验室的测量结果的大致情况.

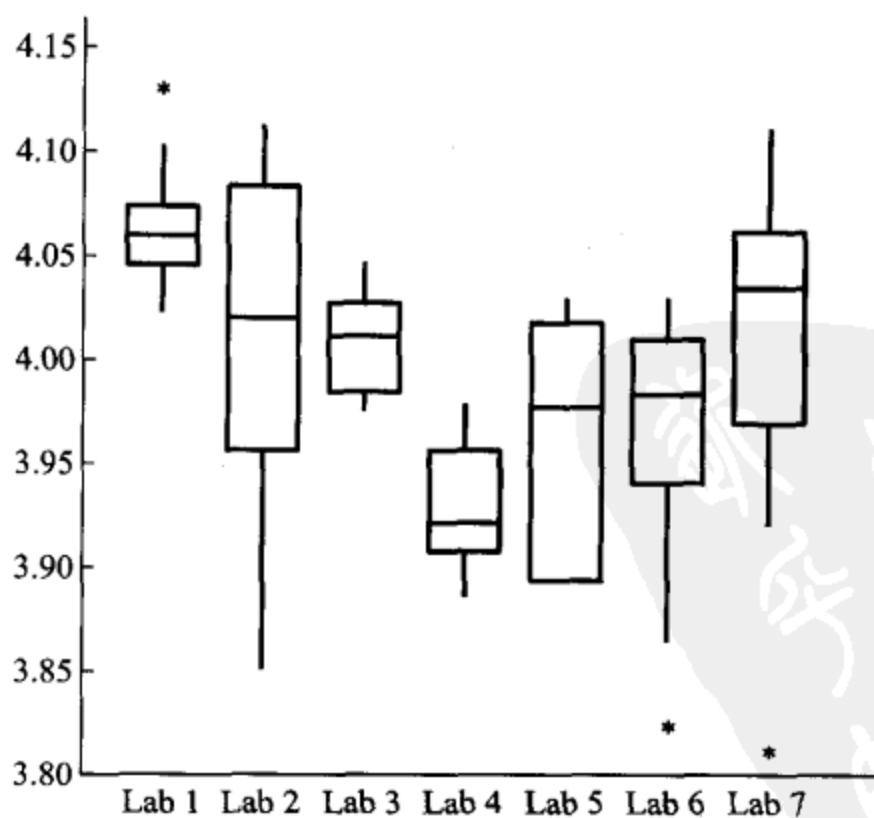


图 11-3

下面用 Excel 来求解. 具体步骤如下:

1° 建立给定问题的原假设和备择假设

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_7, \quad H_1: \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_7 \text{ 不全相等.}$$

2° 打开 Excel 工作表, 将数据输入 A1:G11.

3° 依次单击“工具”, “数据分析”, “方差分析: 单因素方差分析”和“确定”, 跳出对话框.

4° 在对话框中键入变量的输入范围“A1:G11”, 单击“标志位于第一行”. 规定 $\alpha=0.05$, 单击“确定”, 显示结果. 有两张表, 前一张是各实验室的均值、方差等的汇总, 后一张是本题的方差分析表:

差异源	SS	df	MS	F	P-value	F crit
组间	0.124 737	6	0.020 79	5.660 069	9.45E-05	2.246 408
组内	0.231 4	63	0.003 673			
总计	0.356 137	69				

5° 结果分析 临界值法. $F=5.660\ 069$ 大于 F_{crit} (即 F 临界值) $=2.246\ 408$, 故拒绝 H_0 , 认为各实验室测量的结果有显著差异.

p 值法. p 值 $=9.45E-0.5$ 远小于 $\alpha=0.05$. 故拒绝 H_0 , 且知差异是非常显著的. □

(二) 双因素无重复试验的方差分析

我们用 Excel 来求解第九章 §2 例 3 的双因素无重复试验的方差分析问题. 做法如下:

1° 建立给定问题的原假设和备择假设.

按题意需在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验: 在不同时间下颗粒状物含量的均值有无显著差异, 在不同地点下颗粒状物含量的均值有无显著差异, 即需检验假设 (见第九章 §2(2.25), (2.26) 式).

$$H_{01}: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0,$$

$$H_{11}: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \text{ 不全为零.}$$

$$H_{02}: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_s = 0,$$

$$H_{12}: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s \text{ 不全为零.}$$

2° 打开 Excel 工作表. 将数据输入 A1:F5.

3° 依次单击“工具”, “数据分析”, “方差分析: 无重复双因素分析”和“确定”, 跳出对话框.

4° 在对话框中键入变量的输入范围“A1:F5”, 单击“标志”, 规定 $\alpha=0.05$,

单击“确定”. 显示结果有两张表, 后面的一张是本题的方差分析表, 如下所示:

差异源	SS	df	MS	F	P-value	F crit
行	1 182.95	3	394.316 7	10.722 41	0.001 033	3.490 295
列	1 947.5	4	486.875	13.239 29	0.000 234	3.259 167
误差	441.3	12	36.775			
总计	3 571.75	19				

5° 结果分析 临界值法. $F = 10.722\ 41$ 大于 $F_{crit} = 3.490\ 295$; $F = 13.239\ 29$ 大于 $F_{crit} = 3.259\ 167$, 故拒绝 H_{01} 及 H_{02} . 即认为不同时间下颗粒状物含量的均值有显著差异; 认为不同地点下颗粒状物含量的均值有显著差异. 也可以用 p 值来判别. $\square$

(三) 双因素等重复试验的方差分析

现在用 Excel 来求解第九章 § 2 例 2 的双因素等重复试验的方差分析问题. 做法如下:

1° 建立给定问题的原假设和备择假设.

按题意需在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验. 热处理温度、时间以及这两者的交互作用对产品强度是否有显著的影响, 即需检验假设 (见第九章 (2.6), (2.7), (2.8) 式)

$$\begin{cases} H_{01} : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0, \\ H_{11} : \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r \text{ 不全为零.} \\ H_{02} : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_s = 0, \\ H_{12} : \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s \text{ 不全为零.} \\ H_{03} : \gamma_{11} = \gamma_{12} = \cdots = \gamma_{rs} = 0, \\ H_{13} : \gamma_{11}, \gamma_{12}, \cdots, \gamma_{rs} \text{ 不全为零.} \end{cases}$$

2° 打开 Excel 工作表, 将数据输入 A1:C5.

3° 依次单击“工具”, “数据分析”, “方差分析: 可重复双因素方差分析”和“确定”, 跳出对话框.

4° 在对话框中键入变量的输入范围“A1:C5”, 再键入“每一样本的行数”为“2”. 规定 $\alpha = 0.05$, 单击“确定”, 即显示本题的方差分析表如下:

差异源	SS	df	MS	F	P-value	F crit
样本	1.62	1	1.62	1.408 696	0.300 945	7.708 647
列	11.52	1	11.52	10.017 39	0.034 02	7.708 647
交互	54.08	1	54.08	47.026 09	0.002 367	7.708 647
内部	4.6	4	1.15			
总计	71.82	7				

5° 结果分析 由于 p 值 = 0.300 945 大于 $\alpha = 0.05$, 故接受 H_{01} , 认为时间对强度的影响不显著; 由于 p 值 = 0.034 02 小于 $\alpha = 0.05$, 故拒绝 H_{02} , 认为温度对强度影响显著; 由于 p 值 = 0.002 367 小于 $\alpha = 0.05$, 故拒绝 H_{03} , 认为交互作用的影响显著. $\square$

§ 5 一元线性回归

我们以例题来说明用 Excel 求解一元线性回归问题的做法.

例 1 将冰晶放入一容器内, 容器内维持固定的温度 (-5°C) 和固定的湿度. 观察自冰晶放入的时刻开始计算的时间 T (以 s 计) 和晶体生长的轴向长度 A (以 μm 计), 得到 43 对观察数据如下.

T	50	60	60	70	70	80	80	90	90	90	95	100	100	100	105	105
A	19	20	21	17	22	25	28	21	25	31	25	30	29	33	35	32
T	110	110	110	115	115	115	120	120	120	125	130	130	130	135	135	
A	30	28	30	31	36	30	36	25	28	28	31	32	34	25		
T	140	140	145	150	150	155	155	160	160	160	165	170	180			
A	26	33	31	36	33	41	33	40	30	37	32	35	38			

设题目符合回归模型所要求的条件.

- (1) 画出散点图;
- (2) 求线性回归方程 $\hat{A} = \hat{a} + \hat{b}T$;
- (3) 检验假设 $H_0: b = 0, H_1: b \neq 0$.

解 1° 打开 Excel 工作表, 将数据输入单元格 A1:A44 和 B1:B44.

2° 依次单击“插入”, “图表”, “XY 散点图”, “下一步”, 弹出对话框. 在框中“数据区域”键入“A1:B44”, 在“系列产生在”认定“列”. 单击“下一步”, 弹出“图表选项”对话框, 在这一对话框的“图表标题”键入“冰晶长度—时间”, 在“X

轴”键入“A2:A44”,在“Y 轴”键入“B2:B44”.单击“完成”,即显示散点图,如图 11-4 所示.

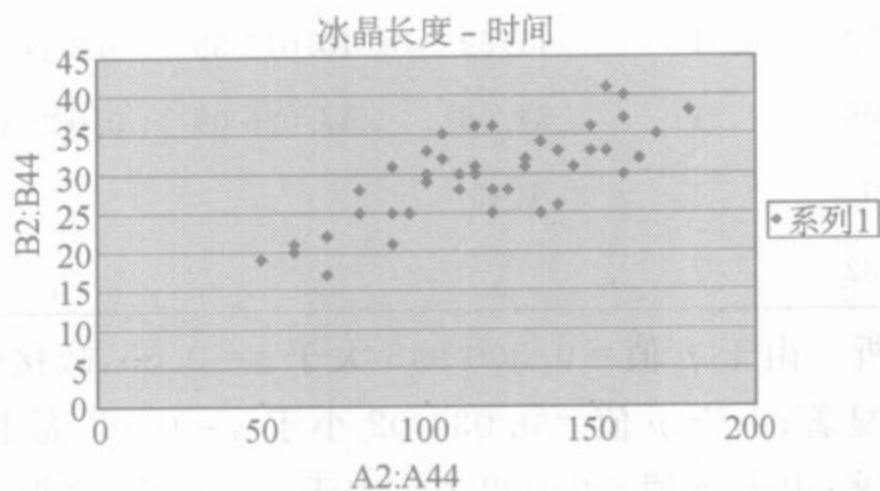


图 11-4

3° 重新打开 Excel 工作表,将数据输入单元格 A1:B44. 依次单击“工具”,“数据分析”,“回归”和“确定”.弹出对话框.在“Y 值输入区域”框键入“B1:B44”,在“X 值输入区域”框键入“A1:A44”,单击“标志”,认定置信水平为 95%,“输出选项”选定“新工作表组”,单击“确定”,即得计算结果表格.输出的表格共三张,本题的结果载于最后一张表格上,如下所示:

	Coefficient	标准 误差	t Stat	P-value	Lower 95%	Upper 95%	下限 95%	上限 95%
Intercept	14.410 65	2.149 358	6.704 63	4.31E-08	10.069 93	18.751 36	10.069 93	18.751 36
T	0.130 768	0.017 6	7.430 176	4.1E-09	0.095 225	0.166 312	0.095 225	0.166 312

我们得到以下的结果:

(1) 表中 Coefficient 一栏中载有 Intercept:14.410 65, T:0.130 768. 它们分别是 a, b 的估计,即 $\hat{a}=14.410 65, \hat{b}=0.130 768$. 于是得 A 关于 T 的回归方程为

$$\hat{A}=14.410 65+0.130 768T.$$

(2) 表中 p-value 一栏中载有 T:4.1E-09,这是关于 b 的双边检验 $H_0:b=0, H_1:b \neq 0$ (见第九章 § 3(3.19)式)的 p 值.由于 $4.1E-09 < \alpha = 0.05$,故拒绝 H_0 ,认为回归效果是显著的.

(3) 表中 95% 下限一栏中载有 T:0.095 225;95% 上限一栏中载有 T:0.166 312.这表示 b 的置信水平为 0.95 的置信区间为 $(0.095 225, 0.166 312)$. □

§ 6 bootstrap 方法、宏、VBA

我们在 Excel 环境中求解 bootstrap 问题.

Excel 虽然功能强大,但不可能直接处理各种各样的具体问题.很多情况下需要读者自编称为“宏(Macro)”的程序以解决问题.

“宏”是包括了一连串指令的一个小程序.编写宏要使用 VBA (Visual Basic for Application)语言,VBA 是 Office 软件包中的标准语言.

本书没有篇幅介绍宏和 VBA 本身,请读者参阅有关书籍,本书将围绕 bootstrap 方法应用的例子作有关的说明.

现在给出一个宏以解决如下的问题.

问题 设金属元素铂的升华热是具有分布函数 F 的连续型随机变量, F 的中位数 θ 是未知参数,测得以下的数据(以 kcal/mol 计):

133.2	134.1	134.3	134.4	134.5	134.7	134.8	134.8	134.8
134.9	134.9	135.0	135.0	135.2	135.2	135.4	135.4	135.8
135.8	136.3	136.6	141.2	143.3	146.5	147.8	148.8	

(数据已经过排序)

(1) 以样本中位数 M 作为总体中位数 θ 的估计 $\hat{\theta}$.

(i) 求估计量 $\hat{\theta}$ 的标准误差 $\sigma_{\hat{\theta}} = \sqrt{D(\hat{\theta})}$ 的 bootstrap 估计.

(ii) 求均方误差 $MSE = E[(M - \theta)^2]$ 的 bootstrap 估计.

(iii) 求偏差 $b = E(M - \theta)$ 的 bootstrap 估计.

(2) 以样本中位数作为总体中位数 θ 的估计,求总体中位数 θ 的 bootstrap 置信区间;以样本 20%截尾均值作为总体 20%截尾均值 μ_r 的估计,求截尾均值 μ_r 的 bootstrap 置信区间.

以下是求解上述问题的宏:

```
Sub Macro9()
Dim i As Integer, j As Integer, m As Integer, n As Integer
Dim Shu As Single, Temp As Single, Sum As Double, Squ As Double
For i = 1 To 10000
    For j = 1 To 26
        Shu = Rnd * 26
3      If Shu <= 1# Then
            Cells(i, j + 5) = 133.2: GoTo 5
        ElseIf Shu <= 2# Then
```

```
Cells(i, j + 5) = 134.1: GoTo 5
ElseIf Shu <= 3# Then
    Cells(i, j + 5) = 134.3: GoTo 5
ElseIf Shu <= 4# Then
    Cells(i, j + 5) = 134.4: GoTo 5
ElseIf Shu <= 5# Then
    Cells(i, j + 5) = 134.5: GoTo 5
ElseIf Shu <= 6# Then
    Cells(i, j + 5) = 134.7: GoTo 5
ElseIf Shu <= 9# Then
    Cells(i, j + 5) = 134.8: GoTo 5
ElseIf Shu <= 11# Then
    Cells(i, j + 5) = 134.9: GoTo 5
ElseIf Shu <= 13# Then
    Cells(i, j + 5) = 135# : GoTo 5
ElseIf Shu <= 15# Then
    Cells(i, j + 5) = 135.2: GoTo 5
ElseIf Shu <= 17# Then
    Cells(i, j + 5) = 135.4: GoTo 5
ElseIf Shu <= 19# Then
    Cells(i, j + 5) = 135.8: GoTo 5
ElseIf Shu <= 20# Then
    Cells(i, j + 5) = 136.3: GoTo 5
ElseIf Shu <= 21# Then
    Cells(i, j + 5) = 136.6: GoTo 5
ElseIf Shu <= 22# Then
    Cells(i, j + 5) = 141.2: GoTo 5
ElseIf Shu <= 23# Then
    Cells(i, j + 5) = 143.3: GoTo 5
ElseIf Shu <= 24# Then
    Cells(i, j + 5) = 146.5: GoTo 5
ElseIf Shu <= 25# Then
    Cells(i, j + 5) = 147.8: GoTo 5
Else
    Cells(i, j + 5) = 148.8
```

```
5      End If
      Next j
8      For j = 7 To 31
          For n = 6 To j - 1
              If Cells(i, j) < Cells(i, n) Then
                  Temp = Cells(i, j)
                  For m = j - 1 To n Step -1
                      Cells(i, m + 1) = Cells(i, m)
                  Next m
                  Cells(i, n) = Temp: GoTo 10
              End If
          Next n
10     Next j
        Cells(i, 1) = (Cells(i, 18) + Cells(i, 19)) / 2
        Cells(i, 3) = WorksheetFunction.Average(Cells(i, 11), Cells(i,
12), Cells(i, 13), Cells(i, 14), Cells(i, 15), Cells(i, 16), Cells(i, 17),
Cells(i, 18), Cells(i, 19), Cells(i, 20), Cells(i, 21), Cells(i, 22), Cells(i,
23), Cells(i, 24), Cells(i, 25), Cells(i, 26))
        Cells(i, 2) = Cells(i, 1)
        Cells(i, 4) = Cells(i, 3)
        Next i
20    Sum = 0#
        For i = 1 To 10000
            Sum = Sum + Cells(i, 1)
        Next i
        Cells(2, 5) = Sum / 10000
        Squ = 0#
        For i = 1 To 10000
            Squ = Squ + (Cells(i, 1) - Cells(2, 5)) ^ 2
        Next i
        Cells(4, 5) = Squ / 9999
        Cells(6, 5) = Sqr(Cells(4, 5))
        Cells(8, 5) = Cells(2, 5) - 135.1
        Squ = 0#
        For i = 1 To 10000
```

```

    Squ = Squ + (Cells(i, 1) - 135.1) ^ 2
Next i
30 Cells(10, 5) = Squ / 10000
End Sub

```

对这个宏,说明如下:

1. 对于一个 Excel 的工作表,设计为:使用工作表的第 1 至第 10 000 行、第 1 至第 31 列(A, B, ..., Z, AA, ..., AE 列). 用单元格 F1:AE10 000 存放 bootstrap 样本,单元格 A1:A10 000 存放由 bootstrap 样本求出的中位数,单元格 C1:C10 000 存放由 bootstrap 样本求出的截尾均值,单元格 E2、E4、E6、E8、E10 分别存放标准误差、均方误差、偏差的 bootstrap 估计等结果。

2. 在宏中出现的变量名和数组要用 Dim 语句来声明(Dim 是 dimension 的缩写): Integer 表示整数值,从 -32 768 至 32 767; Long 表示大整数值,从 -2 147 483 648 到 2 147 483 647; Single 表示单精度浮点数,负数从 -3.402 823E38 到 -1.401 298E-45,正数从 1.401 298E-45 到 3.402 823E38; Double 表示双精度浮点数,负数从 -1.797 693 134 862 32E308 到 -4.940 656 458 412 47E-324,正数从 4.940 656 458 412 47E-324 到 1.797 693 134 862 32E308。

3. 使用循环语句,以 i 计工作表中的行(1~10 000),以 j 计工作表中的列(6~31),以 3 标注的程序行至以 5 标注的程序行,藉随机数 Rnd 所处的范围来产生 bootstrap 样本,存放在单元格 Cells(i, j+5)中。

本例的原样本, $n=26$, 134.8 出现 3 次, 134.9, 135.0, 135.2, 135.4, 135.8 各出现 2 次,其余都只出现 1 次. 原样本的中位数为 135.1, 原样本 20% 截尾均值为 135.2875。

在 Excel 环境中, (0,1) 上的均匀分布随机数为 RAND, 但在 VBA 环境中, (0,1) 上的均匀分布随机数为 Rnd, 在宏中需使用 Rnd。

将 Rnd 乘以 26, 得 Shu. 对于某一个确定的 $j(j=1, 2, \dots, 26)$, 若 $0 < \text{Shu} \leq 1$, 则将 133.2 赋予 Cells(i, j+5); 若 $1 < \text{Shu} \leq 2$, 则将 134.1 赋予 Cells(i, j+5), ..., 若 $6 < \text{Shu} \leq 9$, 则将 134.8 赋予 Cells(i, j+5), ..., 若 $25 < \text{Shu} < 26$, 则将 148.8 赋予 Cells(i, j+5). 数字之后有 # 号, 表示该数为浮点数。

接着, 对下一个 j, 用同样的做法对 Cells(i, j+5) 赋值。

这样继续做下去, 就对第 i 行的 26 个单元格 Cells(i, j+5) 赋值, 这就得到一个容量为 26 的 bootstrap 样本。

4. 以 8 标注的程序行到以 10 标注的程序行, 对自 Cells(i, 6) 至 Cells(i, 31) 之间的 bootstrap 样本自左至右, 从小到大排序. 例如, 得排序后的样本:

133.2	134.1	134.3	134.3	134.3	134.7	134.8	134.8	134.8
134.8	134.8	134.9	135.2	135.2	135.4	135.4	135.4	135.8

135.8 136.6 141.2 141.2 146.5 148.8 148.8 148.8

又如,得样本

134.3 134.4 134.7 134.7 134.8 134.9 134.9 135.0 135.0

135.2 135.2 135.4 135.4 135.4 135.8 135.8 136.3 141.2

141.2 141.2 143.3 143.3 143.3 146.5 148.8 148.8

5. 排序后,第 13 个数 $\text{Cells}(i,18)$ 和第 14 个数 $\text{Cells}(i,19)$ 的均值就是 bootstrap 样本的中位数,赋予 $\text{Cells}(i,1)$,即是放入 A 列.

6. 排序后,求 20% 截尾均值,它就是自 $\text{Cells}(i,11)$ 至 $\text{Cells}(i,26)$ 的均值. 这里,要使用 Average 函数. Average 函数在 VBA 中没有,在 Excel 中才有,在宏中使用(即是在 VBA 环境中使用)要在其前面加上“Worksheet Function.”(凡是在 VBA 中没有而在 Excel 中才有的函数,在 VBA 环境中使用,都要如此处理.)

求得的 20% 截尾均值,赋予 $\text{Cells}(i,3)$,即是放入 C 列.

7. 将 A 列数据作一备份,放入 B 列;将 C 列数据作一备份,放入 D 列. 这是为了以后 A 列和 C 列数据按列从小到大排序,数据与所处的行的 bootstrap 样本不再对应.

8. 以 20 标注的程序行至以 30 标注的程序行,对 A 列数据作计算. 算出 10 000 个 bootstrap 样本的中位数 M_i^* ($i = 1, 2, \dots, 10\ 000$) 的均值 $\bar{M}^* = \frac{1}{10\ 000} \sum_{i=1}^{10\ 000} M_i^* = 135.143\ 8$. 将它放入单元格 E2. 计算各中位数与 135.143 8 之差的平方和,除以 9 999,得 0.068 133,放入单元格 E4. 计算 0.068 133 的平方根得 0.261 023,放入单元格 E6,于是 E6 中的数是

$$\sqrt{\frac{1}{9\ 999} \sum_{i=1}^{10\ 000} (M_i^* - \bar{M}^*)^2} = 0.261\ 023,$$

这就是我们要求的以样本中位数作为总体中位数的估计的标准误差的 bootstrap 估计.

计算 135.143 8 与 135.1 之差得 0.043 783,将它放入单元格 E8,计算各中位数与 135.1 之差的平方的均值,得 0.070 043,放入单元格 E10. 于是 E10 中的数是

$$\frac{1}{10\ 000} \sum_{i=1}^{10\ 000} (M_i^* - 135.1)^2 = 0.070\ 043.$$

它是以样本中位数作为总体中位数的估计,其均方误差的 bootstrap 估计.

E8 中的数是

$$\frac{1}{10\ 000} \sum_{i=1}^{10\ 000} M_i^* - 135.1 = 0.043\ 783.$$

它是以样本中位数作为总体中位数的估计,其偏差的 bootstrap 估计。(以上内容请参见第 10 章 § 1 例 1、例 2、例 3)。

9. 程序运行结束,运算结果呈现以后,依次将光标指向 A 列列标和工具“”,单击鼠标左键,根据屏幕提示,在“扩展选定区域”和“以当前选定区域排序”二者之间选定后者,再单击“排序”,即可将列数据自上而下按从小到大排序。然后,依次将光标指向 C 列列标和工具“”,作同上的操作,即可将 C 列数据自上而下按从小到大排序。

排序以后,可以读出下列数据:

行号	1	250	500	1 000	5 000	9 000	9 500	9 750	10 000
中位数	134.6	134.8	134.85	134.9	135.1	135.4	135.6	135.8	141.8
截尾均值	134.55	134.85	134.9	134.9571	135.2571	136.3286	136.6286	136.9214	139.7786

从而得

置信水平		0.95	0.90	0.80
置信	中位数	(134.8, 135.8)	(134.85, 135.6)	(134.9, 135.4)
区间	截尾均值	(134.85, 136.9214)	(134.9, 136.6286)	(134.9571, 136.3286)

下面是求解本书第十章 § 2 例 1(2)的宏。

```
Sub Macro7()
Dim i As Integer, j As Integer, k(1 To 10) As Double, kk As Double
For i = 1 To 5000
    kk = 0#
    For j = 1 To 10
        k(j) = 100.0696 * Sqr(-WorksheetFunction.Ln(Rnd))
        Cells(i, 3 + j) = k(j)
        kk = kk + k(j) * k(j)
    Next j
    Cells(i, 1) = Sqr(kk / 10)
    Cells(i, 2) = Cells(i, 1)
Next i
End Sub
```

读了前面的说明以后,这里不需要作更多的说明。

bootstrap 样本容量为 10,共产生 5000 组。

样本 1: 59.098 8 79.329 3 73.913 27 111.405 1 109.506 5
50.555 22 206.721 6 52.332 21 45.329 77 58.679 22
 $\eta^* = 96.528\ 8$

⋮

样本 5 000: 45.357 72 66.256 3 108.903 47.129 5 163.166
90.971 14 83.443 9 52.360 29 43.647 44 81.822 15
 $\eta_{5\ 000}^* = 85.867\ 12$

程序运行结束,结果显示以后,点击 A 列列标,再点击工具“”将 A 列数据自上到下,从小到大排序,得:

行号	1	250	500	2 500	5 000
η^*	47.274 63	73.257 36	79.036 52	98.675 6	177.349 5

即到 $\hat{\eta}_{(250)}^* = 73.257\ 36$ $\hat{\eta}_{(500)}^* = 79.036\ 52$. 这就是本书第十章 § 2 例 1(2)的中间结果.

本章参考文献

- [1] John Walkenbach 等著. Excel 2002 宝典. 牛力等译. 北京:电子工业出版社,2001.
- [2] John Walkenbach 著. Excel 2002 公式与函数应用宝典. 路晓村等译. 北京:电子工业出版社,2002.
- [3] Gini Courter 等著. Excel 2002 从入门到精通(中文版). 魏江力等译. 北京:电子工业出版社,2002.
- [4] M. C. Martin 等著. Excel 2000 从入门到精通(中文版). 惠林等译. 北京:电子工业出版社,2000.
- [5] Paul McFedries 著. Office 2000 VBA 编程技术. 韩松等译. 北京:电子工业出版社,2000.

第十二章 随机过程及其统计描述

本章首先从随时间演变的随机现象引入随机过程的概念和记号. 接着, 一般地介绍随机过程的统计描述方法. 最后, 作为示例, 从实际问题抽象出两个著名的随机过程, 并介绍它们的统计特性.

§ 1 随机过程的概念

随机过程被认为是概率论的“动力学”部分. 意思是说, 它的研究对象是随时间演变的随机现象. 对于这种现象, 一般来说, 人们已不能用随机变量或多维随机变量来合理地表达, 而需要用一族(无限多个)随机变量来描述. 现在来看一个具体例子.

热噪声电压 电子元件或器件由于内部微观粒子(如电子)的随机热骚动所引起的端电压称为热噪声电压, 它在任一确定时刻 t 的值是一随机变量, 记为 $V(t)$. 不同时刻对应不同的随机变量, 当时间在某区间, 譬如 $[0, +\infty)$ 上推移时, 热噪声电压表现为一族随机变量, 记为 $\{V(t), t \geq 0\}$. 在无线电通讯技术中, 接收机在接收信号时, 机内的热噪声电压要对信号产生持续的干扰, 为要消除这种干扰(假设没有其他干扰因素), 就必须掌握热噪声电压随时间变化的过程. 为此, 我们通过某种装置对元件(或器件)两端的热噪声电压进行长时间的测量, 并把结果自动记录下来, 作为一次试验结果, 便得到一个电压—时间函数(即电压关于时间 t 的函数) $v_1(t), t > 0$, 如图 12-1, 这个电压—时间函数在试验前是不可能预先确知的, 只有通过测量才能得到. 如果在相同条件下独立地再进行一次测量, 则得到的记录是不同的. 事实上, 由于热骚动的随机性, 在相同条件下每次测量都将产生不同的电压—时间函数. 这样, 不断地独立重复地一次次测量就可以得到一族不同的电压—时间函数, 这族函数从另一角度刻画了热噪声电压.

现以上述例子为背景, 引入随机过程的概念

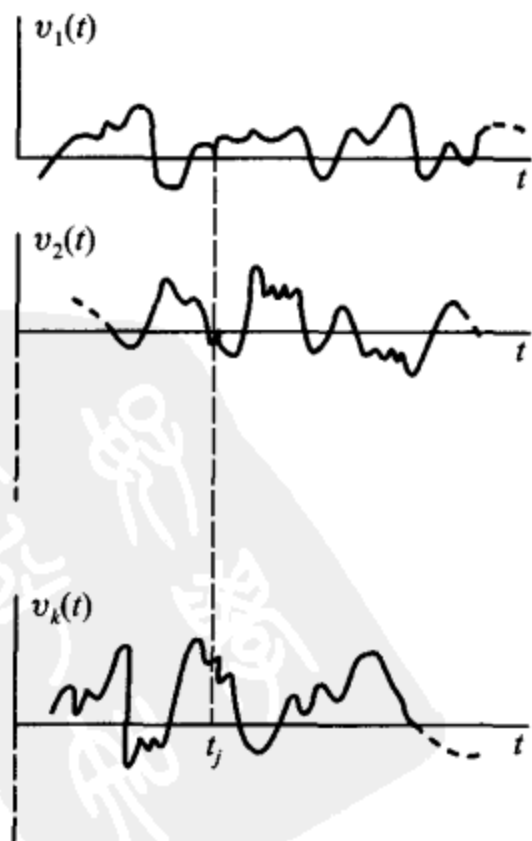


图 12-1

概念.

设 T 是一无限实数集. 我们把依赖于参数 $t \in T$ 的一族(无限多个)随机变量称为随机过程, 记为 $\{X(t), t \in T\}$, 这里对每一个 $t \in T$, $X(t)$ 是一随机变量. T 叫做参数集. 我们常把 t 看作为时间, 称 $X(t)$ 为时刻 t 时过程的状态, 而 $X(t_1) = x$ (实数) 说成是 $t = t_1$ 时过程处于状态 x . 对于一切 $t \in T$, $X(t)$ 所有可能取的一切值的全体称为随机过程的状态空间.

对随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 进行一次试验(即在 T 上进行一次全程观测), 其结果是 t 的函数, 记为 $x(t), t \in T$, 称它为随机过程的一个样本函数或样本曲线. 所有不同的试验结果构成一族(可以只包含有限个结果, 见本节例 1)样本函数.

随机过程可以看作是多维随机变量的延伸. 随机过程与其样本函数的关系就像数理统计中总体与样本的关系一样.

依照上面的说法, 热噪声电压的变化过程 $\{V(t), t \geq 0\}$ 是一随机过程, 它的状态空间是 $(-\infty, +\infty)$, 一次观测到的电压一时间函数就是这个随机过程的一个样本函数.

在以后的叙述中, 为简便起见, 常以 $X(t), t \in T$ 表示随机过程. 在上下文不致混淆的情形下, 一般略去记号中的参数集 T .

例 1 抛掷一枚硬币的试验, 样本空间是 $S = \{H, T\}$, 现借此定义

$$X(t) = \begin{cases} \cos \pi t, & \text{当出现 } H, \\ t, & \text{当出现 } T, \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

其中 $P(H) = P(T) = 1/2$. 对任意固定的 t , $X(t)$ 是一定义在 S 上的随机变量; 对不同的 t , $X(t)$ 是不同的随机变量(见图 12-2), 所以 $\{X(t), t \in (-\infty, +\infty)\}$ 是一族随机变量, 即它是随机过程. 另一方面, 做一次试验, 若出现 H , 样本函数为 $x_1(t) = \cos \pi t$; 若出现 T , 样本函数为 $x_2(t) = t$, 所以该随机过程对应的一族样本函数仅包含两个函数: $\{\cos \pi t, t\}$. 显然这个随机过程的状态空间为 $(-\infty, +\infty)$. $\square$

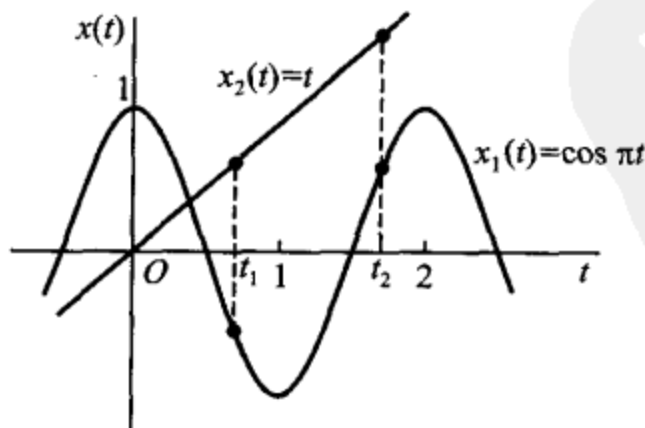


图 12-2

例 2 考虑

$$X(t) = a \cos(\omega t + \Theta), \quad t \in (-\infty, +\infty), \quad (1.1)$$

式中 a 和 ω 是正常数, Θ 是在 $(0, 2\pi)$ 上服从均匀分布的随机变量.

显然, 对于每一个固定的时刻 $t = t_1$, $X(t_1) = a \cos(\omega t_1 + \Theta)$ 是一个随机变量, 因而由 (1.1) 式确定的 $X(t)$ 是一个随机过程, 通常称它为随机相位正弦波. 它的状态空间是 $[-a, a]$. 在 $(0, 2\pi)$ 内随机地取一数 θ_i , 相应地即得这个随机过程的一个样本函数

$$x_i(t) = a \cos(\omega t + \theta_i), \quad \theta_i \in (0, 2\pi).$$

图 12-3 中画出了这个随机过程的两条样本曲线.

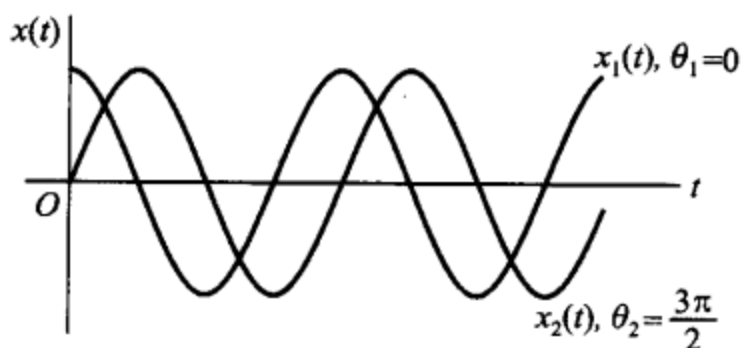


图 12-3

例 3 在测量运动目标的距离时存在随机误差, 若以 $\epsilon(t)$ 表示在时刻 t 的测量误差, 则它是一个随机变量. 当目标随时间 t 按一定规律运动时, 测量误差 $\epsilon(t)$ 也随时间 t 而变化, 换句话说, $\epsilon(t)$ 是依赖于时间 t 的一族随机变量, 亦即 $\{\epsilon(t), t \geq 0\}$ 是一随机过程. 且它们的状态空间是 $(-\infty, +\infty)$. □

例 4 设某城市的 120 急救电话台迟早会接到用户的呼叫, 以 $X(t)$ 表示时间间隔 $(0, t]$ 内接到的呼叫次数, 它是一个随机变量, 且对于不同的 $t \geq 0$, $X(t)$ 是不同的随机变量. 于是, $\{X(t), t \geq 0\}$ 是一随机过程. 且它的状态空间是 $\{0, 1, 2, \dots\}$. □

例 5 考虑抛掷一颗骰子的试验. (i) 设 X_n 是第 n 次 ($n \geq 1$) 抛掷的点数, 对于 $n = 1, 2, \dots$ 的不同值, X_n 是不同的随机变量, 因而 $\{X_n, n \geq 1\}$ 构成一随机过程, 称为伯努利过程或伯努利随机序列. (ii) 设 Y_n 是前 n 次抛掷中出现的最大点数, $\{Y_n, n \geq 1\}$ 也是一随机过程. 它们的状态空间都是 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. □

工程技术中有很多随机现象, 例如, 地震波幅、结构物承受的风荷载、时间间隔 $(0, t]$ 内船舶甲板“上浪”的次数、通讯系统和自控系统中的各种噪声和干扰, 以及生物群体的生长等等变化过程都可用随机过程这一数学模型来描绘. 不过, 这些随机过程都不能像随机相位正弦波那样, 很方便、很具体地用时间和随机变量(一个或几个)的关系式表示出来, 其主要原因在于自然界和社会产生随机因素的机理是极为复杂的, 甚至是不可能被观察到的. 因而, 对于这样的随机过程

(实际中大多是这样的随机过程),一般来说,我们只有通过分析由观察所得到的样本函数才能掌握它们随时间变化的统计规律性.

随机过程的不同描述方式在本质上是一致的.在理论分析时往往以随机变量族的描述方式作为出发点,而在实际测量和数据处理中往往采用样本函数族的描述方式.这两种描述方式在理论和实际两方面是互为补充的.

随机过程可依其在任一时刻的状态是连续型随机变量或离散型随机变量而分成连续型随机过程和离散型随机过程.热噪声电压、例 2 和例 3 是连续型随机过程,例 1、例 4 和例 5 是离散型随机过程.

随机过程还可依时间(参数)是连续或离散进行分类.当时间集 T 是有限或无限区间时,称 $\{X(t), t \in T\}$ 为连续参数随机过程(以下如无特别指明,“随机过程”总是指连续参数而言的).如果 T 是离散集合,例如 $T = \{0, 1, 2, \dots\}$,则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为离散参数随机过程或随机序列,此时常记成 $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ 等,如例 5.

有时,为了适应数字化的需要,实际中也常将连续参数随机过程转化为随机序列处理.例如,我们只在时间集 $T = \{\Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t, \dots\}$ 上观测电阻热噪声电压 $V(t)$,这时就得到一个随机序列

$$\{V_1, V_2, \dots, V_n, \dots\},$$

其中 $V_n = V(n\Delta t)$.显然,当 Δt 充分小时,这个随机序列能够近似地描述连续时间情况下的热噪声电压.

最后指出,参数 t 虽然通常解释为时间,但它也可以表示其他的量,诸如序号、距离等.例如,在例 5 中,我们假定每隔一段单位时间抛掷骰子一次,那么第 n 次抛掷时骰子出现的点数 X_n 就相当于 $t = n$ 时骰子出现的点数.

§ 2 随机过程的统计描述

随机过程在任一时刻的状态是随机变量,由此可以利用随机变量(一维和多维)的统计描述方法来描述随机过程的统计特性.

(一) 随机过程的分布函数族

给定随机过程 $\{X(t), t \in T\}$.对于每一个固定的 $t \in T$,随机变量 $X(t)$ 的分布函数一般与 t 有关,记为

$$F_X(x, t) = P\{X(t) \leq x\}, x \in \mathbf{R},$$

称它为随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的一维分布函数,而 $\{F_X(x, t), t \in T\}$ 称为一维分布函数族.

一维分布函数族刻画了随机过程在各个个别时刻的统计特性.为了描述随

机过程在不同时刻状态之间的统计联系,一般可对任意 n ($n=2,3,\cdots$) 个不同的时刻 $t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$, 引入 n 维随机变量 $(X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n))$, 它的分布函数记为

$$F_X(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \cdots, X(t_n) \leq x_n\},$$

$$x_i \in \mathbf{R}, \quad i=1, 2, \cdots, n.$$

对于固定的 n , 我们称 $\{F_X(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n), t_i \in T\}$ 为随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的 n 维分布函数族.

当 n 充分大时, n 维分布函数族能够近似地描述随机过程的统计特性. 显然, n 取得愈大, 则 n 维分布函数族描述随机过程的特性也愈趋完善. 一般, 可以指出(科尔莫戈罗夫定理): 有限维分布函数族, 即 $\{F_X(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n), n=1, 2, \cdots, t_i \in T\}$, 完全地确定了随机过程的统计特性.

在上一节, 我们曾将随机过程按其状态或时间的连续或离散进行了分类. 然而, 随机过程的本质分类方法乃是按其分布特性进行分类. 具体地说, 就是依照过程在不同时刻的状态之间的特殊统计依赖方式, 抽象出一些不同类型的模型, 如独立增量过程、马尔可夫过程、平稳过程等. 我们将在以后的章节中对它们作不同程度的介绍.

(二) 随机过程的数字特征

随机过程的分布函数族能完善地刻画随机过程的统计特性, 但是人们在实际中, 根据观察往往只能得到随机过程的部分资料(样本), 用它来确定有限维分布函数族是困难的, 甚至是不可能的. 因而像引入随机变量的数字特征那样, 有必要引入随机过程的基本的数字特征——均值函数和相关函数等. 我们将会看到, 这些数字特征在一定条件下是便于测量的. 下面就依次来介绍.

给定随机过程 $\{X(t), t \in T\}$, 固定 $t \in T$, $X(t)$ 是一随机变量, 它的均值一般与 t 有关, 记为

$$\mu_X(t) = E[X(t)], \quad (2.1)$$

我们称 $\mu_X(t)$ 为随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的均值函数.

注意, $\mu_X(t)$ 是随机过程的所有样本函数在时刻 t 的函数值的平均值, 通常称这种平均为集平均或统计平均, 以区别将于第十四章中引入的时间平均概念.

均值函数 $\mu_X(t)$ 表示了随机过程 $X(t)$ 在各个时刻的摆动中心, 如图 12-4 所示.

其次, 我们把随机变量 $X(t)$ 的二阶原点矩和二阶中心矩分别记作

$$\Psi_X^2(t) = E[X^2(t)] \quad (2.2)$$

和

$$\sigma_X^2(t) = D_X(t) = \text{Var}[X(t)] = E\{[X(t) - \mu_X(t)]^2\}, \quad (2.3)$$

并分别称它们为随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的均值函数和方差函数. 方差函数的算术平方根 $\sigma_X(t)$ 称为随机过程的标准差函数, 它表示随机过程 $X(t)$ 在时刻 t 对于均值 $\mu_X(t)$ 的平均偏离程度. 见图 12-4.

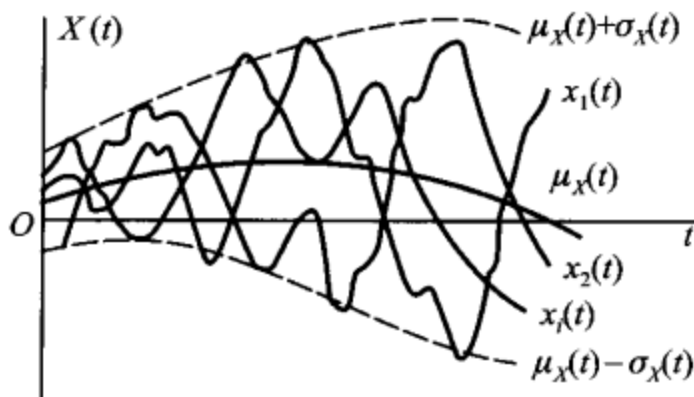


图 12-4

又设任意 $t_1, t_2 \in T$. 我们把随机变量 $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 的二阶原点混合矩记作

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)], \quad (2.4)$$

并称它为随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的自相关函数, 简称相关函数. 记号 $R_{XX}(t_1, t_2)$ 在不致混淆的场合常简记为 $R_X(t_1, t_2)$.

类似地, 还可写出 $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 的二阶混合中心矩, 记作

$$\begin{aligned} C_{XX}(t_1, t_2) &= \text{Cov}[X(t_1), X(t_2)] \\ &= E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)][X(t_2) - \mu_X(t_2)]\}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

并称它为随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的自协方差函数, 简称协方差函数. $C_{XX}(t_1, t_2)$ 也常简记为 $C_X(t_1, t_2)$.

由多维随机变量数字特征的知识可知, 自相关函数和自协方差函数是刻画随机过程自身在两个不同时刻的状态之间统计依赖关系的数字特征.

现把(2.1)—(2.5)式定义的诸数字特征之间的关系简述如下:

由(2.2)和(2.4)式知

$$\Psi_X^2(t) = R_X(t, t). \quad (2.6)$$

由(2.5)式展开, 得

$$C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_X(t_2). \quad (2.7)$$

特别, 当 $t_1 = t_2 = t$ 时, 由(2.7)式, 得

$$\sigma_X^2(t) = C_X(t, t) = R_X(t, t) - \mu_X^2(t). \quad (2.8)$$

由(2.6)—(2.8)式可知, 以上诸数字特征中最主要的是均值函数和自相关函数.

从理论的角度来看, 仅仅研究均值函数和自相关函数当然是不能代替对整个随机过程的研究的, 但是由于它们确实刻画了随机过程的主要统计特性, 而且远较有限维分布函数族易于观察和实际计算, 因而对于应用课题而言, 它们常常

能够起到重要作用. 据此, 在随机过程的专著中都着重研究了所谓二阶矩过程.

如果对每一个 $t \in T$, 随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的二阶矩 $E[X^2(t)]$ 都存在, 则称它为二阶矩过程.

二阶矩过程的相关函数总存在. 事实上, 由于 $E[X^2(t_1)], E[X^2(t_2)]$ 存在, 根据柯西—施瓦茨不等式(参见第四章习题 37)有

$$\{E[X(t_1)X(t_2)]\}^2 \leq E[X^2(t_1)]E[X^2(t_2)], \quad t_1, t_2 \in T.$$

即知 $R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$ 存在.

在实际中, 常遇到一种特殊的二阶矩过程——正态过程. 随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 称为正态过程, 如果它的每一个有限维分布都是正态分布, 亦即对任意整数 $n \geq 1$ 及任意 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ 服从 n 维正态分布. 由第四章 § 3、§ 4 知, 正态过程的全部统计特性完全由它的均值函数和自协方差函数(或自相关函数)所确定.

例 1 设 A, B 是两个随机变量. 试求随机过程 $X(t) = At + B, t \in T = (-\infty, +\infty)$ 的均值函数和自相关函数. 如果 A, B 相互独立, 且 $A \sim N(0, 1)$, $B \sim U(0, 2)$, 问 $X(t)$ 的均值函数和自相关函数又是怎样的?

解 $X(t)$ 的均值函数和自相关函数分别为

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = E[At + B] = tE[A] + E[B],$$

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] = E[(At_1 + B)(At_2 + B)] \\ &= t_1 t_2 E(A^2) + (t_1 + t_2)E(AB) + E(B^2), \quad t_1, t_2 \in T. \end{aligned}$$

当 $A \sim N(0, 1)$ 时, $E(A) = 0, E(A^2) = 1$; 当 $B \sim U(0, 2)$ 时 $E(B) = 1, E(B^2) = 4/3$; 又因 A, B 独立, 故 $E(AB) = E(A)E(B) = 0$. 所以, 此时

$$\mu_X(t) = 1, \quad R_X(t_1, t_2) = t_1 t_2 + 4/3, \quad t_1, t_2 \in T. \quad \square$$

例 2 求随机相位正弦波(§ 1 例 2)的均值函数、方差函数和自相关函数.

解 由假设 Θ 的概率密度为

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 < \theta < 2\pi, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

于是, 由定义

$$\begin{aligned} \mu_X(t) &= E[X(t)] = E[a \cos(\omega t + \Theta)] \\ &= \int_0^{2\pi} a \cos(\omega t + \theta) \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta = 0, \end{aligned}$$

而自相关函数

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] = E[a^2 \cos(\omega t_1 + \Theta) \cos(\omega t_2 + \Theta)] \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \cos(\omega t_1 + \theta) \cos(\omega t_2 + \theta) \cdot \frac{1}{2\pi} d\theta = \frac{a^2}{2} \cos \omega \tau, \end{aligned}$$

式中 $\tau = t_2 - t_1$. 特别, 令 $t_1 = t_2 = t$, 即得方差函数为

$$\sigma_X^2(t) = R_X(t, t) - \mu_X^2(t) = R_X(t, t) = \frac{a^2}{2}. \quad \square$$

例 3 设 $X(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, t \in T = (-\infty, +\infty)$, 其中 A, B 是相互独立, 且都服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$ 的随机变量, ω 是实常数. 试证明 $X(t)$ 是正态过程, 并求它的均值函数和自相关函数.

解 由题设 A, B 是相互独立的正态变量, 所以 (A, B) 是二维正态变量. 对任意一组实数 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$,

$$X(t_i) = A \cos \omega t_i + B \sin \omega t_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

都是 A, B 的线性组合, 于是根据第四章 § 4 n 维正态变量的性质 3°, $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ 是 n 维正态变量, 因为 n, t_i 是任意的, 由定义, $X(t)$ 是正态过程. 另由题设 $E(A) = E(B) = E(AB) = 0, E(A^2) = E(B^2) = \sigma^2$, 由此可算得 $X(t)$ 的均值函数和自协方差函数(自相关函数)分别为

$$\mu_X(t) = E\{A \cos \omega t + B \sin \omega t\} = 0,$$

$$\begin{aligned} C_X(t_1, t_2) &= R_X(t_1, t_2) \\ &= E[(A \cos \omega t_1 + B \sin \omega t_1)(A \cos \omega t_2 + B \sin \omega t_2)] \\ &= \sigma^2 (\cos \omega t_1 \cos \omega t_2 + \sin \omega t_1 \sin \omega t_2) \\ &= \sigma^2 \cos \omega(t_2 - t_1). \end{aligned} \quad \square$$

(三) 二维随机过程的分布函数和数字特征

实际问题中, 我们有时必须同时研究两个或两个以上随机过程及它们之间的统计联系. 例如, 某地在时段 $(0, t]$ 内的最高温度 $X(t)$ 和最低温度 $Y(t)$ 都是随机过程, 需要研究它们的统计联系. 又如, 输入到一个系统的信号和噪声可以都是随机过程, 这时输出也是随机过程, 我们需要研究输出与输入之间的统计联系等等. 对于这类问题, 我们除了对各个随机过程的统计特性加以研究外, 还必须将几个随机过程作为整体研究其统计特性.

设 $X(t), Y(t)$ 是依赖于同一参数 $t \in T$ 的随机过程, 对于不同的 $t \in T$, $(X(t), Y(t))$ 是不同的二维随机变量, 我们称 $\{(X(t), Y(t)), t \in T\}$ 为二维随机过程.

给定二维随机过程 $\{(X(t), Y(t)), t \in T\}$, $t_1, t_2, \dots, t_n; t'_1, t'_2, \dots, t'_m$ 是 T 中任意两组实数, 我们称 $n+m$ 维随机变量

$$(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n); Y(t'_1), Y(t'_2), \dots, Y(t'_m))$$

的分布函数

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n; y_1, y_2, \dots, y_m; t'_1, t'_2, \dots, t'_m),$$

$$x_i, y_j \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$$

为这个二维随机过程的 $n+m$ 维分布函数或随机过程 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 的 $n+m$ 维联

合分布函数. 同样可定义二维随机过程的 $n+m$ 维分布函数族和有限维分布函数族.

如果对任意的正整数 n, m , 任意的数组 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T, t'_1, t'_2, \dots, t'_m \in T$, n 维随机变量 $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ 与 m 维随机变量 $(Y(t'_1), Y(t'_2), \dots, Y(t'_m))$ 相互独立, 则称随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是相互独立的.

关于数字特征, 除了 $X(t), Y(t)$ 各自的均值和自相关函数外, 在应用课题中感兴趣的是 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的二阶混合原点矩, 记作

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)], \quad t_1, t_2 \in T, \quad (2.9)$$

并称它为随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互相关函数.

类似地, 还有如下定义的 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互协方差函数:

$$\begin{aligned} C_{XY}(t_1, t_2) &= E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)][Y(t_2) - \mu_Y(t_2)]\} \\ &= R_{XY}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1)\mu_Y(t_2), \quad t_1, t_2 \in T. \end{aligned} \quad (2.10)$$

如果二维随机过程 $(X(t), Y(t))$ 对任意的 $t_1, t_2 \in T$ 恒有

$$C_{XY}(t_1, t_2) = 0, \quad (2.11)$$

则称随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是不相关的.

由第四章 §3 可以推知, 两个随机过程如果是相互独立的, 且它们的二阶矩存在, 则它们必然不相关. 反之, 从不相关一般并不能推断出它们是相互独立的.

当同时考虑 $n(n > 2)$ 个随机过程或 n 维随机过程时, 我们可类似地引入它们的多维分布, 以及均值函数和两两之间的互相关函数(或互协方差函数).

在许多应用问题中, 经常要研究几个随机过程之和(例如, 将信号和噪声同时输入到一个线性系统的情形)的统计特性. 现考虑三个随机过程 $X(t), Y(t)$ 和 $Z(t)$ 之和的情形. 令

$$W(t) = X(t) + Y(t) + Z(t),$$

显然, 均值函数

$$\mu_W(t) = \mu_X(t) + \mu_Y(t) + \mu_Z(t).$$

而 $W(t)$ 的自相关函数可以根据均值运算规则和相关函数的定义得到,

$$\begin{aligned} R_{WW}(t_1, t_2) &= E[W(t_1)W(t_2)] \\ &= R_{XX}(t_1, t_2) + R_{XY}(t_1, t_2) + R_{XZ}(t_1, t_2) \\ &\quad + R_{YX}(t_1, t_2) + R_{YY}(t_1, t_2) + R_{YZ}(t_1, t_2) \\ &\quad + R_{ZX}(t_1, t_2) + R_{ZY}(t_1, t_2) + R_{ZZ}(t_1, t_2). \end{aligned}$$

此式表明: 几个随机过程之和的自相关函数可以表示为各个随机过程的自相关函数以及各对随机过程的互相关函数之和.

如果上述三个随机过程是两两不相关的, 且各自的均值函数都为零, 则由 (2.11) 式可知诸互相关函数均等于零, 此时 $W(t)$ 的自相关函数简单地等于各个过程的自相关函数之和, 即

$$R_{WW}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1, t_2) + R_{YY}(t_1, t_2) + R_{ZZ}(t_1, t_2). \quad (2.12)$$

特别地, 令 $t_1 = t_2 = t$, 由(2.12)式可得 $W(t)$ 的方差函数(此处即均方值函数)为

$$\sigma_W^2(t) = \Psi_W^2(t) = \Psi_X^2(t) + \Psi_Y^2(t) + \Psi_Z^2(t).$$

§ 3 泊松过程及维纳过程

泊松过程及维纳(Wiener)过程是两个具体而又典型的随机过程, 它们在随机过程的理论和应用中都有重要的地位, 它们都属于所谓的独立增量过程, 所以下面首先简要地介绍独立增量过程.

给定二阶矩过程 $\{X(t), t \geq 0\}$, 我们称随机变量 $X(t) - X(s), 0 \leq s < t$ 为随机过程在区间 $(s, t]$ 上的增量. 如果对任意选定的正整数 n 和任意选定的 $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n, n$ 个增量

$$X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \cdots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

相互独立, 则称 $\{X(t), t \geq 0\}$ 为独立增量过程. 直观地说, 它具有“在互不重叠的区间上, 状态的增量是相互独立的”这一特征.

对于独立增量过程, 可以证明: 在 $X(0) = 0$ 的条件下, 它的有限维分布函数族可以由增量 $X(t) - X(s) (0 \leq s < t)$ 的分布所确定.

特别, 若对任意的实数 h 和 $0 \leq s + h < t + h, X(t + h) - X(s + h)$ 与 $X(t) - X(s)$ 具有相同的分布, 则称增量具有平稳性. 这时, 增量 $X(t) - X(s)$ 的分布函数实际上只依赖于时间差 $t - s (0 \leq s < t)$, 而不依赖于 t 和 s 本身(事实上, 令 $h = -s$ 即知). 当增量具有平稳性时, 称相应的独立增量过程是齐次的或时齐的.

接着, 在 $X(0) = 0$ 和方差函数 $D_X(t)$ 为已知的条件下, 我们来计算独立增量过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的协方差函数 $C_X(s, t)$.

记 $Y(t) = X(t) - \mu_X(t)$. 首先注意, 当 $X(t)$ 具有独立增量时, $Y(t)$ 也具有独立增量; 其次, $Y(0) = 0, E[Y(t)] = 0$, 且方差函数 $D_Y(t) = E[Y^2(t)] = D_X(t)$. 利用这些性质, 当 $0 \leq s < t$ 时, 就有

$$\begin{aligned} C_X(s, t) &= E[Y(s)Y(t)] \\ &= E\{[Y(s) - Y(0)][(Y(t) - Y(s)) + Y(s)]\} \\ &= E[Y(s) - Y(0)]E[Y(t) - Y(s)] + E[Y^2(s)] \\ &= D_X(s). \end{aligned}$$

于是可知, 对任意 $s, t \geq 0$, 协方差函数可用方差函数表示为

$$C_X(s, t) = D_X(\min\{s, t\}). \quad (3.1)$$

(一) 泊松过程

考虑下列随时间推移迟早会重复出现的事件:

(i) 自电子管阴极发射的电子到达阳极;

(ii) 意外事故或意外差错的发生;

(iii) 要求服务的顾客到达服务站. 此处“顾客”与“服务站”的含义是相当广泛的. 例如, “顾客”可以是电话的呼叫, “服务站”是 120 急救台; “顾客”可以是来领配件的汽车维修工, “服务站”是维修站配件仓库的管理员; “顾客”也可以是联网的个人电脑, “服务站”是某网站的主页等等.

为建立一般模型方便起见, 我们把电子、顾客等看作时间轴上的质点, 电子到达阳极、顾客到达服务站等事件的发生相当于质点出现. 于是抽象地说, 我们研究的对象将是随时间推移, 陆续地出现在时间轴上的许多质点所构成的随机的质点流.

以 $N(t), t \geq 0$ 表示在时间间隔 $(0, t]$ 内出现的质点数 (如 §1 例 4 中的呼叫数). $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一状态取非负整数、时间连续的随机过程, 称为计数过程. 它的一个典型的样本函数如图 12-5 所示, 图中 $t_1, t_2, \dots$ 是质点依次出现的时刻.

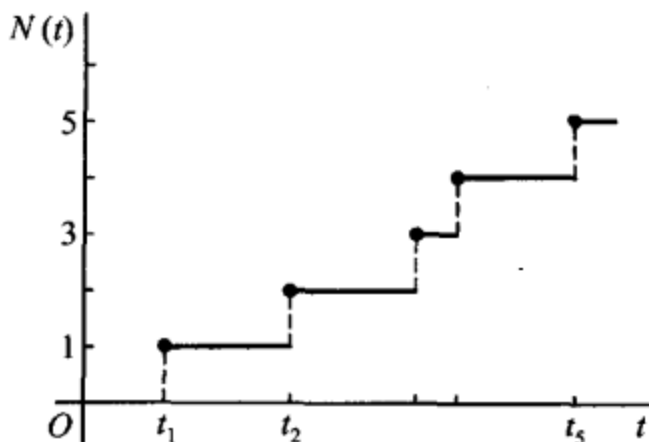


图 12-5

将增量 $N(t) - N(t_0) \xrightarrow{\text{记成}} N(t_0, t), 0 \leq t_0 < t$, 它表示时间间隔 $(t_0, t]$ 内出现的质点数. “在 $(t_0, t]$ 内出现 k 个质点”, 即 $\{N(t_0, t) = k\}$ 是一事件, 其概率记为

$$P_k(t_0, t) = P\{N(t_0, t) = k\}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

现假设 $N(t)$ 满足如下条件:

1° 在不相重叠的区间上的增量具有独立性;

2° 对于充分小的 Δt

$$P_1(t, t + \Delta t) = P\{N(t, t + \Delta t) = 1\} = \lambda \Delta t + o(\Delta t), \quad (3.3)$$

其中常数 $\lambda > 0$ 称为过程 $N(t)$ 的强度, 而 $o(\Delta t)$ 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时是关于 Δt 的高阶无穷小;

3° 对于充分小的 Δt ,

$$\sum_{j=2}^{+\infty} P_j(t, t + \Delta t) = \sum_{j=2}^{+\infty} P\{N(t, t + \Delta t) = j\} = o(\Delta t), \quad (3.4)$$

亦即对于充分小的 Δt , 在 $(t, t + \Delta t]$ 内出现 2 个或 2 个以上质点的概率与出现一

个质点的概率相比可以忽略不计;

$$4^\circ N(0)=0.$$

我们把满足条件 $1^\circ-4^\circ$ 的计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称作强度为 λ 的泊松过程, 相应的质点流或即质点出现的随机时刻 $t_1, t_2, \dots$ 称作强度为 λ 的泊松流. 以下首先来求出增量的分布律(3.2).

对于泊松过程, 我们注意到 $\sum_{k=0}^{+\infty} P_k(t_0, t) = 1$, 结合条件 2° 和 3° , 有

$$\begin{aligned} P_0(t, t+\Delta t) &= 1 - P_1(t, t+\Delta t) - \sum_{k=2}^{+\infty} P_k(t, t+\Delta t) \\ &= 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (3.5)$$

下面就泊松过程来计算概率(3.2).

首先确定 $P_0(t_0, t)$. 为此, 对 $\Delta t > 0$, 考虑

$$\begin{aligned} P_0(t_0, t+\Delta t) &= P\{N(t_0, t+\Delta t)=0\} \\ &= P\{N(t_0, t) + N(t, t+\Delta t)=0\} \\ &= P\{N(t_0, t)=0, N(t, t+\Delta t)=0\}, \end{aligned}$$

由条件 1° 和(3.5)式, 上式可写成

$$\begin{aligned} P_0(t_0, t+\Delta t) &= P\{N(t_0, t)=0\}P\{N(t, t+\Delta t)=0\} \\ &= P_0(t_0, t)[1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)] \end{aligned}$$

$$\text{或 } P_0(t_0, t+\Delta t) - P_0(t_0, t) = -\lambda P_0(t_0, t)\Delta t + o(\Delta t).$$

现以 Δt 除上式两边, 并令 $\Delta t \rightarrow 0$, 即得 $P_0(t_0, t)$ 满足的微分方程

$$\frac{dP_0(t_0, t)}{dt} = -\lambda P_0(t_0, t). \quad (3.6)$$

因为 $N(t_0, t_0)=0$, 故 $P_0(t_0, t_0)=1$. 把它看作初始条件即可从方程(3.6)解得

$$P_0(t_0, t) = e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad t > t_0. \quad (3.7)$$

再来计算 $P_k(t_0, t), k \geq 1$. 根据和事件概率公式和条件 1° , 有

$$\begin{aligned} P\{N(t_0, t+\Delta t)=k\} &= P\{N(t_0, t) + N(t, t+\Delta t)=k\} \\ &= \sum_{j=0}^k P\{N(t, t+\Delta t)=j\}P\{N(t_0, t)=k-j\}. \end{aligned}$$

由(3.2)–(3.5)式, 并注意到

$$\sum_{j=2}^k P_j(t, t+\Delta t)P_{k-j}(t_0, t) \leq \sum_{j=2}^{+\infty} P_j(t, t+\Delta t) = o(\Delta t) \quad (k \geq 2),$$

上式可表示成

$$\begin{aligned} P_k(t_0, t+\Delta t) &= \sum_{j=0}^k P_j(t, t+\Delta t)P_{k-j}(t_0, t) \\ &= [1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)]P_k(t_0, t) + [\lambda\Delta t + o(\Delta t)]P_{k-1}(t_0, t) + o(\Delta t) \quad (k \geq 1). \end{aligned}$$

将此式适当整理后, 两边除以 Δt , 并令 $\Delta t \rightarrow 0$, 就可得到 $P_k(t_0, t)$ 满足的微分-差分方程

$$\frac{dP_k(t_0, t)}{dt} = -\lambda P_k(t_0, t) + \lambda P_{k-1}(t_0, t), \quad t > t_0. \quad (3.8)$$

又因 $N(t_0, t_0)=0$, 故有初始条件

$$P_k(t_0, t_0) = 0, \quad k \geq 1. \quad (3.9)$$

于是, 在(3.8)、(3.9)式中令 $k=1$, 并利用已求出的 $P_0(t_0, t)$, 即可解出

$$P_1(t_0, t) = \lambda(t-t_0)e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad t > t_0.$$

如此重复, 即在(3.8)、(3.9)式中逐次令 $k=2, 3, \dots$ 就可求得在“ $(t_0, t]$ 内出现 k 个质点”的概率, 即得增量的分布律(3.2)为

$$\begin{aligned} P_k(t_0, t) &= P\{N(t_0, t) = k\} \\ &= \frac{[\lambda(t-t_0)]^k}{k!} e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad t > t_0, k=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

由上式易见增量 $N(t_0, t) = N(t) - N(t_0)$ 的概率分布是参数为 $\lambda(t-t_0)$ 的泊松分布, 且只与时间差 $t-t_0$ 有关, 所以强度为 λ 的泊松过程是一齐次的独立增量过程.

在有些书中, 泊松过程也用另一种形式定义, 即若计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 满足下列三个条件:

- (i) 它是独立增量过程;
- (ii) 对任意的 $t > t_0 \geq 0$, 增量 $N(t) - N(t_0) \sim \pi(\lambda(t-t_0))$;
- (iii) $N(0) = 0$,

那么称 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一强度为 λ 的泊松过程.

从前面的演算结果, 不难看到从条件 1°—4°可以推出(i)—(iii). 反之, 在(ii)中令 $t-t_0 = \Delta t$, 并利用 $e^{-\lambda \Delta t}$ 的泰勒级数展开式, 就能得到条件 2°和 3°(详细推演由读者自己完成). 由此, 定义泊松过程的两组条件是等价的.

由(3.10)式, $N(t) - N(t_0) \sim \pi(\lambda(t-t_0))$, $t > t_0 \geq 0$, 再由第四章 §1, §2 知

$$E[N(t) - N(t_0)] = \text{Var}[N(t) - N(t_0)] = \lambda(t-t_0).$$

特别地, 令 $t_0 = 0$, 由于假设 $N(0) = 0$, 故可推知泊松过程的均值函数和方差函数分别为

$$E[N(t)] = \lambda t, \quad D_N(t) = \text{Var}[N(t)] = \lambda t. \quad (3.11)$$

从(3.11)式可以看到, $\lambda = E[N(t)/t]$, 即泊松过程的强度 λ (常数) 等于单位长时间间隔内出现的质点数目的期望值.

关于泊松过程的协方差函数, 则可由(3.1)、(3.11)式直接推得

$$C_N(s, t) = \lambda \min\{s, t\}, \quad s, t \geq 0.$$

而相关函数

$$R_N(s, t) = E[N(s)N(t)] = \lambda^2 st + \lambda \min\{s, t\}, \quad s, t \geq 0.$$

若条件(3.3)式中的强度为非均匀的, 即 λ 是时间 t 的函数 $\lambda = \lambda(t), t \geq 0$. 则称泊松过程为非齐次的. 对于非齐次泊松过程, 用类似的方法, 可得

$$P\{N(t) - N(t_0) = k\} = \frac{\left[\int_{t_0}^t \lambda(\tau) d\tau \right]^k}{k!} e^{-\int_{t_0}^t \lambda(\tau) d\tau},$$

$$t > t_0 \geq 0, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$E[N(t)] = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau.$$

$$R_N(s, t) = \int_0^{\min(s, t)} \lambda(\tau) d\tau \left[1 + \int_0^{\max(s, t)} \lambda(\tau) d\tau \right].$$

下面介绍与泊松过程有关的两个随机变量, 即等待时间和点间间距, 以及它们的概率分布.

在较多的实际问题中, 通常对质点的观察, 不是对时间间隔 $(t_1, t_2]$ 中出现的质点计数, 而是对记录到某一预定数量的质点所需要的时间进行计时. 例如, 为研究含某种放射性元素的物质, 常对它发射出来的粒子做计时试验.

一般, 设质点(或事件)依次重复出现的时刻

$$t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$$

是一强度为 λ 的泊松流, $\{N(t), t \geq 0\}$ 为相应的泊松过程. 以惯用记号记

$$W_0 = 0, W_n = t_n, n = 1, 2, \dots$$

W_n 是一随机变量, 表示第 n 个质点(或事件第 n 次)出现的等待时间(见图 12-6). 为求出 W_n 的分布函数 $F_{W_n}(t) = P\{W_n \leq t\}$. 首先注意, 事件 $\{W_n > t\} = \{N(t) < n\}$, 所以

$$\begin{aligned} F_{W_n}(t) &= P\{W_n \leq t\} = 1 - P\{W_n > t\} = 1 - P\{N(t) < n\} \\ &= P\{N(t) \geq n\} = \sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

$$F_{W_n}(t) = 0, \quad t < 0.$$

将它关于 t 求导, 得 W_n 的概率密度为

$$f_{W_n}(t) = \frac{dF_{W_n}(t)}{dt} = \begin{cases} \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, & t > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (3.12)$$

这就是说, 泊松流(泊松过程)的等待时间 W_n 服从 Γ 分布. 特别, 质点(或事件)首次出现的等待时间 W_1 服从指数分布:

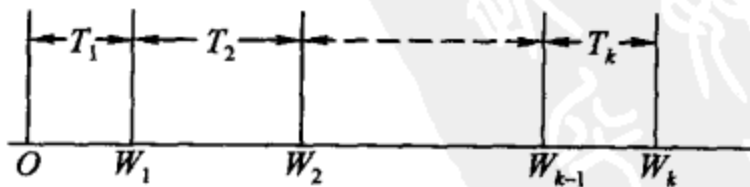


图 12-6

$$f_{W_1}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (3.13)$$

又记

$$T_i = W_i - W_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

它也是一个连续型随机变量,称为相继出现的第 $i-1$ 个质点和第 i 个质点的点间间距(见图 10-6). 下面来求 T_i 的分布. 由于 $T_1=W_1$, 所以 T_1 服从指数分布(3.13). 对于 $i \geq 2$, 我们先求在第 $i-1$ 个质点出现在时刻 t_{i-1} (即 $t_{i-1}=t_{i-1}$) 的条件下, T_i 的条件分布函数:

$$\begin{aligned} F_{T_i|t_{i-1}}(t|t_{i-1}) &= P\{T_i \leq t | t_{i-1} = t_{i-1}\} \\ &= P\{N(t_{i-1}+t) - N(t_{i-1}) \geq 1 | N(t_{i-1}) = i-1\} \\ &\quad \text{(由 } N(t) \text{ 的定义)} \\ &= P\{N(t_{i-1}+t) - N(t_{i-1}) \geq 1\} \text{(由增量的独立性)} \\ &= 1 - P\{N(t_{i-1}+t) - N(t_{i-1}) = 0\} \\ &= 1 - P\{N(t) = 0\} = 1 - e^{-\lambda t}, t > 0 \text{(由增量的平稳性),} \end{aligned}$$

$$F_{T_i|t_{i-1}}(t|t_{i-1}) = 0, t \leq 0.$$

从而知相应的条件概率密度为

$$f_{T_i|t_{i-1}}(t|t_{i-1}) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

于是随机变量 T_i, t_{i-1} 的联合概率密度

$$f(t, t_{i-1}) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} f_{t_{i-1}}(t_{i-1}), & t > 0, t_{i-1} > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

此处 $f_{t_{i-1}}(t_{i-1})$ 为 t_{i-1} 的概率密度. 将此表达式关于 t_{i-1} 积分, 即得 T_i ($i=2, 3, \dots$) 的概率密度为

$$\begin{aligned} f_{T_i}(t) &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} f_{t_{i-1}}(t_{i-1}) dt_{i-1} = \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{+\infty} f_{t_{i-1}}(t_{i-1}) dt_{i-1} \\ &= \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0, \\ f_{T_i}(t) &= 0, \quad t \leq 0. \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad f_{T_i}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases} \quad i=2, 3, \dots. \quad (3.14)$$

由(3.13)式及(3.14)式知, 点间间距序列 $\{T_i\}$ 服从同一个指数分布. 且还可证明: $T_1, T_2, \dots, T_i, \dots$ 是相互独立的随机变量. 我们把这些结论写成如下的定理.

定理一 强度为 λ 的泊松流(泊松过程)的点间间距是相互独立的随机变量, 且服从同一个指数分布(3.14).

它的逆命题也是成立的, 我们不加证明地叙述如下:

定理二 如果任意相继出现的两个质点的点间间距是相互独立, 且服从同一个指数分布(3.14), 则质点流构成了强度为 λ 的泊松过程.

这两个定理刻画出了泊松过程的特征. 定理二告诉我们, 为要确定一个计数过程是不是泊松过程, 只要用统计方法检验点间间距是否独立, 且服从同一个指数分布.

泊松过程或泊松流是研究排队理论的工具,在技术领域内它又是构造(模拟)一类重要噪声(散粒噪声)的基础.

(二) 维纳过程

维纳过程是布朗运动的数学模型.英国植物学家布朗(Brown)在显微镜下,观察漂浮在平静的液面上的微小粒子,发现它们不断地进行着杂乱无章的运动,这种现象后来称为布朗运动.以 $W(t)$ 表示运动中一微粒从时刻 $t=0$ 到时刻 $t>0$ 的位移的横坐标(同样也可以讨论纵坐标),且设 $W(0)=0$. 根据爱因斯坦(Enisten)1905年提出的理论,微粒的这种运动是由于受到大量随机的、相互独立的分子碰撞的结果.于是,粒子在时段 $(s, t]$ (与相继两次碰撞的时间间隔相比是很大的量)上的位移可看作是许多微小位移的代数和.显然,依中心极限定理,假定位移 $W(t)-W(s)$ 为正态分布是合理的.其次,由于粒子的运动完全是由液体分子的不规则碰撞而引起的.这样,在不相重叠的时间间隔内,碰撞的次数、大小和方向可假定是相互独立的,这就是说位移 $W(t)$ 具有独立的增量.另外,液面处于平衡状态,这时粒子在一段上位移的概率分布可以认为只依赖于这时段的长度,而与观察的起始时刻无关,即 $W(t)$ 具有平稳增量.

综合所述,可引入如下的数学模型:

给定二阶矩过程 $\{W(t), t \geq 0\}$, 如果它满足

1° 具有独立增量;

2° 对任意的 $t > s \geq 0$, 增量

$$W(t) - W(s) \sim N(0, \sigma^2(t-s)), \text{ 且 } \sigma > 0;$$

3° $W(0)=0$,

则称此过程为维纳过程.图 12-7 展示了它的一条样本曲线.

由 2° 可知,维纳过程增量的分布只与时间差有关,所以它是齐次的独立增量过程.它也是正态过程.事实上,对任意 $n (n \geq 1)$ 个时刻 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ (记 $t_0=0$), 把 $W(t_k)$ 写成

$$W(t_k) = \sum_{i=1}^k [W(t_i) - W(t_{i-1})], \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

根据 1°—3°, 它们都是独立的正态随机变量的和,由第四章 §4 中的 n 维正态变量的性质 3° 推知 $(W(t_1), W(t_2), \dots, W(t_n))$ 是 n 维正态变量,即 $\{W(t), t \geq 0\}$ 是正态过程.因此,其分布完全由它的均值函数和自协方差函数(或自相关函数)所确定.

根据条件 2°, 3° 可知, $W(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$, 由此可得维纳过程的均值与方差函

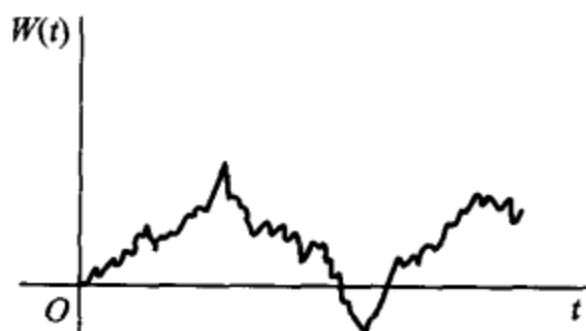


图 12-7

数分别为

$$E[W(t)] = 0, \quad D_W(t) = \sigma^2 t,$$

其中 σ^2 称为维纳过程的参数,它可通过实验观察值加以估计.再根据(3.1)式就可求得自协方差函数(自相关函数)为

$$C_W(s, t) = R_W(s, t) = \sigma^2 \min\{s, t\}, \quad s, t \geq 0.$$

维纳过程不只是布朗运动的数学模型,前面讲到的电子元件或器件在恒温下的热噪声也可归结为维纳过程.

泊松过程和维纳过程的重要性,不仅是因为实际中不少随时间演变的随机现象可以归结为这两个模型,而且在理论与应用中常利用它们构造出一些新的重要的随机过程模型.

小结

随机过程的研究对象是随时间演变的随机现象.简单地说,随机过程就是依赖于参数 t 的一族(无限多个)随机变量,记为 $\{X(t), t \in T\}$, T 为参数集.把 t 看作时间,固定 t ,称随机变量 $X(t)$ 为随机过程在 t 时的状态.对于一切 $t \in T$,状态的所有可能取的值的全体称为随机过程的状态空间.

对随机过程进行一次试验(即在 T 上进行一次全程观测),其结果称为样本函数或样本曲线.所有不同的试验结果为一族(可以是有限个,如例1)样本函数.

随机过程统计描述方法的基点是:对每一个固定的 $t \in T$, $X(t)$ 是一个随机变量.我们知道 n 维随机变量可以用它们的联合分布来完整地刻画其统计特性.作为 n 维随机变量延伸的随机过程则必须用有限维分布函数族才能完整地刻画其统计特性.

计算随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的各种数字特征的方法与概率论中的方法完全一样,只要把出现的参数 t, t_1, t_2 等视为常数即可.随机过程最重要的数字特征是均值函数 $\mu_X(t) = E[X(t)], t \in T$ 和自相关函数 $R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)], t_1, t_2 \in T$.其他的数字特征,如均方值函数、方差函数、标准差函数和自协方差函数都可用均值函数和自相关函数表出.计算数字特征在随机过程的理论和应用中仍占重要地位.希望读者重温并熟练掌握第四章 §1 中有关均值(数学期望)运算的种种性质.

给定一个二维随机过程 $\{(X(t), Y(t)), t \in T\}$.随机过程 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 相互独立的含义是:对任意正整数 n, m 和任意参数 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ 和 $t'_1, t'_2, \dots, t'_m \in T$, n 维随机变量 $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ 和 m 维随机变量 $(Y(t'_1), Y(t'_2), \dots, Y(t'_m))$ 相互独立.随机过程 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 不相关的含义是它们的互协方差函数:

$$C_{XY}(t_1, t_2) = E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)][Y(t_2) - \mu_Y(t_2)]\} \equiv 0, \\ t_1, t_2 \in T.$$

最后我们介绍了两个都具有独立增量过程属性的具体模型:泊松过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 和维纳过程 $\{W(t), t \geq 0\}$.从定义中可看到,它们的差异仅在于:当 $0 \leq s < t$ 时,前者的增量

$$N(t) - N(s) \sim \pi(\lambda(t-s));$$

而后者的增量

$$W(t) - W(s) \sim N(0, \sigma^2(t-s)).$$

它们的增量的分布都只与时间差 $t-s$ 有关(即增量具有平稳性), 所以实际上它们都属于齐次独立增量过程.

读者还需研究, 在 $X(0)=0$ 的条件下, 怎样利用增量的独立性, 从独立增量过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的已知方差函数 $D_X(t)$, 推演出它的自协方差函数

$$C_X(s, t) = D_X(\min\{s, t\}), \quad s, t \geq 0,$$

并由此获得泊松过程和维纳过程的自协方差函数(自相关函数).

■ 重要术语及主题

随机过程 状态和状态空间 样本函数(样本曲线) 有限维分布函数族 均值函数 方差函数 自相关函数 自协方差函数 正态过程 互协方差函数 两个随机过程的独立性和不相关 齐次(时齐)的独立增量过程 泊松过程 维纳过程

习题

1. 利用抛掷一枚硬币的试验定义一随机过程

$$X(t) = \begin{cases} \cos \pi t, & \text{出现 } H, \\ 2t, & \text{出现 } T, \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty.$$

假设 $P(H) = P(T) = \frac{1}{2}$ 试确定 $X(t)$ 的

(1) 一维分布函数 $F(x; \frac{1}{2}), F(x; 1)$.

(2) 二维分布函数 $F(x_1, x_2; \frac{1}{2}, 1)$.

2. 给定随机过程 $\{X(t), t \in T\}$, x 是任一实数, 定义另一个随机过程

$$Y(t) = \begin{cases} 1, & X(t) \leq x, \\ 0, & X(t) > x, \end{cases} \quad t \in T.$$

试将 $Y(t)$ 的均值函数和自相关函数用随机过程 $X(t)$ 的一维和二维分布函数来表示.

3. 设随机过程 $X(t) = e^{-At}, t > 0$, 其中 A 是在区间 $(0, a)$ 上服从均匀分布的随机变量, 试求 $X(t)$ 的均值函数和自相关函数.

4. 设随机过程 $X(t) \equiv X$ (随机变量), $E(X) = a, D(X) = \sigma^2 (\sigma > 0)$, 试求 $X(t)$ 的均值函数和协方差函数.

5. 已知随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的均值函数 $\mu_X(t)$ 和协方差函数 $C_X(t_1, t_2)$, $\varphi(t)$ 是普通的函数, 试求随机过程 $Y(t) = X(t) + \varphi(t)$ 的均值函数和协方差函数.

6. 给定一随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 和常数 a , 试以 $X(t)$ 的自相关函数表出随机过程 $Y(t) = X(t+a) - X(t), t \in T$ 的自相关函数.

7. 设 $Z(t) = X + Yt, -\infty < t < +\infty$, 若已知二维随机变量 (X, Y) 的协方差矩阵为

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

试求 $Z(t)$ 的协方差函数.

8. 设 $X(t) = At + B, -\infty < t < +\infty$, 式中 A, B 相互独立, 且都服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$ 的

随机变量, 试证明 $X(t)$ 是一正态过程, 并求出它的相关函数(协方差函数).

9. 设随机过程 $X(t)$ 与 $Y(t)$, $t \in T$ 不相关, 试用它们的均值函数与协方差函数来表示随机过程

$$Z(t) = a(t)X(t) + b(t)Y(t) + c(t), t \in T$$

的均值函数和自协方差函数, 其中 $a(t), b(t), c(t)$ 是普通的函数.

10. 设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ ($t > 0$) 是两个相互独立的, 分别具有强度 λ 和 μ 的泊松过程, 试证

$$S(t) = X(t) + Y(t)$$

是具有强度 $\lambda + \mu$ 的泊松过程.

11. 设 $\{W(t), t \geq 0\}$ 是以 σ^2 为参数的维纳过程, 求下列过程的协方差函数:

(1) $W(t) + At$ (A 为常数).

(2) $W(t) + Xt$, X 为与 $\{W(t), t \geq 0\}$ 相互独立的标准正态变量.

(3) $aW(t/a^2)$, a 为正常数.



第十三章 马尔可夫链

本章首先从随机过程在不同时刻状态之间的特殊的统计联系,引入马尔可夫(Markov)过程的概念.然后,对马尔可夫链(状态、时间都是离散的马尔可夫过程)的两个基本问题,即转移概率的确定以及遍历性问题作不同程度的研究和介绍.

马尔可夫过程的理论在近代物理、生物学、管理科学、经济、信息处理以及数字计算方法等方面都有重要应用.

§ 1 马尔可夫过程及其概率分布

在物理学中,很多确定性现象遵从如下演变原则:由时刻 t_0 系统或过程所处的状态,可以决定系统或过程在时刻 $t > t_0$ 所处的状态,而无需借助于 t_0 以前系统或过程所处状态的历史资料.如微分方程初值问题所描绘的物理过程就属于这类确定性现象.把上述原则延伸到随机现象,即当一物理系统或过程遵循的是某种统计规律时,可仿照上面的原则,引入以下的马尔可夫性或无后效性:过程(或系统)在时刻 t_0 所处的状态为已知的条件下,过程在时刻 $t > t_0$ 所处状态的条件分布与过程在时刻 t_0 之前所处的状态无关.通俗地说,就是在已经知道过程“现在”的条件下,其“将来”不依赖于“过去”.

现用分布函数来表述马尔可夫性.设随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的状态空间为 I . 如果对时间 t 的任意 n 个数值 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n, n \geq 3, t_i \in T$, 在条件 $X(t_i) = x_i, x_i \in I, i = 1, 2, \cdots, n-1$ 下, $X(t_n)$ 的条件分布函数恰等于在条件 $X(t_{n-1}) = x_{n-1}$ 下 $X(t_n)$ 的条件分布函数,即

$$\begin{aligned} P\{X(t_n) \leq x_n | X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \cdots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}\} \\ = P\{X(t_n) \leq x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}, x_n \in \mathbf{R}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

或写成

$F_{t_n | t_1 \cdots t_{n-1}}(x_n, t_n | x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}; t_1, t_2, \cdots, t_{n-1}) = F_{t_n | t_{n-1}}(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}),$
则称过程 $\{X(t), t \in T\}$ 具有马尔可夫性或无后效性,并称此过程为马尔可夫过程.

例 1 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是独立增量过程,且 $X(0) = 0$, 证明 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是一个马尔可夫过程.

证 由(1.1)式知,只要证明在已知 $X(t_{n-1}) = x_{n-1}$ 的条件下 $X(t_n)$ 与

$X(t_j), j=1, 2, \dots, n-2$ 相互独立即可. 现由独立增量过程的定义知道, 当 $0 < t_j < t_{n-1} < t_n, j=1, 2, \dots, n-2$ 时, 增量

$$X(t_j) - X(0) \quad \text{与} \quad X(t_n) - X(t_{n-1})$$

相互独立. 根据条件 $X(0)=0$ 和 $X(t_{n-1})=x_{n-1}$, 即有

$$X(t_j) \quad \text{与} \quad X(t_n) - x_{n-1}$$

相互独立. 再由第三章 §4 定理知, 此时 $X(t_n)$ 与 $X(t_j), j=1, 2, \dots, n-2$ 相互独立. 这表明 $X(t)$ 具有无后效性, 即 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是一个马尔可夫过程. $\square$

由上例知, 泊松过程是时间连续状态离散的马氏过程; 维纳过程是时间状态都连续的马氏过程.

时间和状态都是离散的马尔可夫过程称为**马尔可夫链**, 简称**马氏链**, 记为 $\{X_n = X(n), n=0, 1, 2, \dots\}$, 它可以看作在时间集 $T_1 = \{0, 1, 2, \dots\}$ 上对离散状态的马氏过程相继观察的结果. 我们约定记链的状态空间为 $I = \{a_1, a_2, \dots\}$, $a_i \in \mathbf{R}$. 在链的情形, 马尔可夫性通常用条件分布律来表示, 即对任意的正整数 n, r 和 $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_r < m; t_i, m, n+m \in T_1$, 有

$$\begin{aligned} P\{X_{m+n}=a_j | X_{t_1}=a_{i_1}, X_{t_2}=a_{i_2}, \dots, X_{t_r}=a_{i_r}, X_m=a_i\} \\ = P\{X_{m+n}=a_j | X_m=a_i\}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

其中 $a_i \in I$. 记上式右端为 $P_{ij}(m, m+n)$, 我们称条件概率

$$P_{ij}(m, m+n) = P\{X_{m+n}=a_j | X_m=a_i\} \quad (1.3)$$

为马氏链在时刻 m 处于状态 a_i 条件下, 在时刻 $m+n$ 转移到状态 a_j 的**转移概率**.

由于链在时刻 m 从任何一个状态 a_i 出发, 到另一时刻 $m+n$, 必然转移到 $a_1, a_2, \dots$ 诸状态中的某一个, 所以

$$\sum_{j=1}^{+\infty} P_{ij}(m, m+n) = 1, \quad i = 1, 2, \dots. \quad (1.4)$$

由转移概率组成的矩阵 $\mathbf{P}(m, m+n) = (P_{ij}(m, m+n))$ 称为马氏链的**转移概率矩阵**. 由(1.4)式知, 此矩阵的每一行元之和等于 1.

当转移概率 $P_{ij}(m, m+n)$ 只与 i, j 及时间间距 n 有关时, 把它记为 $P_{ij}(n)$, 即

$$P_{ij}(m, m+n) = P_{ij}(n),$$

并称此转移概率具有**平稳性**. 同时也称此链是**齐次的**或**时齐的**. 以下我们限于讨论齐次马氏链.

在马氏链为齐次的情形下, 由(1.3)式定义的转移概率

$$P_{ij}(n) = P\{X_{m+n}=a_j | X_m=a_i\} \quad (1.5)$$

称为马氏链的 **n 步转移概率**, $\mathbf{P}(n) = (P_{ij}(n))$ 为 **n 步转移概率矩阵**. 在以下的讨论中特别重要的是一步转移概率

$$p_{ij} = P_{ij}(1) = P\{X_{m+1} = a_j | X_m = a_i\}$$

或由它们组成的一步转移概率矩阵

$$\begin{array}{c} X_m \text{ 的} \\ \text{状} \\ \text{态} \end{array} \begin{array}{c} X_{m+1} \text{ 的状态} \\ a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_j \quad \cdots \\ \begin{bmatrix} a_1 & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots \\ a_2 & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_i & p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix} \end{array} = P(1) \stackrel{\text{记成}}{=} P.$$

在上述矩阵的左侧和上边标上状态 $a_1, a_2, \dots$, 是为了显示 p_{ij} 是由状态 a_i 经一步转移到状态 a_j 的概率.

例 2(0-1 传输系统) 在如图 13-1 只传输数字 0 和 1 的串联系统中, 设每一级的传真率(输出与输入数字相同的概率称为系统的传真率, 相反情形称为误码率)为 p , 误码率为 $q=1-p$, 并设一个单位时间传输一级, X_0 是第一级的输入, X_n 是第 n 级的输出($n \geq 1$). 那么 $\{X_n, n=0, 1, 2, \dots\}$ 是一随机过程, 状态空间 $I=\{0, 1\}$, 而且当 $X_n=i, i \in I$ 为已知时, X_{n+1} 所处的状态的概率分布只与 $X_n=i$ 有关, 而与时刻 n 以前所处的状态无关, 所以它是一个马氏链, 而且还是齐次的. 它的一步转移概率和一步转移概率矩阵分别为

$$p_{ij} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = \begin{cases} p, & j=i, \\ q, & j \neq i, \end{cases} \quad i, j=0, 1$$

和

$$P = \begin{matrix} & 0 & 1 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

□

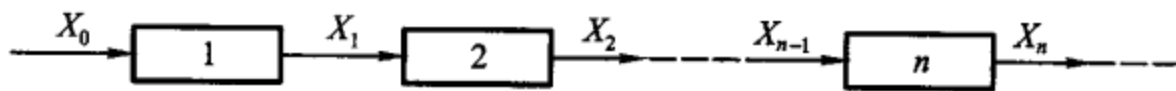


图 13-1

例 3(一维随机游动) 设一醉汉 Q (或看作一随机游动的质点), 在如图 13-2 所示直线的点集 $I=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上作随机游动, 且仅在 1 秒、2 秒等时刻发生游动. 游动的概率规则是: 如果 Q 现在位于点 i ($1 < i < 5$), 则下一时刻各以 $1/3$ 的概率向左或向右移动一格, 或以 $1/3$ 的概率留在原处; 如果 Q 现在位于 1 (或 5) 这点上, 则下一时刻就以概率 1 移动到 2 (或 4) 这一点上. 1

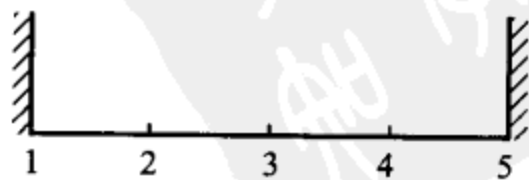


图 13-2

和 5 这两点称为**反射壁**. 上面这种游动称为**带有两个反射壁的随机游动**.

若以 X_n 表示时刻 n 时 Q 的位置, 不同的位置就是 X_n 的不同状态, 那么 $\{X_n, n=0, 1, 2, \dots\}$ 是一随机过程, 状态空间就是 I , 而且当 $X_n=i, i \in I$ 为已知时, X_{n+1} 所处的状态的概率分布只与 $X_n=i$ 有关, 而与 Q 在时刻 n 以前如何到达 i 是完全无关的, 所以 $\{X_n, n=0, 1, 2, \dots\}$ 是一马氏链, 而且还是齐次的. 它的一步转移概率和一步转移概率矩阵分别为

$$p_{ij} = P\{X_{n+1}=j | X_n=i\} = \begin{cases} \frac{1}{3}, & j=i-1, i, i+1, 1 < i < 5, \\ 1, & i=1, j=2 \text{ 或 } i=5, j=4, \\ 0, & |j-i| \geq 2 \end{cases}$$

和

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

如果把 1 这一点改为**吸收壁**, 就是说 Q 一旦到达 1 这一点, 则就永远留在点 1 上. 此时, 相应链的转移概率矩阵只需把 P 中第 1 横行改为 $(1, 0, 0, 0, 0)$. 总之, 改变游动的概率规则, 就可得到不同方式的随机游动和相应的马氏链. $\square$

随机游动的思想在数值计算方法方面有重要应用^①.

例 4(排队模型) 设服务系统由一个服务员和只可以容纳两个人的等候室组成, 见图 13-3. 服务规则是: 先到先服务, 后来者需在等候室依次排队. 假定一个需要服务的顾客到达系统时发现系统内已有 3 个顾客(一个正在接受服务, 两个在等候室排队), 则该顾客即离去. 设时间间隔 Δt 内有一个顾客进入系统的概率为 q , 有一原来被服务的顾客离开系统(即服务完毕)的概率为 p . 又设当 Δt 充分小时, 在这时间间隔内多于一个顾客进入或离开系统实际上是不可能的. 再

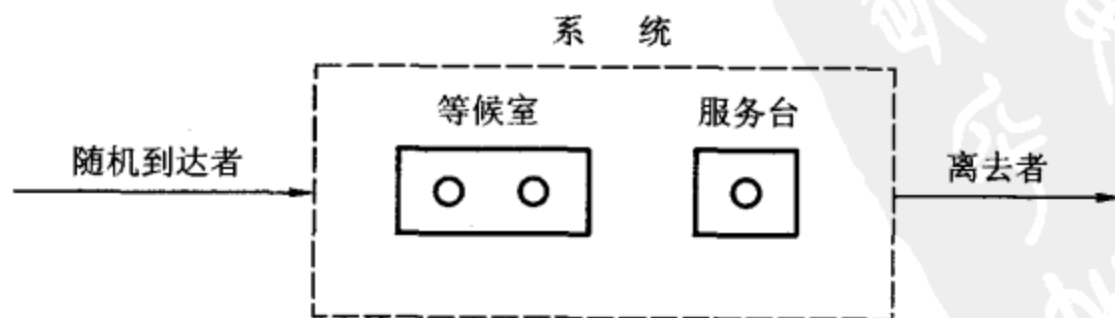


图 13-3

① 王梓坤. 概率论基础及其应用. 北京: 科学出版社, 1979.

设有无顾客来到与服务是否完毕是相互独立的. 现用马氏链来描述这个服务系统.

设 $X_n = X(n\Delta t)$ 表示时刻 $n\Delta t$ 时系统内的顾客数, 即系统的状态. $\{X_n, n=0, 1, 2, \dots\}$ 是一随机过程, 状态空间 $I = \{0, 1, 2, 3\}$, 而且仿照例 2、例 3 的分析, 可知它是一个齐次马氏链. 下面来计算此马氏链的一步转移概率.

p_{00} ——在系统内没有顾客的条件下, 经 Δt 后仍没有顾客的概率(此处是条件概率, 以下同), $p_{00} = 1 - q$.

p_{01} ——系统内没有顾客的条件下, 经 Δt 后有一顾客进入系统的概率, $p_{01} = q$.

p_{10} ——系统内恰有一顾客正在接受服务的条件下, 经 Δt 后系统内无人的概率, 它等于在 Δt 间隔内顾客因服务完毕而离去, 且无人进入系统的概率, $p_{10} = p(1 - q)$.

p_{11} ——系统内恰有一顾客的条件下, 在 Δt 间隔内, 他因服务完毕而离去, 而另一顾客进入系统, 或者正在接受服务的顾客继续要求服务, 且无人进入系统的概率, $p_{11} = pq + (1 - p)(1 - q)$.

p_{12} ——正在接受服务的顾客继续要求服务, 且另一个顾客进入系统的概率, $p_{12} = (1 - p)q$.

p_{13} ——正在接受服务的顾客继续要求服务, 且在 Δt 间隔内有两个顾客进入系统的概率. 由假设, 后者实际上是不可能发生的, $p_{13} = 0$.

类似地, 有 $p_{21} = p_{32} = p(1 - q)$, $p_{22} = pq + (1 - p)(1 - q)$, $p_{23} = q(1 - p)$, $p_{ij} = 0 (|i - j| \geq 2)$.

p_{33} ——一人因服务完毕而离去且另一人进入系统, 或者无人离开系统的概率, $p_{33} = pq + (1 - p)$.

于是该马氏链的一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1-q & q & 0 & 0 \\ p(1-q) & pq+(1-p)(1-q) & q(1-p) & 0 \\ 0 & p(1-q) & pq+(1-p)(1-q) & q(1-p) \\ 0 & 0 & p(1-q) & pq+(1-p) \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad \square$$

在实际问题中, 一步转移概率通常可通过统计试验确定, 下面看一实例.

例 5 某计算机机房的一台计算机经常出故障, 研究者每隔 15 分钟观察一次计算机的运行状态, 收集了 24 小时的数据(共作 97 次观察). 用 1 表示正常状态, 用 0 表示不正常状态, 所得的数据序列如下:

111001001111111001111011111100111111110001101101

111011011010111101110111101111110011011111100111

设 X_n 为第 $n (n=1, 2, \dots, 97)$ 个时段的计算机状态, 可以认为它是一个齐次马氏链, 状态空间 $I = \{0, 1\}$. 96 次状态转移的情况是:

$0 \rightarrow 0, 8$ 次; $0 \rightarrow 1, 18$ 次;

$1 \rightarrow 0, 18$ 次; $1 \rightarrow 1, 52$ 次.

因此,一步转移概率可用频率近似地表示为

$$p_{00} = P\{X_{n+1}=0|X_n=0\} \approx \frac{8}{8+18} = \frac{8}{26},$$

$$p_{01} = P\{X_{n+1}=1|X_n=0\} \approx \frac{18}{8+18} = \frac{18}{26},$$

$$p_{10} = P\{X_{n+1}=0|X_n=1\} \approx \frac{18}{18+52} = \frac{18}{70},$$

$$p_{11} = P\{X_{n+1}=1|X_n=1\} \approx \frac{52}{18+52} = \frac{52}{70}. \quad \square$$

例 6(续例 5) 已知计算机在某一时段(15 分钟)的状态为 0,问在此条件下从此时段起此计算机能连续正常工作 3 刻钟(3 个时段)的条件概率为多少?

解 由题意,某一时段的状态为 0 就是初始状态为 0,即 $X_0=0$,由乘法公式、马氏性和齐次性得,所求条件概率为

$$\begin{aligned} & P\{X_1=1, X_2=1, X_3=1|X_0=0\} \\ &= P\{X_0=0, X_1=1, X_2=1, X_3=1\}/P\{X_0=0\} \\ &= P\{X_0=0\}P\{X_1=1|X_0=0\}P\{X_2=1|X_1=1, X_0=0\} \cdot \\ & P\{X_3=1|X_2=1, X_1=1, X_0=0\}/P\{X_0=0\} \\ &= P\{X_1=1|X_0=0\}P\{X_2=1|X_1=1\}P\{X_3=1|X_2=1\} \\ &= P_{01}(1)P_{11}(1)P_{11}(1) = \frac{18}{26} \cdot \frac{52}{70} \cdot \frac{52}{70} = 0.382. \quad \square \end{aligned}$$

接着,我们来研究齐次马氏链的有限维分布.首先,记

$$p_j(0) = P\{X_0=a_j\}, \quad a_j \in I, \quad j=1,2,\dots,$$

称它为马氏链的初始分布.再看马氏链在任一时刻 $n \in T_1$ 的一维分布:

$$p_j(n) = P\{X_n=a_j\}, \quad a_j \in I, \quad j=1,2,\dots. \quad (1.6)$$

显然,应有 $\sum_{j=1}^{+\infty} p_j(n) = 1$. 又有

$$\begin{aligned} P\{X_n=a_j\} &= \sum_{i=1}^{+\infty} P\{X_0=a_i, X_n=a_j\} \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} P\{X_n=a_j|X_0=a_i\}P\{X_0=a_i\}, \end{aligned}$$

或即

$$p_j(n) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i(0)P_{ij}(n), \quad j=1,2,\dots. \quad (1.7)$$

一维分布(1.6)也可用行向量表示成

$$\mathbf{p}(n) = (p_1(n), p_2(n), \dots, p_j(n), \dots). \quad (1.6)'$$

这样,利用矩阵乘法(I 是可列无限集时,仍用有限阶矩阵乘法的规则确定矩阵

之积的元), (1.7)式可写成

$$p(n) = p(0)P(n). \quad (1.7)'$$

此式表明, 马氏链在任一时刻 $n \in T_1$ 时的一维分布由初始分布 $p(0)$ 和 n 步转移概率矩阵所确定.

又, 对于任意 n 个时刻 $t_1 < t_2 < \dots < t_n, t_i \in T_1$ 以及状态 $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n} \in I$, 马氏链的 n 维分布:

$$\begin{aligned} & P\{X_{t_1} = a_{i_1}, X_{t_2} = a_{i_2}, \dots, X_{t_n} = a_{i_n}\} \\ &= P\{X_{t_1} = a_{i_1}\} P\{X_{t_2} = a_{i_2} | X_{t_1} = a_{i_1}\} \cdot \dots \cdot \\ & P\{X_{t_n} = a_{i_n} | X_{t_1} = a_{i_1}, X_{t_2} = a_{i_2}, \dots, X_{t_{n-1}} = a_{i_{n-1}}\} \\ &= P\{X_{t_1} = a_{i_1}\} P\{X_{t_2} = a_{i_2} | X_{t_1} = a_{i_1}\} \dots P\{X_{t_n} = a_{i_n} | X_{t_{n-1}} \\ &= a_{i_{n-1}}\} = p_{i_1}(t_1) P_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \dots P_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}). \end{aligned} \quad (1.8)$$

由此, 并结合(1.7)或(1.7)'可知: 马氏链的有限维分布同样完全由初始分布和转移概率所确定.

总之, 转移概率决定了马氏链运动的统计规律. 因此, 确定马氏链的任意 n 步转移概率就成为马氏链理论中的重要问题之一.

§ 2 多步转移概率的确定

为了确定齐次马氏链的 n 步转移概率 $P_{ij}(n)$, 首先介绍 $P_{ij}(n)$ 所满足的基本方程.

设 $\{X(n), n=0, 1, 2, \dots\}$ 是一齐次马氏链, 则对任意的 $u, v \in T_1$, 有

$$P_{ij}(u+v) = \sum_{k=1}^{+\infty} P_{ik}(u) P_{kj}(v), i, j = 1, 2, \dots. \quad (2.1)$$

方程(2.1)就是著名的切普曼—科尔莫戈罗夫(Chapman-Kolmogorov)方程, 简称 C—K 方程.

C—K 方程基于下述事实, 即“从时刻 s 所处的状态 a_i , 即 $X(s) = a_i$ 出发, 经时段 $u+v$ 转移到状态 a_j , 即 $X(s+u+v) = a_j$ ”这一事件可分解成“从 $X(s) = a_i$ 出发, 先经时段 u 转移到中间状态 $a_k (k=1, 2, \dots)$, 再从 a_k 经时段 v 转移到状态 a_j ”这样一些事件的和事件(见图 13-4).

方程(2.1)的证明如下: 先固定 $a_k \in I$ 和 $s \in T_1$, 由条件概率定义和乘法定理, 有

$$\begin{aligned} & P\{X(s+u+v) = a_j, X(s+u) = a_k | X(s) = a_i\} \\ &= P\{X(s+u) = a_k | X(s) = a_i\} P\{X(s+u+v) \\ &= a_j | X(s+u) = a_k, X(s) = a_i\} \\ &= P_{ik}(u) P_{kj}(v) \quad (\text{马氏性和齐次性}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

又由于事件组“ $X(s+u) = a_k, k=1, 2, \dots$ ”构成一个划分, 故有

$$P_{ij}(u+v) = P\{X(s+u+v) = a_j | X(s) = a_i\}$$

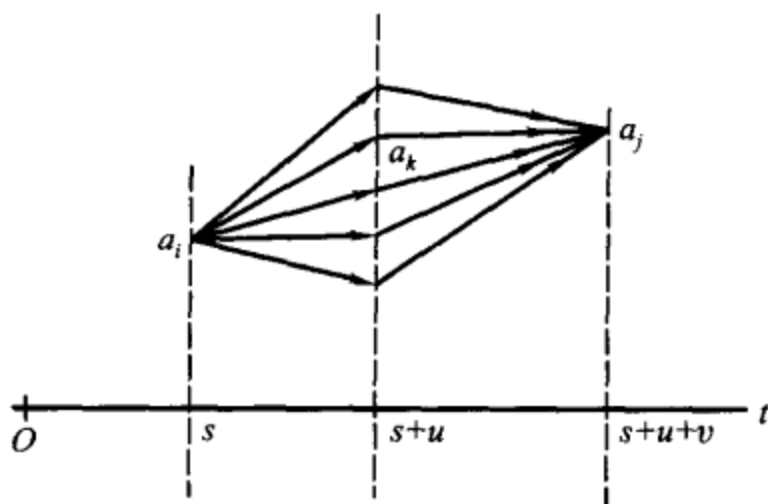


图 13-4

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} P\{X(s+u+v) = a_j, X(s+u) = a_k \mid X(s) = a_i\}.$$

将(2.2)式代入上式,即得所要证明的 C—K 方程.

C—K 方程也可写成矩阵形式:

$$P(u+v) = P(u)P(v). \quad (2.1)'$$

利用 C—K 方程我们容易确定 n 步转移概率. 事实上,在(2.1)'式中令 $u=1, v=n-1$,得递推关系:

$$P(n) = P(1)P(n-1) = PP(n-1),$$

从而可得

$$P(n) = P^n. \quad (2.3)$$

就是说,对齐次马氏链而言, n 步转移概率矩阵是一步转移概率矩阵的 n 次方.

进而可知,齐次马氏链的有限维分布可由初始分布与一步转移概率完全确定.

例 1 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是具有三个状态 0, 1, 2 的齐次马氏链,一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

初始分布 $p_i(0) = P\{X_0 = i\} = 1/3, i = 0, 1, 2$. 试求

(i) $P\{X_0 = 0, X_2 = 1\}$;

(ii) $P\{X_2 = 1\}$.

解 先求出二步转移概率矩阵

$$P(2) = P^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5/8 & 5/16 & 1/16 \\ 5/16 & 1/2 & 3/16 \\ 3/16 & 9/16 & 1/4 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

于是 (i) $P\{X_0=0, X_2=1\} = P\{X_0=0\}P\{X_2=1|X_0=0\}$
 $= p_0(0)P_{01}(2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{16} = \frac{5}{48};$

(ii) 由 (1.7) 式,

$$\begin{aligned} p_1(2) &= P\{X_2=1\} \\ &= p_0(0)P_{01}(2) + p_1(0)P_{11}(2) + p_2(0)P_{21}(2) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{5}{16} + \frac{1}{2} + \frac{9}{16} \right) = \frac{11}{24}. \end{aligned}$$

□

例 2 在 § 1 例 2 中, (i) 设 $p=0.9$, 求系统二级传输后的传真率与三级传输后的误码率; (ii) 设初始分布 $p_1(0)=P\{X_0=1\}=\alpha$, $p_0(0)=P\{X_0=0\}=1-\alpha$. 又已知系统经 n 级传输后输出为 1, 问原发字符也是 1 的概率是多少?

解 先求出 n 步转移概率矩阵 $P(n)=P^n$. 由于

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} p & q \\ q & p \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (q=1-p)$$

有相异的特征值 $\lambda_1=1, \lambda_2=p-q$, 由线性代数知识, 可将 P 表示成对角矩阵

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-q \end{bmatrix}$$

的相似矩阵. 具体做法是: 求出 λ_1, λ_2 对应的特征向量

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

令

$$H = [e_1, e_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

则 $P = H\Lambda H^{-1}$. 于是, 容易算得

$$P^n = (H\Lambda H^{-1})^n = H\Lambda^n H^{-1}$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p-q)^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(p-q)^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(p-q)^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p-q)^n \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

(2.4)

(i) 由(2.4)式可知,当 $p=0.9$ 时,系统经二级传输后的传真率与三级传输后的误码率分别为

$$P_{11}(2)=P_{00}(2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(0.9-0.1)^2=0.820,$$

$$P_{10}(3)=P_{01}(3)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(0.9-0.1)^3=0.244;$$

(ii) 根据贝叶斯公式,当已知系统经 n 级传输后输出为 1, 原发字符也是 1 的概率为

$$\begin{aligned} P\{X_0=1|X_n=1\} &= \frac{P\{X_0=1\}P\{X_n=1|X_0=1\}}{P\{X_n=1\}} \\ &= \frac{p_1(0)P_{11}(n)}{p_0(0)P_{01}(n)+p_1(0)P_{11}(n)} \\ &= \frac{\alpha+\alpha(p-q)^n}{1+(2\alpha-1)(p-q)^n}. \end{aligned}$$

□

对于只有两个状态的马氏链,一步转移概率矩阵一般可表示为:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad 0 < a, b < 1.$$

利用类似于例 2 的方法,可得 n 步转移概率矩阵为

$$\begin{aligned} P(n) = P^n &= \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} P_{00}(n) & P_{01}(n) \\ P_{10}(n) & P_{11}(n) \end{bmatrix} \end{matrix} \\ &= \frac{1}{a+b} \begin{bmatrix} b & a \\ b & a \end{bmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b} \begin{bmatrix} a & -a \\ -b & b \end{bmatrix}, n=1, 2, \dots. \end{aligned} \quad (2.5)$$

这是解决两个状态的马氏链问题的有用公式.

§ 3 遍历性

对于一般的两个状态的马氏链,由(2.5)式可知,当 $0 < a, b < 1$ 时, $P_{ij}(n)$ 有极限

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{00}(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{10}(n) = \frac{b}{a+b} \stackrel{\text{记成}}{=} \pi_0.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{01}(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{11}(n) = \frac{a}{a+b} \stackrel{\text{记成}}{=} \pi_1.$$

上述极限的意义是:对固定的状态 j , 不管链在某一时刻从什么状态 ($i=0$ 或 1) 出发,通过长时间的转移,到达状态 j 的概率都趋近于 π_j , 这就是所谓的遍

历性. 又由于 $\pi_0 + \pi_1 = 1$, 所以 $(\pi_0, \pi_1) \xrightarrow{\text{记成}} \pi$ 构成一分布律, 称它为链的极限分布. 另外, 如若我们能由其他简便的方法直接由一步转移概率求得极限分布 π , 则反过来, 当 $n \gg 1$ 时就可得到 n 步转移概率的近似值: $P_{ij}(n) \approx \pi_j$.

一般, 设齐次马氏链的状态空间为 I , 若对于所有 $a_i, a_j \in I$, 转移概率 $P_{ij}(n)$ 存在极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}(n) = \pi_j \quad (\text{不依赖于 } i)$$

或

$$P(n) = P^n \xrightarrow{(n \rightarrow +\infty)} \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_j & \cdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_j & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_j & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}.$$

则称此链具有遍历性. 又若 $\sum_j \pi_j = 1$, 则同时称 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots)$ 为链的极限分布.

齐次马氏链在什么条件下才具有遍历性? 如何求出它的极限分布? 这问题在理论上已经圆满解决, 但叙述它需要较多篇幅. 下面仅就只有有限个状态的链, 即有限链的遍历性给出一个充分条件.

定理 设齐次马氏链 $\{X_n, n \geq 1\}$ 的状态空间为 $I = \{a_1, a_2, \cdots, a_N\}$, P 是它的一步转移概率矩阵, 如果存在正整数 m , 使对任意的 $a_i, a_j \in I$, 都有

$$P_{ij}^m > 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots, N, \quad (3.1)$$

则此链具有遍历性, 且有极限分布 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_N)$, 它是方程组

$$\pi = \pi P \quad \text{或即} \quad \pi_j = \sum_{i=1}^N \pi_i p_{ij}, \quad j = 1, 2, \cdots, N \quad (3.2)$$

的满足条件

$$\pi_j > 0, \quad \sum_{j=1}^N \pi_j = 1 \quad (3.3)$$

的唯一解.

证明略.

依照定理, 为证有限链是遍历的, 只需找一正整数 m , 使 m 步转移概率矩阵 P^m 无零元. 而求极限分布 π 的问题, 化为求解方程组 (3.2) 的问题. 注意, 方程组

(3.2) 中仅 $N-1$ 个未知数是独立的, 而唯一解可用归一条件 $\sum_{j=1}^N \pi_j = 1$ 确定.

在定理的条件下, 马氏链的极限分布又是平稳分布. 意即, 若用 π 作为链的初始分布, 即 $p(0) = \pi$, 则链在任一时刻 $n \in T_1$ 的分布 $p(n)$ 永远与 π 一致. 事实上, 由 (1.7)', (2.3) 和 (3.2) 式, 有

$$p(n) = p(0)P(n) = \pi P^n = \pi P^{n-1} = \cdots = \pi P = \pi.$$

例 1 试说明 §1 例 3 中, 带有两个反射壁的随机游动是遍历的, 并求其极限分布(平稳分布).

解 为简便计, 以符号“×”代表转移概率矩阵的正的元. 于是, 由 §1 例 3 中的一步转移概率矩阵 P , 得

$$P(2) = P^2 = \begin{bmatrix} 0 & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix},$$

$$P(4) = P^4 = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \times & \times & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times & 0 \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix},$$

即 $P(4)$ 无零元. 由定理, 链是遍历的. 再根据 (3.2) 和 (3.3) 式, 写出极限分布 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_5)$ 满足的方程组

$$\begin{cases} \pi_1 = (1/3)\pi_2, \\ \pi_2 = \pi_1 + (1/3)\pi_2 + (1/3)\pi_3, \\ \pi_3 = (1/3)\pi_2 + (1/3)\pi_3 + (1/3)\pi_4, \\ \pi_4 = (1/3)\pi_3 + (1/3)\pi_4 + \pi_5, \\ \pi_5 = (1/3)\pi_4, \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1. \end{cases}$$

先由前四个方程, 解得: $3\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = 3\pi_5$. 将它们代入归一条件, 即最后一个方程, 解之, 得唯一解: $\pi_1 = \pi_5 = 1/11, \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = 3/11$. 所以极限分布为 $\pi = (1/11, 3/11, 3/11, 3/11, 1/11)$. 这个分布表明: 经过长时间游动之后, 醉汉 Q 位于点 i ($1 < i < 5$) 的概率约为 $3/11$, 位于点 1 或 5 的概率约为 $1/11$. $\square$

例 2 试说明 §1 例 4(排队模型)中的链是遍历的, 并求其极限分布.

解 依照例 1, 由 §1 例 4 中的一步转移概率矩阵 P , 可算得 $P(3) = P^3$ 无零元. 根据定理, 链是遍历的. 而极限分布 $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ 满足下列方程组:

$$\begin{cases} \pi_0 = (1-q)\pi_0 + p(1-q)\pi_1, \\ \pi_1 = q\pi_0 + [pq + (1-p)(1-q)]\pi_1 + p(1-q)\pi_2, \\ \pi_2 = q(1-p)\pi_1 + [pq + (1-p)(1-q)]\pi_2 + p(1-q)\pi_3, \\ \pi_3 = q(1-p)\pi_2 + [pq + (1-p)]\pi_3, \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1. \end{cases}$$

解之,得唯一解

$$\begin{aligned}\pi_0 &= p^3(1-q)^3/C, \quad \pi_1 = p^2q(1-q)^2/C, \\ \pi_2 &= pq^2(1-q)(1-p)/C, \quad \pi_3 = q^3(1-p)^2/C,\end{aligned}$$

其中 $C = p^3(1-q)^3 + p^2q(1-q)^2 + pq^2(1-q)(1-p) + q^3(1-p)^2$.

假若在此例中, $p = q = 1/2$, 则可算得 $\pi_0 = 1/7 \approx 0.14$, $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 2/7 \approx 0.29$, 即此时极限分布为 $\pi = (1/7, 2/7, 2/7, 2/7)$. 这就是说, 经过相当长的时间以后, 系统中无人的情形约占 14% 的时间, 而系统中有一人、二人、三人的情形约各占 29% 的时间. $\square$

例 3 设一马氏链的一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

试讨论它的遍历性.

解 先算得

$$P(2) = P^2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

进一步可验证: 当 n 为奇数时, $P(n) = P(1) = P$; n 为偶数时, $P(n) = P(2)$. 这表明对任一固定的 $j (=1, 2, 3, 4)$, 极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{ij}(n)$ 都不存在. 按定义, 此链不具遍历性. $\square$

马氏过程的内容除了讨论最简情形——马氏链之外, 还研究状态离散、时间连续的马氏过程和状态、时间都是连续的马氏过程, 它们都有比较完善的理论, 而且讨论的主题也都是从各自场合的 C-K 方程出发, 研究转移概率的确定方法和性质. 本书除前面介绍的泊松过程和维纳过程这两个具体的马氏过程模型外不再作一般的介绍.

小结

马尔可夫过程的主要特征是它具有无后效性(马氏性), 通俗地说, 就是在已知过程“现在”所处状态的条件下, 其“将来”状态的概率分布不依赖于“过去”所处的状态. 读者应了解无后效性的严格定义是由条件分布函数给出的.

泊松过程是时间连续、状态离散的马氏过程; 维纳过程是时间、状态都连续的马氏过程.

本章主要讨论时间和状态都是离散的马氏链 $\{X_n, n=1, 2, \dots\}$, 约定状态空间 $I = \{a_1, a_2, \dots\}$, $a_i \in \mathbf{R}$ (也可一一对应地用 a_i 的足标表示成 $I = \{1, 2, \dots\}$). 马氏性可用条件分布律表

示为:对任意的整数 $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_r < m < m+n$ 和 $a_i \in I$

$$\begin{aligned} P\{X_{m+n}=a_j | X_{t_1}=a_{i_1}, X_{t_2}=a_{i_2}, \cdots, X_{t_r}=a_{i_r}, X_m=a_i\} \\ = P\{X_{m+n}=a_j | X_m=a_i\}. \end{aligned}$$

右端表示已知链在时刻 m 处于状态 a_i 条件下,在时刻 $m+n$ 转移到状态 a_j 的概率.若这个概率只与 i, j 和时间差 n 有关,记为 $P_{ij}(n)$,即

$$P_{ij}(n) = P\{X_{m+n}=a_j | X_m=a_i\},$$

则称链为齐次马氏链(以下限于讨论齐次链), $P_{ij}(n)$ 为 n 步转移概率, $P(n) = (P_{ij}(n))$ 为 n 步转移概率矩阵,这个矩阵的每一行元之和等于 1,即 $\sum_{j=1}^{+\infty} P_{ij}(n) = 1$,往后可用它来校验计算 $P(n)$ 的正确性,特别重要的是一步转移概率

$$p_{ij} = P_{ij}(1) = P\{X_{m+1}=a_j | X_m=a_i\}$$

和一步转移概率矩阵 $P = P(1) = (p_{ij})$. P 的元 p_{ij} 可根据具体链从一个状态经一个单位时间转移到其他各状态的概率来确定(包括统计估计方法).

确定 n 步转移概率是马氏链理论中的关键问题.在齐次链情形,由著名的 C-K 方程可推出

$$P(n) = [P(1)]^n = P^n,$$

即 n 步转移概率完全由一步转移概率所确定.计算 P^n 要用到线性代数中矩阵对角化的知识,也可利用现成的计算软件,读者只要对 P 为二阶矩阵的情形会求就可以了(见 §2 公式 (2.5)).

马氏链的主题之一是给出有限维分布律的计算方法.

一维分布律: $p_j(0) = P\{X_0=a_j\}$, $j=1, 2, \cdots$ (初始分布),

$$p_j(n) = P\{X_n=a_j\} = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i(0) P_{ij}(n), \quad n, j=1, 2, \cdots.$$

n 维分布律:对任意 n 个时刻 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $t_i \in \mathbf{N}_+$ 和 $a_i \in I$,

$$P\{X_{t_1}=a_{i_1}, X_{t_2}=a_{i_2}, \cdots, X_{t_n}=a_{i_n}\} = p_{i_1}(t_1) P_{i_1 i_2}(t_2-t_1) \cdots P_{i_{n-1} i_n}(t_n-t_{n-1}).$$

综合起来看,马氏链的有限维分布律(或者说马氏链运动的统计规律)完全由初始分布和一步转移概率所确定.

马氏链的另一主题是讨论 $P_{ij}(n)$ 当 $n \rightarrow +\infty$ 时的极限问题.我们只限于讨论 $I = \{a_1, a_2, \cdots, a_N\}$ 即有限链的情形.如对任意的 $a_i, a_j \in I$, 都有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{ij}(n) = \pi_j \text{ (与 } i \text{ 无关)},$$

就称此链具有遍历性.因是有限链,所以当链又具遍历性时,对 $\sum_{j=1}^N P_{ij}(n) = 1$ 取极限 $n \rightarrow$

$+\infty$, 总有 $\sum_{j=1}^N \pi_j = 1$, 于是 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_N)$ 构成一分布律,称为链的极限分布或平稳分布.

马氏链的遍历性表示一个系统经过长时间转移后达到平衡状态,即当 $n \gg 1$ 时, $P_{ij}(n) \approx \pi_j$ 与起步状态 a_i 无关.

有限链具有遍历性的充分条件是:存在正整数 m , 使对一切 $a_i, a_j \in I$ 都有

$$P_{ij}^m(m) > 0.$$

或即存在 m , 使 m 步转移概率矩阵 $P(m) = P^m$ 无零元(当 P 的阶数不高时, 寻求 m 的方法见 §3 例 1), 而极限分布 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)$ 是方程组

$$\begin{cases} \pi = \pi P, \\ \pi_j > 0, \sum_{j=1}^N \pi_j = 1 \end{cases}$$

的唯一解.

■ 重要术语及主题

无后效性(马氏性) 齐次马氏链 n 步转移概率与 n 步转移概率矩阵 C-K 方程 马氏链的有限维分布律 遍历性 极限分布(平稳分布)

习题

1. 从数 $1, 2, \dots, N$ 中任取一数, 记为 X_1 ; 再从 $1, 2, \dots, X_1$ 中任取一数, 记为 X_2 ; 如此继续, 从 $1, 2, \dots, X_{n-1}$ 中任取一数, 记为 X_n . 说明 $\{X_n, n \geq 1\}$ 构成一齐次马氏链, 并写出它的状态空间和一步转移概率矩阵.

2. 说明第十二章 §1 例 5 中的随机过程都是齐次马氏链, 并写出它们的状态空间和一步转移概率矩阵.

3. 设 $X_0 = 1, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 是相互独立且都以概率 p ($0 < p < 1$) 取值 1, 以概率 $q = 1 - p$ 取值 0 的随机变量序列, 令 $S_n = \sum_{k=0}^n X_k$, 证明 $\{S_n, n \geq 0\}$ 构成一马氏链, 并写出它的状态空间和一步转移概率矩阵.

4. (传染模型) 有 N 个人及某种传染病, 假设

- (1) 在每个单位时间内此 N 个人中恰有两人互相接触, 且一切成对的接触是等可能的.
- (2) 当健康者与患病者接触时, 被传染上病的概率为 α .
- (3) 患病者康复的概率是 0, 健康者如果不与患病者接触, 得病的概率也为 0.

现以 X_n 表示第 n 个单位时间内的患病人数. 试说明这种传染过程, 即 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是一马氏链, 并写出它的状态空间及一步转移概率矩阵.

5. 设马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的状态空间为 $I = \{1, 2, 3\}$, 初始分布为 $p_1(0) = 1/4, p_2(0) = 1/2, p_3(0) = 1/4$, 一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(1) 计算 $P\{X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 2\}$.

(2) 证明 $P\{X_1 = 2, X_2 = 2 | X_0 = 1\} = p_{12} p_{22}$.

(3) 计算 $P_{12}(2) = P\{X_2 = 2 | X_0 = 1\}$.

(4) 计算 $p_2(2) = P\{X_2 = 2\}$.

6. 证明 §2 中公式(2.5).

7. 设任意相继的两天中, 雨天转晴天的概率为 $1/3$, 晴天转雨天的概率为 $1/2$, 任一天晴

或雨是互为逆事件. 以 0 表示晴天状态, 以 1 表示雨天状态, X_n 表示第 n 天的状态 (0 或 1). 试写出马氏链 $\{X_n, n \geq 1\}$ 的一步转移概率矩阵. 又若已知 5 月 1 日为晴天, 问 5 月 3 日为晴天, 5 月 5 日为雨天的概率各等于多少?

8. 在一计算系统中, 每一循环具有误差的概率取决于先前一个循环是否有误差. 以 0 表示误差状态, 以 1 表示无误差状态. 设状态的一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

试证明相应齐次马氏链是遍历的, 并求其极限分布 (平稳分布).

(1) 用定义解.

(2) 利用遍历性定理解.

9. 试证第 5 题中的马氏链具有遍历性, 并求其极限分布.

10. 设齐次马氏链的一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{bmatrix}, \quad q = 1 - p, 0 < p < 1.$$

试证明此链具有遍历性, 并求其平稳分布.

11. 设马氏链的一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

试证此链不是遍历的.



第十四章 平稳随机过程

平稳随机过程是一类应用相当广泛的随机过程. 本章在介绍平稳过程概念之后, 着重在二阶矩过程的范围内讨论平稳过程的各态历经性、相关函数的性质以及功率谱密度函数和它的性质.

§ 1 平稳随机过程的概念

在实际中, 有相当多的随机过程, 不仅它现在的状态, 而且它过去的状态, 都对未来状态的发生有着很强的影响. 有这样重要的一类随机过程, 即所谓平稳随机过程, 它的特点是: 过程的统计特性不随时间的推移而变化. 严格地说, 如果对于任意的 n ($n=1, 2, \dots$), $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ 和任意实数 h , 当 $t_1+h, t_2+h, \dots, t_n+h \in T$ 时, n 维随机变量

$$(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$$

$$\text{和} \quad (X(t_1+h), X(t_2+h), \dots, X(t_n+h)) \quad (1.1)$$

具有相同的分布函数, 则称随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 具有平稳性, 并同时称此过程为平稳随机过程, 或简称平稳过程.

平稳过程的参数集 T , 一般为 $(-\infty, +\infty)$ 、 $[0, +\infty)$ 、 $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 或 $\{0, 1, 2, \dots\}$. 当定义在离散参数集上时, 也称过程为平稳随机序列或平稳时间序列. 以下若无特殊声明, 均认为参数集 $T = (-\infty, +\infty)$.

在实际问题中, 确定过程的分布函数, 并用它来判定其平稳性, 一般是很难办到的. 但是, 对于一个被研究的随机过程, 如果前后的环境和主要条件都不随时间的推移而变化, 则一般就可以认为是平稳的.

恒温条件下的热噪声电压过程以及第十二章 § 1 例 2、例 3 都是平稳过程的例子. 强震阶段的地震波幅、船舶的颠簸过程、照明电网中电压的波动过程以及各种噪声和干扰等等在工程上都被认为是平稳的.

与平稳过程相反的是非平稳过程. 一般, 随机过程处于过渡阶段时总是非平稳的. 例如, 飞机控制在高度为 h 的水平面上飞行, 由于受到大气湍流的影响, 实际飞行高度 $H(t)$ 应在 h 水平面上上下下随机波动, $H(t)$ 可看作是平稳过程, 但论及的时间范围必须排除飞机的升降阶段(过渡阶段), 因为在升降阶段内由于飞行的主要条件随时间而发生变化, 因而 $H(t)$ 的主要特征也随时间而变化着, 也就是说在升降阶段内过程 $H(t)$ 是非平稳的. 不过在实际问题中, 当仅仅考虑过程

的平稳阶段时,为了数学处理的方便,我们通常把平稳阶段的时间范围取为 $-\infty < t < +\infty$.

接着,考察平稳过程数字特征的特点.

设平稳过程 $X(t)$ 的均值函数 $E[X(t)]$ 存在. 对 $n=1$, 在(1.1)式中, 令 $h=-t_1$, 由平稳性定义, 一维随机变量 $X(t_1)$ 和 $X(0)$ 同分布. 于是 $E[X(t)] = E[X(0)]$, 即均值函数必为常数, 记为 μ_X . 同样, $X(t)$ 的均方值函数和方差函数亦为常数, 分别记为 Ψ_X^2 和 σ_X^2 . 据此, 依照图 12-4 的意义, 可以知道, 平稳过程的所有样本曲线都在水平直线 $x(t) = \mu_X$ 上下波动, 平均偏离度为 σ_X .

又若平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$ 存在, 对 $n=2$, 在(1.1)中, 令 $h=-t_1$, 由平稳性定义, 二维随机变量 $(X(t_1), X(t_2))$ 与 $(X(0), X(t_2-t_1))$ 同分布. 于是, 有

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[X(0)X(t_2-t_1)].$$

等式右端只与时间差 t_2-t_1 有关, 记为 $R_X(t_2-t_1)$, 即有

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2-t_1) \quad (1.2)$$

或 $R_X(t, t+\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)$.

这表明: 平稳过程的自相关函数仅是时间差 $t_2-t_1=\tau$ 的单变量函数(换句话说, 它不随时间的推移而变化).

又由第十二章(2.7)式, 协方差函数可以表示为

$$C_X(\tau) = E\{[X(t) - \mu_X][X(t+\tau) - \mu_X]\} = R_X(\tau) - \mu_X^2.$$

特别地, 令 $\tau=0$, 由上式, 有

$$\sigma_X^2 = C_X(0) = R_X(0) - \mu_X^2.$$

如前所述, 要确定一个随机过程的分布函数, 并进而判定其平稳性在实际中是不易办到的. 因此, 通常只在二阶矩过程范围内, 考虑如下一类广义平稳过程.

定义 给定二阶矩过程 $\{X(t), t \in T\}$, 如果对任意 $t, t+\tau \in T$,

$$E[X(t)] = \mu_X (\text{常数}),$$

$$E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau),$$

则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为宽平稳过程或广义平稳过程. 相对地, 前述按分布函数定义的平稳过程称为严平稳过程或狭义平稳过程.

由于宽平稳过程的定义只涉及与一维、二维分布有关的数字特征, 所以一个严平稳过程只要二阶矩存在, 则它必定也是宽平稳的. 但反过来, 一般是不成立的. 不过有一个重要的例外情形, 即正态过程. 因为正态过程的概率密度是由均值函数和自相关函数完全确定的, 因而如果均值函数和自相关函数不随时间的推移而变化, 则概率密度也不随时间的推移而变化. 由此一个宽平稳的正态过程必定也是严平稳的.

今后, 我们讲到平稳过程一词时, 除特别指明以外, 总是指宽平稳过程.

另外,当我们同时考虑两个平稳过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 时,如果它们的互相关函数也只是时间差的单变量函数,记为 $R_{XY}(\tau)$,即

$$R_{XY}(t, t+\tau) = E[X(t)Y(t+\tau)] = R_{XY}(\tau), \quad (1.3)$$

那么我们就称 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是平稳相关的,或称这两个过程是联合(宽)平稳的.

易见,在第十二章中,§ 2 例 2、例 3 都是平稳过程,由于例 3 又是正态过程,所以它也是严平稳的.而 § 2 例 1 以及 § 3 中的泊松过程和维纳过程都是非平稳过程.下面再举数例.

例 1 设 $\{X_k, k=1, 2, \dots\}$ 是互不相关的随机变量序列,且 $E(X_k)=0$, $E(X_k^2)=\sigma^2$, 则有

$$R_X(k, l) = E(X_k X_l) = \begin{cases} \sigma^2, & k=l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases}$$

即相关函数只与 $k-l$ 有关,所以它是宽平稳的随机序列.如果 $X_1, X_2, \dots, X_k, \dots$ 又是独立同分布的,则易证序列也是严平稳的. $\square$

例 2 设 $s(t)$ 是一周期为 T 的函数, Θ 是在 $(0, T)$ 上服从均匀分布的随机变量,称 $X(t) = s(t + \Theta)$ 为随机相位周期过程.试讨论它的平稳性.

解 由假设, Θ 的概率密度为

$$f(\theta) = \begin{cases} 1/T, & 0 < \theta < T, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

于是, $X(t)$ 的均值函数为

$$E[X(t)] = E[s(t + \Theta)] = \int_0^T s(t + \theta) \frac{1}{T} d\theta = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} s(\varphi) d\varphi.$$

利用 $s(\varphi)$ 的周期性,可知

$$E[X(t)] = \frac{1}{T} \int_0^T s(\varphi) d\varphi = \text{常数}.$$

而自相关函数

$$\begin{aligned} R_X(t, t+\tau) &= E[s(t + \Theta)s(t + \tau + \Theta)] \\ &= \int_0^T s(t + \theta)s(t + \tau + \theta) \cdot \frac{1}{T} d\theta \\ &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} s(\varphi)s(\varphi + \tau) d\varphi. \end{aligned}$$

同样,利用 $s(\varphi)s(\varphi + \tau)$ 的周期性,可知自相关函数仅与 τ 有关,即

$$R_X(t, t+\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T s(\varphi)s(\varphi + \tau) d\varphi \stackrel{\text{记成}}{=} R_X(\tau),$$

所以随机相位周期过程是平稳的.特别,随机相位正弦波是平稳的(第十二章 § 2 例 2). $\square$

例 3 考虑随机电报信号.信号 $X(t)$ 由只取 $+I$ 或 $-I$ 的电流给出(图 14-1

画出了 $X(t)$ 的一条样本曲线). 这里

$$P\{X(t)=+I\}=P\{X(t)=-I\}=1/2,$$

而正负号在区间 $(t, t+\tau)$ 内变化的次数 $N(t, t+\tau)$ 是随机的, 且假设 $N(t, t+\tau)$ 服从泊松分布, 亦即事件

$$A_k = \{N(t, t+\tau) = k\}$$

的概率为

$$P(A_k) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}, \quad k=0, 1, 2, \dots,$$

其中 $\lambda > 0$ 是单位时间内变号次数的数学期望. 试讨论 $X(t)$ 的平稳性.

解 显然, $E[X(t)] = 0$. 现在来计算 $E[X(t)X(t+\tau)]$, 先设 $\tau > 0$, 我们注意, 如果电流在 $(t, t+\tau)$ 内变号偶数次, 则 $X(t)$ 和 $X(t+\tau)$ 必同号且乘积为 I^2 ; 如果变号奇数次, 则乘积为 $-I^2$. 因为事件

$$\{X(t)X(t+\tau) = I^2\}$$

的概率为 $P(A_0) + P(A_2) + P(A_4) + \dots$, 而事件

$$\{X(t)X(t+\tau) = -I^2\}$$

的概率为 $P(A_1) + P(A_3) + \dots$, 于是

$$\begin{aligned} E[X(t)X(t+\tau)] &= I^2 \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_{2k}) - I^2 \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_{2k+1}) \\ &= I^2 e^{-\lambda\tau} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda\tau)^k}{k!} = I^2 e^{-2\lambda\tau}. \end{aligned}$$

注意, 上述结果与 t 无关. 而若 $\tau < 0$ 时, 只需令 $t' = t + \tau$, 则有

$$\begin{aligned} E[X(t)X(t+\tau)] &= E[X(t')X(t'-\tau)] \\ &= I^2 e^{2\lambda\tau}. \end{aligned}$$

故这一过程的自相关函数为

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] \\ &= I^2 e^{-2\lambda|\tau|}, \end{aligned}$$

它只与 τ 有关. 其图形如图 14-2 所示. 因此随机电信号 $X(t)$ 是一平稳过程.

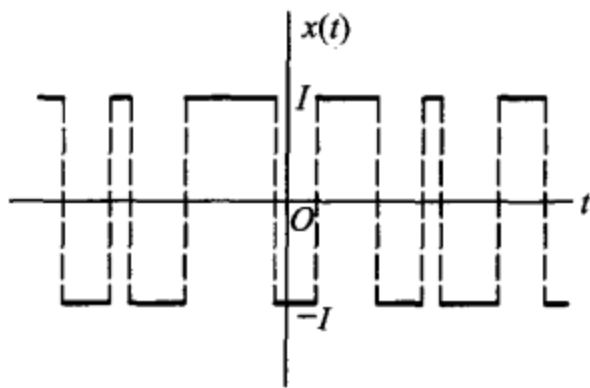


图 14-1

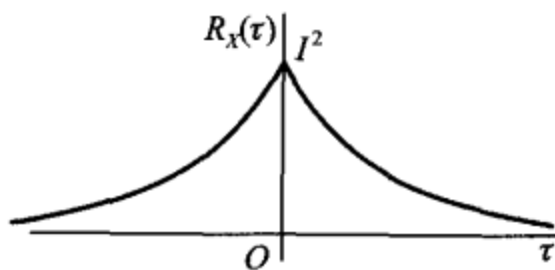


图 14-2

§ 2 各态历经性

本节主要讨论, 根据实验记录确定平稳过程的均值和自相关函数的理论依据和方法.

首先注意,如果按照数学期望的定义来计算平稳过程 $X(t)$ 的数字特征,就需要预先确定 $X(t)$ 的一族样本函数或一维、二维分布函数,但这实际上是不易办到的.事实上,即使我们用统计实验方法,例如可以把均值和自相关函数近似地表示为

$$\mu_X \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1)$$

和

$$R_X(t_2 - t_1) \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1)x_k(t_2),$$

那也需要对一个平稳过程重复进行大量观察,以便获得数量很多的样本函数 $x_k(t), k=1, 2, \dots, N$,而这正是实际困难所在.

但是,平稳过程的统计特性是不随时间的推移而变化的,于是我们自然期望在一个很长时间内观察得到的一个样本曲线,可以作为得到这个过程的数字特征的充分依据.本节给出的各态历经定理将证实:对平稳过程而言,只要满足一些较宽的条件,那么集平均(均值和自相关函数等)实际上可以用一个样本函数在整个时间轴上的平均值来代替.这样,在解决实际问题时就节约了大量的工作量.

在叙述各态历经性之前,我们先简要地介绍一下往后多处要碰到的有关随机过程积分的概念.

给定二阶矩过程 $\{X(t), t \in T\}$,如果它的每一个样本函数在 $[a, b] \subset T$ 上的积分都存在,我们就说随机过程 $X(t)$ 在 $[a, b]$ 上的积分存在,并记为

$$Y = \int_a^b X(t) dt, \quad (2.1)$$

显然, Y 是一随机变量.

但是,在某些情形下,对于随机过程的所有样本函数来说,在 $[a, b]$ 上的积分未必全都存在.此时,引入所谓均方意义上的积分,即考虑 $[a, b]$ 内的一组分点

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b,$$

且记

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, \quad t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

如果有满足

$$\lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} E\left\{ \left[Y - \sum_{i=1}^n X(\tau_i) \Delta t_i \right]^2 \right\} = 0$$

的随机变量 Y 存在, 我们就称 Y 为 $X(t)$ 在 $[a, b]$ 上的均方积分^①, 并仍以符号 (2.1) 记之. 可以证明: 二阶矩过程 $X(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方积分存在的充分条件是自相关函数的二重积分, 即

$$\int_a^b \int_a^b R_X(s, t) ds dt$$

存在. 而且此时还成立有

$$E[Y] = \int_a^b E[X(t)] dt. \quad (2.2)$$

就是说, 过程 $X(t)$ 的积分的均值等于过程的均值函数的积分.

现在引入随机过程 $X(t)$ 沿整个时间轴上的如下两种时间平均:

$$\langle X(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt \quad (2.3)$$

和

$$\langle X(t)X(t+\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t)X(t+\tau) dt \quad (2.4)$$

分别称为随机过程 $X(t)$ 的时间均值和时间相关函数. 我们可以沿用高等数学中的方法求积分和求极限, 其结果一般来说是随机的.

以下就来讨论时间平均与集平均之间的关系. 先看一个例子.

例 1 计算随机相位正弦波 $X(t) = a \cos(\omega t + \Theta)$ 的时间平均 $\langle X(t) \rangle$ 和 $\langle X(t)X(t+\tau) \rangle$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \langle X(t) \rangle &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a \cos(\omega t + \Theta) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{a \cos \Theta \sin \omega T}{\omega T} = 0. \\ \langle X(t)X(t+\tau) \rangle &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a^2 \cos(\omega t + \Theta) \cos[\omega(t+\tau) + \Theta] dt \\ &= \frac{a^2}{2} \cos \omega \tau. \end{aligned}$$

□

将例 1 的结果与第十二章 §2 例 2 算得的结果比较, 可知

$$\begin{aligned} \mu_X &= E[X(t)] = \langle X(t) \rangle, \\ R_X(\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] = \langle X(t)X(t+\tau) \rangle. \end{aligned}$$

① 设 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 是一随机变量序列, 如果存在随机变量 X_0 , 使

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E\{[X_n - X_0]^2\} = 0,$$

则称 X_0 是 X_n 的均方极限, 记为 l. i. m. $X_n = X_0$. 本章出现的涉及随机过程的极限和积分都应在均方意义下理解. 但我们约定仍以记号“lim”替代“l. i. m.”, 请读者注意. 有关这方面的进一步知识(即随机分析的内容)超出本书的要求.

这表明:对于随机相位正弦波,用时间平均和集平均分别算得的均值和自相关函数是相等的.这一特性并不是随机相位正弦波所独有的.下面引入一般概念.

定义 设 $X(t)$ 是一平稳过程,

1° 如果

$$\langle X(t) \rangle = E[X(t)] = \mu_X \quad (2.5)$$

以概率 1 成立,则称过程 $X(t)$ 的均值具有各态历经性.

2° 如果对任意实数 τ ,

$$\langle X(t)X(t+\tau) \rangle = E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau) \quad (2.6)$$

以概率 1 成立,则称过程 $X(t)$ 的自相关函数具有各态历经性.特别当 $\tau=0$ 时,称均方值具有各态历经性.

3° 如果 $X(t)$ 的均值和自相关函数都具有各态历经性,则称 $X(t)$ 是(宽)各态历过程,或者说 $X(t)$ 是各态历经的.

定义中“以概率 1 成立”是对 $X(t)$ 的所有样本函数而言的.

各态历经性有时也称作遍历性或埃尔古德性(ergodicity).

按定义,例 1 中的随机相位正弦波是各态历过程.

当然,并不是任意一个平稳过程都是各态历经的.例如平稳过程

$$X(t) = Y,$$

其中 Y 是方差异于零的随机变量,就不是各态历过程.事实上, $\langle X(t) \rangle = \langle Y \rangle = Y$, 亦即时间均值随 Y 取不同可能值而不同.因 Y 的方差异于零,这样 $\langle X(t) \rangle$ 就不可能以概率 1 等于常数 $E[X(t)] = E[Y]$. 见图 14-3.

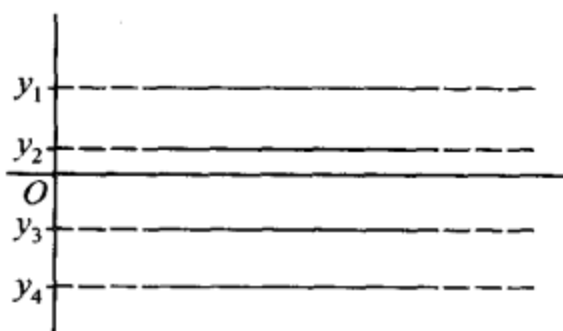


图 14-3

一个平稳过程应该满足怎样的条件才是各态历经的呢? 下面两个定理从理论上回答了这一问题.

定理一(均值各态历经定理) 平稳过程 $X(t)$ 的均值具有各态历经性的充要条件是

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) [R_X(\tau) - \mu_X^2] d\tau = 0. \quad (2.7)$$

证 先计算 $\langle X(t) \rangle$ 的均值和方差. 由(2.3)式

$$E\{\langle X(t) \rangle\} = E\left\{\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt\right\}.$$

交换运算顺序,并注意到 $E[X(t)] = \mu_X$, 即有

$$E\{\langle X(t) \rangle\} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X(t)] dt = \mu_X.$$

而 $\langle X(t) \rangle$ 的方差为

$$\begin{aligned}
D[\langle X(t) \rangle] &= E\{[\langle X(t) \rangle - \mu_X]^2\} \\
&= \lim_{T \rightarrow +\infty} E\left\{\left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt\right]^2\right\} - \mu_X^2 \\
&= \lim_{T \rightarrow +\infty} E\left\{\frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T X(t_1) dt_1 \int_{-T}^T X(t_2) dt_2\right\} - \mu_X^2 \\
&= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T E[X(t_1)X(t_2)] dt_1 dt_2 - \mu_X^2.
\end{aligned}$$

由 $X(t)$ 的平稳性, $E[X(t_1)X(t_2)] = R_X(t_2 - t_1)$, 上式可改写为

$$D[\langle X(t) \rangle] = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T R_X(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 - \mu_X^2. \quad (2.8)$$

为了简化上式右端的积分, 引入变量替代 $\tau_1 = t_1 + t_2$ 和 $\tau_2 = -t_1 + t_2$. 此变换的雅可比(Jacobi)式是

$$\left| \frac{\partial(t_1, t_2)}{\partial(\tau_1, \tau_2)} \right| = \frac{1}{2},$$

而积分区域按图 14-4 转换. 于是(2.8)式中的二重积分用新变量可表成

$$\int_{-T}^T \int_{-T}^T R_X(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 = \iint_{\diamond} R_X(\tau_2) \frac{1}{2} \cdot d\tau_1 d\tau_2, \quad (2.9)$$

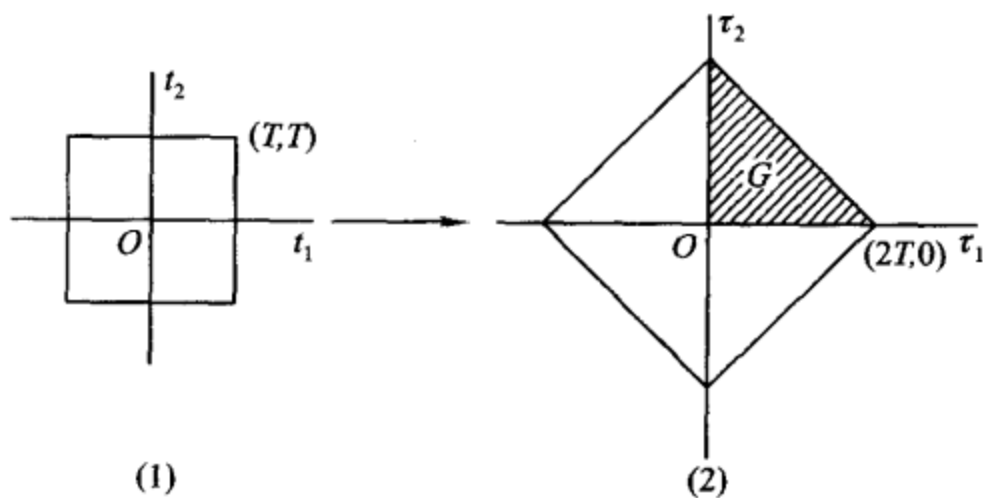


图 14-4

其中 $\diamond$ 为图 14-4(2) 所示的正方形. 注意到被积函数 $R_X(\tau_2)$ 是 τ_2 的偶函数(见下节性质 2°), 且与 τ_1 无关, 因而积分值为图 14-4(2) 中阴影区域 G 上积分值的 4 倍, 即

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^T \int_{-T}^T R_X(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 &= 4 \iint_G R_X(\tau_2) \frac{1}{2} d\tau_1 d\tau_2 \\
&= 2 \int_0^{2T} d\tau_2 \int_0^{2T-\tau_2} R_X(\tau_2) d\tau_1 = 2 \int_0^{2T} (2T - \tau) R_X(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

把这个式子代入(2.8)式就有

$$\begin{aligned}
D[\langle X(t) \rangle] &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) R_X(\tau) d\tau - \mu_X^2 \\
&= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) [R_X(\tau) - \mu_X^2] d\tau.
\end{aligned} \quad (2.10)$$

由第四章 §2 方差的性质 4° 知道

$$\langle X(t) \rangle = E\{\langle X(t) \rangle\}$$

以概率 1 成立的充要条件是

$$D[\langle X(t) \rangle] = 0.$$

但现已算得 $E\{\langle X(t) \rangle\} = E[X(t)]$, 故知

$$\langle X(t) \rangle = E[X(t)]$$

以概率 1 成立的充要条件是

$$D[\langle X(t) \rangle] = 0. \quad (2.11)$$

而由(2.10)式, 条件(2.11)即为

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) [R_X(\tau) - \mu_X^2] d\tau = 0,$$

由此定理得证. $\square$

推论 在 $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} R_X(\tau)$ 存在条件下, 若 $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} R_X(\tau) = \mu_X^2$, 则(2.7)式成立, 均值具有各态历经性; 若 $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} R_X(\tau) \neq \mu_X^2$, 则(2.7)式不成立, 均值不具有各态历经性. (证略)

注意, 对例 1 中的随机相位正弦波而言, $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} R_X(\tau)$ 不存在, 但它的均值是各态历经的.

在定理一的证明中将 $X(t)$ 换成 $X(t)X(t+\tau)$, 就可得

定理二(自相关函数各态历经定理) 平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数 $R_X(\tau)$ 具有各态历经性的充要条件是

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau_1}{2T}\right) [B(\tau_1) - R_X^2(\tau)] d\tau_1 = 0, \quad (2.12)$$

其中 $B(\tau_1) = E[X(t)X(t+\tau)X(t+\tau_1)X(t+\tau+\tau_1)]$.

在(2.12)式中令 $\tau=0$, 就可得到均方值具有各态历经性的充要条件.

如若在定理二中以 $X(t)Y(t+\tau)$ 代替 $X(t)X(t+\tau)$, $R_{XY}(\tau)$ 代替 $R_X(\tau)$ 来进行讨论, 那么还可以相应地得到互相关函数的各态历经定理.

在实际应用中通常只考虑定义在 $0 \leq t < +\infty$ 上的平稳过程. 此时上面的所有时间平均都应以 $0 \leq t < +\infty$ 上的时间平均来代替. 而相应的各态历经定理可表示为下述形式:

定理三
$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt = E[X(t)] = \mu_X$$

以概率 1 成立的充要条件是

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) [R_X(\tau) - \mu_X^2] d\tau = 0. \quad (2.7)'$$

定理四

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t)X(t+\tau) dt = E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)$$

以概率 1 成立的充要条件是

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau_1}{T}\right) [B(\tau_1) - R_X^2(\tau)] d\tau_1 = 0. \quad (2.12)'$$

各态历经定理的重要价值在于它从理论上给出了如下保证：一个平稳过程 $X(t)$ ，若 $0 < t < +\infty$ ，只要它满足条件 $(2.7)'$ 和 $(2.12)'$ ，便可以根据“以概率 1 成立”的含义，从一次试验所得到的样本函数 $x(t)$ 来确定出该过程的均值和自相关函数，即

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \mu_X \quad (2.13)$$

和

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau) dt = R_X(\tau). \quad (2.14)$$

这就是本节开头所预告的论断。

如果试验记录 $x(t)$ 只在时间区间 $[0, T]$ 上给出，则相应于 (2.13) 和 (2.14) 式有以下无偏估计式：

$$\mu_X \approx \hat{\mu}_X = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} R_X(\tau) \approx \hat{R}_X(\tau) &= \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} x(t)x(t+\tau) dt \\ &= \frac{1}{T-\tau} \int_\tau^T x(t)x(t-\tau) dt, 0 \leq \tau < T. \end{aligned} \quad (2.16)$$

不过在实际中一般不可能给出 $x(t)$ 的表达式，因而通常通过模拟方法或数字方法来测量或计算估计式 (2.15) 和 (2.16) 。现介绍如下：

1° 模拟自相关分析仪。这种仪器的功能是当输入样本函数 $x(t)$ 时，X-Y 记录仪自动描绘出自相关函数的曲线。它的方框图如图 14-5 所示。另有一种求自相关函数的近代方法——遍历转换技术，本书不作介绍。

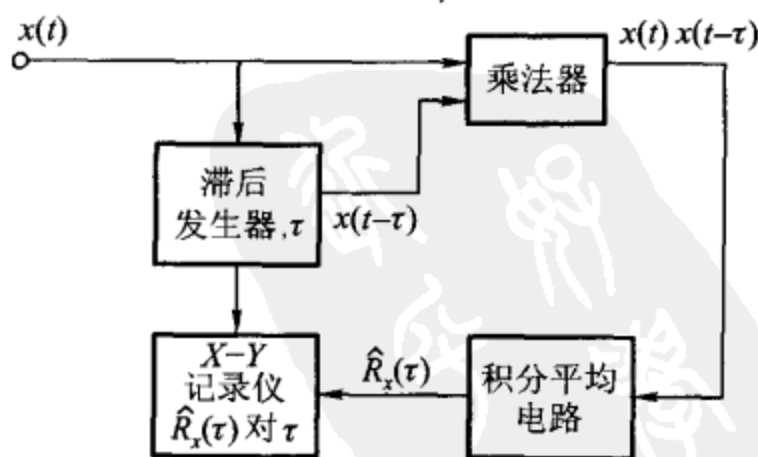


图 14-5

2° 数字方法. 如图 14-6, 把 $[0, T]$ 等分为 N 个长为 $\Delta t = \frac{T}{N}$ 的小区间, 然后在时刻 $t_k = \left(k - \frac{1}{2}\right)\Delta t, k=1, 2, \dots, N$, 对 $x(t)$ 取样, 得 N 个函数值 $x_k = x(t_k), k=1, 2, \dots, N$ ①. 把积分(2.15)近似表示为基本区间 Δt 上的和, 就有无偏估计

$$\hat{\mu}_X = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^N x_k \Delta t = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k.$$



图 14-6

相应于(2.16)式, 我们可以写出当 $\tau_r = r\Delta t$ 时, 自相关函数的无偏估计

$$\begin{aligned} \hat{R}_X(\tau_r) &= \frac{1}{T - \tau_r} \sum_{k=1}^{N-r} x_k x_{k+r} \Delta t \\ &= \frac{1}{N-r} \sum_{k=1}^{N-r} x_k x_{k+r}, \end{aligned}$$

$$r = 0, 1, 2, \dots, m, \quad m < N. \quad (2.17)$$

由这个估计式算出自相关函数的一系列近似值, 从而拟合出自相关函数的近似图形, 见图 14-7.

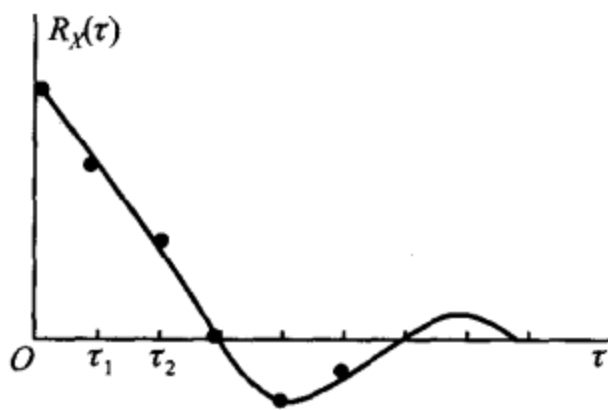


图 14-7

最后指出, 各态历经定理的条件是比较宽的, 工程中碰到的大多数平稳过程都能够满足. 不过, 要去验证它们是否成立却是十分困难的. 因此在实践中, 通常事先假定所研究的平稳过程具有各态历经性, 并从这个假定出发, 对由此而产生的各种资料进行分析、处理, 看所得的结论是否与实际相符. 如果不符, 则要修改假设, 另作处理.

① 设函数 $x(t), 0 \leq t \leq T$ 的傅里叶 (Fourier) 变换 $H(i\omega)$ 只在频率域 $|\omega| \leq \omega_c$ 上存在 (ω_c 为正常数), 而在其他频率上为零. 依照抽样定理, 应选取取样间隔 Δt 不超过奈奎斯特 (Nyquist) 区间 $\frac{\pi}{\omega_c}$ (或取 $N > \frac{\omega_c T}{\pi}$) 才能保证 $x_k, k=1, 2, \dots, N$ 包含函数 $x(t)$ 在 $0 \leq t \leq T$ 上的全部信息. 注意, 这里所指的“频率” ω 是角频率, 它与实际的频率 f 之间有关系式: $\omega = 2\pi f$.

§ 3 相关函数的性质

在第十二章 § 2 中指出,用数字特征来描绘随机过程,比用分布函数(或概率密度)来得简便.上一节中又指出,对于具有各态历经性的平稳过程,可以根据各态历经定理,对随机过程的一个样本函数使用数学分析的计算手续去求它的均值和相关函数.在这种场合下,利用均值和相关函数去研究随机过程更是方便.特别是对于正态平稳过程,它的均值 μ_X 和相关函数 $R_X(\tau)$ 完全刻画了该过程的统计特性.因此,这两个数字特征的重要性更突出地显现出来.为了成功地使用数字特征去研究随机过程,下面着重研究一下相关函数的性质.以下假设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是平稳相关过程, $R_X(\tau)$, $R_Y(\tau)$ 和 $R_{XY}(\tau)$ 分别是它们的自相关函数和互相关函数.

$$1^\circ R_X(0) = E[X^2(t)] = \Psi_X^2 \geq 0.$$

这由(1.2)式即可得到.在下一节将看到,量 $R_X(0)$ 表示平稳过程 $X(t)$ 的“平均功率”.

$2^\circ R_X(-\tau) = R_X(\tau)$, 即 $R_X(\tau)$ 是 τ 的偶函数.而互相关函数既不是奇函数,也不是偶函数,但满足 $R_{XY}(-\tau) = R_{YX}(\tau)$.

这分别可由(1.2)和(1.3)式得到.依据这个性质,在实际问题中只需计算或测量 $R_X(\tau)$, $R_Y(\tau)$, $R_{XY}(\tau)$ 和 $R_{YX}(\tau)$ 在 $\tau \geq 0$ 的值.

3° 关于自相关函数和自协方差函数有不等式:

$$|R_X(\tau)| \leq R_X(0) \text{ 和 } |C_X(\tau)| \leq C_X(0) = \sigma_X^2.$$

这可根据自相关函数、自协方差函数的定义以及柯西—施瓦茨不等式直接推出.

此不等式表明:自相关(自协方差)函数都在 $\tau=0$ 处取到最大值^①.

类似地,可以推得以下有关互相关函数和互协方差函数的不等式:

$$|R_{XY}(\tau)|^2 \leq R_X(0)R_Y(0) \text{ 和 } |C_{XY}(\tau)|^2 \leq C_X(0)C_Y(0).$$

应用上还定义有标准自协方差函数和标准互协方差函数:

$$\rho_X(\tau) = \frac{C_X(\tau)}{C_X(0)} \text{ 和 } \rho_{XY}(\tau) = \frac{C_{XY}(\tau)}{\sqrt{C_X(0)C_Y(0)}}.$$

由上述不等式性质知: $|\rho_X(\tau)| \leq 1$ 和 $|\rho_{XY}(\tau)| \leq 1$. 且当 $\rho_{XY}(\tau) \equiv 0$ 时, $X(t)$ 和 $Y(t)$ 不相关.

^① 但并不排除在 $\tau \neq 0$ 处也可取到最大值.例如,随机相位正弦波的自相关函数 $R_X(\tau) = \frac{a^2}{2} \cos \omega \tau$ 在 $\tau = \frac{2k\pi}{\omega}$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 时均取到最大值.

4° $R_X(\tau)$ 是非负定的, 即对任意数组 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ 和任意实值函数 $g(t)$ 都有

$$\sum_{i,j=1}^n R_X(t_i - t_j) g(t_i) g(t_j) \geq 0.$$

事实上, 根据自相关函数的定义和均值运算性质, 即有

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n R_X(t_i - t_j) g(t_i) g(t_j) &= \sum_{i,j=1}^n E[X(t_i) X(t_j)] g(t_i) g(t_j) \\ &= E \left\{ \sum_{i,j=1}^n X(t_i) X(t_j) g(t_i) g(t_j) \right\} \\ &= E \left\{ \left[\sum_{i=1}^n X(t_i) g(t_i) \right]^2 \right\} \geq 0. \end{aligned}$$

对于平稳过程而言, 自相关函数的非负定性是最本质的. 这是因为理论上可以证明: 任一连续函数, 只要具有非负定性, 那么该函数必是某平稳过程的自相关函数.

5° 如果平稳过程 $X(t)$ 满足条件 $P\{X(t+T_0)=X(t)\}=1$, 则称它为周期是 T_0 的平稳过程. 周期平稳过程的自相关函数必是周期函数, 且其周期也是 T_0 .

事实上, 由平稳性, $E[X(t)-X(t+T_0)]=0$. 又根据第四章 § 2 方差的性质, 条件 $P\{X(t+T_0)=X(t)\}=1$ 与 $E\{[X(t+T_0)-X(t)]^2\}=0$ 等价. 于是, 由柯西-施瓦茨不等式

$$\begin{aligned} &\{E[X(t)(X(t+\tau+T_0)-X(t+\tau))]\}^2 \\ &\leq E[X^2(t)] E\{[X(t+\tau+T_0)-X(t+\tau)]^2\} \end{aligned}$$

右端为零, 推知

$$E\{X(t)[X(t+\tau+T_0)-X(t+\tau)]\}=0,$$

展开即得 $R_X(\tau+T_0)=R_X(\tau)$.

另外, 在实际中, 各种具有零均值的非周期性噪声和干扰一般当 $|\tau|$ 值适当增大时, $X(t+\tau)$ 和 $X(t)$ 即呈现独立或不相关, 于是有

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} R_X(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} C_X(\tau) = 0.$$

下面讲一个应用的例子.

设某接收机输出电压 $V(t)$ 是周期信号 $S(t)$ 和噪声电压 $N(t)$ 之和, 即

$$V(t) = S(t) + N(t).$$

又设 $S(t)$ 和 $N(t)$ 是两个互不相关 (实际问题中一般都是如此) 的各态历经过程, 且 $E[N(t)]=0$. 根据第十二章 (2.12) 式, $V(t)$ 的自相关函数应为

$$R_V(\tau) = R_S(\tau) + R_N(\tau).$$

由性质 5°, $R_S(\tau)$ 是周期函数, 又因为一般噪声电压当 $|\tau|$ 值适当增大时, $X(t+\tau)$ 和 $X(t)$ 呈现独立或不相关, 即有

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_N(\tau) = 0.$$

于是,对于充分大的 τ 值,我们有

$$R_V(\tau) \approx R_S(\tau).$$

如果现在将 $V(t)$ 作为自相关分析仪(图 14-5)的输入,则对于充分大的 τ 值,分析仪记录到的是周期函数 $R_S(\tau)$ 的曲线,如果只有噪声而无信号,则对充分大的 τ 值,记录到的 $R_V(\tau) \approx 0$. 所以从分析仪记录到的曲线有无明显的周期成分就可以判断接收机的输出有无周期信号. 这种探查信号的方法称为相关接收法.

例如,特别假设接收机输出电压中的信号和噪声过程的自相关函数分别为

$$R_S(\tau) = \frac{a^2}{2} \cos \tau\omega, \quad R_N(\tau) = b^2 e^{-\alpha|\tau|} \quad (\alpha > 0),$$

且噪声平均功率(见下一节(4.10)式) $R_N(0) = b^2$ 远大于信号平均功率 $R_S(0) = a^2/2$. 此时,依关系式

$$\begin{aligned} R_V(\tau) &= \frac{a^2}{2} \cos \tau\omega + b^2 e^{-\alpha|\tau|} \\ &\approx \frac{a^2}{2} \cos \tau\omega, \quad \tau \text{ 充分大} \quad (3.1) \end{aligned}$$

来看,自相关分析仪记录到的 $R_V(\tau)$, $\tau \geq 0$ 的图形当 τ 充分大后应呈现正弦曲线,亦即从强噪声中检测到微弱的正弦信号. 如图 14-8.

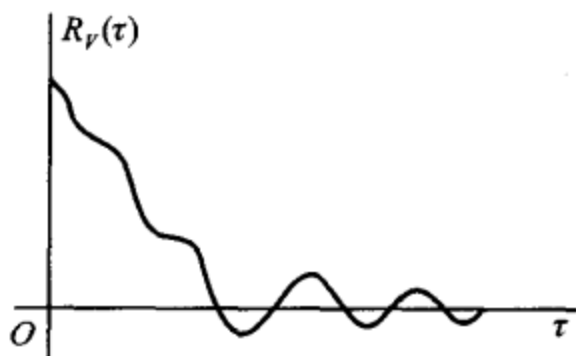


图 14-8

§ 4 平稳随机过程的功率谱密度

在很多理论和应用问题中,常常利用傅里叶(Fourier)变换这一有效工具来确立时间函数的频率结构. 本节的目的就是讨论如何运用这一工具以确立平稳过程的频率结构——功率谱密度.

(一) 平稳过程的功率谱密度

设有时间函数 $x(t)$, $-\infty < t < +\infty$ ①, 我们知道, 假如 $x(t)$ 满足狄利克雷(Dirichlet)条件, 且绝对可积, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty, \quad (4.1)$$

① 为了便于理解诸物理术语, 可把 $x(t)$ 设想为加于 1Ω 电阻上的电压.

那么 $x(t)$ 的傅里叶变换存在或者说具有频谱

$$F_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt.$$

且同时有傅里叶逆变换

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_x(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

$F_x(\omega)$ 一般是复数量, 其共轭函数 $F_x^*(\omega) = F_x(-\omega)$. 在 $x(t)$ 和 $F_x(\omega)$ 之间成立有帕塞瓦尔(Parseval)等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_x(\omega)|^2 d\omega,$$

等式左边表示 $x(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的总能量, 而右边的被积函数 $|F_x(\omega)|^2$ 相应地称为 $x(t)$ 的能谱密度. 这样, 帕塞瓦尔等式又可理解为总能量的谱表示式.

但是, 在工程技术中, 有很多重要的时间函数总能量是无限的, 而且条件 (4.1) 也不满足. 正弦函数就是一例, 平稳过程的样本函数一般来说也是如此. 这时, 我们通常转而去研究 $x(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的平均功率, 即

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt.$$

在以下的讨论中, 我们都假定这个平均功率是存在的.

为了能利用傅里叶变换给出“平均功率的谱表示式”, 我们首先由给定的 $x(t)$ 构造一个截尾函数

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & |t| \leq T, \\ 0, & |t| > T. \end{cases} \quad (4.2)$$

易知, $x_T(t)$ 是满足条件 (4.1) 的. 现记 $x_T(t)$ 的傅里叶变换为

$$F_x(\omega, T) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-T}^T x(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (4.3)$$

并写出它的帕塞瓦尔等式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_T^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_x(\omega, T)|^2 d\omega.$$

将上式两边除以 $2T$, 并注意到 (4.2) 式, 得

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \frac{1}{4\pi T} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_x(\omega, T)|^2 d\omega. \quad (4.4)$$

令 $T \rightarrow +\infty$, $x(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的平均功率即可表示为

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} |F_x(\omega, T)|^2 d\omega. \quad (4.5)$$

相应于能谱密度, 我们把 (4.5) 式右端的被积式称作函数 $x(t)$ 的平均功率谱密度, 简称功率谱密度, 并记为

$$S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} |F_x(\omega, T)|^2. \quad (4.6)$$

而式(4.5)右端就是平均功率的谱表示式.

现在我们把平均功率和功率谱密度的概念推广到平稳过程 $X(t)$, $-\infty < t < +\infty$. 为此, 相应于(4.3)和(4.4)式写出

$$F_x(\omega, T) = \int_{-T}^T X(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4.7)$$

和

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T X^2(t) dt = \frac{1}{4\pi T} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_x(\omega, T)|^2 d\omega. \quad (4.8)$$

显然, (4.7)和(4.8)式中诸积分都是随机的. 这时, 我们将(4.8)式左端的均值的极限, 即量

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} E \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X^2(t) dt \right\} \quad (4.9)$$

定义为平稳过程 $X(t)$ 的平均功率.

交换(4.9)式中积分与均值的运算顺序, 并注意到平稳过程的均方值是常数 Ψ^2 , 于是

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} E \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X^2(t) dt \right\} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X^2(t)] dt = \Psi_x^2, \quad (4.10)$$

即平稳过程的平均功率等于该过程的均方值或 $R_x(0)$.

接着, 把式(4.8)的右端代入(4.10)式的左端, 交换运算顺序后可得

$$\Psi_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} E\{|F_x(\omega, T)|^2\} d\omega. \quad (4.11)$$

相应于(4.5)——(4.6)式, 我们把(4.11)式中的被积式称为平稳过程 $X(t)$ 的功率谱密度, 并记为 $S_{xx}(\omega)$ 或 $S_x(\omega)$, 即

$$S_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} E\{|F_x(\omega, T)|^2\}. \quad (4.12)$$

利用记号 $S_x(\omega)$, (4.11)式可简写为

$$\Psi_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega, \quad (4.13)$$

此式称为平稳过程 $X(t)$ 的平均功率的谱表示式.

功率谱密度 $S_x(\omega)$ 通常也简称为自谱密度或谱密度^①, 它是从频率这个角度描述 $X(t)$ 的统计规律的最主要的数字特征. 由(4.13)式知, 它的物理意义是表示 $X(t)$ 的平均功率关于频率的分布.

^① 可以指出, 平稳过程的总能量为无限, 而且能谱密度也不存在, 故在平稳过程理论中“谱密度”一词总是指功率谱密度.

如果我们已知平稳过程 $X(t)$ 的谱密度, 那么在任意特定频率范围 (ω_1, ω_2) 内的谱密度对平均功率的贡献为

$$(\omega_1, \omega_2) \Psi_X^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_X(\omega) d\omega.$$

以上定义的谱密度 $S_X(\omega)$ 又称为“双边谱密度”, 意思是对 ω 的正负值都是有定义的. 但实际中负频率是无意义的, 为了适应实际测量, 考虑定义在 $[0, +\infty)$ 上的平稳过程 $X(t)$, 并按前面的思想和步骤, 定义“单边谱密度”:

$$G_X(\omega) = \begin{cases} 2 \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} E\{|F_X(\omega, T)|^2\}, & \omega \geq 0, \\ 0, & \omega < 0, \end{cases} \quad (4.14)$$

此处 $F_X(\omega, T) = \int_0^T X(t) e^{-i\omega t} dt$.

可以证明, 单边谱密度与双边谱密度的关系是:

$$G_X(\omega) = \begin{cases} 2S_X(\omega), & \omega \geq 0, \\ 0, & \omega < 0, \end{cases}$$

见图 14-9 所示. 这相当于利用 $S_X(\omega)$ 的偶函数性质^①, 把负频率范围内的谱密度折算到正频率范围内.

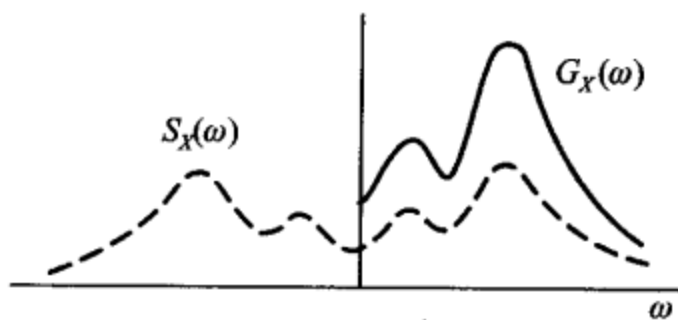


图 14-9

实用上, 从定义单边谱密度的(4.14)式出发, 设计有专门的仪器和计算方法用以模拟平稳过程的谱密度或进行数值计算.

(二) 谱密度的性质

谱密度 $S_X(\omega)$ 有以下重要性质:

1° $S_X(\omega)$ 是 ω 的实的、非负的偶函数.

事实上, 在(4.12)式中, 量

$$|F_X(\omega, T)|^2 = F_X(\omega, T) F_X(-\omega, T)$$

是 ω 的实的、非负的偶函数, 所以它的均值的极限也必是实的、非负的偶函数.

2° $S_X(\omega)$ 和自相关函数 $R_X(\tau)$ 是一傅里叶变换对, 即

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (4.15)$$

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (4.16)$$

它们统称为维纳-辛钦(Wiener-Khinchin)公式.

^① 见本节(二)中性质 1°.

为了推导公式(4.15),我们将(4.7)式代入(4.12)式,得

$$S_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} E \left\{ \int_{-T}^T X(t_1) e^{i\omega t_1} dt_1 \int_{-T}^T X(t_2) e^{-i\omega t_2} dt_2 \right\}.$$

把括号内的积分乘积改写成重积分形式,交换积分与均值的运算顺序,并注意到 $E\{X(t_1)X(t_2)\} = R_X(t_2 - t_1)$, 即有

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T E\{X(t_1)X(t_2)\} e^{-i\omega(t_2 - t_1)} dt_1 dt_2 \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T R_X(t_2 - t_1) e^{-i\omega(t_2 - t_1)} dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

接着,依照 §2 定理一的证明,作变量替代 $\tau_1 = t_1 + t_2$ 和 $\tau_2 = -t_1 + t_2$, 可以得到

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_X^T(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (4.17)$$

式中

$$R_X^T(\tau) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) R_X(\tau), & |\tau| \leq 2T, \\ 0, & |\tau| > 2T. \end{cases}$$

当 $T \rightarrow +\infty$ 时,注意到 $R_X^T(\tau) \rightarrow R_X(\tau)$ 对每一个 τ 都成立,于是由(4.17)式就可得到公式

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

最后一步在理论上要求 $\int_{-\infty}^{+\infty} |R_X(\tau)| d\tau < +\infty$.

如此,可以得出如下结论:平稳过程在自相关函数绝对可积的条件下,谱密度就是自相关函数的傅里叶变换,即维纳-辛钦公式(4.15)成立.而公式(4.16)则是 $S_X(\omega)$ 的傅里叶逆变换.

在(4.16)式中令 $\tau=0$,再次得到表示式(4.13).

此外,由于 $R_X(\tau)$ 和 $S_X(\omega)$ 都是偶函数,所以利用欧拉(Euler)公式,维纳-辛钦公式还可以写成如下的形式:

$$S_X(\omega) = 2 \int_0^{+\infty} R_X(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (4.18)$$

$$R_X(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} S_X(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (4.19)$$

维纳-辛钦公式又称为平稳过程自相关函数的谱表示式,它揭示了从时间角度描述平稳过程 $X(t)$ 的统计规律和从频率角度描述 $X(t)$ 的统计规律之间的联系.据此,在应用上我们可以根据实际情形选择时间域方法或等价的频率域方法去解决实际问题.

维纳-辛钦公式的计算一般比较复杂,常要用到其他门类的数学知识,好在已经制备有傅里叶变换手册可供查用.表 14.1 列出了若干个自相关函数以及对应的谱密度.

例 1 已知平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数为

$$R_X(\tau) = e^{-a|\tau|} \cos \omega_0 \tau,$$

求 $X(t)$ 的谱密度 $S_X(\omega)$.

解 由公式(4.15)和欧拉公式,有

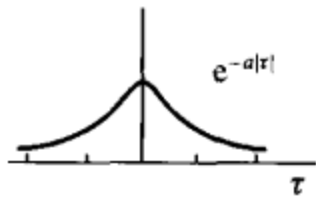
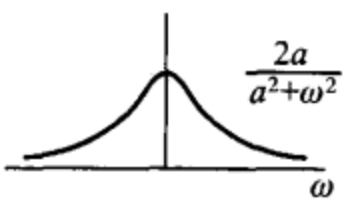
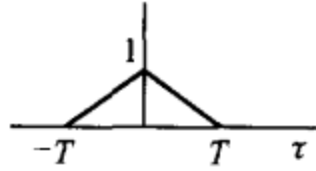
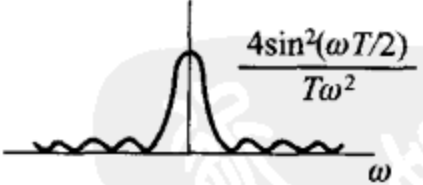
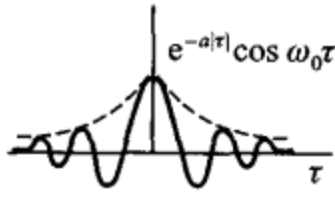
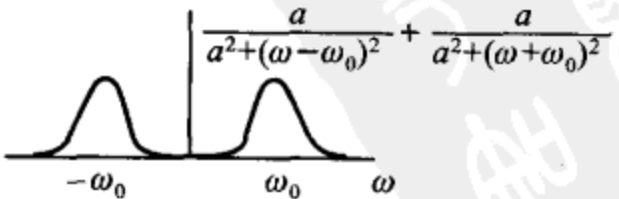
$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|\tau|} \cos \omega_0 \tau \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|\tau|} \left(\frac{e^{i\omega_0\tau} + e^{-i\omega_0\tau}}{2} \right) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|\tau|} e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|\tau|} e^{-i(\omega+\omega_0)\tau} d\tau \right], \end{aligned}$$

这两个积分分别是 $e^{-a|\tau|}$ 的傅里叶变换在 $\omega - \omega_0, \omega + \omega_0$ 处的值(见表 14.1 第 1 栏),所以

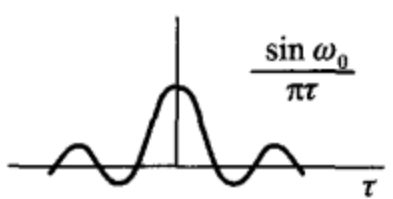
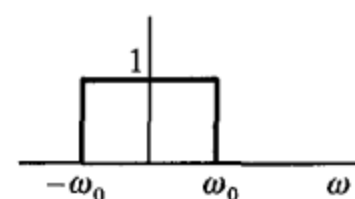
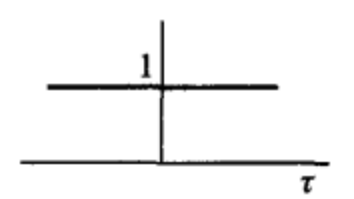
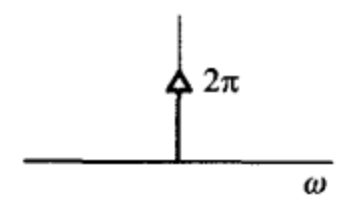
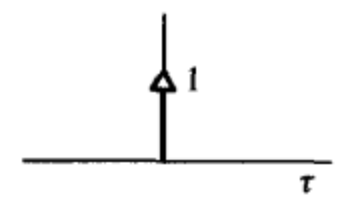
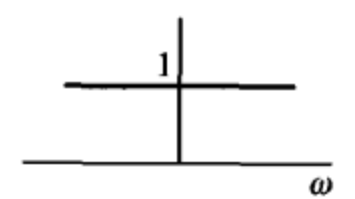
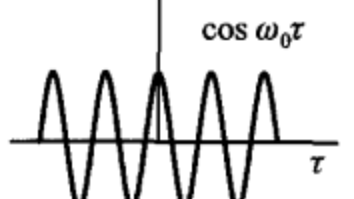
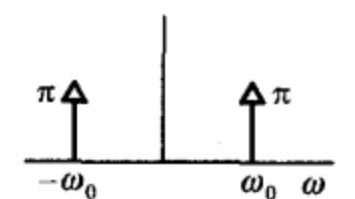
$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \frac{1}{2} \left[\frac{2a}{a^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{2a}{a^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right] \\ &= a \left[\frac{1}{a^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{1}{a^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right], \end{aligned}$$

它的图形见表 14-1 第 3 栏. 本题的解法, 实际上是利用表 14-1 第 1 栏的对应关系, 验证第 3 栏的对应关系. $\square$

表 14-1

	$R_X(\tau)$	$S_X(\omega)$
1		
2		
3		

续表

	$R_X(\tau)$	$S_X(\omega)$
4		
5		
6		
7		

例 2 已知谱密度

$$S_X(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 + 10\omega^2 + 9}, \quad (4.20)$$

求平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数和均方值。

解 用查表方法. 先把 $S_X(\omega)$ 改写成部分分式之和

$$S_X(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 9)} = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{\omega^2 + 1} + \frac{5}{\omega^2 + 3^2} \right).$$

由于傅里叶逆变换(4.16)也是线性变换, 所以可对上式右端两项分别查表14-1第1栏后相加, 经整理得所要求的自相关函数

$$R_X(\tau) = \frac{1}{48} (9e^{-|\tau|} + 5e^{-3|\tau|}).$$

而均方值为

$$\Psi^2 = R_X(0) = \frac{7}{24}.$$

□

形如(4.20)的谱密度属于有理谱密度. 根据谱密度性质 1°, 有理谱密度的一般形式应为

$$S_X(\omega) = S_0 \frac{\omega^{2n} + a_{2n-2}\omega^{2n-2} + \cdots + a_0}{\omega^{2m} + b_{2m-2}\omega^{2m-2} + \cdots + b_0},$$

式中 $S_0 > 0$; 又由于要求均方值有限, 所以由(4.13)式还要求 $m > n$, 且分母应无实数根. 有理谱密度是实用上最常见的一类谱密度.

另外, 当我们已经算得平稳过程的自相关函数的估计 $\hat{R}_X(\tau_r)$, $r=0, 1, 2, \dots, m$ 时, 那么经由维纳-辛钦公式可以得到谱密度的估计. 这种估计式很多, 例如, 利用积分的梯形近似公式, 相应于(4.18)式可以写出如下谱密度的原始估计:

$$\hat{S}_X(\omega) = \Delta t [\hat{R}_X(0) + 2 \sum_{r=1}^{m-1} \hat{R}_X(\tau_r) \cos \omega \tau_r + \hat{R}_X(\tau_m) \cos \omega \tau_m],$$

$0 \leq \omega \leq \omega_c$ (式中量 τ_r , Δt 和 ω_c 参见第 345 页的 2°), 在实际应用时, 还需利用有关随机数据分析方法对原始估计作进一步的加工.

最后需要指出的是, 在实际问题中常常碰到这样一些平稳过程, 它们的自相关函数或谱密度在常义情形下的傅里叶变换或逆变换是不存在的 (例如随机相位正弦波的自相关函数), 但与通常频谱分析中遇到的情况一样, 如果允许谱密度和自相关函数含有 δ 函数, 则在新的意义下利用 δ 函数的傅里叶变换性质, 有关实际问题仍能得到圆满解决.

上面所说的 δ 函数是单位冲激函数 $\delta(t)$ 的简称, 它是一种广义函数. 狄拉克 (Dirac) 最早给出了 $\delta(t)$ 的如下定义:

$$\begin{cases} \delta(t) = 0, t \neq 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1, \end{cases}$$

通常用图 14—10 中的单位有向线段来表示. δ 函数的基本性质是: 对任一在 $\tau=0$ 连续的函数 $f(\tau)$, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) f(\tau) d\tau = f(0).$$

一般, 若函数 $f(\tau)$ 在 $\tau=\tau_0$ 连续, 就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - \tau_0) f(\tau) d\tau = f(\tau_0) \text{ (筛选性).}$$

据此, 可以写出以下傅里叶变换对:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = 1$$

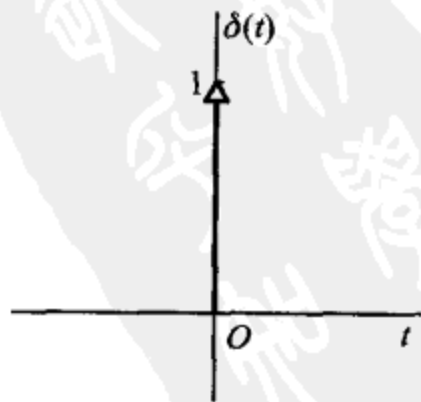


图 14—10

$$\longleftrightarrow \delta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (4.21)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau = \delta(\omega) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (4.22)$$

(4.22)式表明:当自相关函数 $R_X(\tau)=1$ 时,谱密度 $S_X(\omega)=2\pi\delta(\omega)$. 其次,还可求得正弦型自相关函数 $R_X(\tau)=a\cos \omega_0\tau$ 的谱密度为

$$S_X(\omega)=a\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]. \quad (4.23)$$

事实上,

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} a\cos \omega_0\tau e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{a}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{i\omega_0\tau} + e^{-i\omega_0\tau}) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{a}{2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega+\omega_0)\tau} d\tau \right], \end{aligned}$$

利用变换式(4.22)即得(4.23)式.

由上可见,自相关函数为常数或正弦型函数的平稳过程,其谱密度都是离散的(见表 14.1 第 5、7 栏).

例 3 求自相关函数

$$R_V(\tau) = \frac{a^2}{2} \cos \omega_0\tau + b^2 e^{-a|\tau|}$$

[见(3.1)式]所对应的谱密度 $S_V(\omega)$.

解 利用傅里叶变换的线性性质,并参照(4.23)式和表 14.1 第 1 栏,即可知道所要求的谱密度为

$$S_V(\omega) = \frac{\pi}{2} a^2 [\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)] + \frac{2ab^2}{a^2 + \omega^2}.$$

相应的谱密度图如图 14-11 所示. 此图说明了谱密度是如何表明噪声以外的周期信号的.

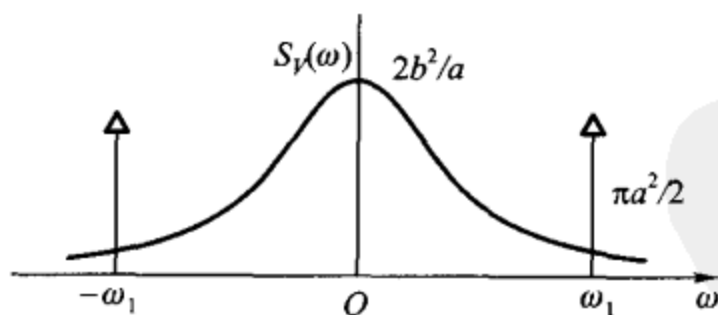


图 14-11

白噪声 均值为零而谱密度为正常数,即

$$S_X(\omega) = S_0, \quad -\infty < \omega < +\infty \quad (S_0 > 0)$$

的平稳过程 $X(t)$ 称为白噪声过程,简称白噪声. 其名出于白光具有均匀光谱的

缘故.

利用变换式(4.22),可算得白噪声的自相关函数为

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{S_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} d\omega = S_0 \delta(\tau).$$

见表 14.1 第 6 栏. 由上式可知, 白噪声也可定义为均值为零、自相关函数为 δ 函数的随机过程, 且这个过程在 $t_1 \neq t_2$ 时, $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 是不相关的.

白噪声是一种理想化的数学模型, 它的平均功率 $R_X(0)$ 是无限的. 实用上, 如果某种噪声(或干扰)在比实际考虑的有用频带宽得多的范围内具有比较“平坦”的谱密度, 那就可把它近似地当作白噪声来处理. 白噪声在数学处理上具有简单、方便的优点.

与白噪声相关联的另一类所谓带限白噪声, 其谱密度的特点是仅在某些有限频率范围内取异于零的常数. 例如低通白噪声, 它就是由下面的谱密度所定义的:

$$S_X(\omega) = \begin{cases} S_0, & |\omega| \leq \omega_1, \\ 0, & |\omega| > \omega_1, \end{cases}$$

相应的自相关函数为

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_1}^{\omega_1} S_0 e^{i\omega\tau} d\omega \\ &= \begin{cases} \frac{S_0 \omega_1}{\pi}, & \tau = 0, \\ \frac{S_0}{2\pi} \cdot \frac{e^{i\omega_1\tau} - e^{-i\omega_1\tau}}{i\tau} = \frac{S_0 \omega_1}{\pi} \left(\frac{\sin \omega_1 \tau}{\omega_1 \tau} \right), & \tau \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

当 $\tau = \frac{k\pi}{\omega_1}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ 时, $R_X(\tau) = 0$. 这表明低通白噪声 $X(t)$ 在 $t_2 - t_1 = \frac{k\pi}{\omega_1}$ 时, $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 是不相关的. 表 14.1 第 4 栏给出了 $S_0 = 1$ 的图形.

(三) 互谱密度及其性质

设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是两个平稳相关的随机过程. 我们定义

$$S_{XY}(\omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} E \{ F_X(-\omega, T) F_Y(\omega, T) \} \quad (4.24)$$

为平稳过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互谱密度, 式中 $F_X(\omega, T)$ 依(4.7)式确定.

由(4.24)式可知互谱密度不再是 ω 的实的、正的偶函数, 但它具有以下特性:

1° $S_{XY}(\omega) = S_{YX}^*(\omega)$. 即 $S_{XY}(\omega)$ 和 $S_{YX}(\omega)$ 互为共轭函数.

2° 在互相关函数 $R_{XY}(\tau)$ 绝对可积的条件下, 还有如下维纳-辛钦公式:

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (4.25)$$

$$R_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XY}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (4.26)$$

证明方法与公式(4.15)和(4.16)相同.

3° $\operatorname{Re}[S_{XY}(\omega)]$ 和 $\operatorname{Re}[S_{YX}(\omega)]$ 是 ω 的偶函数, $\operatorname{Im}[S_{XY}(\omega)]$ 和 $\operatorname{Im}[S_{YX}(\omega)]$ 是 ω 的奇函数. 这里 $\operatorname{Re}[\quad]$ 表示取实部, $\operatorname{Im}[\quad]$ 表示取虚部.

事实上,把(4.25)式改写成

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau) \cos \omega\tau d\tau - i \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau) \sin \omega\tau d\tau$$

即可推知.

4° 互谱密度与自谱密度之间成立有不等式

$$|S_{XY}(\omega)|^2 \leq S_X(\omega) S_Y(\omega).$$

证明略.

实际应用中,当考虑多个平稳过程之和的频率结构时,要运用互谱密度. 例如,设 $Z(t) = X(t) + Y(t)$, 其中 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是平稳相关的. 这时, $Z(t)$ 的自相关函数是 $R_{ZZ}(\tau) = R_{XX}(\tau) + R_{XY}(\tau) + R_{YX}(\tau) + R_{YY}(\tau)$, 根据维纳-辛钦公式, $Z(t)$ 的自谱密度为

$$\begin{aligned} S_{ZZ}(\omega) &= S_{XX}(\omega) + S_{XY}(\omega) + S_{YX}(\omega) + S_{YY}(\omega) \\ &= S_{XX}(\omega) + S_{YY}(\omega) + 2\operatorname{Re}[S_{XY}(\omega)]. \end{aligned}$$

互谱密度并不像自谱密度那样具有物理意义,引入这个概念主要是为了能在频率域上描述两个平稳过程的相关性(例如,对具有零均值的平稳过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 而言,根据性质 2°, $S_{XY}(\omega) \equiv 0$ 与 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 不相关是等价的).

相关函数和谱密度的一个重要应用是分析线性系统对随机输入的响应,它的具体内容由有关专业课程加以介绍.

小结

本章讨论的平稳过程 $\{X(t), t \in T\}$ 是指宽平稳过程,它的特点是均值为常数,自相关函数是时间差的单变量函数,即对于任意 $t, t+\tau \in T$.

$$E[X(t)] = \mu_X (\text{常数}), \quad E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)$$

与 t 无关;否则称过程不具有平稳性或非平稳过程,参数集 T 取 $(-\infty, +\infty)$ 、 $[0, +\infty)$.

如果两个平稳过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互相关函数只是时间差的单变量函数,即

$$E[X(t)Y(t+\tau)] = R_{XY}(\tau),$$

就称 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 是平稳相关的,否则称两过程不平稳相关.

容易看出,判定平稳性、平稳相关性仅仅涉及随机过程的均值函数、自相关函数和互相关函数的计算.

随机过程的时间均值

$$\langle X(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt$$

和时间相关函数

$$\langle X(t)X(t+\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t)X(t+\tau) dt$$

一般来说具有随机性、它们的计算涉及随机过程的极限运算与积分运算,读者不必去追究它们的理论根据,完全可以按高等数学中的方法来计算,但在计算过程中出现的随机变量应视作常数(见 §2 例 1)。

利用集平均来计算数字特征是十分困难的.为了考察是否可以从平稳过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的一个样本函数中获取该过程的统计信息,我们引入了各态历经性.例如

$$P\{\langle X(t) \rangle = \mu_X\} = 1$$

成立时,称均值具有各态历经性;还有自相关函数的各态历经性、均方值的各态历经性以及各态历经过程等。

判断一个平稳过程(或其数字特征)是否具有各态历经性有两种方法:一种是根据各态历经性的定义,直接计算、作出比较、进行判断.一般来说若时间平均 $\langle \cdot \rangle$ 带有随机性,则相应的数字特征一定没有各态历经性.一种是根据各态历经性定理及其推论来作判断。

对于各态历经过程,按定义可从一个样本函数 $x(t)$ 获得数字特征(若参数集为 $[0, +\infty)$):

$$\mu_X = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad R_X(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau) dt.$$

相关函数是平稳过程在时间域上的主要数字特征,常用的性质有: $R_X(0) = E[X^2(t)] \geq 0$, $R_X(-\tau) = R_X(\tau)$, $R_{XY}(-\tau) = R_{YX}(\tau)$ 以及 $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$ 等。

$\Psi_X^2 = R_X(0)$ 表示平稳过程 $X(t)$ 的平均功率,而由平均功率的谱表示式

$$\Psi_X^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} S_X(\omega) d\omega,$$

我们引入了平稳过程 $X(t)$ 在频率域上的数字特征——功率谱(谱密度) $S_X(\omega)$ 。

谱密度 $S_X(\omega)$ 是 ω 的实的、非负的偶函数,它与自相关函数 $R_X(\tau)$ 构成傅里叶变换(FT)对,即

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (= 2 \int_0^{+\infty} R_X(\tau) \cos \omega\tau d\tau),$$

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} S_X(\omega) \cos \omega\tau d\omega).$$

它们统称为维纳-辛钦公式.理论书上,常以第一式,即 $R_X(\tau)$ 的 FT 直接定义谱密度.除了 $S_X(\omega) \geq 0$ 外,读者可从维纳-辛钦公式自行导出 $S_X(\omega)$ 的性质及平均功率谱表示式,由此认识该公式的重要性.维纳-辛钦公式揭示了时间域上相关函数与频率域上谱密度之间的转换关系。

互谱密度没有物理意义,它仅仅是作为频率域上的数字特征而引进的.我们主要掌握互谱密度的维纳-辛钦公式,并了解互谱密度的性质。

为了计算平稳过程的谱密度(或互谱密度),一般总是先求出相关函数,再进行 FT(维纳-辛钦公式)得到谱密度。

■ 重要术语及主题

(宽)平稳过程 平稳相关 时间均值和时间相关函数 各态历经性 各态历经过程

相关函数及其性质 功率谱(谱密度) 维纳-辛钦公式 白噪声 互谱密度

习题

1. 设有随机过程 $X(t) = A \cos(\omega t + \Theta)$, $-\infty < t < +\infty$, 其中 A 是服从瑞利分布的随机变量, 其概率密度为

$$f(a) = \begin{cases} \frac{a}{\sigma^2} e^{-a^2/(2\sigma^2)}, & a > 0, \\ 0, & a \leq 0, \end{cases}$$

Θ 是在 $(0, 2\pi)$ 上服从均匀分布且与 A 相互独立的随机变量, ω 是一常数, 问 $X(t)$ 是不是平稳过程?

2. 设 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 是相互独立的平稳过程. 试证以下随机过程也是平稳过程:

$$(1) Z_1(t) = X(t)Y(t), \quad (2) Z_2(t) = X(t) + Y(t).$$

3. 设 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 是平稳过程, $R_X(\tau)$ 是其自相关函数, a 是常数, 试问随机过程

$$Y(t) = X(t+a) - X(t)$$

是不是平稳过程? 为什么?

4. 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程, 定义随机过程 $Y(t) = N(t+L) - N(t)$, 其中常数 $L > 0$. 试求 $Y(t)$ 的均值函数和自相关函数, 并问 $Y(t)$ 是否是平稳过程?

5. 设平稳过程 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 的自相关函数为 $R_X(\tau) = e^{-a|\tau|} (1 + a|\tau|)$, 其中常数 $a > 0$, 而 $E[X(t)] = 0$. 试问 $X(t)$ 的均值是否具有各态历经性? 为什么?

6. 第 1 题中的随机过程 $X(t) = A \cos(\omega t + \Theta)$ 是否是各态历过程? 为什么?

7. (1) 设 $C_X(\tau)$ 是平稳过程 $X(t)$ 的协方差函数. 试证: 若 $C_X(\tau)$ 绝对可积, 即

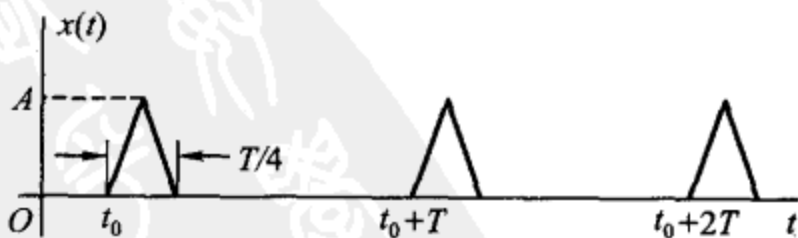
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |C_X(\tau)| d\tau < +\infty,$$

则 $X(t)$ 的均值具有各态历经性.

(2) 证明第十四章 §1 例 2 中的随机相位周期过程 $X(t) = s(t + \Theta)$ 是各态历过程.

8. 设 $X(t)$ 是随机相位周期过程, 下图表示它的一个样本函数 $x(t)$, 其中周期 T 和波幅 A 都是常数, 而相位 t_0 是在 $(0, T)$ 上服从均匀分布的随机变量.

(1) 求 μ_X, Ψ_X^2 . (2) 求 $X(t)$ 和 $X^2(t)$.



题 8 图

9. 设平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau)$, 证明:

$$P\{|X(t+\tau) - X(t)| \geq a\} \leq 2[R_X(0) - R_X(\tau)]/a^2, \quad a > 0.$$

10. 设 $X(t)$ 为平稳过程, 其自相关函数 $R_X(\tau)$ 是以 T_0 为周期的函数. 证明: $X(t)$ 是周期为 T_0 的平稳过程.

11. 设 $X(t)$ 是雷达的发射信号, 遇目标后返回接收机的微弱信号是 $aX(t-\tau_1)$, $a \ll 1$, τ_1 是信号返回时间, 由于接收到的信号总是伴有噪声的, 记噪声为 $N(t)$, 于是接收到的全信号为

$$Y(t) = aX(t-\tau_1) + N(t).$$

(1) 若 $X(t)$ 和 $N(t)$ 是平稳相关, 证明 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 也平稳相关.

(2) 在(1)的条件下, 假设 $N(t)$ 的均值为零且与 $X(t)$ 是相互独立的, 求 $R_{XY}(\tau)$ (这是利用互相关函数从全信号中检测小信号的相关接收法).

12. 平稳过程 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 的自相关函数为

$$R_X(\tau) = 4e^{-|\tau|} \cos \pi\tau + \cos 3\pi\tau,$$

求: (1) $X(t)$ 的均方值. (2) $X(t)$ 的谱密度.

13. 已知平稳过程 $X(t)$ 的谱密度为

$$S_X(\omega) = \frac{\omega^2}{\omega^4 + 3\omega^2 + 2},$$

求 $X(t)$ 的均方值.

14. 已知平稳过程 $X(t)$ 的自相关函数为

$$R_X(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T}, & |\tau| \leq T, \\ 0, & |\tau| > T, \end{cases}$$

求谱密度 $S_X(\omega)$.

15. 已知平稳过程 $X(t)$ 的谱密度为

$$S_X(\omega) = \begin{cases} 8\delta(\omega) + 20\left(1 - \frac{|\omega|}{10}\right), & |\omega| < 10, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求 $X(t)$ 的自相关函数.

16. 记随机过程

$$Y(t) = X(t) \cos(\omega_0 t + \Theta), \quad -\infty < t < +\infty,$$

其中 $X(t)$ 是平稳过程, Θ 为在区间 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机变量, ω_0 为常数, 且 $X(t)$ 与 Θ 相互独立. 记 $X(t)$ 的自相关函数为 $R_X(\tau)$, 功率谱密度为 $S_X(\omega)$. 试证:

(1) $Y(t)$ 是平稳过程, 且它的自相关函数

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{2} R_X(\tau) \cos \omega_0 \tau.$$

(2) $Y(t)$ 的功率谱密度为

$$S_Y(\omega) = \frac{1}{4} [S_X(\omega - \omega_0) + S_X(\omega + \omega_0)].$$

17. 设平稳过程 $X(t)$ 的谱密度为 $S_X(\omega)$, 证明: $Y(t) = X(t) + X(t-T)$ 的谱密度是

$$S_Y(\omega) = 2S_X(\omega)(1 + \cos \omega T).$$

18. 设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是两个平稳相关的过程, 证明

$$\operatorname{Re} S_{YX}(\omega) = \operatorname{Re} S_{XY}(\omega), \quad \operatorname{Im} S_{YX}(\omega) = -\operatorname{Im} S_{XY}(\omega).$$

19. 设两个平稳过程

$$X(t) = a \cos(\omega_0 t + \Theta), \quad Y(t) = b \sin(\omega_0 t + \Theta), \quad -\infty < t < +\infty,$$

其中 a, b, ω_0 均为常数, 而 Θ 是 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机变量, 试求互相关函数 $R_{XY}(\tau)$, $R_{YX}(\tau)$ 和互谱密度 $S_{XY}(\omega), S_{YX}(\omega)$.

20. 设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是两个相互独立的平稳过程, 均值 μ_X 和 μ_Y 都不为零, 定义

$$Z(t) = X(t) + Y(t).$$

试计算 $S_{XY}(\omega)$ 和 $S_{XZ}(\omega)$.



选做习题

概率论部分

1. 一打靶场备有 5 支某种型号的枪, 其中 3 支已经校正, 2 支未经校正. 某人使用已校正的枪击中目标的概率为 p_1 , 使用未经校正的枪击中目标的概率为 p_2 . 他随机地取一支枪进行射击, 已知他射击了 5 次, 都未击中, 求他使用的是已校正的枪的概率 (设各次射击的结果相互独立).

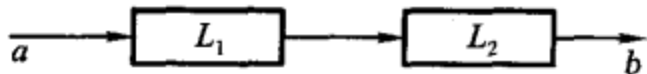
2. 某人共买了 11 个水果, 其中有 3 个是二级品, 8 个是一级品. 随机地将水果分给 A、B、C 三人, 各人分别得到 4 个、6 个、1 个.

(1) 求 C 未拿到二级品的概率.

(2) 已知 C 未拿到二级品, 求 A、B 均拿到二级品的概率.

(3) 求 A、B 均拿到二级品而 C 未拿到二级品的概率.

3. 一系统 L 由两个只能传输字符 0 和 1 的独立工作的子系统 L_1 与 L_2 串联而成 (如题 3 图), 每个子系统输入为 0 输出为 0 的概率为 p ($0 < p < 1$); 而输入为 1 输出为 1 的概率也是 p . 今在图中 a 端输入字符 1, 求系统 L 的 b 端输出字符 0 的概率.



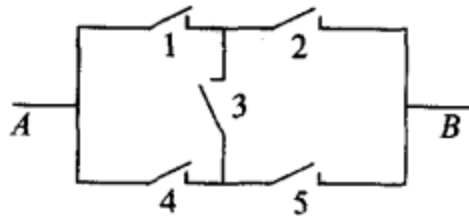
题 3 图

4. 甲乙两人轮流掷一颗骰子, 每轮掷一次, 谁先掷得 6 点谁得胜, 从甲开始掷, 问甲、乙得胜的概率各为多少?

5. 将一颗骰子掷两次, 考虑事件: A = “第一次掷得点数 2 或 5”, B = “两次点数之和至少为 7”, 求 $P(A)$, $P(B)$, 并问事件 A, B 是否相互独立.

6. A、B 两人轮流射击, 每次每人射击一枪, 射击的次序为 A, B, A, B, A, ..., 射击直至击中两枪为止. 设每人击中的概率均为 p , 且各次击中与否相互独立. 求击中的两枪是由同一人射击的概率. (提示: 分别考虑两枪是由 A 击中的与两枪是由 B 击中的两种情况, 若两枪是由 A 击中的, 则射击必然在奇数次结束. 又当 $|x| < 1$ 时, $1 + 2x + 3x^2 + \dots = 1/(1-x)^2$.)

7. 有 3 个独立工作的元件 1, 元件 2, 元件 3, 它们的可靠性分别为 p_1, p_2, p_3 . 设由它们组成一个 “3 个元件取 2 个元件的表决系统”, 记为 $2/3[G]$. 这一系统的运行方式是当且仅当 3 个元件中至少有 2 个正常工作时这一系统正常工作. 求这一 $2/3[G]$ 系统的可靠性.



题 8 图

8. 在如题 8 图所示的桥式结构的电路中, 第 i 个继电器触点闭合的概率为 p_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$. 各继电器工作相互

独立,求:

(1) 以继电器触点 1 是否闭合为条件,求 A 到 B 之间为通路的概率.

(2) 已知 A 到 B 为通路的条件下,继电器触点 3 是闭合的概率.

9. 进行非学历考试,规定考甲、乙两门课程,每门课程考试第一次未通过都只允许考第二次. 考生仅在课程甲通过后才能考课程乙,如两门课程都通过可获得一张资格证书. 设某考生通过课程甲的各次考试的概率为 p_1 , 通过课程乙的各次考试的概率为 p_2 , 设各次考试的结果相互独立. 又设考生参加考试直至获得资格证书或者不准予再考为止. 以 X 表示考生总共需考试的次数. 求 X 的分布律.

10. (1) 5 只电池,其中有 2 只是次品,每次取一只测试,直到将 2 只次品都找到. 设第 2 只次品在第 X ($X=2,3,4,5$) 次找到,求 X 的分布律(注:在实际上第 5 次检测可无需进行).

(2) 5 只电池,其中 2 只是次品,每次取一只,直到找出 2 只次品或 3 只正品为止. 写出需要测试的次数的分布律.

11. 向某一目标发射炮弹,设炮弹弹着点离目标的距离为 R (单位:10 m), R 服从瑞利分布,其概率密度为

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{2r}{25} e^{-r^2/25}, & r > 0, \\ 0, & r \leq 0. \end{cases}$$

若弹着点离目标不超过 5 个单位时,目标被摧毁.

(1) 求发射一枚炮弹能摧毁目标的概率.

(2) 为使至少有一枚炮弹能摧毁目标的概率不小于 0.94,问最少需要独立发射多少枚炮弹.

12. 设一枚深水炸弹击沉一潜水艇的概率为 $1/3$, 击伤的概率为 $1/2$, 击不中的概率为 $1/6$. 并设击伤两次也会导致潜水艇下沉. 求施放 4 枚深水炸弹能击沉潜水艇的概率.(提示:先求击不沉的概率.)

13. 一盒中装有 4 只白球,8 只黑球,从中取 3 只球,每次一只,作不放回抽样.

(1) 求第 1 次和第 3 次都取到白球的概率.(提示:考虑第二次的抽取.)

(2) 求在第 1 次取到白球的条件下,前 3 次都取到白球的概率.

14. 设元件的寿命 T (以小时计)服从指数分布,分布函数为

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-0.03t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

(1) 已知元件至少工作了 30 小时,求它能再至少工作 20 小时的概率.

(2) 由 3 个独立工作的此种元件组成一个 $2/3[G]$ 系统(参见第 7 题). 求这一系统的寿命 $X > 20$ 的概率.

15. (1) 已知随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$, $-\infty < x < \infty$, 求 X 的分布函数.

(2) 已知随机变量 X 的分布函数为 $F_X(x)$, 另有随机变量

$$Y = \begin{cases} 1, & X > 0, \\ -1, & X \leq 0, \end{cases}$$

试求 Y 的分布律和分布函数.

16. (1) 设随机变量 X 服从泊松分布, 其分布律为

$$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k=0, 1, 2, \dots,$$

问当 k 取何值时 $P\{X=k\}$ 为最大.

(2) 设随机变量 X 服从二项分布, 其分布律为

$$P\{X=k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0, 1, 2, \dots, n.$$

问当 k 取何值时 $P\{X=k\}$ 为最大.

17. 若离散型随机变量 X 具有分布律

X	1	2	...	n
p_k	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

称 X 服从取值为 $1, 2, \dots, n$ 的离散型均匀分布. 对于任意非负实数 x , 记 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数. 设 $U \sim U(0, 1)$, 证明 $X = [nU] + 1$ 服从取值为 $1, 2, \dots, n$ 的离散型均匀分布.

18. 设随机变量 $X \sim U(-1, 2)$, 求 $Y = |X|$ 的概率密度.

19. 设随机变量 X 的概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2x^2}, & 1 \leq x < \infty. \end{cases}$$

求 $Y = \frac{1}{X}$ 的概率密度.

20. 设随机变量 X 服从以均值为 $1/\lambda$ 的指数分布. 验证随机变量 $Y = [X]$ 服从以参数为 $1 - e^{-\lambda}$ 的几何分布. 这一事实表明连续型随机变量的函数可以是离散型随机变量.

21. 投掷一枚硬币直至正面出现为止, 引入随机变量

$X =$ 投掷总次数.

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{若首次投掷得到正面,} \\ 0, & \text{若首次投掷得到反面.} \end{cases}$$

(1) 求 X 和 Y 的联合分布律及边缘分布律.

(2) 求条件概率 $P\{X=1 | Y=1\}, P\{Y=2 | X=1\}$.

22. 设随机变量 $X \sim \pi(\lambda)$, 随机变量 $Y = \max\{X, 2\}$. 试求 X 和 Y 的联合分布律及边缘分布律.

23. 设 X, Y 是相互独立的泊松随机变量, 参数分别为 λ_1, λ_2 , 求给定 $X+Y=n$ 的条件下

X 的条件分布.

24. 一教授将两篇论文分别交给两个打字员打印. 以 X, Y 分别表示第一篇和第二篇论文的印刷错误. 设 $X \sim \pi(\lambda), Y \sim \pi(\mu), X, Y$ 相互独立.

(1) 求 X, Y 的联合分布律.

(2) 求两篇论文总共至多 1 个错误的概率.

25. 一等边三角形 $\triangle ROT$ (如题 25 图) 的边长为 1, 在三角形内随机地取点 $Q(X, Y)$ (意指随机点 (X, Y) 在三角形 ROT 内均匀分布).

(1) 写出随机变量 (X, Y) 的概率密度.

(2) 求点 Q 到底边 OT 的距离的分布函数.

26. 设随机变量 (X, Y) 具有概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$.

(2) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y), f_{Y|X}(y|x)$.

27. 设有随机变量 U 和 V , 它们都仅取 1, -1 两个值. 已知

$$P\{U = 1\} = 1/2,$$

$$P\{V = 1|U = 1\} = 1/3 = P\{V = -1|U = -1\}.$$

(1) 求 U 和 V 的联合分布律.

(2) 求 x 的方程 $x^2 + Ux + V = 0$ 至少有一个实根的概率.

(3) 求 x 的方程 $x^2 + (U+V)x + U+V = 0$ 至少有一个实根的概率.

28. 某图书馆一天的读者人数 $X \sim \pi(\lambda)$, 任一读者借书的概率为 p , 各读者借书与否相互独立. 记一天读者借书的人数为 Y , 求 X 和 Y 的联合分布律.

29. 设随机变量 X, Y 相互独立, 且都服从均匀分布 $U(0, 1)$, 求两变量之一至少为另一变量之值之两倍的概率.

30. 一家公司有一份保单招标, 两家保险公司竞标. 规定标书的保险费必须在 20 万元至 22 万元之间. 若两份标书保险费相差 2 千或 2 千以上, 招标公司将选择报价低者, 否则就重新招标. 设两家保险公司的报价是相互独立的, 且都在 20 万至 22 万之间均匀分布. 试求招标公司需重新招标的概率.

31. 设随机变量 $X \sim N(0, \sigma_1^2), Y \sim N(0, \sigma_2^2)$, 且 X, Y 相互独立, 求概率

$$P\{0 < \sigma_2 X - \sigma_1 Y < 2\sigma_1 \sigma_2\}.$$

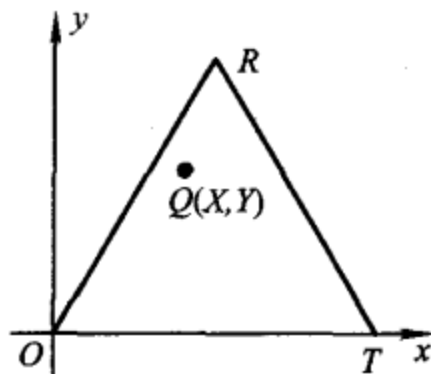
32. NBA 篮球赛中有这样的规律, 两支实力相当的球队比赛时, 每节主队得分与客队得分之差为正态随机变量, 均值为 1.5, 方差为 6, 并且假设四节的比分差是相互独立的. 问:

(1) 主队胜的概率有多大?

(2) 在前半场主队落后 5 分的情况下, 主队得胜的概率有多大?

(3) 在第一节主队赢 5 分的情况下, 主队得胜的概率有多大.

33. 产品的某种性能指标的测量值 X 是随机变量, 设 X 的概率密度为



题 25 图

$$f_X(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{2}x^2}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

测量误差 $Y \sim U(-\epsilon, \epsilon)$, X, Y 相互独立. 求 $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$, 并验证

$$P\{Z > \epsilon\} = \frac{1}{2\epsilon} \int_0^{2\epsilon} e^{-u^2/2} du.$$

34. 在一化学过程中, 产品中有份额 X 为杂质, 而在杂质中有份额 Y 是有害的, 而其余部分不影响产品的质量. 设 $X \sim U(0, 0.1)$, $Y \sim U(0, 0.5)$, 且 X 和 Y 相互独立. 求产品中有害杂质份额 Z 的概率密度.

35. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

- (1) 求 (X, Y) 的边缘概率密度.
- (2) 问 X, Y 是否相互独立.
- (3) 求 $X + Y$ 的概率密度 $f_{X+Y}(z)$.
- (4) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.
- (5) 求条件概率 $P\{X > 3 | Y < 5\}$.
- (6) 求条件概率 $P\{X > 3 | Y = 5\}$.

36. 设某图书馆的读者借阅甲种图书的概率为 p , 借阅乙种图书的概率为 α , 设每人借阅甲、乙图书的行动相互独立, 读者之间的行动也相互独立.

- (1) 某天恰有 n 个读者, 求借阅甲种图书的人数的数学期望.
- (2) 某天恰有 n 个读者, 求甲、乙两种图书中至少借阅一种的人数的数学期望.

37. 某种鸟在某时间区间 $(0, t_0]$ 下蛋数为 $1 \sim 5$ 只, 下 r 只蛋的概率与 r 成正比. 一个收拾鸟蛋的人在时刻 t_0 去收集鸟蛋, 但他仅当鸟窝中多于 3 只蛋时才从中取走一只蛋. 在某处有这种鸟的鸟窝 6 个 (每个鸟窝保存完好, 各鸟窝中蛋的只数相互独立).

- (1) 写出一个鸟窝中鸟蛋只数 X 的分布律.
- (2) 对于指定的一个鸟窝, 求拾蛋人在该鸟窝中拾到一只蛋的概率.
- (3) 求拾蛋人在 6 个鸟窝中拾到蛋的总数 Y 的分布律及数学期望.
- (4) 求 $P\{Y < 4\}$, $P\{Y > 4\}$.
- (5) 当一个拾蛋人在这 6 个鸟窝中拾过蛋后, 紧接着又有一个拾蛋人到这些鸟窝中拾蛋, 也仅当鸟窝中多于 3 只蛋时, 拾取一只蛋, 求第二个拾蛋人拾得蛋数 Z 的数学期望.

38. 设袋中有 r 只白球, $N - r$ 只黑球. 在袋中取球 n ($n \leq r$) 次, 每次任取一只作不放回抽样, 以 Y 表示取到白球的个数, 求 $E(Y)$. (提示: 引入随机变量:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{若第 } i \text{ 次取到白球,} \\ 0, & \text{若第 } i \text{ 次取到黑球,} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

则 $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.)

39. 抛一颗骰子直到所有点数全部出现为止, 求所需投掷次数 Y 的数学期望. (提示: 令 $X_1 = 1$, $X_2 =$ 第一点得到后, 等待第二个不同点所需的等待次数, $X_3 =$ 第一二两点得到后, 等待第三个不同点所需的等待次数, X_4, X_5, X_6 类似, 则 $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_6$. 又几何分布

$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p, k=1,2,\dots$ 的数学期望 $E(X)=\frac{1}{p}$.)

40. 设随机变量 X, Y 相互独立. 且 X, Y 分别服从以 $1/\alpha, 1/\beta$ 为均值的指数分布. 求 $E(X^2 + Ye^{-X})$.

41. 一酒吧间柜台前有 6 张凳子, 服务员预测, 若两个陌生人进来就座的话, 他们之间至少相隔两张凳子. (提示: 先列出两人之间至少隔两张凳子的不同情况.)

(1) 若真有两个陌生人入内, 他们随机地就座, 问服务员预言为真的概率是多少?

(2) 设两位顾客是随机就座的, 求顾客之间凳子数的数学期望.

42. 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ 相互独立, 且都服从 $U(0, 1)$, 又设 $Y = X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_{100}$, 求概率 $P\{Y < 10^{-40}\}$ 的近似值.

43. 来自某个城市的长途电话呼唤的持续时间 X (以分计) 是一个随机变量, 它的分布函数是

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{2}e^{-[\frac{x}{3}]}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

(其中 $[\frac{x}{3}]$ 是不大于 $\frac{x}{3}$ 的最大整数).

(1) 画出 $F(x)$ 的图形.

(2) 说明 X 是什么类型的随机变量.

(3) 求 $P\{X=4\}, P\{X=3\}, P\{X<4\}, P\{X>6\}$. (提示: $P\{X=a\}=F(a)-F(a-0)$.)

44. 一汽车保险公司分析一组 (250 人) 签约的客户中的赔付情况. 据历史数据分析, 在未来的一周中一组客户中至少提出一项索赔的客户数 X 占 10%. 写出 X 的分布, 并求 $X > 250 \times 0.12$ (即 $X > 30$) 的概率. 设各客户是否提出索赔相互独立.

45. 在区间 $(0, 1)$ 随机地取一点 X . 定义 $Y = \min\{X, 0.75\}$.

(1) 求随机变量 Y 的值域.

(2) 求 Y 的分布函数, 并画出它的图形.

(3) 说明 Y 不是连续型的随机变量, Y 也不是离散型的随机变量.

数理统计部分

46. 设 X_1, X_2 是数学期望为 θ 的指数分布总体 X 的容量为 2 的样本, 设 $Y = \sqrt{X_1 X_2}$, 试证明 $E\left(\frac{4Y}{\pi}\right) = \theta$.

47. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是一个样本. $\bar{X}, S^2$ 分别为样本均值和样本方差, 试证 $E[(\bar{X}S^2)^2] = \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right)\left(\frac{2\sigma^4}{n-1} + \sigma^4\right)$. (提示: 注意到 $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立, 且有 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.)

48. 设总体 X 具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^2} x e^{-x/\theta}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自 X 的样本, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是相应的样本观察值.

- (1) 求 θ 的最大似然估计量.
- (2) 求 θ 的矩估计量.
- (3) 问求得的估计量是否是无偏估计量.

49. 设 $X_1, X_2, \dots, X_{n_1}$ 以及 $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ 为分别来自总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 与 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 的样本, 且它们相互独立. μ_1, μ_2, σ^2 均未知, 试求 μ_1, μ_2, σ^2 的最大似然估计量.

50. 为了研究一批贮存着的产品的可靠性, 在产品投入贮存时, 即在时刻 $t_0 = 0$ 时, 随机地选定 n 件产品, 然后在预先规定的时刻 $t_1, t_2, \dots, t_k$ 取出来进行检测 (检测时确定已失效的去掉, 将未失效的继续投入贮存), 今得到以下的寿命试验数据:

检测时刻(月)	t_1	t_2	$\dots$	t_k
区间 $(t_{i-1}, t_i]$	$(0, t_1]$	$(t_1, t_2]$	$\dots$	$(t_{k-1}, t_k]$ (t_k, ∞)
在 $(t_{i-1}, t_i]$ 的失效数	d_1	d_2	$\dots$	d_k s $\sum_{i=1}^k d_i + s = n$

这种数据称为区间数据. 设产品寿命 T 服从指数分布, 其概率密度为

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad \lambda > 0 \text{ 未知.}$$

(1) 试基于上述数据写出 λ 的对数似然方程. (提示: 考虑事件“ n 只产品分别在区间 $(0, t_1], (t_1, t_2], \dots, (t_{k-1}, t_k]$ 失效 $d_1, d_2, \dots, d_k$ 只, 而直至 t_k 还有 s 只未失效”的概率.)

(2) 设 $d_1 < n, s < n$, 我们可以用数值解法求得 λ 的最大似然估计值, 在计算机上计算是容易的. 特别, 取检测时间是等间隔的, 即取 $t_i = i t_1, i = 1, 2, \dots, k$. 验证, 此时可得 λ 的最大似然估计为

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{t_1} \ln \left[1 + \frac{n-s}{\sum_{i=2}^k (i-1) d_i + s k} \right]$$

51. 设某种电子器件的寿命 (以小时计) T 服从指数分布, 概率密度为

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 $\lambda > 0$ 未知. 从这批器件中任取 n 只在时刻 $t = 0$ 时投入独立寿命试验. 试验进行到预定时间 T_0 结束. 此时, 有 k ($0 < k < n$) 只器件失效, 试求 λ 的最大似然估计. (提示: 考虑“试验直至时刻 T_0 为止, 有 k 只器件失效, 而有 $n-k$ 只未失效”这一事件的概率, 从而写出 λ 的似然方程.)

52. 设系统由两个独立工作的成败型元件串联而成 (成败型元件只有两种状态: 正常工作或失效). 元件 1、元件 2 的可靠性分别为 p_1, p_2 , 它们均未知. 随机地取 N 个系统投入试验,

当系统中至少有一个元件失效时系统失效,现得到以下的试验数据: n_1 —仅元件 1 失效的系统数; n_2 —仅元件 2 失效的系统数; n_{12} —元件 1, 元件 2 至少有一个失效的系统数; s —未失效的系统数. $n_1 + n_2 + n_{12} + s = N$. 这里 n_{12} 为隐蔽数据,也就是只知系统失效,但不能知道是由元件 1 还是元件 2 单独失效引起的,还是由元件 1, 2 均失效引起的,设隐蔽与系统失效的真正原因独立.

(1) 试写出 p_1, p_2 的似然函数.

(2) 设有系统寿命试验数据 $N=20, n_1=5, n_2=3, n_{12}=1, s=11$. 试求 p_1, p_2 的最大似然估计.(提示: p_1 应满足方程 $(p_1-1)(12p_1^2+11p_1-14)=0$.)

53. (1) 设总体 X 具有分布律

X	1	2	3
p_k	θ	θ	$1-2\theta$

$\theta > 0$ 未知, 今有样本

1 1 1 3 2 1 3 2 2 1 2 2 3 1 1 2

试求 θ 的最大似然估计值和矩估计值.

(2) 设总体 X 服从 Γ 分布, 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其形状参数 $\alpha > 0$ 为已知, 尺度参数 $\beta > 0$ 未知. 今有样本值 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 求 β 的最大似然估计值.

54. (1) 设 $Z = \ln X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 即 X 服从对数正态分布, 验证 $E(X) = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)$.

(2) 设自(1)中总体 X 中取一容量为 n 的样本 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 求 $E(X)$ 的最大似然估计. 此处设 μ, σ^2 均为未知.

(3) 已知在文学家萧伯纳的《An Intelligent Woman's Guide To Socialism》一书中, 一个句子的单词数近似地服从对数正态分布, 设 μ 及 σ^2 为未知. 今自该书中随机地取 20 个句子. 这些句子中的单词数分别为

52 24 15 67 15 22 63 26 16 32
7 33 28 14 7 29 10 6 59 30

问这本书中, 一个句子单词数均值的最大似然估计值等于多少?

55. 考虑进行定数截尾寿命试验, 假设将随机抽取的 n 件产品在时间 $t=0$ 时同时投入试验. 试验进行到 m 件 ($m < n$) 产品失效时停止, m 件失效产品的失效时间分别为

$$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_m.$$

t_m 是第 m 件产品的失效时间. 设产品的寿命分布为韦布尔分布, 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\eta^\beta} x^{\beta-1} e^{-(\frac{x}{\eta})^\beta}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其中参数 β 已知. 求参数 η 的最大似然估计.

56. 设某大城市郊区的一条林荫道两旁开设了许多小商店, 这些商店的开设延续时间(以月计)是一个随机变量, 现随机地取 30 家商店, 将它们的延续时间按从小到大排序, 选其中前 8 家商店, 它们的延续时间分别是

3.2 3.9 5.9 6.5 16.5 20.3 40.4 50.9

假设商店开设延续时间的长度是韦布尔随机变量. 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\eta^\beta} x^{\beta-1} e^{-(\frac{x}{\eta})^\beta}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中, $\beta=0.8$.

(1) 试用上题结果, 写出 η 的最大似然估计.

(2) 按(1)的结果求商店开设延续时间至少为 2 年的概率的估计.

57. 设分别自总体 $N(\mu_1, \sigma^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma^2)$ 中抽取容量 n_1, n_2 的两独立样本, 其样本方差分别为 S_1^2, S_2^2 . 试证, 对于任意常数 a, b ($a+b=1$), $Z=aS_1^2+bS_2^2$ 都是 σ^2 的无偏估计, 并确定常数 a, b , 使 $D(Z)$ 达到最小.

58. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自 X 的样本. 已知样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 是 σ^2 的无偏估计. 验证样本标准差 S 不是标准差 σ 的无偏估计. (提示: 记 $Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$, 则 $Y \sim \chi^2(n-1)$, 而 $S = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \sqrt{Y}$ 是 Y 的函数, 利用 $\chi^2(n-1)$ 的概率密度

可得 $E(S) = \frac{1}{(\sqrt{2})^n} \sqrt{\frac{2}{n-1}} \frac{\Gamma(n/2)\sigma}{\Gamma(n-1)/2} \neq \sigma$.)

59. 设总体 X 服从指数分布, 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$\theta > 0$ 未知. 从总体中抽取一容量为 n 的样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$.

(1) 证明 $\frac{2n\bar{X}}{\theta} \sim \chi^2(2n)$.

(2) 求 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限.

(3) 某种元件的寿命(以 h 计)服从上述指数分布, 现从中抽得一容量 $n=16$ 的样本, 测得样本均值为 5010 h, 试求元件的平均寿命的置信水平为 0.90 的单侧置信下限.

60. 设总体 $X \sim U(0, \theta)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自 X 的样本.

(1) 验证 $Y = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 的分布函数为

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ y^n/\theta^n, & 0 \leq y < \theta, \\ 1, & y \geq \theta. \end{cases}$$

(2) 验证 $U = Y/\theta$ 的概率密度为

$$f_U(u) = \begin{cases} nu^{n-1}, & 0 \leq u \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(3) 给定正数 $\alpha, 0 < \alpha < 1$, 求 U 的分布的上 $\alpha/2$ 分位点 $h_{\alpha/2}$ 以及上 $1-\alpha/2$ 分位点 $h_{1-\alpha/2}$.

(4) 利用(2), (3)求参数 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间.

(5) 设某人上班的等车时间 $X \sim U(0, \theta)$, θ 未知. 现在有样本 $x_1 = 4.2, x_2 = 3.5, x_3 = 1.7, x_4 = 1.2, x_5 = 2.4$, 求 θ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

61. 设总体 X 服从指数分布, 概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad \theta > 0.$$

设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自 X 的一个样本. 试取第 59 题中当 $\theta = \theta_0$ 时的统计量 $\chi^2 = \frac{2n\bar{X}}{\theta_0}$ 作为检

验统计量, 检验假设 $H_0: \theta = \theta_0, H_1: \theta \neq \theta_0$. 取显著性水平为 α (注意: $E(\bar{X}) = \theta$).

设某种电子元件的寿命(以小时计)服从均值为 θ 的指数分布, 随机取 12 只元件测得它们的寿命分别为

340 430 560 920 1380 1520 1660 1770 2100 2320 2350 2650

试取显著性水平 $\alpha = 0.05$, 检验假设 $H_0: \theta = 1450, H_1: \theta \neq 1450$.

62. 经过十一年的试验, 达尔文于 1876 年得到 15 对玉米样品的数据如下表, 每对作物除授粉方式不同外, 其他条件都是相同的. 试用逐对比较法检验不同授粉方式对玉米高度是否有显著的影响 ($\alpha = 0.05$). 问应增设什么条件才能用逐对比较法进行检验?

授粉方式	1	2	3	4	5	6	7
异株授粉的作物高度(x_i)	$23 \frac{1}{8}$	12	$20 \frac{3}{8}$	22	$19 \frac{1}{8}$	$21 \frac{4}{8}$	$22 \frac{1}{8}$
同株授粉的作物高度(y_i)	$27 \frac{3}{8}$	21	20	20	$19 \frac{3}{8}$	$18 \frac{5}{8}$	$18 \frac{5}{8}$

授粉方式	8	9	10	11	12	13	14	15
异株授粉的作物高度(x_i)	$20 \frac{3}{8}$	$18 \frac{2}{8}$	$21 \frac{5}{8}$	$23 \frac{2}{8}$	21	$22 \frac{1}{8}$	23	12
同株授粉的作物高度(y_i)	$15 \frac{2}{8}$	$16 \frac{4}{8}$	18	$16 \frac{2}{8}$	18	$12 \frac{6}{8}$	$15 \frac{4}{8}$	18

63. 一内科医生声称, 如果病人每天傍晚聆听一种特殊的轻音乐会降低血压(舒张压, 以 mmHg 计). 今选取了 10 个病人在试验之前和试验之后分别测量了血压, 得到以下的数据:

病人	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
试验之前(x_i)	86	92	95	84	80	78	98	95	94	96
试验之后(y_i)	84	83	81	78	82	74	86	85	80	82

设 $D_i = X_i - Y_i (i=1, 2, \dots, 10)$ 为来自正态总体 $N(\mu_D, \sigma_D^2)$ 的样本, μ_D, σ_D^2 均未知. 试检验是否可以认为医生的意见是对的(取 $\alpha=0.05$).

64. 以下是各种颜色的汽车的销售情况:

颜色	红	黄	蓝	绿	棕
车辆数	40	64	46	36	14

试检验顾客对这些颜色是否有偏爱, 即检验销售情况是否是均匀的(取 $\alpha=0.05$).

65. 某种闪光灯, 每盏灯含 4 个电池, 随机地取 150 盏灯, 经检测得到以下的数据:

一盏灯损坏的电池数 x	0	1	2	3	4
灯的盏数	26	51	47	16	10

试取 $\alpha=0.05$ 检验一盏灯损坏的电池数 $X \sim b(4, \theta)$ (θ 未知).

66. 下面分别给出了某城市在春季(9 周)和秋季(10 周)发生的案件数.

春季	51	42	57	53	43	37	45	49	46	
秋季	40	35	30	44	33	50	41	39	36	38

试取 $\alpha=0.03$ 用秩和检验法检验春季发生的案件数的均值是否较秋季的为多.

67. 临界闪烁频率(cff)是人眼对于闪烁光源能够分辨出它在闪烁的最高频率(以 Hz 计). 超过 cff 的频率, 即使光源实际是在闪烁的, 而人看起来是连续的(不闪烁的). 一项研究旨在判定 cff 的均值是否与人眼的虹膜颜色有关, 所得数据如下:

临界闪烁频率(cff)					
虹膜颜色	棕色		绿色		蓝色
	26.8	26.3	26.4	29.1	25.7 29.4
	27.9	24.8	24.2		27.2 28.3
	23.7	25.7	28.0		29.9
	25.0	24.5	26.9		28.5

试在显著性水平 0.05 下, 检验各种虹膜颜色相应的 c_{ff} 的均值有无显著的差异. 设各个总体服从正态分布, 且方差相等, 不同颜色下的样本之间相互独立.

68. 下面列出了挪威人自 1938—1947 年间年人均脂肪消耗量与患动脉粥样硬化症而死亡的死亡率之间相关的一组数据.

年份	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946	1947
脂肪消耗量 x (千克/人年)	14.4	16.0	11.6	11.0	10.0	9.6	9.2	10.4	11.4	12.5
死亡率 y ($1/(10^5 \text{ 人年})$)	29.1	29.7	29.2	26.0	24.0	23.1	23.0	23.1	25.2	26.1

设对于给定的 x , Y 为正态变量, 且方差与 x 无关.

- (1) 求回归直线方程 $y=a+bx$.
- (2) 在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验假设 $H_0: b=0, H_1: b \neq 0$.
- (3) 求 $\hat{y}|_{x=13}$.
- (4) 求 $x=13$ 处 $\mu(x)$ 置信水平为 0.95 的置信区间.
- (5) 求 $x=13$ 处 Y 的新观察值 Y_0 的置信水平为 0.95 的预测区间.

69. 下面给出 1924—1992 年奥林匹克运动会女子 100 米仰泳的最佳成绩 (以 s 计), (其中 1940 年及 1944 年未举行奥运会)

年份	1924	1928	1932	1936	1948	1952	1956	1960
成绩	83.2	82.2	79.4	78.9	74.4	74.3	72.9	69.3
年份	1964	1968	1972	1976	1980	1984	1988	1992
成绩	67.7	66.2	65.8	61.8	60.9	62.6	60.9	60.7

- (1) 画出散点图.
- (2) 求成绩关于年份的线性回归方程.
- (3) 检验回归效果是否显著 (取 $\alpha=0.05$).

随机过程部分

70. 设在时间区间 $(0, t]$ 内来到某商店的顾客数 $N(t)$ 是强度为 λ 的泊松过程. 每个来到商店的顾客购买某些货物的概率是 p , 不买货物就离去的概率是 $1-p$, 且各个顾客是否购买货物是相互独立的. 令 $Y(t)$ 为 $(0, t]$ 内购买货物的顾客数. 试证 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 是强度为 λp 的泊松过程.

71. 设随机过程

$$X(t) = a \cos(\Omega t + \Theta), \quad -\infty < t < +\infty,$$

其中 a 是常数, 随机变量 $\Theta \sim U(0, 2\pi)$, 随机变量 Ω 具有概率密度 $f(x)$, 设 $f(x)$ 连续且为偶函数, Θ 与 Ω 相互独立. 试证 $X(t)$ 是平稳过程, 且其谱密度为 $S_X(\omega) = a^2 \pi f(\omega)$. (提示: 要运用 δ 函数的筛选性.)

新解題

参读材料 随机变量样本值的产生

(一) 随机数和伪随机数

在概率统计的应用中,常需要模拟各种分布的随机变量,即需要产生各种分布随机变量的简单随机样本的样本值.某一分布随机变量的样本值,就称为这一分布的随机数.例如指数分布随机变量的样本值就称为指数分布随机数.特别,区间 $(0,1)$ 上均匀分布的随机变量的样本值称为均匀分布随机数,简称随机数.我们先来考虑如何产生均匀分布随机数,其他分布随机数,一般可以由均匀分布随机数通过变换得到.

产生均匀分布随机数的方法很多—目前使用最广泛的方法是在计算机上利用数学的递推公式来产生.这种按确定性算法得到的序列,不可能是真正来自区间 $(0,1)$ 上均匀分布的独立同分布样本值序列,我们称它为伪随机数.

在大多数计算机中都装有产生伪随机数序列的算法程序,我们都是假设由这些程序产生的伪随机数序列能通过独立性和均匀分布检验,可作为随机数序列来使用,需要时用特定的命令加以调用就是.

(二) 产生离散型随机变量样本值的方法

设离散型随机变量 X 具有分布律

$$P\{X = x_i\} = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1. \quad (*_1)$$

现在来产生 X 的随机数.

先产生伪随机数 u , 令

$$X = \begin{cases} x_1, & u < p_1, \\ x_2, & p_1 \leq u < p_1 + p_2, \\ \vdots & \vdots \\ x_i, & \sum_{j=1}^{i-1} p_j \leq u < \sum_{j=1}^i p_j, \\ \vdots & \vdots \end{cases} \quad (*_2)$$

由于

$$\begin{aligned} P\{X = x_i\} &= P\left\{\sum_{j=1}^{i-1} p_j \leq U < \sum_{j=1}^i p_j\right\} \\ &= \sum_{j=1}^i p_j - \sum_{j=1}^{i-1} p_j = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

所以 X 具有给定的分布律.

产生随机变量 X 的样本值也叫做对随机变量 X 进行模拟或抽样,上述模拟离散型随机变量的方法的算法为:

产生伪随机数 u .

若 $u < p_1$, 令 $X = x_1$, 停止.

若 $u < p_1 + p_2$, 令 $X = x_2$, 停止.

若 $u < p_1 + p_2 + p_3$, 令 $X = x_3$, 停止.

...

例 1 设随机变量 X 具有分布律

$X=i$	1	2	3	4
p_i	0.20	0.15	0.25	0.40

试产生 X 的样本值.

解 取算法为: 产生伪随机数 u .

若 $u < 0.20$, 令 $X=1$, 停止.

若 $u < 0.35$, 令 $X=2$, 停止.

若 $u < 0.60$, 令 $X=3$, 停止.

否则, 令 $X=4$. □

例 2 设随机变量 X 具有分布律

$$P\{X=i\} = \frac{1}{n}, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (*_3)$$

试产生 X 的样本值 (X 称为取值为 $1, 2, \dots, n$ 的离散型均匀分布随机变量).

解 在 $(*_1)$ 式中, 令 $x_i = i, i=1, 2, \dots, n; p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$, 就得到 $(*_3)$ 式. 再由 $(*_2)$ 式的最后一个式子, 得

$$\text{若 } \frac{i-1}{n} \leq u < \frac{i}{n}, \text{ 则令 } X=i,$$

即若 $i-1 \leq nu < i$, 则令 $X=i=[nu]+1, i=1, 2, \dots, n$.

因此, 若 u 是伪随机数, 那么 $X=[nu]+1$ 就是分布 $(*_3)$ 的样本值. □

例 3 试产生以 n, p 为参数的二项分布 $b(n, p)$ 的样本值.

解 设 $U_1, U_2, \dots, U_n$ 相互独立. 且它们都在区间 $(0, 1)$ 上服从均匀分布. 令

$$X_i = \begin{cases} 1, & U_i < p, \\ 0, & U_i \geq p, \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, n,$$

则有 $P\{X_i=1\} = P\{U_i < p\} = p, P\{X_i=0\} = 1-p$, 故 $X_i \sim b(1, p)$. 又因 $U_1, U_2, \dots, U_n$ 相互独立. 故有 $X = \sum_{i=1}^n X_i \sim b(n, p)$. 据此, 只要产生 n 个伪随机数 $u_1, u_2, \dots, u_n$, 统计其中使得 $u_i < p (i=1, 2, \dots, n)$ 的个数为 k , 则得 X 的样本值为 k .

(三) 产生连续型随机变量样本值的方法

先证明一个定理.

定理 设随机变量 $U \sim U(0, 1)$, $F(x)$ 是某一随机变量的分布函数, 且 $F(x)$ 为严格单调增加且连续的函数, 则随机变量 $F^{-1}(U)$ 具有分布函数 $F(x)$, 其中 $F^{-1}(x)$ 是 $F(x)$ 的反函数.

证 由于 $F(x)$ 严格单调增加且连续, 因此其反函数 $F^{-1}(x)$ 存在 (即有 $F[F^{-1}(x)] = x$), 且严格单调增加连续, 即得随机变量 $F^{-1}(U)$ 的分布函数为

$$\begin{aligned} P\{F^{-1}(U) \leq x\} &= P\{F[F^{-1}(U)] \leq F(x)\} \\ &= P\{U \leq F(x)\} = F(x). \end{aligned}$$
□

由定理,若要产生以 $F(x)$ ($F(x)$ 严格单调增加且连续) 为分布函数的随机变量 X , 只需产生 $U \sim U(0,1)$, 令 $X = F^{-1}(U)$ 就行了. 又若要产生 X 的样本值 x , 只需产生 U 的样本值 u , 令 $x = F^{-1}(u)$ 即得. 这一产生 X 的样本值的方法, 称为逆变换法. 这种方法在随机变量具有严格单调增加且连续的分布函数 $F(x)$ 且 $F^{-1}(x)$ 能够用显式表示时, 都能使用.

要说明在上述定理中对 $F(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上的严格单调连续的要求可放宽为 $F(x)$ 在某一区间 (有限或无限) 上取值从 0 到 1, 且在此区间上严格单调增加且连续即可.

例 4 设随机变量 X 具有指数分布, 其分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/\theta}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad \theta > 0,$$

试产生随机变量 X .

解 设 $U \sim U(0,1)$, 令 $U = 1 - e^{-X/\theta}$, 解得

$$X = -\theta \ln(1-U).$$

因为当 $U \sim U(0,1)$ 时, 也有 $1-U \sim U(0,1)$, 从而

$$X = -\theta \ln U$$

就是所要产生的指数分布的随机变量. 若有伪随机数 u , 就有 X 的随机数 $-\theta \ln u$.

例 5 设随机变量 X 具有韦布尔 (Weibull) 分布, 其分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(x/\eta)^\beta}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad \beta > 0, \eta > 0.$$

试产生随机变量 X .

解 设 $U \sim U(0,1)$, 令 $U = 1 - e^{-(X/\eta)^\beta}$ 解得

$$X = \eta [-\ln(1-U)]^{1/\beta}.$$

因为 $1-U \sim U(0,1)$, 故

$$X = \eta [-\ln U]^{1/\beta}.$$

就是所要产生的韦布尔分布随机变量.

例 6 正态随机变量的产生

标准正态变量的分布函数 $\Phi(x)$ 的反函数不存在显式, 故不能用逆变换法产生标准正态变量. 下面介绍一种近似方法.

设 $U_i \sim U(0,1), i=1,2,\dots,n$, 且它们相互独立, 由于 $E(U_i) = 1/2, D(U_i) = 1/12$, 由中心极限定理, 当 n 较大时近似地有

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^n U_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{n} \sqrt{\frac{1}{12}}} \sim N(0,1),$$

取 $n=12$, 知近似地有

$$Z = \sum_{i=1}^{12} U_i - 6 \sim N(0,1),$$

这就是说, 只需产生 12 个伪随机数 $u_1, u_2, \dots, u_{12}$, 将它们加起来, 再减去 6, 就能近似地得到标准正态变量的样本值了. 这样做是很方便的.

又若 $X \sim N(\mu, \sigma^2), Z \sim N(0,1)$, 利用关系式

$$X = \mu + \sigma Z$$

就能得到一般的正态随机变量 X 的样本值. □

附表

附表 1 几种常用的概率分布表

分布	参数	分布律或概率密度	数学期望	方差
(0-1)分布	$0 < p < 1$	$P\{X=k\} = p^k(1-p)^{1-k}, k=0, 1$	p	$p(1-p)$
二项分布	$n \geq 1$ $0 < p < 1$	$P\{X=k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $k=0, 1, \dots, n$	np	$np(1-p)$
负二项分布 (巴斯卡分布)	$r \geq 1$ $0 < p < 1$	$P\{X=k\} = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$ $k=r, r+1, \dots$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$
几何分布	$0 < p < 1$	$P\{X=k\} = (1-p)^{k-1} p$ $k=1, 2, \dots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
超几何分布	N, M, n $(M \leq N)$ $(n \leq N)$	$P\{X=k\} = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ k 为整数, $\max\{0, n-N+M\} \leq k \leq \min\{n, M\}$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
泊松分布	$\lambda > 0$	$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $k=0, 1, 2, \dots$	λ	λ
均匀分布	$a < b$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$

续表

分布	参数	分布律或概率密度	数学期望	方差
正态分布	μ $\sigma > 0$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
Γ 分布	$\alpha > 0$ $\beta > 0$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$
指数分布 (负指数分布)	$\theta > 0$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$	θ	θ^2
χ^2 分布	$n \geq 1$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$	n	$2n$
韦布尔分布	$\eta > 0$ $\beta > 0$	$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$	$\eta \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)$	$\eta^2 \left\{ \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \right]^2 \right\}$
瑞利分布	$\sigma > 0$	$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/(2\sigma^2)}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma$	$\frac{4-\pi}{2} \sigma^2$

续表

分布	参数	分布律或概率密度	数学期望	方差
β 分布	$\alpha > 0$ $\beta > 0$	$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$
对数 正态分布	μ $\sigma > 0$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$	$e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$	$e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$
柯西分布	a $\lambda > 0$	$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\lambda^2 + (x-a)^2}$	不存在	不存在
t 分布	$n \geq 1$	$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi} \Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}}$	$0, n > 1$	$\frac{n}{n-2}, n > 2$
F 分布	n_1, n_2	$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma[(n_1+n_2)/2]}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{n_1/2} \left(\frac{n_1}{n_2}x\right)^{n_1/2-1} \\ \times \left(1 + \frac{n_1}{n_2}x\right)^{-(n_1+n_2)/2}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$	$\frac{n_2}{n_2-2}$ $n_2 > 2$	$\frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$ $n_2 > 4$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

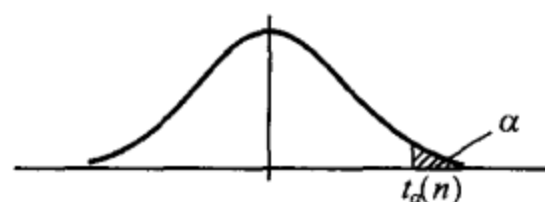
附表 3 泊松分布表

$$P(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

x	λ								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6730	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865
4		1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977
5				1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997
6							1.0000	1.0000	1.0000

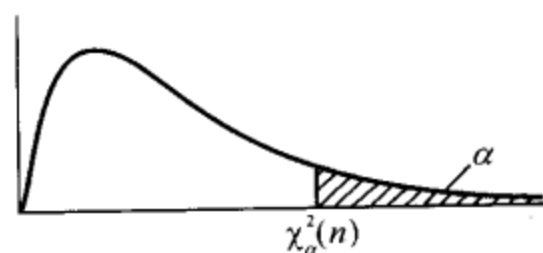
x	λ								
	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
0	0.3679	0.2231	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067
1	0.7358	0.5578	0.4060	0.2873	0.1991	0.1359	0.0916	0.0611	0.0404
2	0.9197	0.8088	0.6767	0.5438	0.4232	0.3208	0.2381	0.1736	0.1247
3	0.9810	0.9344	0.8571	0.7576	0.6472	0.5366	0.4335	0.3423	0.2650
4	0.9963	0.9814	0.9473	0.8912	0.8153	0.7254	0.6288	0.5321	0.4405
5	0.9994	0.9955	0.9834	0.9580	0.9161	0.8576	0.7851	0.7029	0.6160
6	0.9999	0.9991	0.9955	0.9858	0.9665	0.9347	0.8893	0.8311	0.7622
7	1.0000	0.9998	0.9989	0.9958	0.9881	0.9733	0.9489	0.9134	0.8666
8		1.0000	0.9998	0.9989	0.9962	0.9901	0.9786	0.9597	0.9319
9			1.0000	0.9997	0.9989	0.9967	0.9919	0.9829	0.9682
10				0.9999	0.9997	0.9990	0.9972	0.9933	0.9863
11				1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9976	0.9945
12					1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980

x	λ								
	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5
0	0.0041	0.0025	0.0015	0.0009	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001
1	0.0266	0.0174	0.0113	0.0073	0.0047	0.0030	0.0019	0.0012	0.0008
2	0.0884	0.0620	0.0430	0.0296	0.0203	0.0138	0.0093	0.0062	0.0042
3	0.2017	0.1512	0.1118	0.0818	0.0591	0.0424	0.0301	0.0212	0.0149
4	0.3575	0.2851	0.2237	0.1730	0.1321	0.0996	0.0744	0.0550	0.0403
5	0.5289	0.4457	0.3690	0.3007	0.2414	0.1912	0.1496	0.1157	0.0885
6	0.6860	0.6063	0.5265	0.4497	0.3782	0.3134	0.2562	0.2068	0.1649
7	0.8095	0.7440	0.6728	0.5987	0.5246	0.4530	0.3856	0.3239	0.2687
8	0.8944	0.8472	0.7916	0.7291	0.6620	0.5925	0.5231	0.4557	0.3918
9	0.9462	0.9161	0.8774	0.8305	0.7764	0.7166	0.6530	0.5874	0.5218
10	0.9747	0.9574	0.9332	0.9015	0.8622	0.8159	0.7634	0.7060	0.6453
11	0.9890	0.9799	0.9661	0.9466	0.9208	0.8881	0.8487	0.8030	0.7520
12	0.9955	0.9912	0.9840	0.9730	0.9573	0.9362	0.9091	0.8758	0.8364
13	0.9983	0.9964	0.9929	0.9872	0.9784	0.9658	0.9486	0.9261	0.8981
14	0.9994	0.9986	0.9970	0.9943	0.9897	0.9827	0.9726	0.9585	0.9400
15	0.9998	0.9995	0.9988	0.9976	0.9954	0.9918	0.9862	0.9780	0.9665
16	0.9999	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9963	0.9934	0.9889	0.9823
17	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9984	0.9970	0.9947	0.9911
18		1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9994	0.9987	0.9976	0.9957
19			1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9989	0.9980
20					1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9991

附表4 t 分布表

$$P\{t(n) > t_{\alpha}(n)\} = \alpha$$

$n \backslash \alpha$	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.376	1.963	3.0777	6.3138	12.7062	31.8207	63.6574
2	1.061	1.386	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	0.978	1.250	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.941	1.190	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.920	1.156	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0322
6	0.906	1.134	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.896	1.119	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	0.889	1.108	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.883	1.100	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.879	1.093	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.876	1.088	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.873	1.083	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.870	1.079	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.868	1.076	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.866	1.074	1.3406	1.7531	2.1315	2.6025	2.9467
16	0.865	1.071	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	0.863	1.069	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	0.862	1.067	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	0.861	1.066	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	0.860	1.064	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	0.859	1.063	1.3232	1.7207	2.0796	2.5177	2.8314
22	0.858	1.061	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	0.858	1.060	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	0.857	1.059	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
25	0.856	1.058	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	0.856	1.058	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	0.855	1.057	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	0.855	1.056	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	0.854	1.055	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	0.854	1.055	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
31	0.8535	1.0541	1.3095	1.6955	2.0395	2.4528	2.7440
32	0.8531	1.0536	1.3086	1.6939	2.0369	2.4487	2.7385
33	0.8527	1.0531	1.3077	1.6924	2.0345	2.4448	2.7333
34	0.8524	1.0526	1.3070	1.6909	2.0322	2.4411	2.7284
35	0.8521	1.0521	1.3062	1.6896	2.0301	2.4377	2.7238
36	0.8518	1.0516	1.3055	1.6883	2.0281	2.4345	2.7195
37	0.8515	1.0512	1.3049	1.6871	2.0262	2.4314	2.7154
38	0.8512	1.0508	1.3042	1.6860	2.0244	2.4286	2.7116
39	0.8510	1.0504	1.3036	1.6849	2.0227	2.4258	2.7079
40	0.8507	1.0501	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045
41	0.8505	1.0498	1.3025	1.6829	2.0195	2.4208	2.7012
42	0.8503	1.0494	1.3020	1.6820	2.0181	2.4185	2.6981
43	0.8501	1.0491	1.3016	1.6811	2.0167	2.4163	2.6951
44	0.8499	1.0488	1.3011	1.6802	2.0154	2.4141	2.6923
45	0.8497	1.0485	1.3006	1.6794	2.0141	2.4121	2.6896

附表 5 χ^2 分布表

$$P\{\chi^2(n) > \chi^2_\alpha(n)\} = \alpha$$

α n	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	2.706	3.843	5.025	6.637	7.882
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.992	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.344	12.837
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.832	15.085	16.748
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.440	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.012	18.474	20.276
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.534	20.090	21.954
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.022	21.665	23.587
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.724	26.755
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.041	19.812	22.362	24.735	27.687	29.817
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.600	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.577	32.799
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.407	7.564	8.682	10.085	24.769	27.587	30.190	33.408	35.716
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.843	7.632	8.906	10.117	11.651	27.203	30.143	32.852	36.190	38.580
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.033	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.670	35.478	38.930	41.399
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.042	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.195	11.688	13.090	14.848	32.007	35.172	38.075	41.637	44.179
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.519	11.523	13.120	14.611	16.473	34.381	37.652	40.646	44.313	46.925
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.807	12.878	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.194	46.962	49.642
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.120	14.256	16.147	17.708	19.768	39.087	42.557	45.772	49.586	52.333
30	13.787	14.954	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
31	14.457	15.655	17.538	19.280	21.433	41.422	44.985	48.231	52.190	55.000
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
33	15.814	17.073	19.046	20.866	23.110	43.745	47.400	50.724	54.774	57.646
34	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964
35	17.191	18.508	20.569	22.465	24.796	46.059	49.802	53.203	57.340	60.272
36	17.887	19.233	21.336	23.269	25.643	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581
37	18.584	19.960	22.105	24.075	26.492	48.363	52.192	55.667	59.891	62.880
38	19.289	20.691	22.878	24.884	27.343	49.513	53.384	56.896	61.162	64.181
39	19.994	21.425	23.654	25.695	28.196	50.660	54.572	58.119	62.426	65.473
40	20.706	22.164	24.433	26.509	29.050	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766

当 $n > 40$ 时, $\chi^2_\alpha(n) \approx \frac{1}{2} (z_\alpha + \sqrt{2n-1})^2$.

附表 6 F 分布表

 $P\{F(n_1, n_2) > F_\alpha(n_1, n_2)\} = \alpha$ ($\alpha=0.10$)

$n_2 \backslash n_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.10
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.80
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67	1.63
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53	1.49
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17	1.00

($\alpha=0.05$)

$n_2 \backslash n_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

$(\alpha=0.025)$

$n_2 \backslash n_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	648	800	864	900	922	937	948	957	963	969	977	985	993	997	1000	1010	1010	1010	1020
2	38.5	39.0	39.2	39.2	39.3	39.3	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5
3	17.4	16.0	15.4	15.1	14.9	14.7	14.6	14.5	14.5	14.4	14.3	14.3	14.2	14.1	14.1	14.0	14.0	13.9	13.9
4	12.2	10.6	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	10.0	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00

(α=0.01)

$n_2 \backslash n_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4050	5000	5400	5620	5760	5860	5930	5980	6020	6060	110	6160	6210	6230	6260	6290	6310	6340	6370
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.3	26.2	26.1
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

$(\alpha=0.005)$

$n_2 \backslash n_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	16200	20000	21600	22500	23100	23400	23700	23900	24100	24200	24400	24600	24800	24900	25000	25100	25300	25400	25500
2	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	200
3	55.6	49.8	47.5	46.2	45.4	44.8	44.4	44.1	43.9	43.7	43.4	43.1	42.8	42.6	42.5	42.3	42.1	42.0	41.8
4	31.3	26.3	24.3	23.2	22.5	22.0	21.6	21.4	21.1	21.0	20.7	20.4	20.2	20.0	19.9	19.8	19.6	19.5	19.3
5	22.8	18.3	16.5	15.6	14.9	14.5	14.2	14.0	13.8	13.6	13.4	13.1	12.9	12.8	12.7	12.5	12.4	12.3	12.1
6	18.6	14.5	12.9	12.0	11.5	11.1	10.8	10.6	10.4	10.3	10.0	9.81	9.59	9.47	9.36	9.24	9.12	9.00	8.88
7	16.2	12.4	10.9	10.1	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51	8.38	8.18	7.97	7.75	7.65	7.53	7.42	7.31	7.19	7.08
8	14.7	11.0	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34	7.21	7.01	6.81	6.61	6.50	6.40	6.29	6.18	6.06	5.95
9	13.6	10.1	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54	6.42	6.23	6.03	5.83	5.73	5.62	5.52	5.41	5.30	5.19
10	12.8	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97	5.85	5.66	5.47	5.27	5.17	5.07	4.97	4.86	4.75	4.64
11	12.2	8.91	7.60	6.88	6.42	6.10	5.86	5.68	5.54	5.42	5.24	5.05	4.86	4.76	4.65	4.55	4.44	4.34	4.23
12	11.8	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20	5.09	4.91	4.72	4.53	4.43	4.33	4.23	4.12	4.01	3.90
13	11.4	8.19	6.93	6.23	5.79	5.48	5.25	5.08	4.94	4.82	4.64	4.46	4.27	4.17	4.07	3.97	3.87	3.76	3.65
14	11.1	7.92	6.68	6.00	5.56	5.26	5.03	4.86	4.72	4.60	4.43	4.25	4.06	3.96	3.86	3.76	3.66	3.55	3.44
15	10.8	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54	4.42	4.25	4.07	3.88	3.79	3.69	3.58	3.48	3.37	3.26
16	10.6	7.51	6.30	5.64	5.21	4.91	4.69	4.52	4.38	4.27	4.10	3.92	3.73	3.64	3.54	3.44	3.33	3.22	3.11
17	10.4	7.35	6.16	5.50	5.07	4.78	4.56	4.39	4.25	4.14	3.97	3.79	3.61	3.51	3.41	3.31	3.21	3.10	2.98
18	10.2	7.21	6.03	5.37	4.96	4.66	4.44	4.28	4.14	4.03	3.86	3.68	3.50	3.40	3.30	3.20	3.10	2.99	2.87
19	10.1	7.09	5.92	5.27	4.85	4.56	4.34	4.18	4.04	3.93	3.76	3.59	3.40	3.31	3.21	3.11	3.00	2.89	2.78
20	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96	3.85	3.68	3.50	3.32	3.22	3.12	3.02	2.92	2.81	2.69
21	9.83	6.89	5.73	5.09	4.68	4.39	4.18	4.01	3.88	3.77	3.60	3.43	3.24	3.15	3.05	2.95	2.84	2.73	2.61
22	9.73	6.81	5.65	5.02	4.61	4.32	4.11	3.94	3.81	3.70	3.54	3.36	3.18	3.08	2.98	2.88	2.77	2.66	2.55
23	9.63	6.73	5.58	4.95	4.54	4.26	4.05	3.88	3.75	3.64	3.47	3.30	3.12	3.02	2.92	2.82	2.71	2.60	2.48
24	9.55	6.66	5.52	4.89	4.49	4.20	3.99	3.83	3.69	3.59	3.42	3.25	3.06	2.97	2.87	2.77	2.66	2.55	2.43
25	9.48	6.60	5.46	4.84	4.43	4.15	3.94	3.78	3.64	3.54	3.37	3.20	3.01	2.92	2.82	2.72	2.61	2.50	2.38
26	9.41	6.54	5.41	4.79	4.38	4.10	3.89	3.73	3.60	3.49	3.33	3.15	2.97	2.87	2.77	2.67	2.56	2.45	2.33
27	9.34	6.49	5.36	4.74	4.34	4.06	3.85	3.69	3.56	3.45	3.28	3.11	2.93	2.83	2.73	2.63	2.52	2.41	2.29
28	9.28	6.44	5.32	4.70	4.30	4.02	3.81	3.65	3.52	3.41	3.25	3.07	2.89	2.79	2.69	2.59	2.48	2.37	2.25
29	9.23	6.40	5.28	4.66	4.26	3.98	3.77	3.61	3.48	3.38	3.21	3.04	2.86	2.76	2.66	2.56	2.45	2.33	2.21
30	9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45	3.34	3.18	3.01	2.82	2.73	2.63	2.52	2.42	2.30	2.18
40	8.83	6.07	4.98	4.37	3.99	3.71	3.51	3.35	3.22	3.12	2.95	2.78	2.60	2.50	2.40	2.30	2.18	2.06	1.93
60	8.49	5.79	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01	2.90	2.74	2.57	2.39	2.29	2.19	2.08	1.96	1.83	1.69
120	8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81	2.71	2.54	2.37	2.19	2.09	1.98	1.87	1.75	1.61	1.43
∞	7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.62	2.52	2.36	2.19	2.00	1.90	1.79	1.67	1.53	1.36	1.00

附表 7 均值的 t 检验的样本容量

单边检验		显著性水平																			
双边检验		$\alpha=0.005$ $\alpha=0.01$					$\alpha=0.01$ $\alpha=0.02$					$\alpha=0.025$ $\alpha=0.05$					$\alpha=0.05$ $\alpha=0.1$				
β		0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5
0.05																					
0.10																					
0.15																					
0.20																					
0.25						110															
0.30					134	78															
0.35					125	99	58														
0.40					115	97	77	45													
0.45					92	77	62	37													
0.50					75	63	51	30													
0.55					83	63	53	42	26												
0.60					71	53	45	36	22												
0.65					61	46	39	31	20												
0.70					53	40	34	28	17												
0.75					47	36	30	25	16												
0.80					41	32	27	22	14												
0.85					37	29	24	20	13												
0.90					34	26	22	18	12												
0.95					31	24	20	17	11												
1.00					28	22	19	16	10												
1.1					24	19	16	14	9												
1.2					21	16	14	12	8												
1.3					18	15	13	11	8												

$$\delta = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{\sigma}$$

附表 8 均值差的 t 检验的样本容量

单边检验 双边检验 β	显 著 性 水 平									
	$\alpha=0.005$ $\alpha=0.01$					$\alpha=0.01$ $\alpha=0.02$				
	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5
0.05										0.05
0.10										0.10
0.15										0.15
0.20										0.20
0.25										0.25
0.30										0.30
0.35					110					0.35
0.40					85					0.40
0.45					68					0.45
0.50					55					0.50
0.55					46					0.55
0.60					39					0.60
0.65					34					0.65
0.70					29					0.70
0.75					26					0.75
0.80					23					0.80
0.85					21					0.85
0.90					19					0.90
0.95					17					0.95
1.00					15					1.00
1.1					13					1.1
1.2					11					1.2
1.3					10					1.3
$\delta = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma}$	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5
	101	85	67	39	34	101	85	67	39	34
	87	73	57	34	29	87	73	57	34	29
	75	63	50	29	26	75	63	50	29	26
	66	55	44	26	23	66	55	44	26	23
	58	49	39	23	21	58	49	39	23	21
	51	43	35	21	19	51	43	35	21	19
	46	39	31	19	17	46	39	31	19	17
	42	35	28	17	15	42	35	28	17	15
	38	32	26	15	13	38	32	26	15	13
	32	27	22	13	11	32	27	22	13	11
	27	23	18	11	9	27	23	18	11	9
	23	20	16	10	8	23	20	16	10	8
	20	17	14	11	8	20	17	14	11	8
	17	14	11	10	8	17	14	11	10	8
	14	11	9	8	7	14	11	9	8	7
	11	9	7	7	6	11	9	7	7	6

续表

单边检验 双边检验 β	显 著 性 水 平															
	$\alpha=0.005$ $\alpha=0.01$				$\alpha=0.01$ $\alpha=0.02$				$\alpha=0.025$ $\alpha=0.05$				$\alpha=0.05$ $\alpha=0.1$			
	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	0.5
1.4	27	20	17	14	9	24	18	15	12	8	20	15	12	10	6	4
1.5	24	18	15	13	8	21	16	14	11	7	18	13	11	9	5	4
1.6	21	16	14	11	7	19	14	12	10	6	16	12	10	8	5	4
1.7	19	15	13	10	7	17	13	11	9	6	14	11	9	7	4	3
1.8	17	13	11	10	6	15	12	10	8	5	13	10	8	6	4	3
1.9	16	12	11	9	6	14	11	9	8	5	12	9	7	6	4	3
2.0	14	11	10	8	6	13	10	9	7	5	11	8	7	6	4	3
2.1	13	10	9	8	5	12	9	8	7	5	10	8	6	5	4	3
2.2	12	10	8	7	5	11	9	7	6	4	9	7	6	5	4	3
2.3	11	9	8	7	5	10	8	7	6	4	9	7	6	5	4	3
2.4	11	9	8	6	5	10	8	7	6	4	8	6	5	4	4	3
2.5	10	8	7	6	4	9	7	6	5	4	8	6	5	4	3	3
3.0	8	6	6	5	4	7	6	5	4	3	6	5	4	4	3	3
3.5	6	5	5	4	3	6	5	4	4	4	5	4	4	3	3	3
4.0	6	5	4	4	4	5	4	4	3	3	4	4	3	4	4	4

$$\delta = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma}$$

附表 9 秩和临界值表
括号内数字表示样本容量(n_1, n_2)

	(2,4)			(4,4)			(6,7)	
3	11	0.067	11	25	0.029	28	56	0.026
	(2,5)		12	24	0.057	30	54	0.051
3	13	0.047		(4,5)			(6,8)	
	(2,6)		12	28	0.032	29	61	0.021
3	15	0.036	13	27	0.056	32	58	0.054
4	14	0.071		(4,6)			(6,9)	
	(2,7)		12	32	0.019	31	65	0.025
3	17	0.028	14	30	0.057	33	63	0.044
4	16	0.056		(4,7)			(6,10)	
	(2,8)		13	35	0.021	33	69	0.028
3	19	0.022	15	33	0.055	35	67	0.047
4	18	0.044		(4,8)			(7,7)	
	(2,9)		14	38	0.024	37	68	0.027
3	21	0.018	16	36	0.055	39	66	0.049
4	20	0.036		(4,9)			(7,8)	
	(2,10)		15	41	0.025	39	73	0.027
4	22	0.030	17	39	0.053	41	71	0.047
5	21	0.061		(4,10)			(7,9)	
	(3,3)		16	44	0.026	41	78	0.027
6	15	0.050	18	42	0.053	43	76	0.045
	(3,4)			(5,5)			(7,10)	
6	18	0.028	18	37	0.028	43	83	0.028
7	17	0.057	19	36	0.048	46	80	0.054
	(3,5)			(5,6)			(8,8)	
6	21	0.018	19	41	0.026	49	87	0.025
7	20	0.036	20	40	0.041	52	84	0.052
	(3,6)			(5,7)			(8,9)	
7	23	0.024	20	45	0.024	51	93	0.023
8	22	0.048	22	43	0.053	54	90	0.046
	(3,7)			(5,8)			(8,10)	
8	25	0.033	21	49	0.023	54	98	0.027
9	24	0.058	23	47	0.047	57	95	0.051
	(3,8)			(5,9)			(9,9)	
8	28	0.024	22	53	0.021	63	108	0.025
9	27	0.042	25	50	0.056	66	105	0.047
	(3,9)			(5,10)			(9,10)	
9	30	0.032	24	56	0.028	66	114	0.027
10	29	0.050	26	54	0.050	69	111	0.047
	(3,10)			(6,6)			(10,10)	
9	33	0.024	26	52	0.021	79	131	0.026
11	31	0.056	28	50	0.047	83	127	0.053

习题答案

第一章

1. (1) $S = \left\{ \frac{i}{n} \mid i=0,1,\dots,100n \right\}$, 其中 n 为小班人数. (2) $S = \{10, 11, \dots\}$.
(3) $S = \{00, 100, 0100, 0101, 0110, 1100, 1010, 1011, 0111, 1101, 1110, 1111\}$, 其中 0 表示次品, 1 表示正品. (4) $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$.
2. (1) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$. (2) ABC . (3) $A \cup B \cup C$. (4) ABC . (5) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.
(6) $\overline{A}\overline{B} \cup \overline{A}\overline{C} \cup \overline{B}\overline{C}$. (7) $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$. (8) $AB \cup AC \cup BC$.
3. (1) $P(A \cup B \cup C) = 5/8$.
(2) $P(A \cup B) = 11/15$, $P(\overline{A}\overline{B}) = 4/15$, $P(A \cup B \cup C) = 17/20$, $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 3/20$, $P(\overline{A}\overline{B}C) = 7/60$, $P(\overline{A}\overline{B} \cup C) = 7/20$.
(3) (i) $P(A\overline{B}) = 1/2$, (ii) $P(A\overline{B}) = 3/8$.
5. (1) $\frac{113}{126}$. (2) $\frac{1}{12}$. 6. (1) $\frac{1}{12}$ (2) $\frac{1}{20}$. 7. $\frac{252}{2431}$.
8. (1) $\frac{\binom{400}{90}\binom{1100}{110}}{\binom{1500}{200}}$ (2) $1 - \frac{\binom{1100}{200} + \binom{400}{1}\binom{1100}{199}}{\binom{1500}{200}}$. 9. $\frac{13}{21}$. 10. 0.000 002 4.
11. 记 X 为最大个数, $P\{X=1\} = \frac{6}{16}$, $P\{X=2\} = \frac{9}{16}$, $P\{X=3\} = \frac{1}{16}$.
12. $\frac{1}{1960}$. 13. (1) $\frac{4}{33}$. (2) $\frac{10}{33}$. 14. (1) 0.25. (2) $\frac{1}{3}$. 15. $\frac{1}{3}$. 16. 0.18.
17. (1) $\frac{28}{45}$. (2) $\frac{1}{45}$. (3) $\frac{16}{45}$. (4) $\frac{1}{5}$. 18. (1) 0.3. (2) 0.6.
19. (1) $\frac{n}{n+m} \cdot \frac{N+1}{M+N+1} + \frac{m}{n+m} \cdot \frac{N}{M+N+1}$, (2) 53/99.
20. 3/5. 21. $\frac{20}{21}$. 22. (1) $\frac{3}{2}p - \frac{1}{2}p^2$. (2) $\frac{2p}{p+1}$. 23. $\frac{196}{197}$. 24. (1) 0.4. (2) 0.4856.
25. $\frac{9}{13}$. 26. (1) 0.785. (2) 0.372.
28. (1) $P(AB) = 0.72$. (2) $P(A \cup B) = 0.98$. (3) 0.26.
29. (1) 0.57. (2) 0.0481. (3) 0.0962. (4) 0.6864.
31. (1) 必然错. (2) 必然错. (3) 必然错. (4) 可能对. 32. $p = 0.5043$.
34. (1) $p_1 p_2 p_3 + p_1 p_4 - p_1 p_2 p_3 p_4$. (2) $2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5$.
35. 0.9984, 3 只开关. 36. 0.6. 37. $\frac{5}{9}, \frac{16}{63}, \frac{16}{35}$. 38. $\frac{m}{m+n2^r}$.

39. 0.8731, 0.1268, 0.0001. 40. $\frac{2\alpha p_1}{(3\alpha-1)p_1+1-\alpha}$.

第二章

1.

X	20	5	0
p	0.0002	0.0010	0.9988

2. (1)

X	3	4	5
p_k	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

(2)

X	1	2	3	4	5	6
p_k	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

3.

X	0	1	2
p_k	$\frac{22}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

4. (1) $P\{X=k\}=pq^{k-1}, k=1, 2, \dots$.

(2) $P\{Y=k\}=\binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}, k=r, r+1, \dots$.

(3) $P\{X=k\}=0.45(0.55)^{k-1}, k=1, 2, \dots, p=\sum_{k=1}^{\infty} P\{X=2k\}=\frac{11}{31}$.

5. (1)

X	1	2	3	...
p_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)$	$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2$	...

(2)

Y	1	2	3
p_k	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(3) 8/27, 38/81.

6. (1) 0.072 9. (2) 0.008 56. (3) 0.999 54. (4) 0.409 51.

7. (1) 0.163. (2) 0.353. 8. (1) 0.321. (2) 0.243.

9. (1) $0.9^{10} \approx 0.349$. (2) 0.581. (3) 0.590. (4) 0.343. (5) 0.692.

10. (1) $\frac{1}{70}$. (2) 猜对的概率仅万分之三, 此概率太小, 按实际推断原理, 认为他确有区分能力.

11. 0.0025. 12. (1) 0.0298. (2) 0.5665. 13. (1) 0.2231. (2) 0.9179.

14. (1) 0.2388. (2) 20.79 分.

15. $P\{X \leq 10\} = \sum_{k=0}^{10} \binom{5000}{k} (0.0015)^k (1-0.0015)^{5000-k}, P\{X \leq 10\} \approx 0.8622$.

16. $P\{X \geq 2\} \approx 0.0047$.

$$17. (1) F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1-p, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases} \quad (2) F(x) = \begin{cases} 0, & x < 3, \\ \frac{1}{10}, & 3 \leq x < 4, \\ \frac{4}{10}, & 4 \leq x < 5, \\ 1, & x \geq 5. \end{cases}$$

$$18. F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{a}, & 0 \leq x < a, \\ 1, & x \geq a. \end{cases}$$

$$19. (1) 1 - e^{-1.2}. (2) e^{-1.6}. (3) e^{-1.2} - e^{-1.6}. (4) 1 - e^{-1.2} + e^{-1.6}. (5) 0.$$

$$20. (1) \ln 2, 1, \ln \frac{5}{4}. (2) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 1 < x < e, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$21. (1) F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 2(x + \frac{1}{x} - 2), & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$(2) F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ -1 + 2x - \frac{x^2}{2}, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$22. (1) A = \frac{4}{b\sqrt{\pi b}}. (2) F_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1 - e^{-\frac{t}{241}}, & t \geq 0, \end{cases} \quad P\{50 < T < 100\} = e^{-\frac{50}{241}} - e^{-\frac{100}{241}}.$$

$$23. \frac{232}{243}. \quad 24. P\{Y=k\} = \binom{5}{k} e^{-2k} (1 - e^{-2})^{5-k}, k=0,1,\dots,5, 0.5167. \quad 25. \frac{3}{5}.$$

$$26. (1) P\{2 < X \leq 5\} = 0.5328, P\{-4 < X \leq 10\} = 0.9996, P\{|X| > 2\} = 0.6977, P\{X > 3\} = 0.5. (2) c = 3. (3) d \leq 0.436.$$

$$27. (1) P\{X \leq 105\} = 0.3383, P\{100 < X \leq 120\} = 0.5952. (2) 129.74.$$

$$28. 0.0456. \quad 29. \sigma = 31.20 \quad 30. 0.3204.$$

$$31. F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.2 + 0.8x/30, & 0 \leq x < 30, \\ 1, & x \geq 30. \end{cases}$$

33.

Y	0	1	4	9
p_k	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{30}$

$$34. (1) f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y}, & 1 < y < e, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (2) f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-y/2}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

$$35. (1) f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y \sqrt{2\pi}} e^{-(\ln y)^2/2}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

$$(2) f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2 \sqrt{\pi(y-1)}} e^{-(y-1)/4}, & y > 1, \\ 0, & y \leq 1. \end{cases}$$

$$(3) f_Y(y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-y^2/2}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

$$36. (1) f_Y(y) = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{y^2}} f(\sqrt[3]{y}), y \neq 0.$$

$$(2) f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

$$37. f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi \sqrt{1-y^2}}, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad 38. f_W(w) = \begin{cases} \frac{1}{8} \left(\frac{2}{w}\right)^{1/2}, & 162 < w < 242, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$39. f_\theta(y) = \frac{9}{10\sqrt{\pi}} e^{-\frac{81}{100}(y-37)^2}.$$

第三章

1. (1) 放回抽样的情况

(2) 不放回抽样的情况

Y \ X	X	
	0	1
0	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{36}$
1	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

Y \ X	X	
	0	1
0	$\frac{45}{66}$	$\frac{10}{66}$
1	$\frac{10}{66}$	$\frac{1}{66}$

2. (1)

Y \ X	X			
	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{3}{35}$	$\frac{2}{35}$
1	0	$\frac{6}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{2}{35}$
2	$\frac{1}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	0

$$(2) P\{X>Y\}=\frac{19}{35}, P\{Y=2X\}=\frac{6}{35}, P\{X+Y=3\}=\frac{4}{7}, P\{X<3-Y\}=\frac{2}{7}.$$

$$3. (1) \frac{1}{8}, (2) \frac{3}{8}, (3) \frac{27}{32}, (4) \frac{2}{3}.$$

$$4. (2) \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}. \quad 5. F_X(x)=\begin{cases} 1-e^{-x}, & x>0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} F_Y(y)=\begin{cases} 1-e^{-y}, & y>0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

6.

$X \backslash Y$	0	1	2	$P\{Y=j\}$
0	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	0	$\frac{3}{8}$
2	0	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
3	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$P\{X=i\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$$7. f_X(x)=\begin{cases} 2.4x^2(2-x), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} 2.4y(3-4y+y^2), & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$8. f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} f_Y(y)=\begin{cases} y e^{-y}, & y>0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$9. (1) c=\frac{21}{4}.$$

$$(2) f_X(x)=\begin{cases} \frac{21}{8}x^2(1-x^4), & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} f_Y(y)=\begin{cases} \frac{7}{2}y^{5/2}, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

10. (1)

X	51	52	53	54	55
p_k	0.28	0.28	0.22	0.09	0.13
Y	51	52	53	54	55
p_k	0.18	0.15	0.35	0.12	0.20

(2)

k	51	52	53	54	55
$P\{Y=k X=51\}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{7}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{5}{28}$

$$11. (1) P\{X=n\}=\frac{14^n e^{-14}}{n!}, n=0,1,2,\dots,$$

$$P\{Y=m\}=\frac{e^{-7.14}(7.14)^m}{m!}, m=0,1,2,\dots.$$

$$(2) \text{ 当 } m=0,1,2,\dots \text{ 时, } P\{X=n|Y=m\} = \frac{e^{-6.86}(6.86)^{n-m}}{(n-m)!}, n=m, m+1, \dots;$$

$$\text{当 } n=0,1,2,\dots \text{ 时, } P\{Y=m|X=n\} = \binom{n}{m} (0.51)^m (0.49)^{n-m}, m=0,1,\dots,n.$$

$$(3) P\{Y=m|X=20\} = \binom{20}{m} (0.51)^m (0.49)^{20-m}, m=0,1,2,\dots,20.$$

12.

$Y=k$	1
$P\{Y=k X=1\}$	1

$Y=k$	1	2
$P\{Y=k X=2\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$Y=k$	1	2	3
$P\{Y=k X=3\}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$Y=k$	1	2	3	4
$P\{Y=k X=4\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

13. (1) 当 $0 < y \leq 1$ 时,

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2y^{-3/2}, & -\sqrt{y} < x < \sqrt{y}, \\ 0, & x \text{ 取其他值.} \end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x|y=\frac{1}{2}) = \begin{cases} 3\sqrt{2}x^2, & -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$(2) \text{ 当 } -1 < x < 1 \text{ 时, } f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{2y}{1-x^4}, & x^2 < y < 1, \\ 0, & y \text{ 取其他值.} \end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x=\frac{1}{3}) = \begin{cases} \frac{81}{40}y, & \frac{1}{9} < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad f_{Y|X}(y|x=\frac{1}{2}) = \begin{cases} \frac{32}{15}y, & \frac{1}{4} < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$(3) P\{Y \geq \frac{1}{4} | X = \frac{1}{2}\} = 1, P\{Y \geq \frac{3}{4} | X = \frac{1}{2}\} = \frac{7}{15}.$$

$$14. \text{ 当 } |y| < 1 \text{ 时, } f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{1-|y|}, & |y| < x < 1, \\ 0, & x \text{ 取其他值.} \end{cases}$$

$$\text{当 } 0 < x < 1 \text{ 时, } f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{2x}, & |y| < x, \\ 0, & y \text{ 取其他值.} \end{cases}$$

$$15. (1) f(x,y) = \begin{cases} x, & 0 < y < 1/x, 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$(2) f_Y(y) = \begin{cases} 1/2, & 0 < y < 1, \\ 1/(2y^2), & 1 \leq y < \infty, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (3) P\{X > Y\} = 1/3.$$

16. (1) 放回抽样时相互独立,不放回抽样时,不独立. (2) 不独立.

17. (2) X, Y 相互独立.

$$18. (1) f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-y/2}, & 0 < x < 1, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$(2) 1 - \sqrt{2\pi}[\Phi(1) - \Phi(0)] = 0.1445.$$

$$19. f(x, y) = \frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}$$

Z	0	1	2
p_k	e^{-2}	$e^{-1/2} - e^{-2}$	$1 - e^{-1/2}$

$$20. (1) y > 0 \text{ 时, } f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

(2)

Z	0	1
p_k	$\frac{\mu}{\lambda + \mu}$	$\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{\mu}{\lambda + \mu}, & 0 \leq z < 1, \\ 1, & z \geq 1. \end{cases}$$

21. (1) $Z = X + Y$ 的密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} z^2, & 0 < z < 1, \\ 2z - z^2, & 1 \leq z < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(2) $Z = XY$ 的密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} 2(1-z), & 0 < z < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$22. f_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-z}, & 0 < z < 1, \\ (e-1)e^{-z}, & z \geq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$23. (1) f_1(x) = \begin{cases} \frac{x^3 e^{-x}}{3!}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (2) f_2(x) = \begin{cases} \frac{x^5 e^{-x}}{5!}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

$$24. (1) \text{不独立}, (2) f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}z^2 e^{-z}, & z > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

25. $Z = X + Y$ 的密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} (z-2)e^{2-z}, & z > 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

26. $Z = X/Y$ 的密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{(z+1)^2}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases}$$

$$27. f_z(z) = \begin{cases} -\ln z, & 0 < z < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$29. (1) b = \frac{1}{1-e^{-1}}. (2) f_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{1-e^{-1}}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$(3) F_U(u) = \begin{cases} 0, & u < 0, \\ \frac{(1-e^{-u})^2}{1-e^{-1}}, & 0 \leq u < 1, \\ 1-e^{-u}, & u \geq 1. \end{cases}$$

$$30. (0.1587)^4 = 0.00063.$$

$$31. (1) F_z(z) = \begin{cases} (1-e^{-z^2/8})^5, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

$$(2) 1 - (1-e^{-2})^5 = 0.5167.$$

$$36. (1) P\{X=2|Y=2\} = 0.2, \quad P\{Y=3|X=0\} = \frac{1}{3}.$$

$$(2) \begin{array}{c|cccccc} V & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline p_k & 0 & 0.04 & 0.16 & 0.28 & 0.24 & 0.28 \end{array}$$

$$(3) \begin{array}{c|cccc} U & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline p_k & 0.28 & 0.30 & 0.25 & 0.17 \end{array}$$

$$(4) \begin{array}{c|cccccccccc} W & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline p_k & 0 & 0.02 & 0.06 & 0.13 & 0.19 & 0.24 & 0.19 & 0.12 & 0.05 \end{array}$$

第 四 章

$$1. (1) \begin{array}{c|cccc} X & 2 & 3 & 4 & 9 \\ \hline p_k & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{array}, E(X) = \frac{15}{4}.$$

$$(2) \begin{array}{c|cccc} Y & 2 & 3 & 4 & 9 \\ \hline p_k & \frac{2}{30} & \frac{15}{30} & \frac{4}{30} & \frac{9}{30} \end{array}, E(Y) = \frac{73}{15}.$$

$$(3) \begin{array}{c|cccccccccccc} X & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline p_k & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} & \frac{1}{36} \end{array}, E(X) = \frac{49}{12}.$$

$$2. 1.0556. \quad 3. \frac{25}{16}. \quad 5. 1500\text{min.}$$

$$6. (1) E(X) = -0.2, E(X^2) = 2.8, E(3X^2 + 5) = 13.4. \quad (2) E(1/(X+1)) = \frac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda}).$$

$$7. (1) E(Y) = 2, E(Y) = 1/3. \quad (2) E(\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}) = \frac{n}{n+1},$$

$$E(\min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}) = \frac{1}{n+1}.$$

8. (1) $E(X)=2, E(Y)=0$. (2) $-\frac{1}{15}$. (3) 5.

9. (1) $E(X)=\frac{4}{5}, E(Y)=\frac{3}{5}, E(XY)=\frac{1}{2}, E(X^2+Y^2)=\frac{16}{15}$.

(2) $E(X)=1, E(Y)=1, E(XY)=2$.

10. (1) $E[X^2/(X^2+Y^2)]=\frac{1}{2}$. (2) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$.

11. 33.64 元. 12. $\frac{\pi}{12}(a^2+ab+b^2)$. 13. 45 V.

14. (1) $E(X_1+X_2)=\frac{3}{4}$. (2) $E(2X_1-3X_2^2)=\frac{5}{8}$. (3) $E(X_1X_2)=\frac{1}{8}$.

15. 1. 16. $(n+1)/2$. 18. $E(X)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma, D(X)=\frac{4-\pi}{2}\sigma^2$.

19. $E(X)=\alpha\beta, D(X)=\alpha\beta^2$.

20. $E(X)=\frac{1}{p}, D(X)=\frac{1-p}{p^2}$. 21. $E(A)=8.67, D(A)=21.42$.

22. (1) $E(Y)=7, D(Y)=37.25$.

(2) $Z_1 \sim N(2080, 65^2), Z_2 \sim N(80, 1525), P(X>Y)=0.9798, P(X+Y>1400)=0.1539$.

23. (1) 1200, 1225. (2) 1282 kg. 24. 39 袋.

25. (1) $E(XY)=1/4, E(X/Y)$ 不存在, $E[\ln(XY)]=-2, E(|Y-X|)=1/3$.

(2) $\rho_{AC}=\sqrt{6/7}$.

26. (1) $P\{X_1=2, X_2=2, X_3=5\}=0.00203, E(X_1X_2X_3)=8, E(X_1-X_2)=0,$
 $E(X_1-2X_2)=-2$.

(2) 对于 $E(Z)$, 三种情况都有 $E(Z)=29$.

对于 $D(Z)$: (i) X, Y 独立, 则 $D(Z)=109$, (ii) X, Y 不相关, 则 $D(Z)=109$,

(iii) $\rho_{XY}=0.25$, 则 $\text{Cov}(X, Y)=1.5, D(Z)=94$.

27. (1) X, Y 不相互独立, 也不是不相关的. (2) X, Y 不相互独立, 但不相关.

(3) X, Y 不相互独立, 但不相关. (4) X, Y 不是不相关的, 因而一定也是不相互独立的.

(5) X, Y 相互独立, 因此, X, Y 也是不相关的.

31. $E(X)=\frac{2}{3}, E(Y)=0, \text{Cov}(X, Y)=0$.

32. $E(X)=E(Y)=\frac{7}{6}, \text{Cov}(X, Y)=-\frac{1}{36}, \rho_{XY}=\frac{-1}{11}, D(X+Y)=\frac{5}{9}$.

33. $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$. 34. (1) $\min E(W)=108$. 35. $f(x, y)=\frac{1}{3\sqrt{5}\pi}\exp\left[\frac{-8}{15}\left(\frac{x^2}{3}+\frac{xy}{4\sqrt{3}}+\frac{y^2}{4}\right)\right]$.

36. $p \geq \frac{8}{9}$. 38. (1) $\frac{1}{2}\ln 2$. (2) a .

第五章

1. 0.2119. 2. (1) 0.8944. (2) 0.0019. 3. (1) 0.1802. (2) $n=443$. 4. 0.0787.

5. 0.0062. 6. 0.1075. 7. (1) 0.0003. (2) 0.5. 8. 0.9525.
 9. (1) $\bar{X} \sim N(2.2, 1.4^2/52)$, $P\{\bar{X} < 2\} = 0.1515$. (2) 0.0770.
 10. 1.3427 g/km. 11. (1) 0.8968. (2) 0.7498. 12. 254. 13. 1537.
 14. (1) 0.8944. (2) 0.1379.

第六章

1. 0.8293.
 2. (1) 0.2628. (2) $P\{\max\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\} > 15\} = 0.2923$, $P\{\min\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\} > 0.5785\} = 0.5785$.
 3. $p = 0.6744$. 4. (1) $C = 1/3$. (2) $C = \sqrt{3/2}$.
 5. (1) $f(x_1, x_2, \dots, x_{10}) = \prod_{i=1}^{10} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x_i - \mu)^2 / (2\sigma^2)}$, $P\{\bar{X} < \mu\} = 1/2$. (2) 0.431.
 6. (1) $P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n\} = p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^n x_i}$.
 (2) $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.
 (3) $E(\bar{X}) = p$, $D(\bar{X}) = \frac{1}{n} p(1-p)$, $E(S^2) = p(1-p)$.
 7. $E(\bar{X}) = n$, $D(\bar{X}) = n/5$, $E(S^2) = 2n$.
 8. (1) $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ 的联合密度为 $\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^5} e^{-\sum_{i=1}^{10} (x_i - \mu)^2 / (2\sigma^2)}$. (2) $f_X(x) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}\sigma} e^{-5(x-\mu)^2 / \sigma^2}$.
 9. (1) $p = 0.99$. (2) $D(S^2) = 2\sigma^4/15$. 11. 226.3333.

第七章

1. $\hat{\mu} = 74.002$, $\hat{\sigma}^2 = 6 \times 10^{-6}$, $s^2 = 6.86 \times 10^{-6}$.
 2. 矩估计量为 (1) $\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{\bar{X} - c}$. (2) $\hat{\theta} = \left(\frac{\bar{X}}{1 - \bar{X}}\right)^2$. (3) $\hat{p} = \frac{\bar{X}}{m}$.
 3. 最大似然估计量为 (1) $\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i - n \ln c}$. (2) $\hat{\theta} = \frac{n^2}{(\sum_{i=1}^n \ln X_i)^2}$. (3) $\hat{p} = \frac{\bar{X}}{m}$.
 4. (1) 矩估计值和最大似然估计值均为 $\frac{5}{6}$. (2) 矩估计量和最大似然估计量均为 $\hat{\lambda} = \bar{X}$.
 (3) $\hat{p} = \frac{r}{x}$
 5. (1) c 与 θ 的最大似然估计值分别为 $\hat{c} = x_1$, $\hat{\theta} = \bar{x} - x_1$.
 (2) c 与 θ 的矩估计量分别为 $\hat{c} = \bar{X} - \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right]^{1/2}$, $\hat{\theta} = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right]^{1/2}$.
 6. 0.499. 7. (1) 由最大似然估计的性质 $\hat{P}\{X=0\} = e^{-\bar{x}}$. (2) 0.3253.
 8. $\hat{U} = e^{-1/\hat{\theta}}$, 其中 $\hat{\theta} = -n / \sum_{i=1}^n \ln x_i$. (2) $\hat{\theta} = 1 - \Phi(2 - \bar{x})$. (3) $\hat{\beta} = (3\bar{x})/m - 1$.

10. (1) $c = \frac{1}{2(n-1)}$. (2) $c = \frac{1}{n}$. 12. T_1, T_3 是无偏的、 T_3 较 T_1 为有效.
13. (2) $\hat{\theta} = X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, $E(\hat{\theta}) = \frac{n}{n+1}\theta$. 14. $a = \frac{n_1}{n_1+n_2}$, $b = \frac{n_2}{n_1+n_2}$.
15. 记 $\frac{1}{\sigma_0^2} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sigma_i^2}$, $a_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$, $i = 1, 2, \dots, k$.
16. (1) (5.608, 6.392). (2) (5.558, 6.442)
17. (1) (6.675, 6.681), $(6.8 \times 10^{-6}, 6.5 \times 10^{-5})$.
(2) (6.661, 6.667), $(3.8 \times 10^{-6}, 5.06 \times 10^{-5})$.
18. (7.4, 21.1).
19. σ^2 的置信区间为 $\left\{ \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n)} \right\}$, (5.013, 31.626), (2.239, 5.624).
20. (0.010, 0.018). 21. (-0.002, 0.006). 22. (-6.04, -5.96).
23. (0.222, 3.601). 24. (0.101, 0.244).
25. (1) σ 已知 6.329; σ 未知 6.356. (2) -0.0012. (3) 2.84
26. 40527. 27. 39 岁零 4 个月.

第 八 章

1. 接受 H_0 . 2. 接受 H_0 . 3. 认为不合格. 4. 认为显著大于 10.
5. 接受 H_0 , 认为这批罐头是符合规定的. 6. 拒绝 H_0 . 7. 拒绝 H_0 .
8. 认为早上的身高比晚上高. 9. 拒绝 H_0 , 认为 A 比 B 耐穿. 10. 接受 H_0 .
11. 拒绝 H_0 , 认为提纯后的群体比原群体整齐. 12. 拒绝 H_0 , 认为偏大. 13. 接受 H_0 .
14. 接受 H_0 . 15. 接受 H_0 . 16. 接受 H_0 .
17. 接受 H_0 , 认为两者方差相等; 接受 H'_0 , 认为所需天数相同.
18. 接受 H_0 , 拒绝 H'_0 , 认为两者的可理解性有显著差异. 19. 接受 H_0 . 20. $n \geq 7$
21. (1) 接受 H_0 . (2) $n \geq 7$. 22. $t = (\bar{x} - 2\bar{y}) / \sqrt{\sigma_1^2/n_1 + 4\sigma_2^2/n_2} \geq z_\alpha$.
23. 认为服从泊松分布. 24. 接受 H_0 . 25. (2) 接受 H_0 . 26. 接受 H_0 .
27. 拒绝 H_0 , 认为有显著改变. 28. (1) $\hat{p} = 0.6419$. (2) 接受 H_0 .
29. 接受 H_0 , 认为无显著差异. 30. 拒绝 H_0 , 认为型号 A 比型号 B 使用时间长.
31. 接受 H_0 , 认为差异不显著.
32. (1) (i) 取 $\alpha = 0.05$ 时接受 H_0 ; (ii) 取 $\alpha = 0.1$ 时拒绝 H_0 ; (iii) 拒绝 H_0 的最小显著性水平为 0.0808.
(2) p 值 = 0.4747. (3) p 值 = 0.0271, 拒绝 H_0 . (4) p 值 = 0.0110.

第 九 章

1. 各总体均值间有显著差异; (6.75, 18.45), (-7.65, 4.05), (-20.25, -8.55).
2. 差异显著; (0.72, 4.28), (2.55, 6.45), (0.22, 3.78). 3. 差异显著. 4. 差异显著.

5. 差异显著. 6. 只有浓度的影响是显著的. 7. 因素 A、因素 B 的影响均不显著.
8. $\hat{y} = 24.6287 + 0.05886x$.
9. (2) $\hat{y} = 13.9584 + 12.5503x$. (3) $\hat{\sigma}^2 = 0.0432$. (4) 回归效果显著.
(5) (11.82, 13.28). (6) (20.03, 20.44). (7) (19.66, 20.81).
10. (2) $\hat{y} = -0.104 + 0.988x$. (3) (13.29, 14.17).
11. $\hat{y} = -3.85493 + 1.83396x$.
12. (1) 成绩关于奥运次数的回归方程 $\hat{y} = 9.168 - 0.1567x$, 回归效果显著. 预测值为 26.82 min.
(2) 成绩关于年份的回归方程为 $\hat{y} = 105.4826 - 0.0392x$, 回归效果显著.
13. (1) $\hat{y} = 1.896 + 0.53846x$. (2) b 的置信水平为 0.95 的置信区间为 (0.208, 0.869).
14. $\hat{y} = 32.4556e^{-0.0867318x}$.
15. $\hat{y} = 19.0333 + 1.0086x - 0.020381x^2$.
16. (1) $\hat{y} = 9.9 + 0.575x_1 + 0.55x_2 + 1.15x_3$. (2) $\hat{y} = 9.9 + 0.575x_1 + 1.15x_3$.

第十二章

$$1. (1) F\left(x; \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases} F(x; 1) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$(2) F\left(x_1, x_2; \frac{1}{2}, 1\right) = \begin{cases} 0, & x_1 < 0, & -\infty < x_2 < +\infty, \\ 0, & x_1 \geq 0, & x_2 < -1, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x_1 < 1, & x_2 \geq -1, \\ \frac{1}{2}, & x_1 \geq 1, & -1 \leq x_2 < 2, \\ 1, & x_1 \geq 1, & x_2 \geq 2. \end{cases}$$

2. $\mu_Y(t) = F_X(x; t), R_Y(t_1, t_2) = F_X(x, x; t_1, t_2)$.

3. $\mu_X(t) = \frac{1}{at}(1 - e^{-at}), t > 0, R_X(t_1, t_2) = \frac{1}{a(t_1 + t_2)}(1 - e^{-a(t_1 + t_2)}), t_1, t_2 > 0$.

4. $\mu_X(t) = a, C_X(t_1, t_2) = \sigma^2$.

5. $\mu_Y(t) = \mu_X(t) + \varphi(t), C_Y(t_1, t_2) = C_X(t_1, t_2)$.

6. $R_Y(t_1, t_2) = R_X(t_1 + a, t_2 + a) - R_X(t_1 + a, t_2) - R_X(t_1, t_2 + a) + R_X(t_1, t_2)$.

7. $C_Z(t_1, t_2) = \sigma_1^2 + (t_1 + t_2)\rho\sigma_1\sigma_2 + t_1t_2\sigma_2^2$.

8. $R_X(t_1, t_2) = C_X(t_1, t_2) = (1 + t_1t_2)\sigma^2$.

9. $\mu_Z(t) = a(t)\mu_X(t) + b(t)\mu_Y(t) + c(t)$,

$$C_Z(t_1, t_2) = a(t_1)a(t_2)C_X(t_1, t_2) + b(t_1)b(t_2)C_Y(t_1, t_2), t_1, t_2 \in T.$$

11. (1) $\sigma^2 \min\{t_1, t_2\}, t_1, t_2 \geq 0$. (2) $t_1t_2 + \sigma^2 \min\{t_1, t_2\}, t_1, t_2 \geq 0$.

(3) $\sigma^2 \min\{t_1, t_2\}, t_1, t_2 \geq 0$.

第十三章

1. 状态空间 $I = \{1, 2, \dots, N\}$, $p_{ij} = P\{X_n = j | X_{n-1} = i\} = \begin{cases} 1/i, 1 \leq j \leq i, \\ 0, j > i, \end{cases} i = 1, 2, \dots, N.$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ 1/i & 1/i & \cdots & 1/i & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ 1/N & 1/N & \cdots & 1/N & \cdots & 1/N \end{bmatrix}.$$

2. 状态空间 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$(1) P_1 = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & \cdots & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & \cdots & 1/6 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1/6 & 1/6 & \cdots & 1/6 \end{bmatrix}, (2) P_2 = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 2/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 3/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. 状态空间 $I = \{1, 2, \dots\}$, $p_{ij} = \begin{cases} p, & j = i+1, \\ q, & j = i, \quad i, j = 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

$$P = \begin{bmatrix} q & p & 0 & \cdots \\ 0 & q & p & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & q & p & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

4. 状态空间 $I = \{0, 1, 2, \dots, N\}$,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha_1 & \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha_2 & \alpha_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-\alpha_{N-1} & \alpha_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

其中 $\alpha_i = \frac{2i(N-i)}{N(N-1)} \alpha, i = 1, 2, \dots, N-1.$

5. (1) $1/16$. (3) $7/16$. (4) 0.3993 .

7. $P = \begin{matrix} 0 & 1 \\ \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}, \end{matrix}$ 5月1日为晴天的条件下, 5月3日为晴天的概率为 $P_{00}(2) = 0.4167$; 5月5日为雨天的概率为 $P_{01}(4) = 0.5995$.

8. $m=1, \pi = (2/3, 1/3)$. 9. $m=2, \pi = (4/25, 9/25, 12/25)$.

$$10. m=2, \pi_j = \frac{1-p/q}{1-(p/q)^3} \left(\frac{p}{q}\right)^{j-1}, j=1, 2, 3.$$

第十四章

1. 是. 3. 是.

$$4. \text{是. } \mu_Y(t) = \lambda L, R_Y(s, t) = \begin{cases} \lambda^2 L^2 + \lambda(L - |\tau|), & |\tau| \leq L, \\ \lambda^2 L^2, & |\tau| > L, \end{cases} \tau = t - s, s, t \geq 0.$$

5. 是. 6. 不是. 8. (1) $A/8, A^2/12$; (2) $A/8, A^2/12$.

$$11. (2) R_{XY}(\tau) = aR_X(\tau - \tau_1).$$

$$12. (1) 5. (2) S_X(\omega) = 4 \left[\frac{1}{(\omega - \pi)^2 + 1} + \frac{1}{(\omega + \pi)^2 + 1} \right] + \pi [\delta(\omega - 3\pi) + \delta(\omega + 3\pi)].$$

$$13. \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1). 14. S_X(\omega) = \frac{4}{T\omega^2} \sin^2 \frac{\omega T}{2}. 15. R_X(\tau) = \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{\sin^2 5\tau}{\tau^2}\right).$$

$$19. R_{XY}(\tau) = -R_{YX}(\tau) = \frac{1}{2}ab \sin \omega_0 \tau, S_{XY}(\omega) = -S_{YX}(\omega) = \frac{\pi ab}{2} i [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)].$$

$$20. S_{XY}(\omega) = 2\pi \mu_X \mu_Y \delta(\omega), S_{XZ}(\omega) = S_X(\omega) + 2\pi \mu_X \mu_Y \delta(\omega).$$

选做习题

$$1. \frac{3(1-p_1)^5}{3(1-p_1)^5 + 2(1-p_2)^5}. 2. (1) 8/11. (2) 4/5. (3) 32/55.$$

$$3. 2p(1-p). 4. \text{甲: } 6/11, \text{乙: } 5/11.$$

$$5. P(A) = 1/3, P(B) = 7/12, A, B \text{ 独立}. 6. (1-p)/(2-p).$$

$$7. p_1 p_2 (1-p_3) + p_1 (1-p_2) p_3 + (1-p_1) p_2 p_3 + p_1 p_2 p_3.$$

$$8. (1) P(F) = P(F|C_1) p_1 + P(F|\bar{C}_1) (1-p_1),$$

$$\text{其中, } P(F|C_1) = p_2 + p_3 p_5 + p_4 p_5 - p_2 p_3 p_5 - p_2 p_4 p_5 - p_3 p_4 p_5 + p_2 p_3 p_4 p_5,$$

$$P(F|\bar{C}_1) = p_4 p_5 + p_2 p_3 p_4 - p_2 p_3 p_4 p_5,$$

$$(2) P(C_3|F) = [(1-q_1 q_4 - q_2 q_5 + q_1 q_2 q_4 q_5) p_3] / P(F).$$

9.

X	2	3	4
p_k	$p_1 p_2 + (1-p_1)^2$	$p_1 (1-p_2) + (1-p_1) p_1 p_2$	$(1-p_1) p_1 (1-p_2)$

10. (1) (2)

X	2	3	4	5	Y	2	3	4
p_k	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	p_k	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

$$11. (1) 0.632, (2) 3. 12. p = 0.989\ 97. 13. (1) \frac{1}{11}. (2) \frac{3}{55}.$$

$$14. 0.5488, 0.5730.$$

$$15. (1) F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$(2) \begin{array}{c|cc} Y & -1 & 1 \\ \hline p_k & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < -1, \\ \frac{1}{2}, & -1 \leq y < 1, \\ 1, & y \geq 1. \end{cases}$$

$$16. (1) k = \begin{cases} \lambda - 1, \lambda, & \text{若 } \lambda \text{ 是整数,} \\ [\lambda], & \text{若 } \lambda \text{ 不是整数.} \end{cases}$$

$$(2) k = \begin{cases} (n+1)p - 1, (n+1)p, & \text{若 } (n+1)p \text{ 是整数,} \\ [(n+1)p], & \text{若 } (n+1)p \text{ 不是整数.} \end{cases}$$

$$18. f_Y(y) = \begin{cases} 2/3, & 0 < y < 1, \\ 1/3, & 1 \leq y < 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad 19. f_Y(y) = f_X(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ 1/2, & 0 < y \leq 1, \\ 1/(2y^2), & 1 < y < \infty. \end{cases}$$

21. (1)

Y \ X	X				$P\{Y=j\}$
	1	2	3	...	
0	0	$1/2^2$	$1/2^3$	...	$1/2$
1	$1/2$	0	0	...	$1/2$
$P\{X=i\}$	$1/2$	$1/2^2$	$1/2^3$	...	1

$$(2) P\{X=1|Y=1\}=1, P\{Y=2|X=1\}=0$$

22.

Y \ X	X							$P\{X=j\}$
	0	1	2	3	4	5	...	
2	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	0	0	0	...	$\sum_{k=0}^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
3	0	0	0	$\frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!}$	0	0	...	$\frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!}$
4	0	0	0	0	$\frac{\lambda^4 e^{-\lambda}}{4!}$	0	...	$\frac{\lambda^4 e^{-\lambda}}{4!}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$P\{X=i\}$	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	$\frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!}$	$\frac{\lambda^4 e^{-\lambda}}{4!}$	...	...	1

$$23. \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n-k}.$$

$$24. (1) P\{X=x, Y=y\} = \frac{\lambda^x \mu^y e^{-(\lambda+\mu)}}{x! y!}, x, y=0, 1, 2, \dots.$$

$$(2) P\{X+Y \leq 1\} = e^{-(\lambda+\mu)} (1 + \lambda + \mu).$$

$$25. f(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{3}}, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{4}{\sqrt{3}}y - \frac{4}{3}y^2, & 0 \leq y < \sqrt{3}/2, \\ 1, & y \geq \sqrt{3}/2. \end{cases}$$

$$26. (1) f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{(y+1)^2}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$(2) \text{当 } y > 0 \text{ 时, } f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} x(y+1)^2 e^{-x(y+1)}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} x e^{-xy}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

27. (1)

V \ U	U	
	-1	1
-1	1/6	2/6
1	2/6	1/6

(2) 1/2. (3) 5/6.

$$28. P\{X=k, Y=i\} = \binom{k}{i} p^i (1-p)^{k-i} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad \begin{matrix} k=0, 1, 2, \dots, \\ i=0, 1, 2, \dots, k. \end{matrix}$$

$$29. 1/2. \quad 30. 0.19. \quad 31. \Phi(\sqrt{2}) - \Phi(0) = 0.4207.$$

$$32. (1) 0.8897. (2) 0.2818. (3) 0.9874.$$

$$33. (1) f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} [1 - e^{-\frac{1}{2}(z+\epsilon)^2}], & -\epsilon < z < \epsilon, \\ \frac{1}{2\epsilon} [e^{-\frac{1}{2}(z-\epsilon)^2} - e^{-\frac{1}{2}(z+\epsilon)^2}], & z \geq \epsilon, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$34. f(z) = \begin{cases} -20 \ln(20z), & 0 < z < 0.05, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$35. (1) f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} y e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(2) X, Y 不是相互独立的. (3) $f_{X+Y}(z) = \begin{cases} e^{-z/2} - e^{-z}, & z > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

(4) 对于 $y > 0, f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} 1/y, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

(5) $P\{X > 3|Y < 5\} = 0.03082$. (6) $P\{X > 3|Y = 5\} = 2/5$.

36. (1) np . (2) $n(p + \alpha - p\alpha)$.

37. (1)

X	1	2	3	4	5
p_k	1/15	2/15	3/15	4/15	5/15

(2) $3/5$. (3) $Y \sim b(6, 3/5), E(Y) = 3.6$.

(4) $P\{Y < 4\} = 0.456, P\{Y > 4\} = 0.233$. (5) $E(Z) = 2$.

38. $\frac{nr}{N}$. 39. 14.7. 40. $\frac{\alpha}{\beta(\alpha+1)} + \frac{2}{\alpha^2}$. 41. (1) $\frac{2}{5}$. (2) $\frac{4}{3}$. 42. 0.7852.

43. (2) 不是离散型也不是连续型随机变量, 是混合型随机变量.

(3) $P\{X=4\}=0, P\{X=3\}=0.316, P\{X<4\}=0.684, P\{X>6\}=0.135$.

44. 0.1469. 45. (1) 值域为 $(0, 0.75]$. (2) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ y, & 0 \leq y < 0.75, \\ 1, & y \geq 0.75. \end{cases}$

48. 最大似然估计量 = 矩估计量 = $\frac{\bar{X}}{2}$, 是无偏估计量.

49. $\hat{\mu}_1 = \bar{X}, \hat{\mu}_2 = \bar{Y}, \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n_1 + n_2} \left[\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \bar{Y})^2 \right]$.

50. λ 的对数似然方程为 $\sum_{i=1}^k \frac{d_i(t_i - t_{i-1})}{e^{\lambda(t_i - t_{i-1})} - 1} - \sum_{i=2}^k d_i t_{i-1} - st_k = 0$.

51. $\hat{\lambda} = \frac{1}{T_0} \ln \frac{n}{n-k}$.

52. (1) $L(p_1, p_2) = [(1-p_1)p_2]^{n_1} [(1-p_2)p_1]^{n_2} (1-p_1p_2)^{n_{12}} [p_1p_2]^s$.

(2) $\hat{p}_1 = 0.7150, \hat{p}_2 = 0.8290$.

53. (1) θ 的最大似然估计值为 $13/32, \theta$ 的矩估计值为 $5/12$. (2) $\hat{\beta} = \bar{x}/\alpha$.

54. (2) $E(\hat{X}) = \exp\{\hat{\mu} + \hat{\sigma}^2/2\}$, 其中 $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i, \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \hat{\mu})^2$.

(3) $E(\hat{X}) = 28.3067$.

55. $\hat{\eta} = \left(\frac{T_m}{m}\right)^{1/\beta}$, 其中 $T_m = \sum_{i=1}^m x_i^\beta + (n-m)x_m^\beta$.

56. (1) $\hat{\eta} = 214.930$. (2) $p = 0.841$.

57. $a = \frac{n_1 - 1}{n_1 + n_2 - 2}, b = \frac{n_2 - 1}{n_1 + n_2 - 2}$. 59. (2) $\frac{2n\bar{X}}{\chi_a^2(2n)}$. (3) 3764.7.

60. (3) $h_{\alpha/2} = (1 - \alpha/2)^{1/n}, h_{1-\alpha/2} = (\alpha/2)^{1/n}$.

(4) $((1 - \alpha/2)^{-1/n} \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}, (\frac{\alpha}{2})^{-1/n} \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\})$.

(5) (4.22, 8.78).

61. 拒绝域为 $\chi^2 = \frac{2n\bar{x}}{\theta_0} \geq \chi_{\alpha/2}^2(2n)$ 或 $\chi^2 = \frac{2n\bar{x}}{\theta_0} \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(2n)$; 拒绝域为 $\chi^2 > 39.364$ 或 $\chi^2 <$

12.401, 现在 $\chi^2 = 24.83$ 故接受 H_0 .

62. 认为无显著差异. 63. 拒绝 H_0 , 认为可降低血压.

64. 认为是有偏爱的. 65. 认为 $X \sim b(4, \theta)$.

66. 拒绝 H_0 , 认为春季发生的案件数的均值比秋季的多. 67. 认为有显著差异.

68. (1) $\hat{y} = 13.487 + 1.065x$. (2) 认为回归效果显著. (3) $\hat{y}|_{x=13} = 27.332$.

(4) 在 $x=13$ 处 $\mu(x)$ 的置信水平为 0.95 的置信区间为 (27.332 ± 1.244) .

(5) 在 $x=13$ 处 Y 的新观测值 Y_0 的置信水平为 0.95 的预测区间为 (27.332 ± 3.487) .

69. (2) $\hat{y} = 774.0125 - 0.35915x$. (3) 回归效果是非常显著的.

