

原书第6版

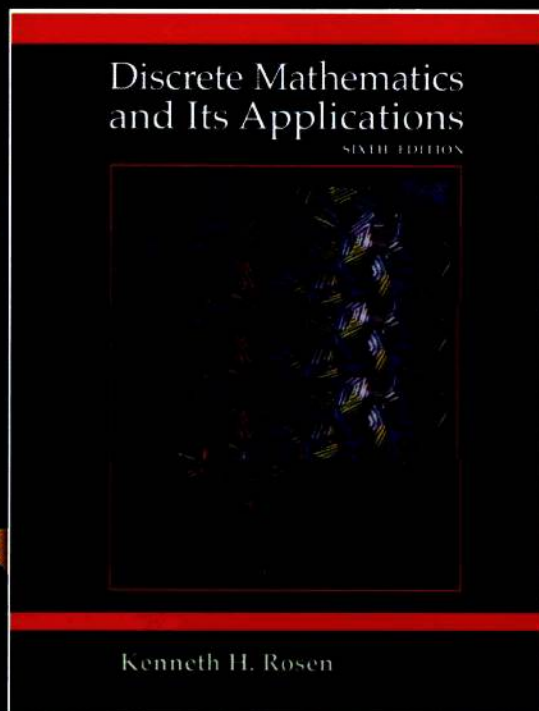
Mc
Graw
Hill Education



离散数学及其应用

(美) Kenneth H. Rosen 著 袁崇义 屈婉玲 张桂芸 等译 陈琼 改编

Discrete Mathematics and Its Applications
Sixth Edition



离散数学及其应用 (原书第6版·本科教学版)

Discrete Mathematics and Its Applications Sixth Edition

《离散数学及其应用》一书是介绍离散数学理论和方法的经典教材,已经成为采用率最高的离散数学教材,仅在美国就被600多所高校用作教材,并获得了极大的成功。第6版在前5版的基础上做了大量的改进,使其成为更有效的教学工具。

本书基于该书第6版进行改编,保留了国内离散数学课程涉及的基本内容,更加适合作为国内高校计算机及相关专业本科生的离散数学课程教材。

本书的具体改编情况如下:

- 第1章中补充了关于范式和标准型的基础内容
- 删去了在其他课程中讲授的内容,如数论、离散概率、归纳和递归等
- 对于保留章节,删去了编号为偶数的练习题
- 删去了相关的历史资料

作者简介:

Kenneth H. Rosen 密歇根大学数学学士,麻省理工学院数学博士。曾就职于科罗拉多大学、俄亥俄州立大学、缅因大学,后加盟贝尔实验室,现为AT&T实验室特别成员。除本书外,他还著有《初等数论及其应用》等书,并担任CRC离散数学丛书的主编。



中文版
书号: 978-7-111-23935-2
定价: 89.00元



英文精编版
书号: 978-7-111-31329-8
定价: 55.00元



英文版
书号: 978-7-111-35950-0
定价: 99.00元

客服热线: (010) 88378991, 88361066
购书热线: (010) 68326294, 88379649, 68995259
投稿热线: (010) 88379604
读者信箱: hzjsj@hzbook.com



Mc
Graw
Hill Education

www.mheducation.com

全国网站: <http://www.hzbook.com>

网上购书: www.china-pub.com

印刷设计: 陈国治

上架指南: 计算机·离散数学

ISBN 978-7-111-35950-0



9 787111 359500

定价: 49.00元

计 算 机 科 学 丛 书

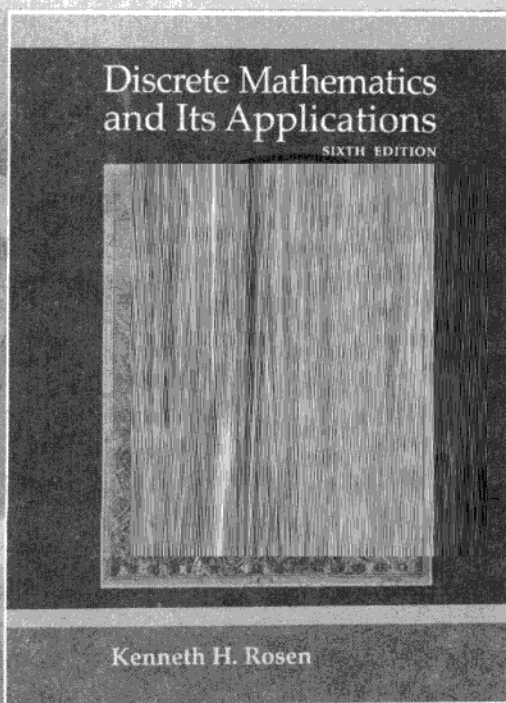
原书第6版



离散数学及其应用

(美) Kenneth H. Rosen 著 袁崇义 屈婉玲 张桂芸 等译 陈琼 改编

Discrete Mathematics and Its Applications
Sixth Edition



机械工业出版社
China Machine Press

本书是经典的离散数学教材,为全球多所大学广为采用。本书全面而系统地介绍了离散数学的理论和方法,除包括定义、定理的严密陈述外,还配备大量的实例和图表的说明、各种练习和题目。第6版在前五版的基础上做了大量的改进,使其成为更有效的教学工具。

本书可作为高等院校数学、计算机科学和计算机工程等专业的教材或参考书。

Kenneth H. Rosen; Discrete Mathematics and Its Applications, Sixth Edition (ISBN 0-07-322972-5).

Copyright © 2007 by Kenneth H. Rosen.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including without limitation photocopying, recording, taping, or any database, information or retrieval system, without the prior written permission of the publisher.

This authorized Chinese adaptation is jointly published by McGraw-Hill Education (Asia) and China Machine Press. This edition is authorized for sale in the People's Republic of China only, excluding Hong Kong SAR, Macao SAR and Taiwan.

Copyright © 2011 by McGraw-Hill Education (Asia), a division of the Singapore Branch of The McGraw-Hill Companies, Inc. and China Machine Press.

版权所有。未经出版人事先书面许可,对本出版物的任何部分不得以任何方式或途径复制或传播,包括但不限于复印、录制、录音,或通过任何数据库、信息或可检索的系统。

本授权中文简体字改编版由麦格劳-希尔(亚洲)教育出版公司和机械工业出版社合作出版。此版本经授权仅限在中华人民共和国境内(不包括香港特别行政区、澳门特别行政区和台湾)销售。

版权 © 2011 由麦格劳-希尔(亚洲)教育出版公司与机械工业出版社所有。

本书封面贴有 McGraw-Hill 公司防伪标签,无标签者不得销售。

封底无防伪标均为盗版

版权所有,侵权必究

本书法律顾问 北京市展达律师事务所

本书版权登记号:图字:01-2010-3825

图书在版编目(CIP)数据

离散数学及其应用(原书第6版·本科教学版)/(美)罗森(Rosen, K. H.)著;袁崇义等译. —北京:机械工业出版社,2011.11

(计算机科学丛书)

书名原文:Discrete Mathematics and Its Applications, Sixth Edition

ISBN 978-7-111-35950-0

I. 离… II. ①罗… ②袁… III. 离散数学—高等学校—教材 IV. O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第192847号

机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街22号 邮政编码 100037)

责任编辑:迟振春

北京荣盛彩色印刷有限公司印刷

2011年11月第1版第1次印刷

185mm×260mm·23.5印张

标准书号:ISBN 978-7-111-35950-0

定价:49.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

客服热线:(010)88378991;88361066

购书热线:(010)68326294;88379649;68995259

投稿热线:(010)88379604

读者信箱:hjsj@hzbook.com

文艺复兴以降,源远流长的科学精神和逐步形成的学术规范,使西方国家在自然科学的各个领域取得了垄断性的优势;也正是这样的传统,使美国在信息技术发展的六十多年间名家辈出、独领风骚。在商业化的进程中,美国的产业界与教育界越来越紧密地结合,计算机学科中的许多泰山北斗同时身处科研和教学的最前线,由此而产生的经典科学著作,不仅擘划了研究的范畴,还揭示了学术的源变,既遵循学术规范,又自有学者个性,其价值并不会因年月的流逝而减退。

近年,在全球信息化大潮的推动下,我国的计算机产业发展迅猛,对专业人才的需求日益迫切。这对计算机教育界和出版界都既是机遇,也是挑战;而专业教材的建设在教育战略上显得举足轻重。在我国信息技术发展时间较短、从业人员较少的现状下,美国等发达国家在其计算机科学发展的几十年间积淀的经典教材仍有许多值得借鉴之处。因此,引进一批国外优秀计算机教材将对我国计算机教育事业的发展起积极的推动作用,也是与世界接轨、建设真正的世界一流大学的必由之路。

机械工业出版社华章图文信息有限公司较早意识到“出版要为教育服务”。自1998年开始,我们就将工作重点放在了遴选、移译国外优秀教材上。经过多年的不懈努力,我们与Pearson, McGraw-Hill, Elsevier, MIT, John Wiley & Sons, Cengage等世界著名出版公司建立了良好的合作关系,从他们现有的数百种教材中甄选出Andrew S. Tanenbaum, Bjarne Stroustrup, Brian W. Kernighan, Dennis Ritchie, Jim Gray, Alfred V. Aho, John E. Hopcroft, Jeffrey D. Ullman, Abraham Silberschatz, William Stallings, Donald E. Knuth, John L. Hennessy, Larry L. Peterson等大师名家的一批经典作品,以“计算机科学丛书”为总称出版,供读者学习、研究及珍藏。大理石纹理的封面,也正体现了这套丛书的品位和格调。

“计算机科学丛书”的出版工作得到了国内外学者的鼎力襄助,国内的专家不仅提供了中肯的选题指导,还不辞劳苦地担任了翻译和审校的工作;而原书的作者也相当关注其作品在中国的传播,有的还专程为其书的中译本作序。迄今,“计算机科学丛书”已经出版了近两百个品种,这些书籍在读者中树立了良好的口碑,并被许多高校采用为正式教材和参考书籍。其影印版“经典原版书库”作为姊妹篇也被越来越多实施双语教学的学校所采用。

权威的作者、经典的教材、一流的译者、严格的审校、精细的编辑,这些因素使我们的图书有了质量的保证。随着计算机科学与技术专业学科建设的不断完善和教材改革的逐渐深化,教育界对国外计算机教材的需求和应用都将步入一个新的阶段,我们的目标是尽善尽美,而反馈的意见正是我们达到这一终极目标的重要帮助。华章公司欢迎老师和读者对我们的工作提出建议或给予指正,我们的联系方式如下:

华章网站: www.hzbook.com

电子邮件: hzsj@hzbook.com

联系电话: (010)88379604

联系地址: 北京市西城区百万庄南街1号

邮政编码: 100037



华章科技图书出版中心

改编者序

Discrete Mathematics and Its Applications, 6E

原版《离散数学及其应用》是一本优秀的教材，由 Kenneth H. Rosen 编著，已被全球超过 600 所大学使用。《离散数学及其应用》介绍了离散数学的主要内容以及离散数学在现实世界中的应用，书中内容全面，一些知识点给出了相关的历史背景知识，并配有大量的应用实例、参考资料和练习题，对学习该课程提供了极大的帮助。

近年来，国内的许多高校都在开展双语教学，并且采用国外的优秀原版书作为教材。而《离散数学及其应用》原版书超过 800 页，使得国内高校难以采用。为了将这本优秀教材介绍给更多的中国学生，在保留原作者写作风格的前提下，我们删减了部分章节内容编成此精编版，以适合中国学生的使用和阅读。精编版符合本科离散数学教学大纲的要求，可用于离散数学教学和课外学习。

原书中的一些内容，如数论、离散概率、归纳和递归、布尔代数以及有限状态机等，在其他课程中已有讲授或单独作为一门课程讲授，我们在精编版中将这些内容删除，保留了逻辑和证明、集合、函数和关系、图、树、计数和高级计数技术等内容。

原书有 3800 多道各种类型的练习题，其中包括帮助学生掌握基本概念的习题、提高应用所学知识分析和解决问题能力的习题等，分较为容易、难度适中和难度较大各种类型。为了保持原书的特点，我们保留了原书中奇数练习题，这样可以使得原书的各种类型、不同难度的习题都得以保留。关于一些知识点的相关历史背景知识未作保留，以减轻学生的阅读负担，减少本书的篇幅。

原书把一些概念放在练习题部分介绍，有些概念很重要，如数理逻辑中的范式，而原书对范式的描述较为简单，学生较难理解，所以我们将范式的相关内容补充到精编版的第 1 章中。

感谢我的同事杨捷在本书改编过程中提出的宝贵建议。精编版力求符合本科离散数学教学大纲的要求并将原书的精华体现出来，但难免存在不足之处，欢迎广大教师和学生指正。

陈琼

2011 年 9 月于华南理工大学

离散数学被 IEEE&ACM 确定为计算机专业核心课程,也是《中国计算机科学与技术学科教程 2002》中界定的计算机科学与技术专业的核心基础课程。离散数学为许多专业课程提供理论基础,尤其是大多数算法的基础,可以说,不理解算法背后的数学含义,就不能理解算法的本质,而这种表面的一知半解很可能会给你带来很大的麻烦。本书的写作目标就是向读者展示离散数学的实用性:为计算机专业学生提供一切必要的数学基础,使数学专业学生理解数学概念的重要性以及这些概念为什么对应用而言是重要的。

本书译自 Kenneth H. Rosen 所著的《Discrete Mathematics and Its Applications, Sixth Edition》,是介绍离散数学理论和方法的经典教材,已经成为世界上使用率最高的离散数学教材之一,目前已用五种语言出版,发行 30 多万册,仅在美国就被 600 多所高校用作教材,并获得了极大的成功。国内很多院校也选择这本书作为教材。

这本书是计算机理论中一本很好的入门教材,几乎涉及计算机理论的所有方面。该书有如下几个特点:

- 1) 通俗易懂,深入浅出。问题的引入、概念的描述和定理的阐述等通俗而不失科学性。
- 2) 书中例子很多,而且非常实用,还包含了世界名题和一些趣味性很强的问题。
- 3) 信息量虽然很大,但安排灵活,读者可以根据自己的兴趣选择性地学习。
- 4) 涉及面特别广,可以使读者大致了解计算机理论的方方面面,有助于读者理解计算机科学与技术中蕴含的数学思想、数学思维,培养读者对问题的数学建模能力,激发读者学习其他课程的兴趣。
- 5) 习题相当丰富,形容为“触目惊心”也不为过。题量大、题型多,有基础的也有探究的,有理论的也有实践的,正像作者在前言中强调的那样,他相当重视练习。

整本书阅读顺畅,行文活泼,作为参考书查阅也很方便。但书中多数章节还仅仅是相关的基础知识,也就是说,对这本书中的每一个知识点,比如逻辑、函数、组合数学、概率、算法等,都可以进行延伸阅读。有兴趣的话,读者不妨顺着书后的推荐阅读列表,继续深入下去。最后建议大家花些时间仔细阅读前言,这对你用好本书、更好地学习离散数学等非常有帮助。

本书第 5 版主要由袁崇义、屈婉玲、王捍贫和刘田翻译完成,而第 6 版的翻译工作是在第 5 版译稿的基础上进行的,主要由张桂芸、赵子平、裴伟东、徐计和王向云翻译完成,张桂芸做了全书的统稿和定稿工作。由于翻译水平和时间有限,书中难免有不妥的地方,敬请读者不吝赐教。

译者
2011 年 5 月于天津

本书是根据我多年讲授离散数学的经验和兴趣写成的。对学生而言,我的目的是为他们提供准确而可读的教材,清晰地介绍离散数学的概念和技术。我的目标是向爱怀疑的学生们展示离散数学的实用性,希望为学习计算机科学的学生提供一切必需的数学基础,也希望学数学的学生理解数学概念的重要性,以及这些概念为什么对应用是重要的,还希望本书既能达到这些目标,又不含太多的水分。

对教师(指导者)而言,我的目的是使用成熟的数学教学技术设计一个灵活而全面的教学工具,希望为教师们提供能够以最适合特定学生特点的方式高效地讲授离散数学的教材。希望本书能够达到这些目标。

我为本教材在过去已经取得的巨大成功而分外高兴。根据成功使用本书的600多所学校的大批师生的反馈和建议,此次第6版进行了许多改进。很多内容有所提高,辅助材料更加丰富,配套网站提供的材料更有帮助性,使师生更容易达到他们的目标。

本教材是为1至2个学期的离散数学入门课程而设计的,适用于数学、计算机科学、工程等许多专业的学生。虽然唯一的先修课要求是大学代数,但是要想学习好离散数学还需要掌握更多的数学知识。

离散数学课的目标

离散数学课有多个目标。学生不仅要学会一些特定的数学知识并知道怎样应用,更重要的是,这样一门课应教会学生怎样进行数学逻辑思维。为此,本教材特别强调数学推理及用不同的方法解题。本教材有5个重要的主题交织在一起:数学推理、组合分析、离散结构、算法思维、应用与建模。成功的离散数学课程应该努力使这五部分内容相互融合、平衡。

1. **数学推理**: 学生必须理解数学推理,以便阅读、理解和构造数学证明。本教材以数理逻辑开篇,在后面证明方法的讨论中,数理逻辑是基础。同时,本书描述了构造性证明的方法和技巧。本书还十分强调数学归纳法,不仅用许多证明的实例进行介绍,还详细地解释了数学归纳法为什么是有效的证明方法。

2. **组合分析**: 解题的一项重要技巧是计数或枚举对象。本书中,对枚举的讨论从基本的计数方法着手,重点是用组合分析方法来解决计数问题,而不直接使用公式。

3. **离散结构**: 离散数学课应该教会学生如何使用离散结构,即学会如何使用表示离散对象及其之间的关系的抽象数学结构。离散结构包括:集合、置换、关系、图、树和有限状态机等。

4. **算法思维**: 有些问题是通过详细说明其算法来求解的。算法在描述后就可构造计算机程序来实现。这一过程中用到的数学部分包括:算法描述、正确性证明以及执行算法所需要的计算机内存和时间的分析。这些内容在本书中均有介绍。算法是用英语^①和一种易于理解的伪码描述的。

5. **应用与建模**: 离散数学几乎应用在所有研究领域。本书既介绍了其在计算机科学和数据网络中的许多应用,也介绍了在其他各种领域中的应用,如化学、植物学、动物学、语言学、地理、商业以及互联网等。这些均是离散数学的实际而重要的应用,而不是编造的。用离散数学来建模是十分重要的问题求解技巧。本书中的一些练习让学生有机会通过自己构造模型来掌握这一技巧。

① 译著中采用汉语。——译者注

本书特点

易入门 实践证明：此课本对初学者来说易读易懂。它的大部分内容只要求学生学过大学代数，不需要其他的预备知识，少数几个涉及微积分的地方也有明确说明。大部分学生应该很容易理解课本中用于表示算法的伪码，不管他们是否学过程序设计语言。本书不要求正规计算机科学方面的预备知识。

每章都是从易理解的水平开始。本书在仔细研究基本的数学概念之后，就介绍了其他领域中更难的部分和应用。

灵活性 课本为灵活使用作了精心设计。各章对其前面内容的依赖都降到最低程度。每一章分成长度大致相等的若干节，每一节又根据内容划分成小节以方便教学。教师可以根据这些分块灵活地安排进度。

写作风格 本书的写作风格是直接和实用。使用准确的数学语言，但没有过分的形式化与过分的抽象。在记号和数学命题的词汇间作了精心的平衡。

数学严谨性和准确性 本书中所有定义和定理的陈述都十分详细，所以学生可以欣赏其语言的准确以及数学所需的严谨。但证明则是缓慢引入并展开的，每一步都经过了详细论证。本书解释并大量使用了递归定义。

实例 本书使用了很多例子来阐述概念、建立不同内容之间的关系或导入应用。在大部分例子中，先提出问题，再适当给出它的解。

应用 书中叙述的应用展示了离散数学在解决现实问题中的使用价值，所涉及的范围很广，包括计算机科学、数据网络、心理学、化学、工程、语言学、生物学、商业和互联网。

算法 离散数学的结论常常要用算法来表示，因此，本书每一章都介绍了一些关键算法。书中还简要分析了所有算法的计算复杂性。

关键术语和结果 每一章后面都列出了本章的关键术语和结果，但只列出了学生必须学会的那些最重要的关键术语，而不是在该章中定义的所有术语。

练习 书中包含许多练习，代表了大量不同类型的问题。本书不仅提供了足够多的简单问题用于练习基本技巧，还提供了大量的中等难度的练习和许多有挑战性的练习。练习的叙述清晰而无歧义，并按难易程度进行了分级。有些特殊的论题还设计成系列练习。这些练习不仅给出了正文中没有介绍的新概念，还使学生可以通过自己的努力发现新思想。

比平均水平稍难的练习用单个星号作标记，相当有挑战性的问题则用两个星号来标记。必须用微积分来解的练习也作了明确说明。导出正文要用到的结果的练习则用符号“ $\square$ ”识别。

复习题 每章最后都有一组复习题。设计这些问题的目的是帮助学生重点学习该章最重要的概念和技术。要回答这些复习题，学生必须写出较长的答案，而只做点计算或简答是不够的。

计算机题目 每一章后面还有一组计算机题目。这些题目把学生可能已经学到的有关计算和离散数学的内容联系起来。如果从数学角度或程序设计角度来看，其难度超过平均水平的计算机题目用一个星号标记，特别有挑战性的则用两个星号标记。

计算和研究 每一章的结论部分都有一组计算和研究性问题。要完成这些练习(大约有 100 道)需要软件工具的帮助，例如学生或教师自己编写的程序，或数学计算软件包(如 Maple 或 Mathematica)。大部分这样的练习为学生提供了通过计算发现新事实或新思想的机会。

写作题目 每一章后面都有一组应该书面完成的题目。要完成这类题目，学生需要参考数学文献。有些题目在过去的历史上是很重要的，学生需要查找原始资料，其他的题目则是通往新内容和新思想的途径。所有此类练习均向学生展示正文中没有深入探讨的思想。这些题目把数学概念和书面写作的过程结合在一起，以帮助学生探索未来的研究领域。

推荐读物 在正文的最后，专门有一节用来为各章推荐参考读物，其中有不超出本书水平的书籍，

也有较难的书籍；有综述性文章，也有发表离散数学新发现的原始文章。其中一些是许多年前出版的经典读物，而其他一些是在最近几年内出版的。

配套网站

为本书开发了一个内容广泛的配套网站，该网站将不断地维护和改进。可以以多种方式使用该网站进一步学习离散数学，网站地址是：

www.mhhe.com/rosen

由此地址进入该网站的主页。该网页有下列链接：

- 信息中心
- 学生中心
- 教师中心

信息中心：该中心包含本书及其辅助资料的基本信息。教师在这个网页中可以利用网页抽取系统“Page Out”，建立自己的课程网页，还能学习定制出版信息。从该信息中心出发，沿着适当的链接，可以看到本书网站的一个概观。

学生中心：该中心包含了可供学生使用的丰富资源，包括下列与课本紧密相关的资源（在课本中用相应的图标加以标记）：



- **网络资源指南：**该指南提供了数百个含相关资料的外部网站的链接。可以通过关键词浏览或访问这些链接，它们将把你带到包含下列信息的网站：历史及传记信息、谜题及问题、讨论、Java 小程序、程序以及其他类型的资源。



- **额外的例子：**这个网站包含了大量额外的例子。这些例子主要集中在学生经常需要的课外资料的领域。虽然大部分例子只是扩充了基本概念，但还有一部分十分具有挑战性。



- **额外的步骤：**对一些困难的知识点，提供了更深入的解释帮助理解，尤其是一些特殊的证明和例子。



- **评估：**提供对七个关键概念理解程度的评估。每个评估都提供了一个题库，其中的每个试题由两部分构成：先是一段简短的复习，然后是一个多选题。如果你选择的答案不正确，该系统还能提供建议，帮助你理解错在什么地方。这样的评估系统应该能诊断出你学习中的问题，从而把精力集中在寻找纠正办法上。



- **交互式演示：**已经开发了八个交互式演示系统，你可以用它们考查一些重要算法是怎么工作的。这些演示都与课本中的相应材料相对应。

从该学生中心你可以访问网络教学系统“Net Tutor”。它提供了在线教学帮助。当你提问与课本内容相关的问题时，如果是在规定教学时间内，你会收到实时回答；否则稍后才会收到回答。

学生中心还支持能发布消息的公告板系统。使用该系统，你可以提出问题，还可以回答其他学生提出的问题。

除此之外，学生中心还包括下列资源：

- 证明书写指南
- 离散数学的常见错误
- 写作题目的建议
- Maple 软件

教师中心：除了包含学生中心和信息中心提供的所有链接外，网站中的教师中心还包含下列链接：

- 教学大纲样本
- 教学建议
- 《Applications of Discrete Mathematics》一书中的某些章节

写给学生

什么是离散数学？离散数学是数学中研究离散对象的部分。（这里“离散”的含义是“由不同的或不相连的元素组成”。）离散数学能解决的问题包括：

- 在计算机系统中，有多少种方式可以选择一个合法口令？
- 赢彩票的概率是多少？
- 两台计算机之间在网络上是否有通路？
- 怎样鉴别 E-mail 信息中的垃圾邮件？
- 怎样加密信息以避免不该收到的人读取该信息？
- 在某一交通系统下，两个城市之间的最短路径是什么？
- 怎样把整数序列按递增序排列？
- 完成上述排序需要多少步骤？
- 如何证明一个排序方法能正确地排序？
- 怎样设计两个整数相加的电路？
- 有多少合法的因特网网址？

你们将学习解决诸如以上问题要用到的离散结构和技术。

更一般地，在对对象进行计数时要用到离散数学，研究两个有限(或可数)集合之间的关系时要用到离散数学，分析只含有限步的进程时也要用到离散数学。离散数学的重要性还在不断增加，一个关键原因就是计算机以离散的方式存储和处理信息。

为什么要学离散数学？有几条重要的理由来说明需要学习离散数学。首先，通过这个课程你们可以发展自己的数学素质，即理解和创造数学证明的能力。没有这些技巧，你们在学习数学时不可能太深入。

其次，离散数学是学习所有更高级数学课程的必经之路。离散数学为学习计算机科学课程提供必要的数学基础，这些课程包括：数据结构、算法、数据库理论、自动机理论、形式语言、编译理论、计算机安全以及操作系统。学生如果没有适当的离散数学基础，在学习上述课程时会感到很困难。有个学生给我发电子邮件说，在她学习的每一门计算机科学的课中都用到了本书的知识。

以离散数学为基础的数学课程包括逻辑、集合论、数论、线性代数、抽象代数、组合论、图论及概率论(其离散部分)。

此外，离散数学还包括了解运筹学(包括许多离散优化技术)、化学、工程及生物学等领域问题的必要的数学背景。从本书中你将学到在上述某些领域中的应用。

许多学生都感到，与他们以前学过的课程相比，离散数学入门课程的挑战性要大得多。这是因为，本课程的一个主要目的是教你进行数学推理和问题求解，而不只是一些分散的技巧。从课本中练习的设计可以看出这个目的。课本中虽然有大量与重点例子类似的练习，但还是有相当比例的练习需要创造性思维。这是有意设计的。虽然课本中的材料提供了解这些问题的工具，但你的任务是创造性地使用这些工具并取得成功。本课程的另一个主要目的是学会处理你以前没有见过的问题。然而，只学会解特殊类型的练习还无法保证能学会足够多的解题技巧，也不能保证在后继课程的学习中或在将来的职业生涯中取得成功。虽然课本讨论了许多主题，但离散数学是一个极为广泛且充满变化的研究领域。作为作者，我的任务之一是帮助你开发学习新知识的能力，在将来的奋斗中你十分需要新的知识。

练习 我愿意就如何学好离散数学(或数学的其他学科和计算机科学)给同学们提点有益的建议。积极地做练习能使你最大地获益。我建议你尽可能地多做练习。在做完老师布置的练习后，我鼓励你做更多的练习，包括本书每节后面的练习和每章后面的补充练习。(注意练习前面的分级标记。)

练习标记	含 义
无标记	常规练习
*	较难的练习
**	富有挑战性的练习
□	正文中要用到该练习的某个结论
(需要用到微积分)	解题时要用到极限或微积分的概念

解题时，最好在查阅答案以前，自己先进行尝试。华章网站(www.hzbook.com)提供了练习的答案。注意，只是答案，而不是完整解答。特别地，答案中省略了解的推导过程。

网络资源 我强烈推荐你利用网络提供的新资源，特别是专为本书设计的网站 <http://www.mhhe.com/rosen> 中的资源。其中为澄清关键的概念设计了许多额外的例子，自我评测是考查你对关键问题的掌握程度；交互演示小程序帮你探索关键算法和其他概念；网络资源向导包含了广泛的与离散数学有关的外部链接；额外的解释和实践会帮助你掌握关键的概念，增加的书写证明可以避免离散数学中的一般错误；重要应用的深入探索指导应用 Maple 软件探索离散数学中的计算问题。在文中这些额外的在线资源尽可能在边缘处用特定图标标识。

本书的价值 我希望你对本书的投资能得到优质的回报。我们花了多年的努力来开发和优化本书及其配套的辅助读物和网站。对大多数人来说，我很自信本书及其配套资料对掌握离散数学大有帮助。即使你现在的课程可能略去了其中某些章节，但当你学习新课程时会发现，阅读本书中的相关章节对新课程仍然十分有益，许多学生都有这样的感觉。许多人会在将来的研究工作时又找到本书，把它当做一本有用的工具书，特别是那些继续学习计算机科学、数学或工程的人。我设计本书作为你将来研究和探索的入门，我希望你能幸运地开始你的征程。

致谢

我要感谢很多学校中使用本书的大批师生们，他们向我提出了宝贵的反馈和有益的建议。没有他们的反馈和建议，本书不可能有很大的改进。我要特别感谢 Jerrold Grossman、John Michaels 和 George Bergman，感谢他们对第 6 版的技术审阅，他们敏锐的目光确保了本书的准确性。我也要感谢通过网站提交评论的人们提供的帮助。

我感谢本书第 6 版及前面 5 版的许多评阅人，他们对我提出了许多有益的批评和鼓励，我希望本版不辜负他们的期望。

第 6 版评阅人名单

Charles Ashbacher,
Mount Mercy College

Ian Barland,
Rice University

George Bergman,
University of California, Berkeley

David Berman,
University of North Carolina,
Wilmington

Miklós Bóna,
University of Florida

Prosenjit Bose,
Carleton University

Kirby Brown,
Polytechnic University

Michael Button,
The Master's College

Greg Cameron,
Brigham Young University

John Carter,
University of Toronto

Greg Chapman,
Cosumnes River College

Chao-Kun Cheng,
Virginia Commonwealth University

Thomas Cooper,
Georgia Perimeter College,
Lawrenceville

Barbara Cortzen,
DePaul University

Daniel Cunningham,
Buffalo State College

George Davis,
University of Georgia

Beverly Diamond,
College of Charleston

Thomas Dunion,
Atlantic Union College

Bruce Elenbogen,
University of Michigan, Dearborn

Herbert Enderton,
University of California,
Los Angeles

Anthony Evans,
Wright State University

Kim Factor,
Marquette University

William Farmer,
McMaster University

Li Feng,
Albany State University

Stephanie Fitchett,
Florida Atlantic University

Jerry Fluharty,
Eastern Shore Community College

Joel Fowler,
Southern Polytechnic State University

William Gasarch,
University of Maryland

Sudipto Ghosh,
Colorado State University

Jerrold Grossman,
Oakland University

Ruth Haas,
Smith College

Patricia Hammer,
Hollins University

Keith Harrow,
Brooklyn College

Bert Hartnell,
St. Mary's University

Julia Hassett,
Oakton College

Kavita Hatwal,
Portland Community College

John Helm,
Radford University

Arthur Hobbs,
Texas A&M University

Fannie Howell,
Roanoke High School

Wei Hu,
Houghton College

Nan Jiang,
University of South Dakota

Margaret Johnson,
Stanford University

Martin Jones,
College of Charleston

Tim Kearns,
California Polytechnic State University, San Luis Obispo

Jonathan Knappenberger,
LaSalle University

Ed Korntved,
Northwest Nazarene University

Przemo Kranz,
University of Mississippi

Loredana Lanzani,
University of Arkansas

Yoonjin Lee,
Smith College

Miguel Lerma,
Northwestern University

Jason Levy,
University of Hawaii

Lauren Lilly,
Tabor College

Ekaterina Lioutikova,
Saint Joseph College

Vladimir Logvinenko,
De Anza College

Joan Lukas,
University of Massachusetts, Boston

Lester McCann,
University of Arizona

Jennifer McNulty,
University of Montana

John G. Michaels,
SUNY Brockport

Michael Oppedisano,
Morrisville State College

Michael O'Sullivan,
San Diego State University

Charles Parry,
Virginia Polytechnic Institute

Linda Powers,
Virginia Polytechnic Institute

Dan Pritikin,
Miami University

Anthony Quas,
University of Memphis

Eric Rawdon,
Duquesne University

Henry Ricardo,
Medgar Evers College

Oskars Rieksts,
Kutztown University

Stefan Robila,
Montclair State University

Chris Rodger,
Auburn University

Robert Rodman,
North Carolina State University

Shai Simonson,
Stonehill College

Barbara Smith,
Cochise College

Wasin So,
San Jose State University

Diana Staats,
Dutchess Community College

Lorna Stewart,
University of Alberta

Bogdan Suceava,
California State University, Fullerton

Kathleen Sullivan,
Seattle University

Laszlo Szekely,
University of South Carolina

Daniel Tauritz,
University of Missouri, Rolla

Don VanderJagt,
Grand Valley State University

Fran Vasko,
Kutztown University

Susan Wallace,
University of North Florida

Zhenyuan Wang,
University of Nebraska, Omaha

Tom Wineinger,
University of Wisconsin, Eau Claire

Charlotte Young,
South Plains College

前 5 版评阅人名单

Eric Allender,
Rutgers University

Stephen Andrilli,
La Salle University

Kendall Atkinson,
University of Iowa, Iowa City

Scott Buffett,
University of New Brunswick

Russell Campbell,
University of Northern Iowa

Zhaojun Bai,
University of California, Davis

Jack R. Barone,
Baruch College

Klaus Bichteler,
University of Texas, Austin

David Jonah,
Wayne State University

Akihiro Kanamori,
Boston University

Alfred E. Borm,
Southwest Texas State University

Ken W. Bosworth,
University of Maryland

Lois Brady,
California Polytechnic State University, San Luis Obispo

Ho Kuen Ng,
San Jose State University

Timothy S. Norfolk, Sr.
University of Akron

目 录

Discrete Mathematics and Its Applications, 6E

出版者的话

改编者序

译者序

前言

第 1 章 基础：逻辑和证明 1

1.1 命题逻辑 1

1.1.1 引言 1

1.1.2 命题 1

1.1.3 条件语句 3

1.1.4 复合命题的真值表 6

1.1.5 逻辑运算符的优先级 7

1.1.6 翻译语句 7

1.1.7 系统规范说明 8

1.1.8 布尔检索 8

1.1.9 逻辑难题 9

1.1.10 逻辑运算和位运算 9

练习 10

1.2 命题等价 13

1.2.1 引言 13

1.2.2 逻辑等价 14

1.2.3 德摩根律的运用 16

1.2.4 构建新的逻辑等价式 16

练习 18

1.3 谓词和量词 20

1.3.1 引言 20

1.3.2 谓词 20

1.3.3 量词 21

1.3.4 其他量词 24

1.3.5 约束论域量词 24

1.3.6 量词的优先级 24

1.3.7 绑定变量 24

1.3.8 涉及量词的逻辑等价 24

1.3.9 否定量化表达式 25

1.3.10 翻译语句为逻辑表达式 26

1.3.11 在系统说明中运用量词 28

1.3.12 选自 Lewis Carroll 的例子 28

1.3.13 逻辑程序设计 29

练习 30

1.4 嵌套量词 32

1.4.1 引言 32

1.4.2 量词的顺序 33

1.4.3 将数学语句翻译成涉及嵌套
量词的语句 34

1.4.4 将嵌套量词翻译为汉语 35

1.4.5 将汉语语句翻译成逻辑
表达式 35

1.4.6 否定嵌套量词 36

练习 36

1.5 推理规则 39

1.5.1 引言 39

1.5.2 命题逻辑的有效论证 39

1.5.3 命题逻辑的推理规则 40

1.5.4 用推理规则建立论证 42

1.5.5 消解 43

1.5.6 谬误 43

1.5.7 带量词命题的推理规则 44

1.5.8 命题推理和量化语句推理规则
的结合 45

练习 45

1.6 证明导论 47

1.6.1 引言 47

1.6.2 一些专用术语 47

1.6.3 定理陈述的理解 47

1.6.4 证明定理的方法 48

1.6.5 直接证明 48

1.6.6 反证法 49

1.6.7 归谬证明	50	2.3.2 一对一函数和映上函数	85
1.6.8 证明中的错误	52	2.3.3 反函数和函数组合	86
1.6.9 仅仅是开始	53	2.3.4 函数的图像	88
练习	53	2.3.5 几个重要的函数	89
1.7 证明的方法和策略	54	练习	91
1.7.1 引言	54	2.4 序列与求和	93
1.7.2 穷举证明和分情形证明	54	2.4.1 引言	93
1.7.3 存在性证明	57	2.4.2 序列	93
1.7.4 唯一性证明	58	2.4.3 特殊的整数序列	94
1.7.5 证明策略	58	2.4.4 求和	96
1.7.6 寻找反例	60	2.4.5 基数	98
1.7.7 行动证明策略	60	练习	100
1.7.8 填充	60	关键术语和结果	101
1.7.9 未解决问题的作用	63	复习题	103
1.7.10 其他证明方法	63	补充练习	103
练习	64	计算机题目	105
关键术语和结果	65	计算和研究	105
复习题	66	写作题目	105
补充练习	67		
计算机题目	68	第3章 计数	106
计算和研究	69	3.1 计数基础	106
写作题目	69	3.1.1 引言	106
		3.1.2 基本的计数原则	106
第2章 基本结构：集合、函数、		3.1.3 比较复杂的计数问题	109
数列与求和	70	3.1.4 容斥原理	110
2.1 集合	70	3.1.5 树图	111
2.1.1 引言	70	练习	112
2.1.2 幂集合	72	3.2 鸽巢原理	114
2.1.3 笛卡儿积	73	3.2.1 引言	114
2.1.4 使用带量词的集合符号	74	3.2.2 广义鸽巢原理	115
2.1.5 量词的真值集合	74	3.2.3 巧妙使用鸽巢原理	116
练习	74	练习	117
2.2 集合运算	75	3.3 排列与组合	118
2.2.1 引言	75	3.3.1 引言	118
2.2.2 集合恒等式	77	3.3.2 排列	118
2.2.3 扩展的并集和交集	79	3.3.3 组合	120
2.2.4 计算机表示集合的方式	80	练习	122
练习	81	3.4 二项式系数	123
2.3 函数	83	3.4.1 二项式定理	123
2.3.1 引言	83	3.4.2 帕斯卡恒等式和三角形	125

3.4.3 其他的二项式系数恒等式	126	4.4.1 引言	166
练习	127	4.4.2 关于幂级数的有用事实	167
3.5 排列与组合的推广	129	4.4.3 计数问题与生成函数	170
3.5.1 引言	129	4.4.4 使用生成函数求解递推关系	172
3.5.2 有重复的排列	129	4.4.5 使用生成函数证明恒等式	174
3.5.3 有重复的组合	129	练习	174
3.5.4 具有不可区别物体的集合的排列	132	4.5 容斥	176
3.5.5 把物体放入盒子	132	4.5.1 引言	176
练习	135	4.5.2 容斥原理	176
3.6 生成排列和组合	136	练习	179
3.6.1 引言	136	4.6 容斥原理的应用	180
3.6.2 生成排列	137	4.6.1 引言	180
3.6.3 生成组合	138	4.6.2 容斥原理的另一种形式	180
练习	139	4.6.3 埃拉托色尼筛	181
关键术语和结果	139	4.6.4 映上函数的个数	182
复习题	140	4.6.5 错位排列	183
补充练习	141	练习	184
计算机题目	144	关键术语和结果	185
计算和研究	144	复习题	186
写作题目	144	补充练习	186
第4章 高级计数技术	145	计算机题目	188
4.1 递推关系基础	145	计算和研究	189
4.1.1 引言	145	写作题目	189
4.1.2 递推关系	145	第5章 关系	190
4.1.3 用递推关系构造模型	146	5.1 关系及其性质	190
练习	150	5.1.1 引言	190
4.2 求解线性递推关系	152	5.1.2 函数作为关系	191
4.2.1 引言	152	5.1.3 集合的关系	191
4.2.2 求解常系数线性齐次递推关系	153	5.1.4 关系的性质	192
4.2.3 常系数线性非齐次的递推关系	156	5.1.5 关系的组合	194
练习	159	练习	195
4.3 分治算法和递推关系	160	5.2 n 元关系及其应用	197
4.3.1 引言	160	5.2.1 引言	197
4.3.2 分治递推关系	160	5.2.2 n 元关系	197
练习	165	5.2.3 数据库和关系	197
4.4 生成函数	166	5.2.4 n 元关系的运算	199
		5.2.5 SQL	200
		练习	201

5.3 关系的表示	202	6.2.4 偶图	247
5.3.1 引言	202	6.2.5 特殊类型的图的一些应用 ...	249
5.3.2 用矩阵表示关系	202	6.2.6 从旧图到新图	251
5.3.3 用图表示关系	204	练习	252
练习	206	6.3 图的表示和图的同构	253
5.4 关系的闭包	207	6.3.1 引言	253
5.4.1 引言	207	6.3.2 图的表示	253
5.4.2 闭包	207	6.3.3 邻接矩阵	254
5.4.3 有向图的路径	208	6.3.4 关联矩阵	256
5.4.4 传递闭包	209	6.3.5 图的同构	256
5.4.5 沃舍尔算法	211	练习	259
练习	213	6.4 连通性	261
5.5 等价关系基础	214	6.4.1 引言	261
5.5.1 引言	214	6.4.2 通路	261
5.5.2 等价关系	214	6.4.3 无向图的连通性	263
5.5.3 等价类	216	6.4.4 有向图的连通性	264
5.5.4 等价类与划分	217	6.4.5 通路与同构	265
练习	219	6.4.6 计算顶点之间的通路数	265
5.6 偏序	221	练习	266
5.6.1 引言	221	6.5 欧拉通路与哈密顿通路	268
5.6.2 字典顺序	222	6.5.1 引言	268
5.6.3 哈塞图	224	6.5.2 欧拉通路与欧拉回路	268
5.6.4 极大元素与极小元素	225	6.5.3 哈密顿通路与哈密顿回路 ...	272
5.6.5 格	226	练习	274
5.6.6 拓扑排序	227	6.6 最短通路问题	276
练习	229	6.6.1 引言	276
关键术语和结果	231	6.6.2 最短通路算法	278
复习题	233	6.6.3 旅行商问题	281
补充练习	234	练习	283
计算机题目	236	6.7 可平面图	284
计算和研究	237	6.7.1 引言	284
写作题目	237	6.7.2 欧拉公式	286
第6章 图	238	6.7.3 库拉图斯基定理	288
6.1 图和图模型	238	练习	289
练习	243	6.8 图着色	291
6.2 图的术语和几种特殊的图	244	6.8.1 引言	291
6.2.1 引言	244	6.8.2 图着色的应用	294
6.2.2 基本术语	244	练习	295
6.2.3 一些特殊的简单图	246	关键术语和结果	297
		复习题	298

补充练习	299	7.3.4 中缀、前缀和后缀记法	331
计算机题目	303	练习	333
计算和研究	303	7.4 生成树	334
写作题目	304	7.4.1 引言	334
第7章 树	305	7.4.2 深度优先搜索	337
7.1 概述	305	7.4.3 宽度优先搜索	338
7.1.1 树作为模型	309	7.4.4 回溯	340
7.1.2 树的性质	310	7.4.5 有向图中的深度优先搜索	341
练习	312	练习	342
7.2 树的应用	313	7.5 最小生成树	344
7.2.1 引言	313	7.5.1 引言	344
7.2.2 二叉搜索树	313	7.5.2 最小生成树算法	344
7.2.3 决策树	316	练习	347
7.2.4 前缀码	317	关键术语和结果	348
7.2.5 博弈树	320	复习题	349
练习	323	补充练习	350
7.3 树的遍历	324	计算机题目	353
7.3.1 引言	324	计算和研究	353
7.3.2 通用地址系统	325	写作题目	353
7.3.3 遍历算法	325		

练习题答案^①

① 见华章网站 www.hzbook.com。

基础：逻辑和证明

逻辑规则给出数学语句的准确含义。例如，逻辑规则有助于我们理解下列语句及其推理：“存在一个不是两个整数的平方和的整数”，以及“对每个正整数 n ，小于等于 n 的正整数之和是 $n(n+1)/2$ ”。逻辑是所有数学推理及所有自动推理的基础。对计算机的设计、系统规范说明、人工智能、计算机程序设计、程序设计语言以及计算机科学的其他许多领域，逻辑都有实际的应用。

为了理解数学，我们必须理解正确的数学论证(即证明)是由什么组成的。只要证明一个数学语句是真的，我们就称之为一个定理。围绕一个论题的定理的集合就将我们对这个论题的认知组织起来了。为了学习一个数学论题，我们需要积极地构造关于此论题的数学论证，而不仅仅是阅读说明。此外，因为一个定理的证明常常可能需要修改结论以适应新情境，所以证明在新思想的发展中扮演了极其重要的角色。计算机科学专业的学生常常发现，在计算机科学中证明的重要程度令人惊讶。事实上，当我们证实计算机程序对所有可能的输入值产生正确输出值的时候，当我们证明算法总是产生正确结果的时候，当我们建立系统安全，以及创造人工智能的时候，证明都扮演了极其重要的角色。自动推理系统已经被构造出来，它允许计算机构造自己的证明。

本章将解释一个正确的数学论证的组成，并介绍构造这些论证的工具。我们将发展一系列不同的证明方法以证明许多不同类型的结果。介绍完证明的多种不同方法后，我们将介绍一些构造证明的策略。我们将介绍猜想的概念，并解释用学习猜想来发展数学的过程。

1.1 命题逻辑

1.1.1 引言

逻辑规则给出数学语句的准确含义，这些规则用来区分有效和无效的数学论证。由于本书的一个主要目的是教会读者如何理解和如何构造正确的数学论证，所以我们从介绍逻辑开始离散数学的学习。

逻辑不仅对理解数学推理十分重要，而且在计算机科学中有许多应用。这些逻辑规则用于计算机电路设计、计算机程序构造、程序正确性证明以及许多其他方面。在随后的几章中将逐一讨论这些应用。

1.1.2 命题

我们首先介绍逻辑的基本成分——命题。命题是一个或真或假的陈述语句，即一个陈述事实的句子，但不能既真又假。



例 1 下面的陈述句均为命题。

1. 华盛顿是美国的首都。
2. 多伦多是加拿大的首都。
3. $1+1=2$ 。
4. $2+2=3$ 。

命题 1 和 3 为真，命题 2 和 4 为假。

例 2 给出了不是命题的若干语句。

例 2 考虑下述语句：

1. 几点了？
2. 仔细读这个。

3. $x+1=2$ 。

4. $x+y=z$ 。

语句 1 和 2 不是命题，因为它们不是陈述语句。语句 3 和 4 不是命题，因为它们既不为真，也不为假。注意，如果我们给语句 3 和 4 中的变量赋值，那么语句 3 和 4 可以变成命题。1.3 节将讨论把这一类语句改成命题的多种方法。

我们用字母来表示命题变元，代表命题的变量，就像用字母表示数字变量那样。习惯上用字母 $p, q, r, s, \dots$ 表示命题。如果一个命题是真命题，它的真值为真，用 T 表示；如果它是假命题，其真值为假，用 F 表示。

涉及命题的逻辑领域称为命题演算或命题逻辑。它最初是 2300 多年前由古希腊哲学家亚里士多德系统地创建的。

现在我们转而注意从那些已有的命题产生新命题的方法，这些方法在 1854 年曾由英国数学家布尔在他的题为 *The Laws of Thought* 的书中讨论过。许多数学陈述都是由一个或多个命题组合而来。称为复合命题的新命题由已有的命题用逻辑运算符组合而来。

定义 1 令 p 为一命题，则 p 的否定表示为 $\neg p$ (也可表示成 $\bar{p}$)，指“不是 p 所说的情形”。

命题 $\neg p$ 读作“非 p ”。 $\neg p$ 的真值和 p 的真值相反。

例 3 找出命题

“今天是星期五”

的否定，并用中文表示。

解 否定为

“并非今天是星期五”

也可以更简单地表达为

“今天不是星期五”

例 4 找出命题

“迈阿密今天至少下了 10 英寸的雨”

的否定并用中文表示。

解 否定为

“并非迈阿密今天至少下了 10 英寸的雨”

或者可以更简单地表达为

“迈阿密今天下了不足 10 英寸的雨”

注意 严格地说，像例 3 和例 4 这种含有可变时间的语句不是命题，除非假定了一个确定的时间。同样，除非假定了确定的地点，否则含有可变地点的语句不是命题；除非假定了确定的人，否则含有可变代词的语句不是命题。我们总是假定命题中有确定的时间、地点和特定的人，除非另有说明。

表 1-1 是命题 p 及其否定的真值表。此表列出命题 p 的两种可能真值。每一行显示的 $\neg p$ 的真值对应 p 的真值。

命题的否定也可以看做非运算符作用在命题上的结果。非运算符从一个已有的命题构造出一个新命题。现在将引入从两个或多个已有命题构造新命题的逻辑运算符，这些逻辑运算符也称为联接词。

定义 2 令 p 和 q 为命题。 p 、 q 的合取用 $p \wedge q$ 表示，即命题“ p 并且 q ”。当 p 和 q 都是真时， $p \wedge q$ 命题为真，否则为假。

表 1-2 是 $p \wedge q$ 的真值表。此表每一行有是 p 和 q 真值变化的 4 种可能组合中的一种。4 行分别对应真值对 TT、TF、FT 和 FF，这里只有第一对真值为真，即 p 的真值为真，对应 q 的真值也为真。

表 1-1 命题之否定的真值

p	$\neg p$
T	F
F	T

注意在逻辑中，在一个合取的“但是”一词有时可以用“并且”代替。比如，语句“阳光灿烂，但是在下雨”，还可以表示为“阳光灿烂并且在下雨”。（在自然语言中，“并且”和“但是”在意思上有微妙的不同，这里我们不关心这个细微差别。）

例 5 找出命题 p 和 q 的合取，其中 p 为命题“今天是星期五”， q 为命题“今天下雨”。

解 这两个命题的合取 $p \wedge q$ 是命题“今天是星期五并且下雨”。这一命题在下雨的星期五为真，不是星期五的日子为假，不下雨的星期五也为假。

定义 3 令 p 和 q 为命题。 p 、 q 的析取用 $p \vee q$ 表示，即命题“ p 或 q ”。当 p 和 q 均为假时， $p \vee q$ 命题为假，否则为真。

$p \vee q$ 的真值表如表 1-3 所示。联接词“或”在析取中的使用对应于词“或”(or)包含的两种情况之一，即“同或”(inclusive or)。析取所含两命题之一为真或两者均为真时，析取的真值为真。例如，下面这句话中，“或”表达的即是“同或”：

“选修过微积分或计算机科学的学生可以选修本课。”

这里我们指的是，选修过微积分和计算机科学两门课的学生，以及只选修过其中一门课的学生都可以选修本课。另一方面，当我们说：

“学过微积分或学过计算机科学，但不是两者都学过的学生，可以选修本课。”

使用的“或”是“异或”。这里我们的意思是既学过微积分，又学过计算机科学的学生不能选修本课；只有那些恰好在这两门课中选修过一门的的学生可以选修本课。

表 1-2 两命题合取的真值表

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

表 1-3 两命题析取的真值表

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

同样，若餐馆的菜单上写着“汤或沙拉，加一道小菜”，则一般这都表示顾客可以选择汤，也可以选择沙拉，但不是既选汤又选沙拉时，才加一道小菜。因此，这里是“异或”而不是“同或”。

例 6 若 p 和 q 就是例 5 中的两个命题，它们的析取是什么？

Extra Examples

解 p 和 q 的析取 $p \vee q$ 是命题

“今天是星期五，或今天下雨”

这一命题在星期五或下雨天(包括下雨的星期五)的任何一天都成真。只有在既不是星期五，又不下雨的日子，此命题为假。

前面已经说过，在析取中使用的联接词“或”(or)对应于两种情形之一，即“同或”。所以当析取中的两个命题之一为真或两者均为真时，析取成真。有时我们也按“异或”的含义使用“或”。用异或来联结命题 p 和 q 时，就得到命题“ p 或 q (但非两者)”。这一命题当 p 为真且 q 为假时成真，或反过来当 p 为假且 q 为真时也为真。 p 和 q 两者均为假或均为真时，这一命题为假。

定义 4 令 p 和 q 为命题。 p 和 q 的异或(用 $p \oplus q$ 表示)是一个命题。当 p 和 q 中只有一个为真时命题为真，否则为假。

两个命题异或的真值表如表 1-4 所示。

1.1.3 条件语句

下面讨论其他几个重要的命题组合方式。

定义 5 令 p 和 q 为命题。条件语句 $p \rightarrow q$ 是命题“若 p ，则 q ”。当 p 为真而 q 为假时，条件语句 $p \rightarrow q$ 为假，否则为真。在条件语句 $p \rightarrow q$ 中， p 称为假设(或前项、前提)， q 称为结论(或推论)。

Annotation: 称语句 $p \rightarrow q$ 为条件语句，是因为 $p \rightarrow q$ 可以断定在条件 p 成立的时候 q 为真。条件语句也称为蕴含。

条件语句 $p \rightarrow q$ 的真值表如表 1-5 所示。注意，当 p 和 q 都为真，或者当 p 为假（与 q 的真值无关）时， $p \rightarrow q$ 为真。

表 1-4 两命题异或的真值表

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

表 1-5 条件命题 $p \rightarrow q$ 的真值表

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

由于在数学推理中许多地方会用到条件语句，因此表示 $p \rightarrow q$ 的术语很多，下面是常用的几个：

- “如果 p ，那么 q ”
- “如果 p ，则 q ”
- “ p 是 q 的充分条件”
- “ q 如果 p ”
- “当 p 则 q ”
- “ p 的必要条件是 q ”
- “ q ，除非 $\neg p$ ”
- “ p 蕴含 q ”
- “ q 仅当 p ”
- “ q 的充分条件是 p ”
- “ q 每当 p ”
- “ q 是 p 的必要条件”
- “ q 跟随 p ”

为了便于理解条件语句的真值表，可以将条件语句想象为合同或义务。例如，许多政治家在竞选时都许诺：

“如果我当选了，那么我将会减税。”

如果这个政治家当选了，选民将期望他能减税。进一步地，如果这个政治家没有当选，那么选民就无法指望他能减税，尽管这个人也许有足够的影响力可令当权者减税。只有在该政治家当选但却没有减税的情况下，选民才能说政治家违背了竞选诺言。这种情形对应于在 $p \rightarrow q$ 中 p 为真但 q 为假的情况。

类似地，考虑教授可能作出的如下陈述：

“如果你在期末考试得了满分，那么你的成绩将被评定为 A。”

如果你设法在期末考试得了满分，那么你可以期望得到 A。如果你没得到满分，那么你是否能得到 A 将取决于其他因素。然而，如果你得到满分，但教授没有给你 A，你会有受骗的感觉。

许多人对“ p 仅当 q ”与“如果 p ，那么 q ”表示同一意思感到有些不解。要理解这一点，请记住，“ p 仅当 q ”说的是当 q 不为真时 p 不能为真。也就是说，如果 p 为真但 q 为假，则这个语句为假。当 p 为假时， q 或者为真，或者为假，因为语句并没有谈及 q 的真值。人们常犯的一个错误是用“ q 仅当 p ”来表达 $p \rightarrow q$ 。然而，当 p 和 q 有不同的真值时，这两个语句有不同的真值。

“除非”这个词经常用于表达条件语句。例如“ q ，除非 $\neg p$ ”，意思是如果 $\neg p$ 是假的，则 q 必是真的。也就是说，当 p 为真， q 为假时，语句“ q ，除非 $\neg p$ ”是假的，否则是真的。因此，“ q ，除非 $\neg p$ ”与 $p \rightarrow q$ 总是有相同的真值。

例 7 说明了条件语句与中文语句之间的转换。

例 7 令 p 为语句“玛利亚学离散数学”， q 为语句“玛利亚将找到好工作”。用中文表达语句 $p \rightarrow q$ 。

Extra Examples

解 从条件语句的定义，我们得知，当 p 为语句“玛利亚学离散数学”， q 为语句“玛利亚将找到好工作”时， $p \rightarrow q$ 代表了语句

“如果玛利亚学习离散数学，那么她将找到好工作。”

还有许多其他表述方法来表达这个条件语句。其中大多数自然的是：

“玛利亚学离散数学时，她将找到一份好工作。”

“玛利亚为了得到一份好工作，她需要学离散数学。”

以及

“玛利亚将找到一份好工作，除非她不学离散数学。”

注意我们定义条件语句的方法比其汉语陈述更加通用。比如，在例7中的条件语句，又如语句

“如果今天天晴，那么我们将去海滩。”

中有假设和结论之间的联系，这是一般语言中的语句。而且除非玛利亚学离散数学但没有找到好工作，以及除非今天的晴天但我们不去海滩，否则上述语句总是成立。另一方面，语句

“如果今天是星期五，那么 $2+3=5$ 。”

总是成立的，因为它的结论是真的（于是假设部分的真值不起作用）。条件语句

“如果今天是星期五，那么 $2+3=6$ 。”

是除星期五以外天天成真，尽管 $2+3=6$ 为假。

在自然语言中，我们不会使用最后这两个条件语句（除非偶尔在讽刺中用到），因为其中的假设和结论之间没有什么联系。在数学推理中我们考虑的条件语句比语言中使用的要广泛一些。条件语句作为一个数学概念不依赖于假设和结论之间的因果关系。我们关于条件语句的定义规定了它的真值，而这一定义不是以语言的用法为基础的。命题语言是一种人工语言，这里为了便于使用和记忆，才将其类比为语言的用法。

许多程序设计语言中使用的 if-then（如果-那么）结构与逻辑中使用的不同。大部分程序设计语言中都有 if p then S 这样的语句，其中 p 是命题而 S 是一个程序段（待执行的一条或多条语句）。当程序的运行遇到这样一条语句时，如果 p 为真，就执行 S ；但若 p 为假，则 S 不执行。下面的例子说明这一点。

例8 若执行语句

if $2+2=4$ then $x := x+1$

之前， $x=0$ ，执行以后 x 的值是什么？（符号 $:=$ 代表赋值，语句 $x := x+1$ 表示将 $x+1$ 的值赋给 x 。）

解 因为 $2+2=4$ 为真，所以赋值语句 $x := x+1$ 被执行。因此，在执行此语句之后， x 的值是 $0+1=1$ 。

逆、倒置与反

由条件语句 $p \rightarrow q$ 可以构成一些新的条件语句。特别地，产生有3个相关的条件语句，通常它们拥有特殊的名称。命题 $q \rightarrow p$ 称为 $p \rightarrow q$ 的逆蕴含，而 $p \rightarrow q$ 的倒置蕴含是命题 $\neg q \rightarrow \neg p$ 。命题 $\neg p \rightarrow \neg q$ 称为 $p \rightarrow q$ 的反蕴含。我们会发现，3个由 $p \rightarrow q$ 衍生的条件语句中，只有倒置蕴含和 $p \rightarrow q$ 总是有相同的真值。

我们首先看到，与 $p \rightarrow q$ 有相同真值的是倒置蕴含 $\neg q \rightarrow \neg p$ 。注意，只有当 $\neg p$ 为假且 $\neg q$ 为真，即 p 为真且 q 为假时，该倒置蕴含为假。现在我们确定，无论 p 和 q 的真值如何，逆 $q \rightarrow p$ 和反蕴含 $\neg q \rightarrow \neg p$ 与原蕴含 $p \rightarrow q$ 都没有相同的真值。注意，当 p 为真 q 为假时，原蕴含命题为假，而逆命题和反命题都为真。

当两个复合命题总是具有相同真值时，我们称之为等价。因此一个条件语句与它的倒置等价，一个蕴含的逆蕴含与反蕴含也是等价的，读者可以验证这一点，但它们都不与原条件语句等价（1.2节将介绍等价命题）。一个常见的逻辑错误是假设一个条件语句的逆蕴含和反蕴含等价于这个条件语句。

例9 说明蕴含的用法。

Example

例9 找出如下语句的倒置蕴含、逆蕴含和反蕴含：

“每当下雨时，主队就能获胜。”

解 因为“ q 每当 p ”是表达语句 $p \rightarrow q$ 的一种方式，原始语句可以被改写为：

“如果下雨，那么主队就能获胜。”

因此，这个蕴含的倒置蕴含是

“如果主队没有获胜，那么没有下雨。”

逆蕴含是

“如果主队获胜，那么下雨了。”

反蕴含是

“如果没有下雨，那么主队没有获胜。”

其中只有倒置蕴含等价于原始语句。

双条件语句

下面我们介绍两个命题具有相同真值的复合命题的另外一种表达方式。

定义 6 令 p 和 q 为命题。双条件语句 $p \leftrightarrow q$ 是命题“ p 当且仅当 q ”。当 p 和 q 有同样的真值时，双条件语句为真，否则为假。双条件语句也称为双蕴含。

$p \leftrightarrow q$ 的真值表如表 1-6 所示。注意，双蕴含 $p \leftrightarrow q$ 恰在 $p \rightarrow q$ 和 $q \rightarrow p$ 两个蕴含均为真，以及均为假时为真。因此，我们用“当且仅当”来表示这一逻辑联接词，并且在符号书写时把符号 $\leftarrow$ 和 $\rightarrow$ 结合起来。一般还有一些其他方式表达 $p \leftrightarrow q$ ：

“ p 是 q 的充分必要条件”，

“如果 p 那么 q ；反之亦然”，

“ p 当且仅当 q ”。

表 1-6 双蕴含 $p \leftrightarrow q$ 的真值表

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

双条件语句的最后一种表示方式可以用缩写符号“iff”代替“当且仅当”。注意， $p \leftrightarrow q$ 与 $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ 有完全相同的真值。

例 10 令 p 为语句“你可以坐飞机”，令 q 为语句“你买机票了”。则 $p \leftrightarrow q$ 为语句

“你可以坐飞机当且仅当你买机票了。”

若 p 和 q 均为真或均为假，此语句为真。也就是说，如果你买机票了就能坐飞机，或是如果你没买机票就不能坐飞机。当 p 和 q 有对立真值时，此命题为假，也就是说，当你没买机票但却能坐飞机时（比如你获得一次免费旅行）或当你买了机票却不能坐飞机时（比如航空公司拒绝你登机）。

双条件的隐含应用

你应该意识到，在自然语言中，双条件并不总是显示的。特别是在双条件中使用的“当且仅当”结构在普通语言中很少用。通常用“如果，那么”或“仅当”结构来表示双蕴含，“当且仅当”的另一部分是隐含的。例如，考虑这个自然语句“你吃完饭才可以吃餐后甜点”。它意味着“你可以吃餐后甜点当且仅当你吃完饭”，这个语句逻辑等价于“如果你吃完饭，那么你可以吃餐后甜点”和“你可以吃餐后甜点，仅当你吃完饭”。后面这个语句在逻辑上等价于两个语句，一个是“如果你吃完饭，那么你可以吃甜点”，另一个是“仅当你吃完了饭，你才能吃甜点。”由于自然语言的这种不精确性，我们需要对自然语言中的条件语句是否隐含它的逆做出假设。因为数学和逻辑注重精确，所以我们总是区分条件语句 $p \rightarrow q$ 和双条件语句 $p \leftrightarrow q$ 。

1.1.4 复合命题的真值表

现在已经介绍了 4 个重要的逻辑联接词——合取，析取，条件，双条件，还有否定。我们可以用这些联接词包括一些命题变元构造结构复杂的复合命题。我们可以按照例 11 中阐明的方法，用真值表来决定这些复合命题的真值，用一个分栏来决定在这个复合命题中出现的每个复合表达式的真值。由每个命题变元的真值组合成的复合命题的真值在最后一栏中表示。

例 11 构造复合命题 $(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$ 的真值表。

解 因为真值表涉及 2 个命题变元 p 和 q ，因而此表有 4 行，对应 4 种真值组合 TT、TF、FT 和 FF。前两列分别表示 p 和 q 的真值。第三列为 $\neg q$ 的真值，以此决定在第 4 列中 $p \vee \neg q$ 的真值。

$p \wedge q$ 的真值在第5列。最后, $(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$ 的真值在最后一列。真值表的结果如表1-7所示。■

表1-7 复合命题 $(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$ 的真值表

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F

1.1.5 逻辑运算符的优先级

使用目前为止学到的否定运算符和逻辑运算符, 可以构造复合命题。一般地, 我们使用括号来指明复合命题中的逻辑运算符的顺序。例如, $(p \vee q) \wedge (\neg r)$ 是 $p \vee q$ 和 $\neg r$ 的合取。然而, 为了减少括号的数量, 我们指定否定运算符在其他所有逻辑运算符前执行。这意味着 $\neg p \wedge q$ 是 $\neg p$ 和 q 的合取, 即 $(\neg p) \wedge q$, 而不是 p 和 q 的合取的否定, 即 $\neg(p \wedge q)$ 。

另一个常用的优先级规则是合取运算符优先于析取运算符, 因此 $p \wedge q \vee r$ 意味着 $(p \wedge q) \vee r$, 而不是 $p \wedge (q \vee r)$ 。因为这个规则不太好记, 所以我们将继续使用括号来区别析取运算符和合取运算符的顺序。

最后, 一个已被接受的规则是条件运算符和双条件运算符的优先级低于合取和析取运算符。因此, $p \vee q \rightarrow r$ 等同于 $(p \vee q) \rightarrow r$ 。当涉及条件运算符和双条件运算符时, 我们也将使用括号, 尽管条件运算的优先级高于双条件运算。表1-8显示出各种逻辑运算符的优先级。

表1-8 逻辑运算符的优先级

运算符	优先级
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

1.1.6 翻译语句

有许多理由需把语言翻译成由命题变量和逻辑联接词组成的表达式, 特别是因为语言(包括一切人类语言)常有二义性, 而把句子译成逻辑表达式可以消除歧义。注意, 做这种翻译也许要在句子含义的基础上做些合理的假设。此外, 一旦我们完成了从句子到逻辑表达式的翻译, 我们就可以分析这些逻辑表达式以决定它们的真值。我们还可以对它们进行处理, 并用推理规则(参见1.5节)对它们进行推理。

为说明把语句翻译成逻辑表达式的过程, 考虑下面两个例子。

例12 怎样把下面的句子翻译成逻辑表达式?

“只有你主修计算机科学或不是新生, 才可以从校园网访问因特网。”

解 翻译这一句子为逻辑表达式有许多方法。可以用一个命题变元, 例如 p 来表示这一句子, 但在分析其含义或用它做推理时, 这种表示不会有什么作用。我们的办法是用命题变元表示其中的每一个句子成分, 并找出其间合适的逻辑联接词。具体地说, 令 a 、 c 和 f 分别表示“你可以从校园网访问因特网”、“你主修计算机科学”和“你是个新生”。注意到“只有……才……”是表达条件语句的一种方式, 上述句子可以译为

$$a \rightarrow (c \vee \neg f)$$

例13 怎样把下面的句子翻译成逻辑表达式?

“除非你已满16周岁, 否则只要你身高不足4英尺^①就不能乘公园滑行铁道游乐车。”

解 令 q 、 r 和 s 分别表示“你能乘公园滑行铁道游乐车”、“你身高不足4英尺”和“你已满16周岁”, 则上述句子可以翻译为

$$(r \wedge \neg s) \rightarrow \neg q$$

① 1英尺=30.48厘米。——译者注

当然，还有其他方式可以把上述句子表示为逻辑表达式，但上面使用的这一表达式已满足我们的需要。 ■

1.1.7 系统规范说明

在说明硬件系统和软件系统时，将自然语言语句翻译成逻辑表达式是很重要的一部分。系统和软件工程师从自然语言中提取需求，生成精确、无二义性的规范说明，这些规范说明可作为系统开发的基础。例14说明如何在这一过程中使用复合命题。

例14 使用逻辑联接词表示规范说明“当文件系统满时，自动应答不能够发出”。

 **解** 翻译这个规范说明的方法之一是令 p 表示“自动应答能够发出”，令 q 表示“文件系统满了”，则 $\neg p$ 表示“自动应答不能够发出”。因此，题中的规范说明可以用条件语句 $q \rightarrow \neg p$ 来表示。 ■

这些系统规范说明应该是一致的，也就是说，系统规范说明不应该包含有冲突的需求。当规范说明不一致时，无法开发出满足所有规范说明的系统。

例15 确定下列系统规范说明是否一致：

“诊断消息存储在缓冲区中或者被重传。”

“诊断消息没有存储在缓冲区中。”

“如果诊断消息存储在缓冲区中，那么它被重传。”

解 要判断这些规范说明是否一致，我们首先用逻辑表达式表示它们。令 p 为“诊断消息存储在缓冲区中”，令 q 表示“诊断消息被重传”。则上面几个规范说明可以写为 $p \vee q$ ， $\neg p$ 和 $p \rightarrow q$ 。使所有三个规范说明为真的一个真值赋值必须有 p 为假使 $\neg p$ 为真。因为我们要使 $p \vee q$ 为真，但 p 必须为假， q 必须为真。由于当 p 为假且 q 为真时， $p \rightarrow q$ 为真，我们得出结论这些规范说明是一致的，因为当 p 为假且 q 为真时它们都是真的。使用一个真值表检验有关 p 和 q 的真值的四种可能赋值，我们可以得出同样的结论。 ■

例16 如果在例15中加上一个系统规范说明“诊断消息不被重传”，它们还能保持一致吗？

解 由例15可知，只有当 p 为假且 q 为真时那三个规范说明才为真。然而，本例中的新规范说明是 $\neg q$ ，当 q 为真时它为假。因此，这四个规范说明不是一致的。 ■

1.1.8 布尔检索

 逻辑联接词广泛用于大量信息检索中，例如，检索网页索引。由于这些检索使用来自命题逻辑的技术，所以称为布尔检索。

在布尔检索中，联接词 AND 由于匹配包含两个检索项的记录，联接词 OR 用于匹配两个检索项之一或两项均匹配的记录，而联接词 NOT （有时写作 $AND NOT$ ）用于排除某个特定的检索项。当用布尔检索为有潜在价值的信息定位时，常需要细心安排逻辑联接词的使用。下面的例子说明布尔检索是怎样执行的。

 **例17 网页检索。**大部分网上搜索引擎支持布尔检索技术，它有助于找到有关特定主题的网页。例如，要用布尔检索找出关于新墨西哥州(New Mexico)各大学的网页，我们可以寻找与 $NEW AND MEXICO AND UNIVERSITIES$ 匹配的网页，检索的结果将包括含 NEW （新）、 $MEXICO$ （墨西哥）和 $UNIVERSITIES$ （大学）三个词的那些网页。这里面包含了所有我们感兴趣的网页，还包括其他网页，例如有关墨西哥的新大学的网页。另一例子是，要找出与新墨西哥州或亚利桑那州(Arizona)的大学有关的网页，我们可以检索与 $(NEW AND MEXICO OR ARIZONA) AND UNIVERSITIES$ 匹配的网页。（注意，其中联接词 AND 优先于联接词 OR 。）这一检索的结果将包括含 $UNIVERSITIES$ 一词和 NEW 与 $MEXICO$ 两词的所有网页及含 $UNIVERSITIES$ 一词和 $ARIZONA$ 一词的所有网页。同样除这两类我们感兴趣的网页外还会列出其他网页。最后，要想找出有关墨西哥（不是新墨西哥州）的大学的网页，可以先找与 $MEXICO AND UNIVERSITIES$ 匹配的网页，但由于这一检索的结果将会包括有关新墨西哥州的大学的网页以及墨西哥的大学的网页，所以更好的办法是检索与 $(MEXICO AND UNIVERSITIES) NOT$

NEW 匹配的网页。这一检索的结果将包括含 MEXICO 和 UNIVERSITIES 两个词但不含词 NEW 的所有网页。在一些搜索引擎中，词 NOT 会被减号所代替，因此最后搜索的短语会是 MEXICO UNIVERSITIES-NEW。

1.1.9 逻辑难题

可以用逻辑推理解决的难题称为逻辑难题。求解逻辑难题是实践逻辑规则的一种好方法。同样，设计用于执行逻辑推理的计算机程序通常也使用著名的逻辑难题来演示它们的能力。许多人对求解逻辑难题感兴趣，有许多书和杂志也登载逻辑难题以供娱乐。

在此我们将讨论两个逻辑难题。首先介绍一个由逻辑学家和难题制作大师 Raymond Smullyan 提出的难题，Smullyan 已经出版了十多本与逻辑难题(涉及逻辑推理)有关的书。

例 18 Smullyan[Sm78]中提出了许多与如下情形有关的难题：一个岛上居住着两类人——骑士和流氓。骑士说的都是实话，而流氓只会说谎。你碰到两个人 A 和 B，如果 A 说“B 是骑士”，B 说“我们两人不是一类人”。请判断 A、B 两人到底是流氓还是骑士。

解 令 p 和 q 分别表示语句“A 是骑士”和“B 是骑士”，则 $\neg p$ 和 $\neg q$ 分别表示“A 是流氓”和“B 是流氓”。

我们首先考虑 A 是骑士的情形，这就是说 p 是真的。如果 A 是骑士，那他说“B 是骑士”就是真话，因此 q 为真，A 和 B 就是一类人。但是，如果 B 是骑士，那么 B 说的话应该为真，即 $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ 为真，然而却并非如此，因为 A 和 B 都是骑士。因此，我们可以得出 A 不是骑士，即 p 为假。

如果 A 是流氓，则据题目可知 A 所说的“B 是骑士”就不是真话，这意味着 q 为假且 B 也是流氓。而且，如果 B 是流氓，那么 B 说的话也是假的，这与 A 和 B 都是流氓是一致的。所以，我们得出结论 A 和 B 都是流氓。

在本节末的练习 28~30 中，我们会进一步讨论 Smullyan 关于骑士和流氓的难题。接下来，我们介绍一个与两个孩子有关的“泥巴孩子难题”(muddy children puzzle)。

例 19 父亲让两个孩子(一个男孩，一个女孩)在后院玩耍，并让他们不要把身上搞脏。然而，在玩的过程中，两个孩子都在额头上沾了泥。当孩子们回来后，父亲说“你们当中至少有一个人额头上有泥”，然后他问每个孩子“你知道你额头上有没有泥吗？”同样的问题对每个孩子都问了两遍。假设每个孩子都可以看到对方的额头上是否有泥，但不能看见自己的额头，孩子们将会怎样回答呢？假设两个孩子都很诚实并且都同时回答每一次提问。

解 令 s 和 d 分别表示语句“儿子的额头上有泥”和“女儿的额头上有泥”。当父亲说“你们当中至少有一个人额头上有泥”时，表示的是 $s \vee d$ 为真。当父亲第一次问那个问题时两个孩子都将回答“不知道”，因为他们都看到对方的额头上有泥。也就是说，儿子知道 d 为真，但不知道 s 是否为真。而女儿知道 s 为真，但不知道 d 是否为真。

在儿子对第一次询问回答“不知道”后，女儿可以判断出 d 必为真。这是因为问第一次问题时，儿子知道 $s \vee d$ 为真，但不能判断 s 是否为真。利用这个信息，女儿能够得出结论 d 必定为真，因为如果 d 为假，儿子有理由推出，由于 $s \vee d$ 为真，那么 s 必定为真，因此他对第一个问题的回答应为“知道”。儿子也可以类似推断出 s 必为真。因此，第二次两个孩子都将回答“知道”。

1.1.10 逻辑运算和位运算

计算机用字位表示信息，每个字位有两个可能的值，即 0 和 1。字位的这一含义来自二进制数字，因为 0 和 1 是用在数的二进制表示中的数字。1946 年著名的统计学家图基(John Tukey)引入了这一术语。字位可以用于表示真值，因为只有两个真值，即真与假。习惯上用 1 表示真，用 0 表示假。也就是说，1 表示 T(真)，0 表示 F(假)。若变量的值为真或为假，则此变量称为布尔变量。于是一个布尔变量可以用一个字位表示。

真值	位
T	1
F	0

计算机的字位运算对应于逻辑联接词，只要在运算符 $\wedge$ 、 $\vee$ 和 $\oplus$ 的真值表中用 1 代替 T，用 0

代替 F，就能得到表 1-9 所示的对应的字位运算表。我们还将用符号 OR、AND 和 XOR 表示运算符 $\vee$ 、 $\wedge$ 和 $\oplus$ ，许多程序设计语言正是这样表示的。

信息一般用位串表示，也就是用 0 和 1 的序列表示。这时，对位串的运算即可用来处理信息。

表 1-9 字位运算符 OR、AND 和 XOR 的真值表

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \oplus y$
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	0

定义 7 位串是 0 个或多个字位的序列。位串的长度就是它所含的字位的个数。

例 20 101010011 是长度为 9 的一个位串。

我们可以把字位运算扩展到位串上。我们在长度相同的两个位串上定义它们的按位 OR、按位 AND 和按位 XOR 分别为这样的位串，其中每个字位均由被运算的两个位串对应字位经 OR、AND 和 XOR 运算而得。我们分别用符号 $\vee$ 、 $\wedge$ 和 $\oplus$ 表示按位 OR、按位 AND 和按位 XOR 运算。我们用下面的例子解释对位串的这些按位运算。

例 21 求位串 01 1011 0110 和 11 0001 1101 的按位 OR、按位 AND 和按位 XOR(这里以及本书其他地方均把位串按 4 位分块以便于阅读)。

解 这两个位串的按位 OR、按位 AND 和按位 XOR 分别由对应字位的 OR、AND 和 XOR 得到，其结果是

$$\begin{array}{r}
 01\ 1011\ 0110 \\
 11\ 0001\ 1101 \\
 \hline
 11\ 1011\ 1111 \quad \text{按位 OR} \\
 01\ 0001\ 0100 \quad \text{按位 AND} \\
 10\ 1010\ 1011 \quad \text{按位 XOR}
 \end{array}$$

练习

- 下列哪些语句是命题？这些是命题的语句的真值是什么？
 - 波士顿是马萨诸塞州首府。
 - 迈阿密是佛罗里达州首府。
 - $2+3=5$ 。
 - $5+7=10$ 。
 - $x+2=11$ 。
 - 回答这一问题。
- 下列各命题的否定是什么？
 - 今天是星期四。
 - 新泽西没有污染。
 - $2+1=3$ 。
 - 缅因州的夏天又热又晒。
- 令 p 和 q 分别表示命题“在新泽西海岸游泳是允许的”和“在海岸附近发现过鲨鱼”。把下列各复合命题表达为汉语句子：

a) $\neg q$	b) $p \wedge q$	c) $\neg p \vee q$	d) $p \rightarrow \neg q$
e) $\neg q \rightarrow p$	f) $\neg p \rightarrow \neg q$	g) $p \leftrightarrow \neg q$	h) $\neg p \wedge (p \vee \neg q)$
- 令 p 、 q 为如下命题：

p ：气温在零度以下。

q ：正在下雪。

用 p 、 q 和逻辑联接词写出下列各命题：

 - 气温在零度以下且正在下雪。
 - 气温在零度以下，但没下雪。
 - 气温不在零度以下，也不下雪。
 - 也许在下雪，也许在零度以下(也许两者在内)。

- e) 若气温在零度以下，那也就在下雪。
 f) 也许气温在零度以下，也许在下雪，但如果在零度以下，就不在下雪。
 g) 气温在零度以下是下雪的充分必要条件。
5. 令 p 、 q 为如下命题：
 p : 你的车速超过每小时 65 英里(1 英里 = 1.6 公里)。
 q : 你接到一张超速罚单。
 用 p 、 q 和逻辑联接词写出下列命题：
 a) 你的车速没有超过每小时 65 英里。
 b) 你的车速超过每小时 65 英里，但没接到超速罚单。
 c) 你的车速若超过每小时 65 英里，将接到一张超速罚单。
 d) 你的车速不超过每小时 65 英里，就不会接到超速罚单。
 e) 车速超过每小时 65 英里足以接到超速罚单。
 f) 你接到一张超速罚单，但你的车速没超过每小时 65 英里。
 g) 只要你接到一张超速罚单，你的车速就超过每小时 65 英里。
6. 令 p 、 q 、 r 为如下命题：
 p : 在这个地区发现过灰熊。
 q : 在小路上徒步旅行是安全的。
 r : 小路两旁的草莓成熟了。
 用 p 、 q 、 r 和逻辑联接词写出下列命题：
 a) 小路两旁的草莓成熟了，但在这个地区没有发现过灰熊。
 b) 在这个地区没有发现过灰熊，且在小路上徒步旅行是安全的，但小路两旁的草莓成熟了。
 c) 如果小路两旁的草莓成熟了，徒步旅行是安全的当且仅当在这个地区没有发现过灰熊。
 d) 在小路上徒步旅行不安全，但在这个地区没有发现过灰熊且小路两旁的草莓成熟了。
 e) 为了使在小路上旅行很安全，其必要条件(但并不充分)是小路两旁的草莓没有成熟且在这个地区没有发现过灰熊。
 f) 无论何时在这个地区发现过灰熊且小路两旁的草莓成熟了，在小路上徒步旅行就不安全。
7. 判断下列各条件语句是真还是假：
 a) 若 $1+1=2$ ，则 $2+2=5$ 。
 b) 若 $1+1=3$ ，则 $2+2=4$ 。
 c) 若 $1+1=3$ ，则 $2+2=5$ 。
 d) 若猴子会飞，那么 $1+1=3$ 。
8. 下列各语句，判断其中想表达的是同或还是异或，说明理由：
 a) 晚餐有咖啡或者茶。
 b) 关键词一定至少要有 3 个数字或至少 8 个字符长。
 c) 这个课程的必要条件是数论课程或者是密码课程。
 d) 你能用美元或者欧元。
9. 对下列各语句，说一说其中的或是同或(即析取)与异或时它们的含义。你认为语句想表示的是哪个或？
 a) 要选修离散数学课，你必须已经选修微积分或计算机科学的一门课。
 b) 从 Acme 汽车公司购买一部新车，你就能得到 2 000 美元现金回扣，或 2% 的汽车贷款。
 c) 两人套餐包括 A 列中的两项或 B 列中的三项。
 d) 若下雪超过两英尺或寒风低于 -100，学校就停课。
10. 把下列语句写成“如果 p ，那么 q ”的形式。[提示：参考本节列出的通常表达条件语句的方式。]
 a) 吹东北风的时候就下雪。
 b) 暖天持续一周苹果树就开花。
 c) 活塞队赢得冠军就意味着他们打败了湖人队。
 d) 必须走 8 英里才能到朗斯峰的顶峰。
 e) 要得到教授职位，世界闻名就够了。
 f) 如果你驾车超过 400 英里，就需要买汽油了。
 g) 只有你购买的 CD 机不超过 90 天，你的保修单才有效。
 h) 除非水太凉了，否则 Jan 将去游泳。

11. 把下列命题写成“ p 当且仅当 q ”的形式:

- 如果外边热你就买冰激凌; 如果你买冰激凌, 外边就热。
- 你赢得竞赛的充分必要条件是拥有那唯一的获胜券。
- 只有你有关系才能得到提拔, 只有得到提拔你才有关系。
- 如果你看电视, 记忆会衰退; 反之亦然。
- 火车恰在我乘坐的那些日子晚点。

12. 给出下列各条件语句的逆命题、逆否命题和否命题:

- 如果今天下雪, 我明天就去滑雪。
- 只要有测验, 我就来上课。
- 只有当正整数没有1和它自己以外的因数时, 它才是素数。

13. 下列各复合命题的真值表显示有多少行?

- $p \rightarrow \neg p$
- $(p \vee \neg r) \wedge (q \vee \neg s)$
- $q \vee p \vee \neg s \vee \neg r \vee \neg t \vee u$
- $(p \wedge r \wedge t) \leftrightarrow (q \wedge t)$

14. 为下列各复合命题构造真值表:

- $p \wedge \neg p$
- $p \vee \neg p$
- $(p \vee \neg q) \rightarrow q$
- $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$
- $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
- $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

15. 为下列各复合命题构造真值表:

- $(p \vee q) \rightarrow (p \oplus q)$
- $(p \oplus q) \rightarrow (p \wedge q)$
- $(p \vee q) \oplus (p \wedge q)$
- $(p \leftrightarrow q) \oplus (\neg p \leftrightarrow q)$
- $(p \leftrightarrow q) \oplus (\neg p \leftrightarrow \neg r)$
- $(p \oplus q) \rightarrow (p \oplus \neg q)$

16. 为下列各复合命题构造真值表:

- $p \rightarrow \neg q$
- $\neg p \leftrightarrow q$
- $(p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow q)$
- $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)$
- $(p \leftrightarrow q) \vee (\neg p \leftrightarrow q)$
- $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

17. 为下列各复合命题构造真值表:

- $p \rightarrow (\neg q \vee r)$
- $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$
- $(p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow r)$
- $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$
- $(p \leftrightarrow q) \vee (\neg q \leftrightarrow r)$
- $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

18. 构造 $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (r \leftrightarrow s)$ 的真值表。

19. 求下列各对位串的按位 OR、按位 AND 及按位 XOR:

- 101 1110, 010 0001
- 1111 0000, 1010 1010
- 00 0111 0001, 10 0100 1000
- 11 1111 1111, 00 0000 0000

模糊逻辑可用于人工智能。在模糊逻辑中命题的真值是介于0和1(包括0和1)之间的数。以0为真值的命题为假, 以1为真值的命题为真。0和1之间的真值表示不同程度的真值。例如, 语句“傅雷德是幸福的”的真值可以是0.8, 因为傅雷德大部分时间是幸福的; “约翰是幸福的”的真值可能是0.4, 因为他幸福的时间比一半稍短。

20. 模糊逻辑中命题否定的真值是1减去该命题的真值。语句“傅雷德不幸福”和“约翰不幸福”的真值是什么?

21. 模糊逻辑中两个命题的析取的真值是两个命题真值的最大值。语句“傅雷德幸福或约翰幸福”与“傅雷德不幸福或约翰不幸福”的真值是什么?

*22. 在一个100条语句的列表中, 第 n 条语句是“在这个列表中, 恰有 n 条语句为假。”

- 从这些语句中你可以得出什么结论?
- 若第 n 条语句是“在这个列表中, 至少有 n 条语句为假”, 回答问题a)。
- 假设这个列表包含99条语句, 回答问题b)。

23. 边远村庄的每个人要么总说真话, 要么总说谎。对旅游者的问题, 村民要么回答“是”, 要么回答“不”。假定你在这一地区旅游, 走到了一个岔路口, 一条岔路通向你想去的遗址, 另一条岔路通向丛林深处。此时恰有一村民站在岔路口, 问村民什么样的一个问题就能决定走哪条路?

24. 使用命题 p “扫描消息中的病毒”和 q “消息来自一个未知的系统”以及逻辑联接词来表达下列系统规范说明。

- “每当消息来自一个未知的系统时, 就扫描消息中的病毒。”
- “消息来自一个未知的系统, 但不扫描消息中的病毒。”
- “每当消息来自一个未知的系统时, 就有必要扫描消息中的病毒。”
- “当消息不是来自一个未知的系统时, 就不扫描消息中的病毒。”

25. 下列系统规范说明一致吗？

“当且仅当系统正常操作时，系统处于多用户状态。如果系统正常操作，则它的核心程序正在运行。核心程序不能正常运行，或者系统处于中断模式。如果系统不处于多用户状态，它就处于中断模式。系统不处于中断模式。”

26. 下列系统规范说明一致吗？

“路由器能向边缘系统发送分组仅当它支持新的地址空间时。要让路由器支持新的地址空间，就必须安装最新的软件发布。如果最新的软件发布被安装了，路由器就能向边缘系统发送分组。路由器不支持新的地址空间。”

27. 你会用什么样的布尔检索来寻找关于新泽西州海滩的网页？如果你想找关于泽西岛（在英吉利海峡）海滩的网页呢？

练习 28~30 是关于 Smullyan 的趣味逻辑的。一个岛上居住着两类人：骑士和流氓。骑士说的都是实话，而流氓只会说谎。根据下列不同情况判断 A、B 两人到底是流氓还是骑士，如果认为得不出最终结论的，也请说出任何可能的结论。

28. A 说：“我们之间至少有一个是流氓”，B 什么都没说。

29. A 说：“我是流氓或者 B 是骑士”，B 什么都没说。

30. A 说：“我们都是流氓”，B 什么都没说。

练习 31~33 是逻辑难题，解题时可以先把语句翻译成逻辑表达式，再用真值表从这些表达式作推理。

31. 斯蒂夫想用两个事实来判断三位工作伙伴的相对薪水。首先他知道如果傅雷德的薪水不是三人中最高的，那么杰尼斯的最高。其次他知道如果杰尼斯的薪水不是最低的，那么麦吉的最高。从以上斯蒂夫知道的事实，有可能决定傅雷德、麦吉和杰尼斯的相对薪水吗？如果能，谁的最高，谁的最低？解释你的推理。

32. 侦探调查了罪案的四位证人。从证人的话侦探得出的结论是：如果男管家说的是真话，那么厨师说的也是真话；厨师和园丁说的不可能都是真话；园丁和杂役不可能都在说谎；如果杂役说真话，那么厨师在说谎。侦探能判定这四位证人分别是在说谎还是在说真话吗？解释你的推理。

*33. 试求解下面这个由爱因斯坦提出的著名的逻辑难题（也称为斑马难题）。5 个不同国家且工作各不相同的人分别住在一条街上的 5 所房子里，每所房子的颜色不同，每个人都有自己养的不同的宠物，喜欢喝不同的饮料。根据以下提示，你能告诉我哪所房子里的人养斑马（zebra），哪所房子里的人喜欢喝矿泉水吗？

英国人住在红色的房子里。西班牙人养了一条狗。日本人是一个油漆工。意大利人喜欢喝茶。挪威人住在左边的第一个房子里。绿房子在白房子的右边。摄影师养了一只蜗牛。外交官住在黄房子里。中间那个房子里的人喜欢喝牛奶。喜欢喝咖啡的人住在绿房子里。挪威人住在蓝色的房子旁边。小提琴家喜欢喝橘子汁。养狐狸的人所住的房子与医师的房子相邻。养马的人所住的房子与外交官的房子相邻。[提示：绘一张表，其中行表示每个人，列表示他们所住的房子的颜色、他们的工作、他们养的宠物以及他们喜欢喝的饮料，用逻辑推理来判断表中正确的项。]

1.2 命题等价

1.2.1 引言

数学证明中使用的一种重要方法是用真值相同的一条语句取代另一条语句。因此，在构造数学证明时广泛使用从已知复合命题产生具有同样真值的其他命题的方法。注意，我们将用术语“复合命题”来解释由用于逻辑运算的命题变元形成的表达式，比如 $p \wedge q$ 。

我们就从根据可能的真值对复合命题进行分类开始讨论。

定义 1 复合命题称为永真式（或重言式），如果无论其中出现的命题的真值是什么，它的真值总是真。真值永远为假的复合命题称为矛盾。最后，既不是永真式又不是矛盾的命题称为可能式。

在数学推理中永真式和矛盾往往很重要，下面的例 1 解释了两类复合命题。

例 1 我们可以只用一个命题构造永真式和矛盾。 $p \vee \neg p$ 和 $p \wedge \neg p$ 的真值表如表 1-10 所示。因为 $p \vee \neg p$ 总是真，所以它是永真式。因为 $p \wedge \neg p$ 总是假，所以它是矛盾。

表 1-10 永真式和矛盾的例子

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	T	F
F	T	T	F

1.2.2 逻辑等价

在所有可能的情况下都有相同真值的两个复合命题称为逻辑等价。我们也可以如下定义这一概念。

定义 2 如果 $p \leftrightarrow q$ 是永真式，命题 p 和 q 称为是逻辑等价的。记号 $p \equiv q$ 表示 p 和 q 逻辑等价。

注意 符号 $\equiv$ 不是逻辑联接词，因为 $p \equiv q$ 不是复合命题，而语句 $p \leftrightarrow q$ 是永真式。符号 $\Leftrightarrow$ 有时用来代替 $\equiv$ 表示等价。

判定两个命题是否等价的方法之一是使用真值表。特别地，命题 p 和 q 等价当且仅当给出它们真值的两列完全一致。例 2 建立了一个非常重要且有用的逻辑等价，即 $\neg(p \vee q)$ 或 $\neg p \wedge \neg q$ ，用以说明这个方法。这个逻辑等价是两大德摩根律之一，

表 1-11 德摩根定律

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

如表 1-11 所示。这是用 19 世纪中叶英国数学家德摩根(Augustus De Morgan)的名字命名的。

例 2 证明 $\neg(p \vee q)$ 和 $\neg p \wedge \neg q$ 逻辑等价。

解 表 1-12 给出了这些复合命题的真值。由于对 p 和 q 所有可能的真值组合，命题 $\neg(p \vee q)$ 和 $\neg p \wedge \neg q$ 的真值都一样，所以 $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ 是永真式，这两个命题逻辑等价。

表 1-12 $\neg(p \vee q)$ 和 $\neg p \wedge \neg q$ 的真值表

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

例 3 证明命题 $p \rightarrow q$ 和 $\neg p \vee q$ 逻辑等价。

解 在表 1-13 中构造了这两个复合命题的真值表。由于 $\neg p \vee q$ 和 $p \rightarrow q$ 的真值一致，因此它们是逻辑等价的。

表 1-13 $\neg p \vee q$ 和 $p \rightarrow q$ 的真值表

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

现在，我们将建立涉及 3 个不同命题变元 p 、 q 、 r 的 2 个复合命题的逻辑等价。真值表需要建立 8 行，每一行为 3 个变元真值的一种可能组合。列出 p 、 q 、 r 的真值来标记这些组合。这 8 种真值组合是 TTT, TTF, TFT, TFF, FTT, FTF, FFT, 以及 FFF；我们用这个顺序显示真值表行。注意在真值表中增加一个命题变元，我们需要用原来行数的 2 倍来展示复合命题是等价的，这样就需要 16 行来建立由 4 个命题变元组成的 2 个复合命题的逻辑等价，以此类推，如果一个复合命题由 n 个命题变元组成，则需要 2^n 行。

例 4 证明命题 $p \vee (q \wedge r)$ 和 $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ 逻辑等价。这是析取对合取的分配律。

解 表 1-14 中构造了这两个复合命题的真值表。因为 $p \vee (q \wedge r)$ 和 $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ 的真值一样，它们是逻辑等价的。

表 1-14 $p \vee (q \wedge r)$ 和 $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ 逻辑等价的演示

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

表 1-15 给出了若干重要的等价关系^①。在这些等价关系中，T 表示永远为真的复合命题，F 表示永远为假的复合命题。对于涉及条件语句和双条件语句的复合命题，我们也在表 1-16 和表 1-17 中给出了一些有用的等价关系。本节末的练习中要求读者证明表 1-15~表 1-17 中的等价关系。

表 1-15 逻辑等价

等 价 关 系	名 称
$p \wedge T \equiv p$ $p \vee F \equiv p$	恒等律
$p \vee T \equiv T$ $p \wedge F \equiv F$	支配律
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	幂等律
$\neg(\neg p) \equiv p$	双非律
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	交换律
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	结合律
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	分配律
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	德摩根定律
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	吸收律
$p \vee \neg p \equiv T$ $p \wedge \neg p \equiv F$	否定律

表 1-16 涉及条件语句的逻辑等价

$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$
$p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$
$p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$
$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$
$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$
$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$
$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$
$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

表 1-17 涉及双条件的逻辑等价

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

析取的结合律表明表达式 $p \vee q \vee r$ 是有定义的。因为先析取 p 和 q 再与 r 析取或先析取 q 和 r 再与 p 析取，其结果一样。同样， $p \wedge q \wedge r$ 也是有定义的。扩展这一推理过程可以证明： $p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n$ 和 $p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$ 均有定义，只要 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 为命题。进而可以注意到德摩根律可以扩展为

$$\neg(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \equiv (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \cdots \wedge \neg p_n)$$

和

$$\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \equiv (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \cdots \vee \neg p_n)$$

① 这些恒等式是布尔代数中恒等式的一种特殊情况。请将这些恒等式与 2.2 节表 2-21 中的集合恒等式比较一下。

1.2.3 德摩根律的运用

德摩根律的两个逻辑等价式非常重要。它们告诉我们怎么去否定合取和析取。特别地，等价式 $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ 说明，析取的否定是由各分命题的否定的合取组成的。同理，等价式 $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ 说明，一个合取的否定是由各分命题的否定的析取组成的。例5说明了德摩根律的运用。

例5 用德摩根律分别表达“迈格尔有一部手机且有一台便携式电脑”和“希瑟或史蒂夫将去看音乐会”的否定。

解 令 p 为“迈格尔有一部手机”， q 为“迈格尔有一个便携式电脑”，那么“迈格尔有一部手机且有一台便携式电脑”可以表达为 $p \wedge q$ 。用德摩根第一定律， $\neg(p \wedge q)$ 等价于 $\neg p \vee \neg q$ 。结果，我们可以将原命题的否定表达为“迈格尔没有一部手机或没有一台便携式电脑”。

令 r 为“希瑟将去看音乐会”， s 为“史蒂夫将去看音乐会”，那么“希瑟或史蒂夫将去看音乐会”可以表达为 $r \vee s$ 。用德摩根第二定律， $\neg(r \vee s) \equiv \neg r \wedge \neg s$ 。结果，我们可以将原命题的否定表达为“希瑟和史蒂夫都将不去看音乐会”。

1.2.4 构建新的逻辑等价式

表1-15中的逻辑等价关系以及业已建立起来的其他(如表1-16和表1-17中所示的那些)等价关系，可以用于构造其他等价关系，原因是复合命题中的一个命题可以用与它逻辑等价的复合命题替换而不改变原复合命题的真值。这种方法可由例6至例8得到说明。在这些例子中，我们还使用了如下事实：如果 p 和 q 逻辑等价， q 和 r 逻辑等价，那么 p 和 r 也逻辑等价。

Extra Examples

例6 证明 $\neg(p \rightarrow q)$ 和 $p \wedge \neg q$ 逻辑等价。

解 我们可以用真值表来证明这两个复合命题是等价的(和例4中的方法相似)。事实上，不必那么复杂。然而，想解释如何用我们已经知道的逻辑证明来建立新的逻辑证明，要用到大量的变元。因此，以 $\neg(p \rightarrow q)$ 开始，以 $p \wedge \neg q$ 结束，每次用表1-15中的一个等价式，通过发展一系列逻辑等价式的方法来建立这个等价式。我们有下列等价式。

$$\begin{aligned}\neg(p \rightarrow q) &\equiv \neg(\neg p \vee q) && \text{由例3} \\ &\equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q && \text{由德摩根第二定律} \\ &\equiv p \wedge \neg q && \text{由双非律}\end{aligned}$$

例7 证明 $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ 和 $\neg p \wedge \neg q$ 逻辑等价。

解 我们可用真值表证明这两个复合命题等价。不过我们不这样做，而是每次使用表1-15中的一个等价关系，依次建立一串等价。从 $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ 开始，到 $\neg p \wedge \neg q$ 结束，最终证明它们等价。我们有下列等价关系。

$$\begin{aligned}\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) && \text{由德摩根第二定律} \\ &\equiv \neg p \wedge [\neg(\neg p) \vee \neg q] && \text{由德摩根第一定律} \\ &\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q) && \text{由双非律} \\ &\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{由分配律} \\ &\equiv \mathbf{F} \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{由于 } \neg p \wedge p \equiv \mathbf{F} \\ &\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee \mathbf{F} && \text{由析取的交换律} \\ &\equiv \neg p \wedge \neg q && \text{由 } \mathbf{F} \text{ 的恒等律}\end{aligned}$$

于是 $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ 和 $\neg p \wedge \neg q$ 逻辑等价。

例8 证明 $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ 为永真式。

解 为证明这个命题是永真式，我们将用逻辑等价证明它逻辑上等价于 $\mathbf{T}$ 。(注意：这也可以用真值表来完成。)

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) &\equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q) && \text{由例3} \\ &\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q) && \text{由德摩根第一定律} \\ &\equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q) && \text{由析取的结合律和交换律} \\ &\equiv \mathbf{T} \vee \mathbf{T} && \text{由例1和析取的交换律} \\ &\equiv \mathbf{T} && \text{由支配律}\end{aligned}$$

真值表可以用于判定复合命题是否为永真式。对于只含少数变量的复合命题，可以用手工完成这一工作。但当变量数目增多时，就不可行了。例如，对于含 20 个变量的复合命题，它的真值表就有 $2^{20} = 1\,048\,576$ 行。显然，你需要一台计算机帮助你以这种方式判定含 20 个变量的复合命题是否为永真式。但是当变量数为 1000 时，一台计算机能在一个可以接受的时间内判定复合命题是否为永真式吗？要检查 2^{1000} 种（这是一个超过 300 位的十进制数）可能的真值组合中的每一种，一台计算机在几万亿年之内都不可能完成。而且迄今尚没有其他已知的计算过程能使计算机在合理的时间之内判定变量数这么大的复合命题是否为永真式。

含有两个变量的简单合取式有 $p \wedge q$, $\neg p \wedge q$, $p \wedge \neg q$ 和 $\neg p \wedge \neg q$ 。只有当 p 和 q 的真值都为真时， $p \wedge q$ 的真值为真；类似地， $\neg p \wedge q$ 为真，仅当 p 为假和 q 为真； $p \wedge \neg q$ 为真，仅当 p 为真和 q 为假； $\neg p \wedge \neg q$ 为真，仅当 p 和 q 都为假。

例 9 请写出一个命题公式，使其具有如表 1-18 所示的真值表。

表 1-18 真值表

p	q	?
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

对于真值表中真值为真的每一行，选择变量仅在该行所列取值时真值为真的二元合取式，将它们用 $\vee$ 连接，得到的就是以这个表为真值表的命题公式。真值表中真值为真的三行对应的合取式为 $p \wedge q$, $p \wedge \neg q$ 和 $\neg p \wedge \neg q$ ，所以该真值表的命题公式为

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

含有三个变量的合取式有类似的情况。对于表 1-19 的每一行，合取式的真值为真仅当其中的变量的取值为该行所列的变量值，否则合取式的真值为假。

表 1-19 含有三个变量的合取式情况

	p	q	r
$p \wedge q \wedge r$	T	T	T
$p \wedge q \wedge \neg r$	T	T	F
$p \wedge \neg q \wedge r$	T	F	T
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	T	F	F
$\neg p \wedge q \wedge r$	F	T	T
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	F	T	F
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	F	F	T
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	F	F	F

注意，在表 1-19 的每一行，当一个变量的取值为假时，该变量在合取式中被否定。

定义 3 一个合取式包含每个变量，每个变量（包括变量的否定）出现一次且仅一次，称这样的合取式为小项。由若干个小项的析取构成的析取式，称为析取范式。如果 $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ 是小项， $m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee \dots \vee m_n$ 是析取范式。

要找到一个命题公式，使它的真值表是给定的真值表，可以对真值表中真值为真的每一行在表 1-19 中找到对应的合取式，将它们用 $\vee$ 连接。例如，要找到一个命题公式，使它的真值表如表 1-20 所示。表 1-20 中有三行真值为真，它对应的命题公式为

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$$

这个析取式就是析取范式，其中的合取式 $p \wedge q \wedge r, p \wedge \neg q \wedge \neg r, \neg p \wedge q \wedge r$ 为小项。

表 1-20 真值表

p	q	r	$?$
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

类似地，析取式 $p \vee q \vee r$ 的真值为假，仅当 p, q 和 r 都为假。表 1-21 列出所有三个变量的析取式。

表 1-21 含有三个变量的析取式情况

	p	q	r
$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	T	T	T
$\neg p \vee \neg q \vee r$	T	T	F
$\neg p \vee q \vee \neg r$	T	F	T
$\neg p \vee q \vee r$	T	F	F
$p \vee \neg q \vee \neg r$	F	T	T
$p \vee \neg q \vee r$	F	T	F
$p \vee q \vee \neg r$	F	F	T
$p \vee q \vee r$	F	F	F

表 1-21 中每行的析取式，仅当变量取值为这一行所列变量值时，它的真值为假，否则它的真值为真。注意，当一个变量的取值为真时，该变量在对应的析取式中被否定。

定义 4 一个析取式包含每个变量，每个变量(包括变量的否定)出现一次且仅一次，称这样的析取式为大项。由若干个大项的合取构成的合取式，称为合取范式。如果 $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ 是大项， $M_1 \wedge M_2 \wedge M_3 \wedge \dots \wedge M_n$ 是合取范式。

要找到一个命题公式，使它的真值表是给定的真值表，可以对真值表中真值为假的每一行在表 1-21 中找到对应的析取式，将它们用 $\wedge$ 连接。例如，要找到一个命题公式，使它的真值表如表 1-20 所示。表 1-20 中有 5 行真值为假，它对应的命题公式为

$$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r)$$

这个合取式就是合取范式，其中的析取式 $\neg p \vee \neg q \vee r, \neg p \vee q \vee \neg r, p \vee \neg q \vee r, p \vee q \vee \neg r, p \vee q \vee r$ 为大项。

练习

1. 用真值表证明下列等价关系。

- a) $p \wedge \text{F} \equiv p$
- b) $p \vee \text{F} \equiv p$
- c) $p \wedge \text{F} \equiv \text{F}$
- d) $p \vee \text{T} \equiv \text{T}$
- e) $p \vee p \equiv p$
- f) $p \wedge p \equiv p$

2. 用真值表证明交换律。

- a) $p \vee q \equiv q \vee p$
- b) $p \wedge q \equiv q \wedge p$

3. 用真值表证明分配律。

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

4. 用德摩根律求下列命题的否定。

- a) Jan 是富裕的, 也是快乐的。
- b) Carlos 明天骑自行车或者跑步。
- c) Mei 步行或乘公共汽车去上课。
- d) Ibrahim 既聪明又工作努力。

5. 用真值表证明下列各条件语句为永真式。

- a) $(p \wedge q) \rightarrow p$
- b) $p \rightarrow (p \vee q)$
- c) $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$
- d) $(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$
- e) $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$
- f) $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$

6. 不用真值表证明练习 5 中的各条件语句为永真式。

7. 用真值表证明下列称为吸收律的等价关系。

- a) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
- b) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

8. 判断 $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$ 是否为永真式。

练习 9~14 都是要求证明两个复合命题逻辑等价。做这样的题目, 你要证明表达式中命题变元的相同真值组合, 或者都为真, 或者都为假。(每题都很容易。)

9. 证明 $\neg(p \leftrightarrow q)$ 和 $p \leftrightarrow \neg q$ 逻辑等价。

10. 证明 $\neg p \leftrightarrow q$ 和 $p \leftrightarrow \neg q$ 逻辑等价。

11. 证明 $\neg(p \leftrightarrow q)$ 和 $\neg p \leftrightarrow q$ 逻辑等价。

12. 证明 $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ 和 $(p \vee q) \rightarrow r$ 逻辑等价。

13. 证明 $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$ 和 $(p \wedge q) \rightarrow r$ 逻辑等价。

14. 证明 $p \leftrightarrow q$ 和 $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ 逻辑等价。

15. 证明 $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ 是永真式。

16. 证明 $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ 和 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 不等价。

17. 证明 $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow s)$ 和 $(p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow s)$ 不逻辑等价。

只含逻辑运算符 $\vee$ 、 $\wedge$ 和 $\neg$ 的复合命题的对偶是将该命题中的每个 $\vee$ 用 $\wedge$ 代替, 每个 $\wedge$ 用 $\vee$ 代替, 每个 T 用 F 代替, 每个 F 用 T 代替得到的命题。命题 s 的对偶用 s' 表示。

18. 求下列命题的对偶。

- a) $p \wedge \neg q \wedge \neg r$
- b) $(p \wedge q \wedge r) \vee s$
- c) $(p \vee F) \wedge (q \vee T)$

19. 当 s 是复合命题时, 证明 $(s')' = s$ 。

**20. 为什么两个只含运算符 $\wedge$ 、 $\vee$ 和 $\neg$ 的等价复合命题的对偶也等价?

21. 找一个只含命题 p 、 q 和 r 的复合命题, 在 p 、 q 和 r 中恰有两个为真时命题为真, 否则为假。[提示: 构造合取的析取。对命题成真的每一种组合包含一个合取。每个合取都应包含三个命题变元中每个或它的否定。]

22. 证明 $\neg$ 、 $\wedge$ 和 $\vee$ 构成一个功能完备的逻辑运算符集合。[提示: 利用每个复合命题都逻辑等价于一个析取范式这个事实。]

*23. 证明 $\neg$ 和 $\vee$ 构成一个功能完备的逻辑运算符集合。

下面几道题用到逻辑运算符 NAND(与非)和 NOR(或非)。命题 $p \text{ NAND } q$ 在 p 为假或 q 为假或两者均为假时为真; 当 p 和 q 均为真时为假。命题 $p \text{ NOR } q$ 只在 p 和 q 均为假时为真, 否则为假。命题 $p \text{ NAND } q$ 和 $p \text{ NOR } q$ 分别表示为 $p \mid q$ 和 $p \downarrow q$ 。(运算符 $\mid$ 和 $\downarrow$ 分别以谢佛和皮尔斯的名字命名为谢佛竖(Sheffer stroke)和皮尔斯箭头。)

24. 证明 $p \mid q$ 逻辑等价于 $\neg(p \wedge q)$ 。

25. 证明 $p \downarrow q$ 逻辑等价于 $\neg(p \vee q)$ 。

*26. 只用运算符 $\downarrow$ 构造一个等价于 $p \rightarrow q$ 的命题。

27. 证明 $p \mid q$ 和 $q \mid p$ 等价。

*28. 只用命题变元 p 和 q 能有多少不同的复合命题真值表?

29. 下面的语句取自一个电话系统的规范说明: “如果电话号码数据库是打开的, 那么监督程序被置于关闭状态, 只要系统不在初态。”这句话有两个条件语句, 使规范说明很难懂。找一个等价的易懂的规范说明, 使其只涉及析取和否定, 不涉及条件语句。

30. 通过对 p, q, r, s 赋真值, 析取表达式 $p \vee \neg q \vee s, \neg p \vee \neg r \vee s, \neg p \vee \neg r \vee \neg s, \neg p \vee q \vee \neg s, q \vee r \vee \neg s, q \vee \neg r \vee \neg s, \neg p \vee \neg q \vee \neg s, p \vee r \vee s, p \vee r \vee \neg s$ 中有多少可以同时为真?

如果对命题变量的真值赋值可使复合命题为真, 则称这个复合命题是可满足的。

31. 解释一下用于判定复合命题可满足性的算法如何能用来判断一个复合命题是否是永真式。[提示: 考虑 $\neg p$, 其中 p 是已经考察过的命题。]

1.3 谓词和量词

1.3.1 引言

在 1.1 节和 1.2 节中学习的命题逻辑, 不能充分地表达数学语言和自然语言中语句的意思。比如, 假设我们知道

“每个连接到大学网络的电脑运行正常。”

没有命题逻辑规则让我们判断

“MATH3 在正常运行”

这句话的真实性, 其中 MATH3 是连接在大学网络的一台电脑。同样, 我们不能用命题逻辑的规则判断以下语句的正确性:

“CS2 被一个入侵者攻击。”

其中 CS2 是连接在大学网络的计算机; “有一台连接在大学网络的计算机正遭受一入侵者的攻击”。

本节将介绍一种更强类型的逻辑, 即谓词逻辑。我们将明白如何用谓词逻辑表达命题在数学和计算机科学中广泛的语句意义, 用这个方法可以帮助我们推理和探索对象之间的关系。为了理解谓词逻辑, 我们首先需要介绍谓词的概念, 之后, 介绍量词的概念, 它可以让我们用能够判断语句属于某种类型的所有对象拥有某种性质的语句断言, 以及具有特定性质的语句断言。

1.3.2 谓词

含变量的语句, 如

“ $x > 3$ ”, “ $x = y + 3$ ”, “ $x + y = z$ ”

“计算机 x 被一个入侵者攻击”

以及

“计算机 x 在正常运行”

常见于数学断言、计算机程序, 以及系统规格说明。在变量值未知的时候, 这些语句既不为真也不为假。本节将讨论从这种语句产生命题的方式。

语句“ x 大于 3”有两部分, 第一部分即变量 x 是语句的主语; 第二部分谓词“大于 3”, 表明语句的主语会有的一性质。我们可以用 $P(x)$ 表示语句“ x 大于 3”, 其中 P 表示谓词“大于 3”, 而 x 是变量。也把语句 $P(x)$ 说成是命题函数 P 在 x 的值。一旦给变量 x 赋一个值, 语句 $P(x)$ 就成为命题, 因而有真值。考虑下面的例 1 和例 2。

例 1 令 $P(x)$ 表示语句“ $x > 3$ ”, $P(4)$ 和 $P(2)$ 的真值是什么?

解 在语句“ $x > 3$ ”中让 $x = 4$ 即得到语句 $P(4)$ 。因此 $P(4)$ 即语句“ $4 > 3$ ”, 为真; 但语句 $P(2)$ 即“ $2 > 3$ ”, 为假。 ■

例 2 令 $A(x)$ 表示语句“计算机 x 正被一个入侵者攻击”。假设在校园的计算机中, 只有 CS2 和 MATH1 经常被入侵者攻击, 那么 $A(\text{CS1})$ 、 $A(\text{CS2})$ 和 $A(\text{MATH1})$ 的真值是什么?

解 在语句“计算机 x 正被一个入侵者攻击”中, 设 $x = \text{CS1}$ 得到语句 $A(\text{CS1})$ 。因为 CS1 不在经常受到攻击的名单中, 所以判断 $A(\text{CS1})$ 为假。同样, 因为 CS2 和 MATH1 在经常受攻击的名单中, 我们知道 $A(\text{CS2})$ 和 $A(\text{MATH1})$ 为真。 ■

还可以让语句中含不止一个变量, 例如, 考虑语句“ $x = y + 3$ ”。我们可以用 $Q(x, y)$ 表示这条语句, 其中 x, y 为变量, Q 为谓词。在赋值给 x 和 y 时, 语句 $Q(x, y)$ 就有了真值。

例 3 令 $Q(x, y)$ 表示语句“ $x = y + 3$ ”, 命题 $Q(1, 2)$ 和 $Q(3, 0)$ 的真值是什么?

解 要得到 $Q(1, 2)$, 在 $Q(x, y)$ 中令 $x = 1, y = 2$ 。因此, $Q(1, 2)$ 为语句“ $1 = 2 + 3$ ”。

为假。语句 $Q(3, 0)$ 为语句“ $3=0+3$ ”，为真。 ■

例 4 令 $A(c, n)$ 表示语句“计算机 c 被连接到网络 n ”，其中变量 c 代表一台计算机，变量 n 代表一网络。假设计算机 MATH1 被连接到 CAMPUS2，但没有被连接到 CAMPUS1。 $A(\text{MATH1}, \text{CAMPUS1})$ 和 $A(\text{MATH1}, \text{CAMPUS2})$ 的真值是什么？

解 因为 MATH1 没有连接到 CAMPUS1 网络，我们知道 $A(\text{MATH1}, \text{CAMPUS1})$ 为假。然而，因为 MATH1 连接到了 CAMPUS2 网络，我们知道 $A(\text{MATH1}, \text{CAMPUS2})$ 为真。 ■

同样，我们可以令 $R(x, y, z)$ 表示语句“ $x+y=z$ ”，当变量 x, y, z 被赋值时，此句就有真值。

例 5 命题 $R(1, 2, 3)$ 和 $R(0, 0, 1)$ 的真值是什么？

解 在语句 $R(x, y, z)$ 中令 $x=1, y=2, z=3$ ，即得到命题 $R(1, 2, 3)$ 。可以看出 $R(1, 2, 3)$ 就是语句“ $1+2=3$ ”，为真。 $R(0, 0, 1)$ 即语句“ $0+0=1$ ”，为假。 ■

一般涉及 n 个变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的语句可以用 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示。

形为 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的语句是命题函数 P 在 n 元组 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的值， P 也称为 n 元谓词。

下面的例子说明命题函数可以出现在计算机程序中。

例 6 考虑语句

if $x > 0$ **then** $x := x + 1$

当程序中遇到这样一条语句时，变量 x 在程序运行到此刻的值即被代入 $P(x)$ ，也就是代入“ $x > 0$ ”。如果对 x 的这一值 $P(x)$ 为真，即执行赋值语句 $x := x + 1$ ，于是 x 的值增加 1。如果对 x 的这一值 $P(x)$ 为假，则不执行赋值语句，所以 x 的值不改变。 ■

也可以用谓词验证计算机程序，当有效输入时总能得到正确的输出。描述有效输入的语句叫做前置条件，当程序运行时，输出应该满足的条件称为后置条件。如例 7 所示，用谓词来表达前置条件和后置条件。

例 7 考虑下面的交换变量 x 和 y 值的程序。

```
temp := x
x := y
y := temp
```

找出能作为前置条件和后置条件的谓词，以证明此程序的正确性。然后解释如何用它们验证对所有有效的输入，程序的运行都能达到目的。

解 对于前置条件，我们需要表达在运行程序之前 x 和 y 被赋值。因此，对于这个前置条件可以用谓词 $P(x, y)$ 表示，其中 $P(x, y)$ 指语句“ $x=a, y=b$ ”， a 和 b 是在运行程序之前 x 和 y 的值。因为我们想证明对于所有输入变量，程序交换了 x 和 y 的值，对后置条件可以用 $Q(x, y)$ 表示，其中 $Q(x, y)$ 表示语句“ $x=b, y=a$ ”。

为证明程序总是按照预期运行，假设前置条件 $P(x, y)$ 成立。也就是说，假设命题“ $x=a, y=b$ ”为真，这意味着 $x=a, y=b$ 。程序的第一步， $\text{temp} := x$ ，将 x 的值赋给 temp ，所以下一步是 $x=a, \text{temp}=a, y=b$ 。程序第二步， $x := y$ ，因此 $x=b, \text{temp}=a, y=b$ 。最后，第三步，我们知道 $x=b, \text{temp}=a$ ，以及 $y=a$ 。结果，程序运行后，后置条件 $Q(x, y)$ 成立，也就是说，语句“ $x=b, y=a$ ”为真。 ■

1.3.3 量词

当命题函数中所有变量均被赋值时，得到的命题有一个真值。还有另一重要方式，也可以从命题函数产生命题，这就是量化。量化表示谓词在一定范围的事物上成立的程度。在语言中，单词“所有”、“一些”、“许多”、“没有”以及“没几个”被用于量化。这里讨论两类量化：全称量化，它告诉我们一个谓词在所考虑的每一对象中都为真；存在量化，它告诉我们一个谓词对所考虑中的一个或多个对象成真。处理谓词和量词的逻辑领域称为谓词演算。

全称量词 许多数学命题对于某一性质在变量的某一特定域内的所有值均为真，这一特定域称为变量的**论域**(或**全体域**)，时常简单地称为**域**。这类语句用全称量化表示。 $P(x)$ 对特定论域的全称量化是指：它断言 $P(x)$ 对 x 在其论域中的所有值为真。注意，论域是变量 x 所有可能指定的值。当我们改变论域时， $P(x)$ 的全称量化的意义也随之改变。在用全称量词时，必须指定论域，否则语句的全称量词无意义。

定义 1 $P(x)$ 的全称量化是语句“ $P(x)$ 对 x 在其论域的所有值为真”。

符号 $\forall xP(x)$ 表示 $P(x)$ 的全称量化，其中 $\forall$ 称为**全称量词**。命题 $\forall xP(x)$ 也可表示为“对所有 x ， $P(x)$ ”或“对每个 x ， $P(x)$ ”。对于 $P(x)$ 是假的对象称为 $\forall xP(x)$ 的**反例**。

全称量词的意义在表 1-22 的第一行做了总结。我们用例 8~13 来说明全称量词的使用。

表 1-22 量词

命 题	何时为真	何时为假
$\forall xP(x)$	对每一个 x ， $P(x)$ 都为真	有一个 x ，使 $P(x)$ 为假
$\exists xP(x)$	有一个 x ，使 $P(x)$ 为真	对每一个 x ， $P(x)$ 都为假

例 8 令 $P(x)$ 为命题“ $x+1>x$ ”，量化语句 $\forall xP(x)$ 的真值是什么？其中论域是实数集合。

解 由于 $P(x)$ 对所有实数 x 均为真，量化语句 $\forall xP(x)$

的值为真。

注意 通常，一个隐含假设使量词的所有论域为非空的。如果论域为空，那么 $\forall xP(x)$ 对任何命题函数 $P(x)$ 都为真，因为论域中没有元素 x 使 $P(x)$ 为假。

除了“对所有”和对“每一个”外，全称量词还可以用其他方式表达，包括“所有的”、“对任一个”、“任何”、“对任意的”、“给定任何的”等。

注意 最好避免使用“对于任一 x ”，因为它常常引起“每一”和“一些”的歧义。某种程度上，“任一”是歧义的，就像它用于否定句时那样，如“没有任一理由忽视学习。”

当且仅当 $P(x)$ 不总为真时 $\forall xP(x)$ 为假，其中 $P(x)$ 是一个命题函数， x 在论域中。要证明当 x 在论域中的情况下 $P(x)$ 不总为真，一种方法是找到 $\forall xP(x)$ 的一个反例。注意仅仅一个反例就是我们确定 $\forall xP(x)$ 为假所需要的全部。例 9 解释了如何使用反例。

例 9 令 $Q(x)$ 表示语句“ $x<2$ ”。若论域是实数集合，量化语句 $\forall xQ(x)$ 的真值是什么？

解 $Q(x)$ 并非对所有实数都为真，例如， $Q(3)$ 就为假。也就是说， $x=3$ 是语句 $\forall xQ(x)$ 的反例。因此

$$\forall xQ(x)$$

为假。

例 10 假设 $P(x)$ 是“ $x^2>0$ ”。要证明语句 $\forall xP(x)$ 为假(其中论域是所有整数)，我们给出一个反例。 $x=0$ 是一个反例，因为当 $x=0$ 时， $x^2=0$ 而不大于 0。

在数学研究中，寻找全称量化语句的反例是一个重要的部分，在本书后续章节中还会介绍。当论域中的所有元素可以一一列出时，例如列成 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，全称量化 $\forall xP(x)$ 与合取

$$P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \dots \wedge P(x_n)$$

是一回事，因为这一合取为真，当且仅当 $P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n)$ 全为真。

例 11 若论域是不超过 4 的正整数， $P(x)$ 是语句“ $x^2<10$ ”， $\forall xP(x)$ 的真值是什么？

解 语句 $\forall xP(x)$ 就是合取

$$P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$$

因为论域由 1、2、3 和 4 组成。由于 $P(4)$ 即语句“ $4^2<10$ ”为假， $\forall xP(x)$ 为假。

例 12 如果 $N(x)$ 指“计算机 x 被连到网络”，论域为校园里所有的计算机，那么 $\forall xN(x)$ 是什

么意思呢?

解 语句 $\forall x N(x)$ 的意思是对于校园里的每一台计算机 x , 它都被连到了网络。这句话可以用自然语言表达为“校园里每一台计算机都连到网络”。

正如我们已经指出的那样, 当使用量词时, 说明论域是很重要的。量化语句的真值通常取决于哪个对象处于论域中, 如例 13 所示。

例 13 如果论域包括所有实数, $\forall x(x^2 \geq x)$ 的真值是什么? 如果论域包括所有整数, 真值又是什么?

解 论域是所有实数时, 全称量词 $\forall x(x^2 \geq x)$ 为假。例如, $(1/2)^2 \not\geq 1/2$ 。注意 $x^2 \geq x$ 当且仅当 $x^2 - x = x(x-1) \geq 0$ 。因此, $x^2 \geq x$ 当且仅当 $x \leq 0$ 或 $x \geq 1$ 。由此得出, 如果论域包括所有实数, $\forall x(x^2 \geq x)$ 为假(因为当 $0 < x < 1$ 时, 不等式不成立)。然而, 如果论域为整数, $\forall x(x^2 \geq x)$ 为真, 因为对任一整数 x 都不存在 $0 < x < 1$ 。

存在量词 许多数学定理断定有一个具有某种性质的元素。这类语句用存在量化表示。用存在量化可以构成这样一个命题: 它成真的充分必要条件是论域中至少有一个值满足 $P(x)$ 为真。

定义 2 $P(x)$ 的存在量化是命题“论域中存在一个元素 x 满足 $P(x)$ ”。

我们用符号 $\exists x P(x)$ 表示 $P(x)$ 的存在量化, 其中 $\exists$ 称为**存在量词**。

当使用语句 $\exists x P(x)$ 时, 必须指定论域。而且当论域变化时, $\exists x P(x)$ 的意义也改变。如果没有指定论域, 那么语句 $\exists x P(x)$ 没有意义。存在量化 $\exists x P(x)$ 可读作

“有一个 x 满足 $P(x)$ ”,

“至少有一个 x 满足 $P(x)$ ”,

或

“对某个 x , $P(x)$ ”。

除了“存在”, 我们也可以用许多其他方式表达存在量化, 如“有一些”、“至少一个”或“有”。

存在量词的意义见表 1-22 的第二行。例 14~16 说明了存在量词的运用。

例 14 令 $P(x)$ 表示语句“ $x > 3$ ”, 论域为实数集合, 量化语句 $\exists x P(x)$ 的真值是什么?

解 因为“ $x > 3$ ”在如 $x=4$ 时为真, $P(x)$ 的存在量化 $\exists x P(x)$ 为真。

我们发现, 当且仅当论域中没有对象满足 $P(x)$ 为真时, 语句 $\exists x P(x)$ 为假。也就是说, $\exists x P(x)$ 为假, 当且仅当 $P(x)$ 对于论域中的每一个对象都为假。例 15 将解释这个发现。

例 15 令 $Q(x)$ 表示语句“ $x = x+1$ ”, 论域是实数集, 量化语句 $\exists x Q(x)$ 的真值是什么?

解 因为对每个实数 x , $Q(x)$ 都为假, $Q(x)$ 的存在量化 $\exists x Q(x)$ 为假。

注意 通常, 当讲到量词的论域时, 隐含假设它为非空集。如果论域为空, 那么无论 $Q(x)$ 是什么样的命题函数, $\exists x Q(x)$ 都为假。因为当论域为空时, 论域中没有对象使 $Q(x)$ 为真。

当论域中的所有元素可以一一列出时, 例如列成 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 存在量化 $\exists x P(x)$ 与析取

$$P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \vee P(x_n)$$

是一回事, 因为当且仅当 $P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n)$ 中至少一个为真时, 这一析取为真。

例 16 若 $P(x)$ 是语句“ $x^2 > 10$ ”, 论域为不超过 4 的正整数, $\exists x P(x)$ 的真值是什么?

解 由于论域为 $\{1, 2, 3, 4\}$, 命题 $\exists x P(x)$ 就是析取

$$P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$$

由于 $P(4)$ 即“ $4^2 > 10$ ”为真, $\exists x P(x)$ 为真。

在决定量化语句的真值时, 借助循环与搜索来思考是有益的。假定在变量 x 的论域中有 n 个对象, 要决定 $\forall x P(x)$ 是否为真, 可以对 x 的 n 个值循环查看 $P(x)$ 是否总是真。如果遇到 x 的一个值使 $P(x)$ 为假, 那就证明 $\forall x P(x)$ 为假, 否则 $\forall x P(x)$ 为真。要决定 $\exists x P(x)$ 是否为真, 我们循环查看 x 的 n 个值, 搜索使 $P(x)$ 为真的 x 之值。如果找到一个, 那么 $\exists x P(x)$ 为真; 如果总也找不到这样的 x , 则判定 $\exists x P(x)$ 为假。(注意, 当论域有无穷多个值时, 这一搜索过程不适用。不过

以这种方式思考量化语句的真值仍是有益的。)

1.3.4 其他量词

现在已经介绍了全称量词和存在量词，它们是数学和计算机科学中最重要的量词。然而，我们定义的不同量词没有数量的限制，如“确定有2个”，“有不超过3个”，“至少有100个”等。其他量词中最常见的是唯一量词，用符号 $\exists!$ 或 $\exists_1$ 表示。符号 $\exists!xP(x)$ (或 $\exists_1xP(x)$)指“存在唯一 x 使 $P(x)$ 为真”。其他表示唯一量词的词语有“确切存在一个”，“有且只有一个”。我们可以用前边学过的量词，以及命题逻辑来表达唯一性，所以唯一量词是可以避免的。通常，最好坚持运用存在量词和全称量词，因此这些量词的推理规则可以运用。

1.3.5 约束论域量词

一个缩略符号常被用来约束量词的论域。在这个符号里，在量词后有一个变量必须满足的条件。这将在例17中解释。我们也将在此节描述这个符号涉及集合成员的其他形式。

例17 语句 $\forall x < 0 (x^2 > 0)$ ， $\forall y \neq 0 (y^3 \neq 0)$ ，以及 $\exists z > 0 (z^2 = 2)$ 的意思是什么？其中各句的论域都为实数集。

解 语句 $\forall x < 0 (x^2 > 0)$ 表示对于每一个实数 $x < 0$ ，则 $x^2 > 0$ 。也就是说，它表示“一个负实数的平方为正实数”。这个语句与 $\forall x (x < 0 \rightarrow x^2 > 0)$ 意义相同。

语句 $\forall y \neq 0 (y^3 \neq 0)$ 表示对于每一个实数 $y \neq 0$ ，则有 $y^3 \neq 0$ 。也就是说，它表示“每一个非零实数的立方不为零”。注意这个语句等价于 $\forall y (y \neq 0 \rightarrow y^3 \neq 0)$ 。

语句 $\exists z > 0 (z^2 = 2)$ 表示存在一个实数 $z > 0$ ，使 $z^2 = 2$ 。也就是说，它表示“有一个正数是2的平方根”。这个语句等价于 $\exists z (z > 0 \wedge z^2 = 2)$ 。 ■

注意，全称量化的约束和一个条件语句的全称量化等价。比如， $\forall x < 0 (x^2 > 0)$ 是表达“ $\forall x (x < 0 \rightarrow x^2 > 0)$ ”的另一种方式。另一方面，存在量化的约束和一个合取的存在量化等价。比如 $\exists z > 0 (z^2 = 2)$ 是表达 $\exists z (z > 0 \wedge z^2 = 2)$ 的另一种方式。

1.3.6 量词的优先级

量词 $\forall$ 和 $\exists$ 比所有命题演算的逻辑运算符有更高的优先级。比如， $\forall x P(x) \vee Q(x)$ 是 $\forall x P(x)$ 和 $Q(x)$ 的析取。换句话说，它表示 $(\forall x P(x)) \vee Q(x)$ ，而不是 $\forall x (P(x) \vee Q(x))$ 。

1.3.7 绑定变量

当量词作用于变量 x 时，我们说此变量的这一次出现为绑定的。没有被量词绑定或设置为与某一特定值相等的变量出现称为自由的。出现在命题函数中的所有变量必须是绑定的，才能把此命题函数转变为命题。可以用全称量词、存在量词和赋值来完成转变。

逻辑表达式中应用量词的部分称为这个量词的作用域。因此，一个变量是自由的——如果在指定这个变量的公式中，变量在所有量词的作用域之外。

例18 在语句 $\exists x (x + y = 1)$ 中，变量 x 被存在量词 $\exists x$ 绑定，但是变量 y 是自由的，因为它没有被一个量词绑定且没有值被指定到这个变量。这解释了在语句 $\exists x (x + y = 1)$ 中， x 被绑定而 y 是自由的。

在语句 $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall x R(x)$ 中，所有变量都绑定了。第一个量词 $\exists x$ 的作用域是表达式 $P(x) \wedge Q(x)$ ，因为 $\exists x$ 只作用于 $P(x) \wedge Q(x)$ ，没有语句的其余部分。类似地，第二个量词 $\forall x$ 的作用域是表达式 $R(x)$ 。也就是说，存在量词在 $P(x) \wedge Q(x)$ 中绑定变量 x ，全称量词 $\forall x$ 在 $R(x)$ 中绑定变量 x 。由此，我们可以用两个不同的变量 x 和 y 将语句写为 $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall y R(y)$ ，因为两个量词的作用域不重叠。读者在日常使用中应注意这一点，相同的字母经常被用于表示被不同量词绑定而其作用域不重叠的变量。 ■

1.3.8 涉及量词的逻辑等价

在1.2节介绍了复合命题逻辑等价的概念。我们可将这个概念扩展到涉及谓词和量词的表达

式中。

定义 3 涉及谓词和量词的语句是逻辑等价的，当且仅当无论什么谓词代入这些语句，也不用哪个个体论域于这些命题函数里的变量上，它们都有相同的真值。用符号 $S \equiv T$ 来表示涉及谓词和量词的两个语句 S 和 T 逻辑等价。

例 19 说明了如何表示两个涉及谓词和量词的语句逻辑等价。

例 19 表明 $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ 和 $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ 逻辑等价(论域始终相同)。这个逻辑等价式表明可以在一个合取上分配全称量词。此外，也可以在一个析取上分配存在量词。然而，不能在析取上分配全称量词，也不能在合取上分配存在量词。(见练习 26。)

解 为表示这两个语句逻辑等价，必须表示出，不论 P 和 Q 是什么谓词，也不论运用哪个个体论域，它们总有相同真值。假设有特定的谓词 P 和 Q ，论域为常用的。可以做两件事来表示出 $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ 和 $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ 逻辑等价。首先，表示出如果 $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ 为真，那么 $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ 为真。第二步，表示出如果 $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ 为真，那么 $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ 为真。

因此，假设 $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ 为真。这意味着如果 a 在论域中，那么 $P(a) \wedge Q(a)$ 为真。所以， $P(a)$ 为真，且 $Q(a)$ 为真。因为对论域中每个对象 $P(a)$ 为真，且 $Q(a)$ 为真都成立，可以下结论， $\forall xP(x)$ 和 $\forall xQ(x)$ 都为真。这意味着 $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ 为真。

下一步，假设 $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$ 为真。那么 $\forall xP(x)$ 为真，且 $\forall xQ(x)$ 为真。因此，如果 a 在论域中，那么 $P(a)$ 为真，且 $Q(a)$ 为真(因为 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 对论域中所有元素都为真，所以这里用同样的值 a 不矛盾)。接着，对于所有的 a ， $P(a) \wedge Q(a)$ 为真。所以 $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ 为真。现在可以下结论

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$$

1.3.9 否定量化表达式

我们常会考虑量化表达式的否定，例如，考虑语句

“班上每个学生都学过一门微积分课”

的否定。这个语句是全称量化语句，即

$$\forall xP(x)$$

其中 $P(x)$ 为语句“ x 学过一门微积分课”，论域是你们班的所有学生。这一语句的否定是“并非班上每个学生都学过一门微积分课”。这等价于“班上有个学生没有学过微积分课”。这也就是原命题函数之否定的存在量化，即

$$\exists x \neg P(x)$$

这个例子说明了下面的等价关系：

$$\neg \forall xP(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

为了说明 $\neg \forall xP(x)$ 和 $\exists x \neg P(x)$ 不论命题函数 $P(x)$ 和论域是什么都为逻辑等价，首先注意 $\neg \forall xP(x)$ 为真，当且仅当 $\forall xP(x)$ 为假。下一步，注意 $\forall xP(x)$ 为假当且仅当论域中有一个元素 x 使 $P(x)$ 为假。它成立当且仅当论域中有一个元素 x 使 $\neg P(x)$ 为真。最后，注意论域中有一个元素 x 使 $\neg P(x)$ 为真当且仅当 $\exists x \neg P(x)$ 为真。将这些步骤放在一起，可以得出结论 $\neg \forall xP(x)$ 为真当且仅当 $\exists x \neg P(x)$ 为真。接着便是 $\neg \forall xP(x)$ 和 $\exists x \neg P(x)$ 逻辑等价。

假定我们想否定一个存在量化语句。例如，考虑命题“班上有个学生学过一门微积分课。”就是存在量化语句

$$\exists xQ(x)$$

其中 $Q(x)$ 为语句“ x 学过一门微积分课”。这句话的否定是命题“并非班上有个学生学过微积分课”。这等价于“班上每个学生都没学过微积分课”，这也就是原命题函数之否定的全称量化，或用量词语言表示为

$$\forall x \neg Q(x)$$

这个例子说明了等价关系

$$\neg \exists x Q(x) \equiv \forall x \neg Q(x)$$

为了表示出 $\neg \exists x Q(x) \equiv \forall x \neg Q(x)$ ，即不论 $Q(x)$ 和论域是什么都为逻辑等价。首先注意 $\neg \exists x Q(x)$ 为真当且仅当 $\exists x Q(x)$ 为假。而这个为真当且仅当论域中没有 x 使 $Q(x)$ 为真。下一步，注意论域中没有 x 使 $Q(x)$ 为真当且仅当 $Q(x)$ 对论域中的每个元素 x 都为假。最后，注意 $Q(x)$ 对论域中每个 x 都为假当且仅当 $\neg Q(x)$ 对论域中所有 x 都为真。而它成立当且仅当 $\forall x \neg Q(x)$ 为真。将这些步骤放在一起，发现 $\neg \exists x Q(x)$ 为真当且仅当 $\forall x \neg Q(x)$ 为真。我们得出结论： $\neg \exists x Q(x)$ 和 $\forall x \neg Q(x)$ 逻辑等价。

量词否定的规则称为量词的德摩根定律。这些规则总结在了表 1-23 中。

表 1-23 量词的德摩根定律

否 定	等价语句	何时为真	何时为假
$\neg \exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	对每个 x ， $P(x)$ 为假	有 x ，使 $P(x)$ 为真
$\neg \forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	有 x 使 $P(x)$ 为假	对每个 x ， $P(x)$ 为真

注意 当谓词 $P(x)$ 的论域包含 n 个元素时，其中 n 是正整数，用于否定量化语句的规则恰与 1.2 节讨论的德摩根律相同。这是称这些规则为量词的德摩根定律的原因。当论域有 n 个元素 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 时， $\neg \forall x P(x)$ 与 $\neg (P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \dots \wedge P(x_n))$ 相等，而后者等价于 $\neg P(x_1) \vee \neg P(x_2) \vee \dots \vee \neg P(x_n)$ （由德摩根律），该式又等价于 $\exists x \neg P(x)$ 。类似地， $\neg \exists x P(x)$ 与 $\neg (P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \vee P(x_n))$ 相等，后者由德摩根律等价于 $\neg P(x_1) \wedge \neg P(x_2) \wedge \dots \wedge \neg P(x_n)$ ，该式又等于 $\forall x \neg P(x)$ 。

例 20 和例 21 中解释了量化语句的否定。

例 20 语句“有的政治家诚实”和“所有美国人都吃干酪汉堡包”的否定是什么？

解 令 $H(x)$ 表示“ x 是诚实的”，则语句“有诚实的政治家”可以用 $\exists x H(x)$ 来表示，其中论域包括所有政治家。这个语句的否定是 $\neg \exists x H(x)$ ，它等价于 $\forall x \neg H(x)$ 。这个否定可以表达为“每个政治家都不诚实。”注意，在自然语言中，语句“所有政治家是不诚实的”是含糊的。在一般应用中，这个语句通常意味着“并不是所有的政治家都是诚实的”。因此我们不用这个语句表达它的否定。

令 $C(x)$ 为“ x 吃干酪汉堡包”，则语句“所有美国人都吃干酪汉堡包”可以用 $\forall x C(x)$ 来表示，其中论域包括所有美国人。这个语句的否定是 $\neg \forall x C(x)$ ，它等价于 $\exists x \neg C(x)$ 。这个否定可以用几种不同的方式来表达，包括“一些美国人不吃干酪汉堡包”和“有一个美国人不吃干酪汉堡包”。 ■

例 21 语句 $\forall x (x^2 > x)$ 和 $\exists x (x^2 = 2)$ 的否定是什么？

解 $\forall x (x^2 > x)$ 的否定是语句 $\neg \forall x (x^2 > x)$ ，它等价于 $\exists x \neg (x^2 > x)$ 。这个表达式可以重写为 $\exists x (x^2 \leq x)$ 。 $\exists x (x^2 = 2)$ 的否定是语句 $\neg \exists x (x^2 = 2)$ ，它等价于 $\forall x \neg (x^2 = 2)$ 。这个表达式可以重写为 $\forall x (x^2 \neq 2)$ 。这些语句的真值取决于论域。 ■

在例 22 中用量词的德摩根律。

例 22 证明 $\neg \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ 和 $\exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$ 逻辑等价。

解 用全称量词德摩根律，我们知道 $\neg \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ 和 $\exists x (\neg (P(x) \rightarrow Q(x)))$ 逻辑等价。用 1.2 节表 1-16 中第 5 个逻辑等价式，我们知道 $\neg (P(x) \rightarrow Q(x))$ 和 $P(x) \wedge \neg Q(x)$ 对每个 x 逻辑等价。因为在一个逻辑等价中可以将一个逻辑等价表达式转换为另一个，得到 $\neg \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ 和 $\exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$ 逻辑等价。 ■

1.3.10 翻译语句为逻辑表达式

将汉语(或其他自然语言)语句翻译成逻辑表达式，这在数学、逻辑编程、人工智能、软件工程及许多其他学科中是一项重要的任务。在 1.1 节中，我们学习了把句子译成由命题和逻辑联接

词构成逻辑表达式的过程。那时，我们特意对要求谓词和量词的语句翻译避而不谈。当用到量词时，将语句翻译成逻辑表达式会变得更复杂。而且，有多种方式可用于翻译一个特定的语句。（因此，没有“菜谱”式的方法可供你按部就班地学习。）我们会给出一些例子说明如何将汉语语句翻译成逻辑表达式。翻译的目标是生成简单而有用的逻辑表达式。本节我们只讨论这样的语句，可将其翻译成使用单个量词的逻辑表达式。下一节会讨论一些更复杂的要求多个量词的语句。

例 23 使用谓词和量词表达语句“班上的每个学生都学过微积分课”。

解

首先，重写语句以确定要使用的量词。重写后可得：

“对班上的每一个学生，该学生学过微积分课。”

接着，引入变量 x ，语句就变成

“对班上的每一个学生 x ， x 学过微积分课。”

然后，引入谓词 $C(x)$ ，表示语句“ x 学过微积分课”。因此，如果 x 的论域是班上的学生，我们可以将语句翻译为 $\forall x C(x)$ 。

然而，还有其他正确的翻译方法，并可使用不同的论域和其他谓词。具体选择什么方法取决于后续要进行的推理。例如，我们可能对更广泛的人群感兴趣，而不仅仅是班上的学生。如果将论域改成所有人，则语句就要变成

“对每个人 x ，如果 x 是班上的学生，那么 x 学过微积分课。”

如果 $S(x)$ 表示语句 x 在这个班上，则我们的语句可表达为 $\forall x (S(x) \rightarrow C(x))$ 。（警告：语句不能被表达为 $\forall x (S(x) \wedge C(x))$ ，因为这表示的是所有人都是这个班上的学生并且学过微积分课。）

最后，如果我们对除微积分之外的其他主修课程感兴趣，可以使用双变量量词 $Q(x, y)$ 表示语句“学生 x 学过课程 y ”。这样在上述两种方法中我们就要把 $C(x)$ 替换成 $Q(x, \text{微积分})$ ，得到 $\forall x Q(x, \text{微积分})$ 或 $\forall x (S(x) \rightarrow Q(x, \text{微积分}))$ 。■

在例 23 中演示了采用谓词和量词表达相同语句的不同方法。不过要记住，应该总是采用适合后续推理使用的最简单的方法。

例 24 用谓词和量词表达语句“这个班上某个学生去过墨西哥”和“这个班上每个学生或去过加拿大，或去过墨西哥。”

解 语句“这个班上某个学生去过墨西哥”在意思是“在这个班上有个学生，他去过墨西哥”。引入变量 x ，因此语句变成“在这个班上有个学生 x ， x 去过墨西哥”。

引入谓词 $M(x)$ 表示语句“ x 去过墨西哥”。如果 x 的论域是这个班上的学生，我们就可以将第一个语句翻译为 $\exists x M(x)$ 。

然而，如果我们感兴趣的人不在这个班上，我们会看到这个语句会有些不同。语句可表达为“有这样一个人 x ： x 是这个班的学生，并且 x 去过墨西哥。”在这种情况下， x 的论域是所有人，我们引入谓词 $S(x)$ 表示语句“ x 是这个班上的一个学生”。答案就变成了 $\exists x (S(x) \wedge M(x))$ ，因为它表示有某个人 x 是这个班上的一个学生并且去过墨西哥。[警告：语句不能表示为 $\exists x (S(x) \rightarrow M(x))$ ，因为对于某个不在这个班的人它也是真的，由于对这样的 x ， $S(x) \rightarrow M(x)$ 就变成 $F \rightarrow T$ 或者 $F \rightarrow F$ ，两个都是真的。]

类似地，对第二个语句，能够表示成“对于在这个班上的每一个 x ， x 去过加拿大，或 x 去过墨西哥”。（注意：“或”在这里，假设是包容的，而不是排斥的。）我们令 $C(x)$ 表示语句“ x 去过加拿大”。由前面的推理，如果 x 的论域是这个班上的学生，则第二个语句可以表达为 $\forall x (C(x) \vee M(x))$ 。然而，如果 x 的论域是所有人，我们的语句就表示成：“对于每一个人 x ，如果 x 在这个班，则 x 去过加拿大，或 x 去过墨西哥。”因而语句被表示成 $\forall x (S(x) \rightarrow (C(x) \vee M(x)))$ 。

不同于使用谓词 $M(x)$ 和 $C(x)$ 分别表示 x 去过墨西哥和 x 去过加拿大，我们可以使用两个变量谓词 $V(x, y)$ 表示“ x 去过国家 y ”。在本例中， $V(x, \text{墨西哥})$ 和 $V(x, \text{加拿大})$ 与 $M(x)$ 和 $C(x)$ 意思相同并可以代替它们。如果碰到某人去过多个国家的语句，用这种双变量的方法更可取。否则为了简单将坚持用单变量谓词 $M(x)$ 和 $C(x)$ 。■

1.3.11 在系统说明中运用量词

在1.1节用命题来表示系统说明。然而，许多系统说明涉及谓词和量词。这将在例25中说明。

例25 用谓词和量词表达系统说明“每封大于1MB的邮件将被压缩”和“如果用户处于活动状态，那么至少有一个网络连接有效”。

解 令 $S(m, y)$ 表示“邮件 m 大于 y MB”，其中变量 x 的论域是所有邮件，变量 y 是一个正实数。令 $C(m)$ 表示“邮件 m 将被压缩”，那么说明“每封大于1MB的邮件将被压缩”。可以表达为

$$\forall m(S(m, 1) \rightarrow C(m))$$

令 $A(u)$ 表示“用户 u 处于活动状态”，其中变量 u 的论域是所有用户。令 $S(n, x)$ 表示“网络连接 n 处于 x 状态”，其中 n 的论域是所有网络连接， x 的论域是所有可能的网络连接状态。那么说明“如果用户处于活动状态，那么至少有一个网络连接有效”可以表达为

$$\exists u A(u) \rightarrow \exists n S(n, \text{available})$$

1.3.12 选自 Lewis Carroll 的例子

Lewis Carroll(实际上是 C. L. Dodgson 的笔名)是《Alice in Wonderland》的作者，也是有关符号逻辑几篇论文的作者。他的书中有用量词推理的例子。下面的两个例子选自他的书《Symbolic logic》，选自这本书的其他例子在本节末的练习中给出。这些例子说明了怎样用量词表示各种类型的词句。

例26 考虑下面这些语句，其中头两句称为前提，第三句称为结论。作为一个整体它们被称为一个论证。

“所有狮子都是凶猛的。”

“有些狮子不喝咖啡。”

“有些凶猛的动物不喝咖啡。”

(1.5节将讨论判定结论部分是不是前提部分有效后果的问题，就这个例子来说，结论是有效的。)令 $P(x)$, $Q(x)$ 和 $R(x)$ 分别为语句“ x 是狮子”，“ x 是凶猛的”和“ x 喝咖啡”。假定所有动物的集合为论域，用量词及 $P(x)$ 、 $Q(x)$ 和 $R(x)$ 表示上面这些语句。

解 可以将这些句子表示为：

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$\exists x(P(x) \wedge \neg R(x))$$

$$\exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$$

注意，第二句不能表示为 $\exists x(P(x) \rightarrow \neg R(x))$ 。原因是 $P(x) \rightarrow \neg R(x)$ 在 x 不是狮子时总是成真，所以只要有一只不是狮子的动物， $\exists x(P(x) \rightarrow \neg R(x))$ 就成真，即使所有狮子都喝咖啡它也成真。同样，第三句也不能写成

$$\exists x(Q(x) \rightarrow \neg R(x))$$

例27 考虑下面的语句，其中前3个语句为前提，第4个语句为有效结论。

“所有蜂鸟都五彩斑斓。”

“没有大鸟以蜜为生。”

“不以蜜为生的鸟都色彩单调。”

“蜂鸟都是小鸟。”

令 $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ 和 $S(x)$ 分别为语句“ x 是只蜂鸟”，“ x 是大的”，“ x 以蜜为生”和“ x 五彩斑斓”。假定以所有鸟的集合为论域，用量词及 $P(x)$ 、 $Q(x)$ 、 $R(x)$ 和 $S(x)$ 表示上述语句。

解 可以把论证中的语句表示为

$$\forall x(P(x) \rightarrow S(x))$$

$$\neg \exists x(Q(x) \wedge R(x))$$

$$\forall x(\neg R(x) \rightarrow \neg S(x))$$

$$\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$$

(注意，我们假定了“小”就是“不大”，“色彩单调”就是“不五彩斑斓”。为证明第4句是前3句的有效结论，需要用到将在1.5节讨论的推理规则。)

1.3.13 逻辑程序设计

有一类重要的程序设计语言，使用谓词逻辑的规则进行推理。其中之一就是 Prolog (Programming in Logic 的缩写)，这种语言开发于 20 世纪 70 年代，应用于人工智能领域。Prolog 程序包括一组声明，其中包括两类语句：**Prolog 事实**和**Prolog 规则**。Prolog 事实定义谓词，这是通过指定满足这些谓词的元素来实现的。Prolog 规则使用那些 Prolog 事实定义好的谓词来定义新的谓词。例 28 演示这些概念。

例 28 考虑一个 Prolog 程序，给出的事实是每门课程的教师和学生注册的课程。程序使用这些事实回答与教师授课情况相关的查询。这样的程序可使用谓词 $\text{instructor}(p, c)$ 和 $\text{enrolled}(s, c)$ 分别表示教授 p 是讲授课程 c 的老师及学生 s 注册课程 c 。例如，此程序中的 Prolog 事实可能包含：

```
instructor(chan, math273)
instructor(patel, ee222)
instructor(grossman, cs301)
enrolled(kevin, math273)
enrolled(juana, ee222)
enrolled(juana, cs301)
enrolled(kiko, math273)
enrolled(kiko, cs301)
```

(用小写字母表示项目是因为 Prolog 把以大写字母开始的名字当做变量。)

一个新的谓词 $\text{teaches}(p, s)$ 表示教授 p 教学生 s ，可以用 Prolog 规则来定义：

```
teaches(P, S) :- instructor(P, C), enrolled(S, C)
```

上述语句意味着如果教授 p 是课程 c 的老师，学生 s 注册课程 c ， $\text{teaches}(p, s)$ 为真。(注意，在 Prolog 中逗号用于表示谓词合取。类似地，分号表示谓词析取。)

Prolog 使用给定的事实和规则回答查询。例如，使用上述的事实和规则，查询

```
? enrolled(kevin, math273)
```

生成应答

```
yes
```

因为事实 $\text{enrolled}(\text{kevin}, \text{math273})$ 是一个输入。查询

```
? enrolled(X, math273)
```

生成应答

```
kevin
kiko
```

要生成上面的应答，Prolog 确定 $\text{enrolled}(X, \text{math273})$ 包含的作为 Prolog 事实的 X 所有可能的值。类似地，要找到 Juana 所选课程的教师，可以用查询

```
? teaches(X, juana)
```

这个查询返回

```
patel
grossman
```

练习

- 令 $P(x)$ 表示语句“ $x \leq 4$ ”。下列各项的真值是什么?
a) $P(0)$ b) $P(4)$ c) $P(6)$
- 令 $Q(x, y)$ 表示语句“ x 是 y 的首府。”下列各项的真值是什么?
a) $Q(\text{丹佛, 科罗拉多})$ b) $Q(\text{底特律, 密歇根})$ c) $Q(\text{马萨诸塞, 波士顿})$ d) $Q(\text{纽约, 纽约})$
- 令 $P(x)$ 为语句“ x 每个工作日都花 5 个多小时上课”, 其中 x 的论域是学生集合。用句子表达下列各量化语句。
a) $\exists x P(x)$ b) $\forall x P(x)$ c) $\exists x \neg P(x)$ d) $\forall x \neg P(x)$
- 将下列语句翻译成汉语语句, 其中 $C(x)$ 是“ x 是一个喜剧演员”, $F(x)$ 是“ x 很有趣”, 论域是所有人。
a) $\forall x (C(x) \rightarrow F(x))$ b) $\forall x (C(x) \wedge F(x))$ c) $\exists x (C(x) \rightarrow F(x))$ d) $\exists x (C(x) \wedge F(x))$
- 令 $P(x)$ 为语句“ x 说俄语”, $Q(x)$ 为语句“ x 了解计算机语言 C++”。用 $P(x)$ 、 $Q(x)$ 、量词和逻辑联接词表示下列各句子, 量词的论域为你校全体学生的集合。
a) 你校有个学生既会说俄语又了解 C++。 b) 你校有个学生会说俄语, 但不了解 C++。
c) 你校所有学生或会说俄语, 或了解 C++。 d) 你校没有学生会说俄语或了解 C++。
- 令 $P(x)$ 为语句“ $x = x^2$ ”。如果论域是整数集合, 下列各项的真值是什么?
a) $P(0)$ b) $P(1)$ c) $P(2)$
d) $P(-1)$ e) $\exists x P(x)$ f) $\forall x P(x)$
- 如果论域为整数集合, 下列各语句的真值是什么?
a) $\forall n (n+1 > n)$ b) $\exists n (2n = 3n)$ c) $\exists n (n = -n)$ d) $\forall n (n^2 \geq n)$
- 如果所有变量的论域为整数集合, 下列各语句的真值是什么?
a) $\forall n (n^2 \geq 0)$ b) $\exists n (n^2 = 2)$ c) $\forall n (n^2 \geq n)$ d) $\exists n (n^2 < 0)$
- 假设命题函数 $P(x)$ 的论域为整数 0, 1, 2, 3 和 4。使用析取、合取和否定写出下列命题。
a) $\exists x P(x)$ b) $\forall x P(x)$ c) $\exists x \neg P(x)$
d) $\forall x \neg P(x)$ e) $\neg \exists x P(x)$ f) $\neg \forall x P(x)$
- 假设命题函数 $P(x)$ 的论域为整数 1, 2, 3, 4 和 5。使用析取、合取和否定(而不使用量词)表达下列语句。
a) $\exists x P(x)$ b) $\forall x P(x)$ c) $\neg \exists x P(x)$ d) $\neg \forall x P(x)$
e) $\forall x ((x \neq 3) \rightarrow P(x)) \vee \exists x \neg P(x)$
- 给下列语句分别为真和假的相应论域。
a) 每一个人都学离散数学。 b) 每一个人都超过 21 岁。
c) 每两个人都有相同的妈妈。 d) 没有两个不同的人有相同的祖母。
- 使用谓词、量词和逻辑联接词, 以两种方式将下列语句翻译成逻辑表达式。首先, 令论域为班上的学生, 其次, 令论域为所有人。
a) 班上有人会说印地语。 b) 班上的每个人都很好。
c) 班上有个学生不是出生在加利福尼亚。 d) 班上有个学生曾演过电影。
e) 班上没有学生上过逻辑编程课程。
- 使用谓词、量词和逻辑联接词, 将下列语句翻译成逻辑表达式。
a) 人无完人。 b) 不是每个人都很完美。
c) 你的所有朋友都很完美。 d) 你的某个朋友很完美。
e) 每个人都是你的朋友并且很完美。 f) 不是每个人都是你的朋友或有人并不完美。
- 使用谓词(带有一个或两个变量), 通过改变论域, 以三种不同的方式将下列语句翻译成逻辑表达式。
a) 学校里的某个学生曾在越南居住过。 b) 学校里的有个学生不会说印地语。
c) 学校里的某个学生会用 Java、Prolog 和 C++。 d) 班上的每个学生都喜欢泰国食物。
e) 班上的某个学生不打曲棍球。
- 使用逻辑运算符、谓词和量词来表达下列语句。
a) 某些命题是永真式。 b) 矛盾的否定是永真式。
c) 两个可能式的析取可以是一个永真式。 d) 两个永真式的合取是一个永真式。

16. 假定 $Q(x, y, z)$ 的论域由 x, y 和 z 的三元组组成, 其中 $x=0, 1$ 或 $2, y=0$ 或 $1, z=0$ 或 1 。用析取和合取写出下列命题。
- a) $\forall yQ(0, y, 0)$ b) $\exists xQ(x, 1, 1)$ c) $\exists x\neg Q(0, 0, z)$ d) $\exists x\neg Q(x, 0, 1)$
17. 用量词表达下列语句, 然后取该语句的否定并使否定词不在量词的左边。再用简单语句表达这否定(不要简单地表达为“不是……”)。
- a) 一些年长的狗会学习新的技巧。 b) 没有会微积分的兔子。
c) 每只鸟都会飞。 d) 没有会说话的狗。
e) 班上没有人会法语和俄语。
18. 找出下列全称量化语句的反例(如果可能的话), 其中所有变量的论域是整数集合。
- a) $\forall x(x^2 \geq x)$ b) $\forall x(x > 0 \vee x < 0)$ c) $\forall x(x = 1)$
19. 用谓词和量词表达下列语句。
- a) 一名飞机乘客如果在一年中飞行的里程超过 25 000 英里, 或在那一年坐飞机的次数超过 25 次, 就表明他是高贵乘客。
b) 一名男选手, 若他的马拉松比赛过去最好成绩在 3 小时内, 他就有资格参赛。一名女选手, 若她的过去最好成绩在 3.5 小时内, 她就有资格参赛。
c) 一名学生要想取得硕士学位, 必须至少修满 60 个学分, 或至少修满 45 个学分并通过硕士论文答辩, 并且所有必修课程的成绩不低于 B。
d) 有某个学生在一个学期内修了 21 个学分并且全部课程的成绩都为 A。
- 练习 20~21 主要进行系统规范说明和逻辑表达式之间的翻译, 当中涉及量词。
20. 将下列规范说明翻译成语句, 其中 $F(p)$ 是“打印机 p 不能提供服务”, $B(p)$ 是“打印机 p 很忙”, $L(j)$ 是“打印作业 j 丢失了”, $Q(j)$ 是“打印作业 j 在队列中”。
- a) $\exists p(F(p) \wedge B(p)) \rightarrow \exists jL(j)$ b) $\forall pB(p) \rightarrow \exists jQ(j)$
c) $\exists j(Q(j) \wedge L(j)) \rightarrow \exists pF(p)$ d) $(\forall pB(p) \wedge \forall jQ(j)) \rightarrow \exists jL(j)$
21. 使用谓词、量词和逻辑联接词表达下列系统规范说明。
- a) 如果磁盘有 10MB 以上的空闲空间, 那么至少能保存一条邮件消息。
b) 每当有主动报警时, 所有排队的消息都被传送。
c) 诊断监控器跟踪所有系统的状态, 除了主控制台。
d) 对参与电话会议的每一方, 不在特殊列表上的主叫方应当付费。
22. 判断 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ 和 $\forall xP(x) \rightarrow \forall xQ(x)$ 是否逻辑等价, 并证明。
23. 证明 $\exists x(P(x) \vee Q(x))$ 和 $\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$ 是逻辑等价的。

练习 24~25 给出了空量词规则, 当量化变元不出现在语句部分的时候就能用。

24. 证明下列逻辑等价关系, 其中 x 在 A 中不作为自由变元出现。假设论域非空。
- a) $(\forall xP(x)) \wedge A \equiv \forall x(P(x) \wedge A)$ b) $(\exists xP(x)) \wedge A \equiv \exists x(P(x) \wedge A)$
25. 证明下列逻辑等价关系, 其中 x 在 A 中不作为自由变元出现。假设论域非空。
- a) $\forall x(P(x) \rightarrow A) \equiv \exists xP(x) \rightarrow A$ b) $\exists x(P(x) \rightarrow A) \equiv \forall xP(x) \rightarrow A$
26. 证明 $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$ 和 $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ 不是逻辑等价的。
27. 下列语句的真值是什么?
- a) $\exists! xP(x) \rightarrow \exists xP(x)$ b) $\forall xP(x) \rightarrow \exists! xP(x)$ c) $\exists! x\neg P(x) \rightarrow \neg \forall xP(x)$
28. 给定例 28 的 Prolog 事实, 对下列查询 Prolog 返回的是什么?
- a)? instructor(chan, math273) b)? instructor(patel, cs301)
c)? enrolled(X, cs301) d)? enrolled(kiko, Y)
e)? teaches(grossman, Y)
29. 假定 Prolog 事实用于定义谓词 mother(M, Y) 和 father(F, X), 这表示 M 是 Y 的母亲, F 是 X 的父亲。给出一个 Prolog 规则定义谓词 sibling(X, Y), 表示 X 和 Y 是兄弟(也就是, 有相同的父亲和母亲)。

练习 30~31 是根据 Lewis Carroll 的《Symbolic Logic》一书中的问题编写的。

30. 令 $P(x)$ 、 $Q(x)$ 和 $R(x)$ 分别为语句“ x 是教授”、“ x 无知”和“ x 爱虚荣”。用量词、逻辑联接词和 $P(x)$ 、

$Q(x)$ 、 $R(x)$ 表达下列语句。假定论域是所有人的集合。

a) 没有无知的教授。

b) 所有无知者均受虚荣。

c) 没有受虚荣的教授。

d) 能从 a) 和 b) 推出 c) 吗？若不能，有没有一个正确的结论？

31. 令 $P(x)$ 、 $Q(x)$ 、 $R(x)$ 和 $S(x)$ 分别为语句“ x 是婴儿”、“ x 的行为符合逻辑”、“ x 能管理鳄鱼”和“ x 被人轻视”。假定 x 的论域是所有人的集合。用量词、逻辑联接词和 $P(x)$ 、 $Q(x)$ 、 $R(x)$ 和 $S(x)$ 表达下列语句。

a) 婴儿行为不合逻辑。

b) 能管理鳄鱼的人不被人轻视。

c) 行为不合逻辑的人被人轻视。

d) 婴儿不能管理鳄鱼。

*e) 能从 a)、b) 和 c) 推出 d) 吗？若不能，有没有一个正确的结论？

1.4 嵌套量词

1.4.1 引言

在 1.3 节定义了存在量词和全称量词，并展示了如何用它们来表示数学语句。我们也解释了如何用它们来将汉语语句翻译成逻辑表达式。本节我们将学习**嵌套量词**，它是出现在其他量词的作用域内的量词，如在语句 $\forall x \exists y (x+y=0)$ 中。注意量词范围内的所有事物都可以被认为是命题函数。比如， $\forall x \exists y (x+y=0)$ 和 $\forall x Q(x)$ 相同，其中 $Q(x)$ 指 $\exists y P(x, y)$ ，而 $P(x, y)$ 表示 $x+y=0$ 。嵌套量词通常在数学和计算机科学中出现。尽管嵌套量词有时比较难理解，但在 1.3 节介绍过的规则却有助于我们使用它们。

为理解这些涉及许多量词的语句，我们需要阐明出现的量词和谓词的含义。具体如例 1 和例 2 所示。

例 1 假定变量 x 和 y 的论域是所有实数的集合，语句

Extra Example

$$\forall x \forall y (x+y = y+x)$$

说的是对所有实数 x 和 y ， $x+y=y+x$ 。这是实数加法的交换律。同样，语句

$$\forall x \exists y (x+y=0)$$

说的是对所有实数 x ，有一个实数 y ，使得 $x+y=0$ 。也就是每个实数都有一个加法的逆。同样，语句

$$\forall x \forall y \forall z (x+(y+z) = (x+y)+z)$$

是实数加法的结合律。

例 2 将下列语句翻译成汉语句子

$$\forall x \forall y ((x > 0) \wedge (y < 0) \rightarrow (xy < 0))$$

其中变量 x 和 y 的论域都是全体实数。

解 这个语句表示对任意实数 x 和 y ，如果 $x > 0$ 且 $y < 0$ ，那么 $xy < 0$ 。也就是说，这个语句表示对实数 x 和 y ，如果 x 是正的且 y 是负的，那么 xy 就是负的。这可以更简洁地叙述为“一个正实数与一个负实数的积是一个负实数”。

循环量化考虑 对多个变量使用量词时，借助嵌套循环来思考是有益的。（当然，如果某个变量的论域有无穷多个元素，是无法真正对所有值做循环的。不过这种考虑方式对理解嵌套量词总是有益的。）例如，要决定 $\forall x \forall y P(x, y)$ 是否为真，我们先对 x 的所有值做循环，而对 x 的每个值再对 y 的所有值循环。如果我们发现对 x 和 y 的所有值 $P(x, y)$ 都为真，那么我们就判定了 $\forall x \forall y P(x, y)$ 为真。只要我们碰上一个 x 值，对这个值又有一个 y 值使 $P(x, y)$ 为假，那么就证明了 $\forall x \forall y P(x, y)$ 为假。

同样，要判定 $\forall x \exists y P(x, y)$ 是否为真，我们对 x 的所有值循环，对 x 的每个值，对 y 的值循环直到找到一个 y 使 $P(x, y)$ 为真。如果对 x 的所有值，我们都能碰上这样的 y 值，那么

$\forall x \exists y P(x, y)$ 为真。如果对某个 x 我们碰不上这样的 y , 那么 $\forall x \exists y P(x, y)$ 就为假。

要决定 $\exists x \forall y P(x, y)$ 是否为真, 需要对 x 的值循环直到找到某个 x , 就这个 x 对 y 的所有值循环时 $P(x, y)$ 总是成真。如果能找到这样的 x , $\exists x \forall y P(x, y)$ 就为真。如果总也碰不上这样的 x , 那么我们知道 $\exists x \forall y P(x, y)$ 为假。

最后要看 $\exists x \exists y P(x, y)$ 是否为真。我们对 x 的值循环, 循环时对 x 的每个值都对 y 的值循环, 直到找到 x 的一个值和 y 的一个值使 $P(x, y)$ 为真。只有当我们永远碰不上这样的 x 和 y 能使 $P(x, y)$ 成真时, 语句 $\exists x \exists y P(x, y)$ 才为假。

1.4.2 量词的顺序

许多数学语句需要对多变量命题函数作多重量化。除非所有量词均为全称量词或均为存在量词, 否则量词的顺序是重要的。例3~5说明了这一点。

Example 例3 令 $P(x, y)$ 为语句“ $x+y=y+x$ ”, 量化语句 $\forall x \forall y P(x, y)$ 和 $\forall y \forall x P(x, y)$ 的真值是什么? 这里所有变元的论域是全体实数。

解 量化语句

$$\forall x \forall y P(x, y)$$

表示的命题是

“对所有实数 x 和所有实数 y , $x+y=y+x$ 成立。”

因为 $P(x, y)$ 对所有实数 x 和 y 都为真, $\forall x \forall y P(x, y)$ 为真。注意语句 $\forall x \forall y P(x, y)$ 表示“对所有实数 y , 对所有实数 x , $x+y=y+x$ 。”这句的意思和“对所有实数 x , 对所有实数 y , $x+y=y+x$ 意义相同。”也就是说, $\forall x \forall y P(x, y)$ 和 $\forall y \forall x P(x, y)$ 意义相同, 都为真。这说明在没有其他量词的语句中, 在不改变量化语句意义的前提下嵌套全称量词的顺序原则上可以改变。 ■

例4 令 $Q(x, y)$ 表示“ $x+y=0$ ”, 量化语句 $\exists y \forall x Q(x, y)$ 和 $\forall x \exists y Q(x, y)$ 的真值是什么? 这里所有变元的论域是全体实数。

解 量化语句

$$\exists y \forall x Q(x, y)$$

表示的命题是

“有个实数 y 能使 $Q(x, y)$ 对每一个实数 x 成立。”

不管 y 取什么值, 只有一个 x 的值能使 $x+y=0$ 成立。因为没有实数 y 能使 $x+y=0$ 对所有实数 x 成立, 语句 $\exists y \forall x Q(x, y)$ 为假。

量化语句

$$\forall x \exists y Q(x, y)$$

表示的命题是

“对每个实数 x 都有一个实数 y 使 $Q(x, y)$ 成立。”

给定一个实数 x , 总有一个实数 y 能使 $x+y=0$, 这个实数就是 $y=-x$ 。因此, 语句 $\forall x \exists y Q(x, y)$ 为真。 ■

例4说明量词出现的顺序不同含义也不同。语句 $\exists y \forall x P(x, y)$ 和 $\forall x \exists y P(x, y)$ 不是逻辑等价的, 语句 $\exists y \forall x P(x, y)$ 为真当且仅当存在一个 y , 使得 $P(x, y)$ 对每个 x 都成立。因此, 要使这一语句为真, 必须有一个特定的 y 值, 对这个值无论是什么样的 x , $P(x, y)$ 都成立; 另一方面, $\forall x \exists y P(x, y)$ 为真当且仅当对 x 的每一个值都有一个 y 的值使 $P(x, y)$ 成立。所以, 要使这个语句为真, 不管你选什么 x , 总有 y 的一个值(也许依赖于你选的 x)使 $P(x, y)$ 成立。换言之, 在第二种情况下, y 随着 x 而定, 但在第一种情况下, y 是与 x 无关的常数。

从这些观察可以看出, 如果 $\exists y \forall x P(x, y)$ 为真, 则 $\forall x \exists y P(x, y)$ 必定也为真; 可是如果 $\forall x \exists y P(x, y)$ 为真, $\exists y \forall x P(x, y)$ 不一定为真(参见本章补充练习24和25)。

表1-24是两个变量所有不同的可能量化方式的总结。

表 1-24 两个变量的量化

语 句	何时为真	何时为假
$\forall x \forall y P(x, y)$ $\forall y \forall x P(x, y)$	对每一对 x, y , $P(x, y)$ 均为真	有一对 x, y 使 $P(x, y)$ 为假
$\forall x \exists y P(x, y)$	对每个 x , 都有 y 使 $P(x, y)$ 为真	有 x , 使 $P(x, y)$ 对每个 y 总是假
$\exists x \forall y P(x, y)$	有一个 x , 使 $P(x, y)$ 对所有 y 均为真	对每个 x 都有 y 使 $P(x, y)$ 为假
$\exists x \exists y P(x, y)$ $\exists y \exists x P(x, y)$	有一对 x, y 使 $P(x, y)$ 为真	对每一对 x, y , $P(x, y)$ 均为假

超过两个变量的量词也很常见, 如例 5 所示。

例 5 令 $Q(x, y, z)$ 为语句“ $x+y=z$ ”, 语句 $\forall x \forall y \exists z Q(x, y, z)$ 和 $\exists z \forall x \forall y Q(x, y, z)$ 的真值是什么?

解 假定给 x 和 y 赋了值, 那么就有一个实数 z , 使得 $x+y=z$ 。于是量化语句

$$\forall x \forall y \exists z Q(x, y, z)$$

为真, 因为它其实就是语句

“对所有实数 x 和所有实数 y , 有实数 z , 使得 $x+y=z$ 。”

这里量词出现的顺序是重要的, 因为量化语句

$$\exists z \forall x \forall y Q(x, y, z)$$

也就是语句

“有实数 z 使得对所有实数 x 和所有实数 y , $x+y=z$ 。”

为假, 因为没有 z 的值能使 $x+y=z$ 对 x 和 y 的所有值都成立。 ■

1.4.3 将数学语句翻译成涉及嵌套量词的语句

用汉语表达的数学语句可以被翻译成逻辑表达式, 如例 6~8 所示。

例 6 将语句“两个正整数的和是正数”翻译成逻辑表达式。

解 要将这个语句翻译成逻辑表达式, 我们首先重写它以显示出隐含的量词和论域: “对每两个整数, 如果它们都是正的, 那么它们的和是正数”。然后, 引入变量 x 和 y 就得到“对所有正整数 x 和 y , $x+y$ 是正数”。因此, 可以将这个语句表达为

$$\forall x \forall y ((x > 0) \wedge (y > 0) \rightarrow (x + y > 0))$$

其中这两个变量的论域是全体整数。注意, 也可以将正整数作为论域。那么语句“两个正整数的和是正整数”变为“对每两个正整数, 它们的和为正”。可以将它表达为

$$\forall x \forall y (x + y > 0)$$

其中两个变量的论域为全体正整数。 ■

例 7 将语句“每个实数(除了 0)都有乘法逆元”(实数 x 的乘法逆元是使 $xy=1$ 的实数 y) 翻译成逻辑表达式。

解 我们首先重写这个语句为“对每个实数 x (除了 0), x 有乘法逆元”, 然后可以再将之重写为“对每个实数 x , 如果 $x \neq 0$, 那么存在一个实数 y 使得 $xy=1$ ”。这可以重写为

$$\forall x ((x \neq 0) \rightarrow \exists y (xy = 1))$$

正如前面提到的, 量词常用于数学概念的定义, 你可能熟悉的极限概念即为一例。极限是微积分中的重要概念。

例 8 (需要微积分知识)用量词表示极限的定义。

解 回顾语句 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 的定义: 对每个实数 $\epsilon > 0$, 存在一个实数 $\delta > 0$, 使得对每一个 x , 只要 $0 < |x - a| < \delta$, 就有 $|f(x) - L| < \epsilon$ 。极限的这一定义用量词表示为

$$\forall \epsilon \exists \delta \forall x (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon)$$

其中 ϵ 和 δ 的论域是正实数集合, x 的论域是实数集合。

这一定义还可表示为

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon)$$

其中 ϵ 和 δ 的论域为实数集合, 而不是正实数集合。(这里用到了约束量词。回忆 $\forall x > 0 P(x)$ 的意义是对所有 $x > 0$ 的数, $P(x)$ 为真。)

1.4.4 将嵌套量词翻译为汉语

表达汉语语句的带嵌套量词的表达式可以相当复杂。在翻译这样的表达式时, 第一步是写出表达式中的量词和谓词的含义, 第二步是用简单的句子来表达这个含义。例 9 和例 10 说明了这个过程。

例 9 把语句

$$\forall x(C(x) \vee \exists y(C(y) \wedge F(x, y)))$$

翻译成汉语。其中 $C(x)$ 是“ x 有台计算机”, $F(x, y)$ 是“ x 和 y 是朋友”, 而 x 和 y 的共同论域是学校全体学生的集合。

解 该语句说的是, 对学校的每个学生 x , 或者 x 有台计算机, 或者另有学生 y , 他有台计算机, 且 x 和 y 是朋友。换言之, 学校的每个学生或有计算机, 或有个有计算机的朋友。

例 10 把语句

$$\exists x \forall y \forall z ((F(x, y) \wedge F(x, z) \wedge (y \neq z)) \rightarrow \neg F(y, z))$$

翻译成汉语, 其中 $F(a, b)$ 的含义是 a 和 b 是朋友, 而 x 、 y 和 z 的论域是学校所有学生的集合。

解 这个语句说的是, 有一个学生 x , 对所有的学生 y 及不同于 y 的所有学生 z , 只要 x 和 y 是朋友, x 和 z 也是朋友, 那么 y 和 z 就不是朋友。换句话说, 有个学生, 他的朋友之间都不是朋友。

1.4.5 将汉语语句翻译成逻辑表达式

在 1.3 节展示了如何用量词来将句子翻译成逻辑表达式。然而, 当时没有谈及这样的句子, 即将其翻译成逻辑表达式要求使用嵌套量词。我们现在介绍如何翻译这样的句子。

例 11 将语句“如果某人是女性且为人父母, 这个人某人的母亲”翻译成逻辑表达式, 当中涉及谓词、量词(论域是所有人)以及逻辑联接词。

解 语句“如果某人是女性且为人父母, 这个人某人的母亲”可以表达为“对每个人 x , 如果 x 是女性且 x 是父母, 那么存在一个人 y 使 x 是 y 的母亲”。我们引入谓词 $F(x)$ 来表示“ x 是女性”, $P(x)$ 表示“ x 是父母”, $M(x, y)$ 表示“ x 是 y 的母亲”。则初始语句可以表示为

$$\forall x ((F(x) \wedge P(x)) \rightarrow \exists y M(x, y))$$

在 1.3 节练习 24 的 (b) 部分用空间量词规则, 可以把 $\exists y$ 移到左边, 以致它恰好出现在 $\forall x$ 之后, 因为 y 不在 $F(x) \wedge P(x)$ 中出现。这样得到一个等价的表达式

$$\forall x \exists y ((F(x) \wedge P(x)) \rightarrow M(x, y))$$

例 12 将语句“每个人都恰有一个最好的朋友”翻译成逻辑表达式, 当中涉及谓词、量词(论域是所有人)以及逻辑联接词。

解 语句“每个人都恰有一个最好的朋友”可以表达为“对每个人 x , x 恰有一个最好的朋友”。引入全称量词, 可以看到这个语句等价于“ $\forall x(x$ 恰有一个最好的朋友)”, 其中论域是所有人。

x 恰有一个最好的朋友意味着有一个人 y 是 x 的最好的朋友, 而且, 对每个人 z , 如果 z 不是 y , 那么 z 不是 x 的最好的朋友。当我们引入谓词 $B(x, y)$ 为语句“ y 是 x 的最好的朋友”, 则语句“ x 恰有一个最好的朋友”可以表示为

$$\exists y (B(x, y) \wedge \forall z ((z \neq y) \rightarrow \neg B(x, z)))$$

因此, 初始语句可以表示为

$$\forall x \exists y (B(x, y) \wedge \forall z ((z \neq y) \rightarrow \neg B(x, z)))$$

注意, 我们可以把这个语句写为 $\forall x \exists ! y B(x, y)$, 这里 $\exists !$ 是 1.3.4 节定义的存在唯一量词。

例 13 用量词表示语句“有位妇女已搭乘过世界上每一条航线上的航班”。

解 令 $P(w, f)$ 为“ w 搭乘过 f ”, 而 $Q(f, a)$ 为“ f 是 a 上的航班”。于是可将上述语句表示为

$$\exists w \forall a \exists f (P(w, f) \wedge Q(f, a))$$

其中, w 、 f 和 a 的论域分别为世界上所有妇女、所有空中航班和所有航线。

这个语句也可以表示为

$$\exists w \forall a \exists f R(w, f, a)$$

其中 $R(w, f, a)$ 为“ w 已搭乘过 a 上的 f ”。虽然这样表示更紧凑, 但它使变量之间的关系有点含糊不清, 因此, 第一个解要好些。 ■

1.4.6 否定嵌套量词

Assignment: 带嵌套量词的语句可以通过连续地应用否定带单个量词的语句的规则成为否定的。具体如例 14~16 所示。

例 14 表达语句 $\forall x \exists y (xy=1)$ 的否定, 使得量词前面没有否定词。

Extra Examples: **解** 通过连续地应用否定量化语句的规则(见 1.3 节表 1-23), 可以将 $\neg \forall x \exists y (xy=1)$ 中的否定词移入所有量词里面。我们发现, $\neg \forall x \exists y (xy=1)$ 等价于 $\exists x \neg \exists y (xy=1)$, 而后者又等价于 $\exists x \forall y \neg (xy=1)$ 。由于 $\neg (xy=1)$ 可以简化为 $xy \neq 1$, 所以, 我们的否定语句可以表达为 $\exists x \forall y (xy \neq 1)$ 。 ■

例 15 使用量词表达语句“没有一个妇女已搭乘过世界上每一条航线上的航班”。

解 这个语句是例 13 的语句“有位妇女已搭乘过世界上每一条航线上的航班”的否定。由例 13, 我们的语句可以表达为 $\neg \exists w \forall a \exists f (P(w, f) \wedge Q(f, a))$, 其中 $P(w, f)$ 是“ w 搭乘过 f ”, 而 $Q(f, a)$ 为“ f 是 a 上的航班”。通过连续地应用否定量化语句的规则(见 1.3 节表 1-23)并在最后一步应用德摩根律, 可发现我们的语句等价于如下语句:

$$\begin{aligned} \neg \exists w \neg \forall a \neg \exists f (P(w, f) \wedge Q(f, a)) &\equiv \forall w \exists a \neg \exists f (P(w, f) \wedge Q(f, a)) \\ &\equiv \forall w \exists a \forall f \neg (P(w, f) \wedge Q(f, a)) \\ &\equiv \forall w \exists a \forall f (\neg P(w, f) \vee \neg Q(f, a)) \end{aligned}$$

最后这条语句表示“对于每位妇女, 存在一条航线, 使得对所有的航班, 这位妇女要么没有搭乘过航班, 要么没有搭乘过不在这条航线的航班”。 ■

例 16 (需要微积分知识)使用量词和谓词表达 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 不存在这一事实。

解 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 不存在意味着对全体实数 L , $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq L$ 。根据例 8, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq L$ 可以表达为

$$\neg \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon)$$

连续地应用否定量化表达式的规则, 可得到如下等价语句序列:

$$\begin{aligned} \neg \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon) \\ &\equiv \exists \epsilon > 0 \neg \exists \delta > 0 \forall x (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon) \\ &\equiv \exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \neg \forall x (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon) \\ &\equiv \exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \neg (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon) \\ &\equiv \exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x (0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \epsilon) \end{aligned}$$

在最后一步使用等价式 $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$ 。这里依据 1.2 节表 1-16 的第 5 个等式。

由于“ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 不存在”意味着对全体实数 L , $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq L$ 。这个语句可以表达为

$$\forall L \exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x (0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \epsilon)$$

这最后一个语句表示, 对每个实数 L , 存在实数 $\epsilon > 0$ 使得对每个实数 $\delta > 0$, 存在实数 x 使得 $0 < |x - a| < \delta$ 和 $|f(x) - L| \geq \epsilon$ 。 ■

练习

1. 将下列语句翻译成汉语句子, 其中每个变量的论域是全体实数。

- a) $\forall x \exists y (x < y)$ b) $\forall x \forall y ((x \geq 0) \wedge (y \geq 0)) \rightarrow (xy \geq 0)$
 c) $\forall x \forall y \exists z (xy = z)$
2. 令 $Q(x, y)$ 是语句“ x 已经发送电子邮件消息给 y ”, 其中 x 和 y 的论域都是班上的所有学生, 将下列量化式子表达成汉语句子。
 a) $\exists x \exists y Q(x, y)$ b) $\exists x \forall y Q(x, y)$ c) $\forall x \exists y Q(x, y)$
 d) $\exists y \forall x Q(x, y)$ e) $\forall y \exists x Q(x, y)$ f) $\forall x \forall y Q(x, y)$
3. 令 $W(x, y)$ 表示“ x 访问过 y ”, 其中 x 的论域是你校全体学生集合, y 的论域是所有网站的集合。用简单的句子表达下列语句。
 a) $W(\text{Sarah Smith}, \text{www.att.com})$
 b) $\exists x W(x, \text{www.imdb.org})$
 c) $\exists y W(\text{Jose Orez}, y)$
 d) $\exists y (W(\text{Ashok Puri}, y) \wedge W(\text{Cindy Yoon}, y))$
 e) $\exists y \forall z (y \neq (\text{David Belcher}) \wedge (W(\text{David Belcher}, z) \rightarrow W(y, z)))$
 f) $\exists x \exists y \forall z ((x \neq y) \wedge (W(x, z) \leftrightarrow W(y, z)))$
4. 令 $T(x, y)$ 表示学生 x 喜欢菜肴 y , 其中 x 的论域是学校的所有学生, y 的论域是所有菜肴。用简单的汉语句子表达下列语句。
 a) $\neg T(\text{Abdallah Hussein}, \text{Japanese})$ b) $\exists x T(x, \text{Korean}) \wedge \forall x T(x, \text{Mexican})$
 c) $\exists y (T(\text{Monique Arsenault}, y) \vee T(\text{Jay Johnson}, y))$ d) $\forall x \forall z \exists y ((x \neq z) \rightarrow \neg (T(x, y) \wedge T(z, y)))$
 e) $\exists x \exists z \forall y (T(x, y) \leftrightarrow T(z, y))$ f) $\forall x \forall z \exists y (T(x, y) \leftrightarrow T(z, y))$
5. 令 $L(x, y)$ 为语句“ x 爱 y ”, 其中 x 和 y 的论域都是全世界所有人的集合。用量词表达下列各语句。
 a) 每个人都爱 Jerry. b) 每个人都爱某个人. c) 有个人人都爱的人。
 d) 没有人爱所有的人. e) 有个 Lydia 不爱的人. f) 有个人人都不爱的人。
 g) 恰有一个人人都爱的人. h) Lynn 爱的人恰有两个. i) 每个人都爱自己。
 j) 有人除自己以外谁都不爱。
6. 令 $S(x)$ 为谓词“ x 是学生”, $F(x)$ 为谓词“ x 是教员”, 而 $A(x, y)$ 是谓词“ x 问过 y 问题”, 其中论域是你校所有人员的集合。用量词表达下列语句。
 a) Lois 问过 Michaels 教授问题. b) 每个学生都问过 Gross 教授问题。
 c) 每位教员都问过 Miller 教授问题或被 Miller 教授问过问题. d) 某个学生从未问过任何教员问题。
 e) 有位教员从未被学生问过问题. f) 有个学生问过所有教员问题。
 g) 有位教员问过所有其他教员问题. h) 有学生从未被教员问过问题。
7. 令 $M(x, y)$ 为“ x 已发给 y 电子邮件”, $T(x, y)$ 为“ x 给 y 打过电话”, 其中论域为你们班上所有学生。用量词表达下列语句。(假定所有被发出的电子邮件都能收到, 尽管事实并非如此。)
 a) Chou 从未给 Koko 发过电子邮件。
 b) Arlene 从未给 Sarah 发过电子邮件, 或未打过电话。
 c) Jose 从未收到过 Deborah 的电子邮件。
 d) 班上每个学生都给 Ken 发过电子邮件。
 e) 班上没有人给 Nina 打过电话。
 f) 班上每个人或给 Avi 打过电话或给他发过电子邮件。
 g) 班上有个学生给班上其他人都发过电子邮件。
 h) 班上有人给班上其他人或打过电话, 或发过电子邮件。
 i) 班上有两个学生互发过电子邮件。
 j) 班上有个学生给自己发过电子邮件。
 k) 班上有个学生既没从班上其他人那里收到过电子邮件, 也没有人给他打过电话。
 l) 班上每个学生都或从同班同学那里收到过电子邮件, 或接到过同班同学的电话。
 m) 班上至少有两个学生, 一个给另一个发过电子邮件, 第二个则给第一个打过电话。
 n) 班上有两个同学, 他们当中有一个给班上其余同学或发过电子邮件, 或打过电话。
8. 用量词和谓词表达下列语句。
 a) 每位学计算机科学的学生都需要上一门离散数学课。

- b) 班上有个学生有一台个人电脑。
 c) 班上每个学生至少选修了一门计算机科学课。
 d) 班上有个学生至少选修过一门计算机科学课。
 e) 班上每个学生都去过校园里每座建筑。
 f) 班上有个学生去过校园里至少一座楼的每个房间。
 g) 班上每个学生都去过校园里每座楼的至少一个房间。
9. 使用谓词、量词和逻辑联接词(如果有必要)表达下列系统规范说明。
 a) 每个用户恰能访问一个邮箱。
 b) 在所有错误条件下某个进程能继续运行, 仅当内核运行正确。
 c) 校园网的所有用户都能访问具有 .edu 后缀的 URL 的所有站点。
 *d) 恰有两个系统监控着每一个远程服务器。
10. 使用数学和逻辑运算符、谓词及量词表达下列语句, 论域是全体整数。
 a) 两个负整数的和是负数。
 b) 两个正整数的差不一定是正数。
 c) 两个整数的平方和大于等于它们的和的平方。
 d) 两个整数的积的绝对值等于它们的绝对值的积。
11. 使用谓词、量词、逻辑联接词和数学运算符表达语句“每个正整数是四个整数的平方的和”。
12. 使用谓词、量词、逻辑联接词和数学运算符表达下列数学语句:
 a) 两个负实数的积是正数。
 b) 一个实数与它自身的差是零。
 c) 每个正实数恰有两个平方根。
 d) 负实数没有实数平方根。
13. 将下列嵌套量化式子翻译成表达出数学事实的汉语语句。论域均为全体实数。
 a) $\exists x \forall y (xy = y)$
 b) $\forall x \forall y ((x < 0) \wedge (y < 0)) \rightarrow (xy > 0)$
 c) $\exists x \exists y ((x^2 > y) \wedge (x < y))$
 d) $\forall x \forall y \exists z (x + y = z)$
14. 假定所有变量的论域都是整数集合, 确定下列语句的真值。
 a) $\forall n \exists m (n^2 < m)$
 b) $\exists n \forall m (n < m^2)$
 c) $\forall n \exists m (n + m = 0)$
 d) $\exists n \forall m (nm = m)$
 e) $\exists n \exists m (n^2 + m^2 = 5)$
 f) $\exists n \exists m (n^2 + m^2 = 6)$
 g) $\exists n \exists m (n + m = 4 \wedge n - m = 1)$
 h) $\exists n \exists m (n + m = 4 \wedge n - m = 2)$
 i) $\forall n \forall m \exists p (p = (m + n)/2)$
15. 假定命题函数 $P(x, y)$ 的论域由 x 和 y 的序偶组成, 其中 x 是 1、2 或 3, y 是 1、2 或 3。用析取和合取写出下列命题。
 a) $\forall x \forall y P(x, y)$
 b) $\exists x \exists y P(x, y)$
 c) $\exists x \forall y P(x, y)$
 d) $\forall y \exists x P(x, y)$
16. 表达出下列语句的否定, 并且所有的否定词紧跟在谓词之前。
 a) $\forall x \exists y \forall z T(x, y, z)$
 b) $\forall x \exists y P(x, y) \vee \forall x \exists y Q(x, y)$
 c) $\forall x \exists y (P(x, y) \wedge \exists z R(x, y, z))$
 d) $\forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow Q(x, y))$
17. 重写下列语句, 使否定只出现在谓词中(即否定词不在量词外边, 也不在含逻辑联接词的表达式外边)。
 a) $\neg \forall x \forall y P(x, y)$
 b) $\neg \exists y \exists x P(x, y)$
 c) $\neg \forall y \forall x (P(x, y) \vee Q(x, y))$
 d) $\neg (\exists x \exists y \neg P(x, y) \wedge \forall x \forall y Q(x, y))$
 e) $\neg \forall x (\exists y \forall z P(x, y, z) \wedge \exists z \forall y P(x, y, z))$
18. 给出变元 x, y, z 和 w 的一般论域, 使语句 $\forall x \forall y \forall z \exists w ((w \neq x) \wedge (w \neq y) \wedge (w \neq z))$ 为真, 给出另外的论域使其为假。
19. 用量词表达下列语句, 然后取该语句的否定并使否定词不在量词的左边。再用简单语句表达这否定(不要简单地表达为“不是……”)。
 a) 班上每个学生都恰好选修过本校两门数学课。
 b) 有人去过世界上除利比亚以外的每个国家。
 c) 没有人攀登过喜马拉雅山的每座山峰。
 d) 每位电影演员都或与 Kevin Bacon 同拍过电影, 或跟与 Kevin Bacon 同拍过电影的人同拍过电影。
20. 找出下列全称量化语句的反例(如果可能的话), 其中所有变量的论域是全体整数。
 a) $\forall x \forall y (x^2 = y^2 \rightarrow x = y)$
 b) $\forall x \exists y (y^2 = x)$
 c) $\forall x \forall y (xy \geq x)$

21. 用量词表达实数乘法的结合律。
22. 用量词和逻辑联接词表示事实：每一个线性多项式(也就是次数为1的多项式)，其中 x 带有非零实系数，其一定有一个实根。
23. 如果变量的论域分别如下，确定语句 $\forall x \exists y(xy=1)$ 的真值。
 a) 非零实数 b) 非零整数 c) 正实数
24. 证明语句 $\neg \exists x \forall y P(x, y)$ 和 $\forall x \exists y \neg P(x, y)$ 逻辑等价。这里在 $P(x, y)$ 中两个量词的第一和第二变元有相同的论域。
- *25. a) 证明 $\forall x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ 和 $\forall x \exists y (P(x) \wedge Q(y))$ 逻辑等价。这里所有量词都有相同的非空论域。
 b) 证明 $\forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$ 和 $\forall x \exists y (P(x) \vee Q(y))$ 逻辑等价。这里所有量词都有相同的非空论域。
- 一个语句称为前束范式(PNF)的充分必要条件是其表达形式为

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \cdots Q_k x_k P(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

其中每个 $Q_i (i=1, 2, \dots, k)$ 或是全称量词，或是存在量词；而 $P(x_1, x_2, \dots, x_k)$ 是不含量词的谓词。例如 $\exists x \forall y (P(x, y) \wedge Q(y))$ 是前束范式，而 $\exists x P(x) \vee \forall x Q(x)$ 不是(因为并不是所有量词都先出现)。

将命题变量、谓词、T和F用逻辑联接词和量词组合在一起形成的每一个语句都等价于一个前束范式。练习26要求的就是对这一事实的证明。

- **26. 给出并证明把任意语句变换为等价的前束范式的方法。

1.5 推理规则

1.5.1 引言

本章后一部分将学习证明。在数学中，证明是建立在数学命题真实性之上的有效论证。对于一个论证，是指表示一连串的命题最终得出结论。对于有效性，是计划得出结论或者论证的最终命题，其过程必须依据前面命题或者论证的前提的真实性。也就是说，一个论证是真实的，当且仅当它对所有的前提为真而结论为假是不可能的。为从已有的命题中推出新的命题，应用推理规则，它是构造有效论证的模板。推理规则是建立命题真实性的基本工具。

在学习数学证明之前，将看到涉及唯一复合命题的论证。我们将定义涉及复合命题论证的意义，然后介绍命题逻辑的一系列推理规则。这些规则在产生有效论证中是最重要的组成部分。在说明推理规则如何用于产生有效论证后，将描述不正确推理的常见形式，也就是谬误，它会导致无效论证。

在学习了命题逻辑中的推理规则后，将介绍量化语句的逻辑规则。我们将描述这些推理规则如何用于产生有效论证。这些涉及存在量词和全称量词的语句推理规则在计算机科学和数学中扮演了非常重要的角色，尽管用时常常没有明显提及它们。

最后，我们将显示命题的推理规则和量化语句的推理规则如何结合。这些推理规则地结合在复杂的论证中综合在一起使用。

1.5.2 命题逻辑的有效论证

考虑下面涉及命题的论证(从定义上讲，是一连串命题)：

“如果你有一个正确的密码，那么你可以登录到网络。”

“你有一个正确的密码。”

所以

“你可以登录到网络。”

我们想决定这是否是一个有效论证。也就是说，想要决定当前提“如果你有一个正确的密码，那么你可以登录到网络”和“你有一个正确的密码”都为真时，结论“你可以登录到网络”是否为真。

在讨论这个特定论证的有效性之前，将看它的形式化表示。用 p 代表“你有一个正确的密码”，用 q 代表“你可以登录到网络”，那么，这个论证形式化表示如下：

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \therefore \frac{p}{q} \end{array}$$

其中 $\therefore$ 是表示“所以”的符号。

我们知道，当 p 和 q 是命题变量时，语句 $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$ 是个永真式。特别地，当 $p \rightarrow q$ 和 p 都为真时，我们知道 q 肯定为真。我们说语句的这种论证形式是有效的，因为无论什么时候，只要它的所有前提（论证中的所有语句，而不是最后一句结论）为真，那么结论也必须为真。现在假设“如果你有一个正确的密码，那么你可以登录到网络”和“你有一个正确的密码”都为真。当用 p 表示“你有一个正确的密码”，用 q 表示“你可以登录到网络”，那么接下来必然的结论是“你可以登录到网络”为真。这个论证有效是因为它的形式有效。注意，无论用什么命题替换 p 和 q ，且 $p \rightarrow q$ 和 p 都为真时，那么 q 也肯定为真。

当用命题将这个论证形式替换到 p 和 q ，其中 p 和 $p \rightarrow q$ 不都为真时会如何呢？比如，假设 p 代表“你可以入网”， q 代表“你可以改变你的年级”， p 为真，但是 $p \rightarrow q$ 为假。将 p 和 q 的值替换为论证形式，得到的论证为：

“如果你能入网，那么你可以改变你的年级”

“你可以入网”

$\therefore$ “你可以改变你的年级”

得到的这个论证是有效论证，但是因为其中一个前提，即第一个前提，为假，所以不能得出结论为真（有很大可能，这个结论为假）。

在讨论中，为分析一个论证，用命题变量代替命题。这将一个论证改变为一个论证形式。我们发现，一个论证的有效性取决于这个论证形式的有效性。用这些关键概念的定义来总结用于讨论论证有效性的术语。

定义 1 命题逻辑中的一个论证是一连串的命题。除了论证中最后一个命题外都叫前提，最后一个命题叫结论。当它的所有前提为真意味着结论为真时，一个论证是有效的。

命题逻辑中的论证形式是涉及命题变元的一连串复合命题。当在前提中无论哪个特定命题被转换为命题变元，当前提都为真时结论都为真，称为论证形式有效。

从有效论证形式的定义，当 $(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow q$ 是永真式时，论证形式的前提 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 以及结论 q 有效。

表示命题逻辑论证有效的关键是表示出它的论证形式有效。因此，我们想要表明论证形式有效的技术。现在我们将拓展完成这一任务的方法。

1.5.3 命题逻辑的推理规则

可以总是用一个真值表来表示一个论证形式有效。我们用无论何时只要前提为真，结论也就肯定为真来表明做到这一点。然而，这会是冗长乏味的方法。例如，当论证形式涉及 10 个不同变量，用真值表表示这个论证形式有效需要 $2^{10} = 1024$ 行。幸运的是，我们不必求助于真值表。取而代之，我们可以先建立一些比较简单的有效论证形式，称为推理规则。这些推理规则可以作为模块来构造更多复杂的有效论证形式。现在我们将介绍命题逻辑中最重要的推理规则。

永真式 $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ 是一个被称为假言推理或分离规则的推理规则的基础。（在拉丁文中假言推断是指模式确认。）这个永真式导致了以下有效论证形式，即在我们开头论证的讨论中已经看到的。（与前一样，这里符号 $\therefore$ 表示“所以”。）

$$\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

用这个概念，将前提写在一列，随之是一横线，它是以因此符号开头以结论结尾的一行。特别地，假言推断告诉我们如果一个条件语句以及它的前提都为真，那么结论肯定为真。例 1 说明了假言推断的应用。

例 1 假设条件语句“若今天下雪，那么我们将滑雪”以及它的前提“今天正在下雪”为真。那么，根据假言推断，条件语句的结论“我们将滑雪”为真。 ■

就像前面提到的，当一个或更多前提为假时，一个有效论证可以导致错误的结论。在例2中将再次说明。

例2 决定如下给定的论证是否有效，并且决定由论证的有效性它的结论是否一定为真。

“如果 $\sqrt{2} > 3/2$ ，那么 $(\sqrt{2})^2 > (3/2)^2$ 。我们知道 $\sqrt{2} > 3/2$ ，因此 $(\sqrt{2})^2 = 2 > (3/2)^2 = 9/4$ 。”

解 令 p 为命题“ $\sqrt{2} > 3/2$ ”，令 q 为 $(\sqrt{2})^2 > (3/2)^2$ 。论证的前提 $p \rightarrow q$ 和 p ， q 是结论。这个论证是有效的，因为是用假言推断这个有效论证形式来构造的。然而，其中的前提 $\sqrt{2} > 3/2$ 为假。因此不能得出结论为真。此外，注意这个论证的结论为假，因为 $2 < 9/4$ 。 ■

表1-25列出了最重要的命题逻辑推理规则。1.2节练习5和8要求证明这些推理规则为有效论证形式。现在给出用这些推理规则论证的例子。在每一论证中，首先用命题变量表达论证中的命题。那么所得出的论证结果是表1-25中的推理规则。

表 1-25 推理规则

推理规则	永真式	名称
$\frac{p \quad p \rightarrow q}{\therefore q}$	$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$	假言推理
$\frac{\neg q \quad p \rightarrow q}{\therefore \neg p}$	$[\neg q \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \neg p$	取拒式
$\frac{p \rightarrow q \quad q \rightarrow r}{\therefore p \rightarrow r}$	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$	假言三段论
$\frac{p \vee q \quad \neg p}{\therefore q}$	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q$	析取三段论
$\frac{p}{\therefore p \vee q}$	$p \rightarrow (p \vee q)$	附加
$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$	$(p \wedge q) \rightarrow p$	化简
$\frac{p \quad q}{\therefore p \wedge q}$	$[(p) \wedge (q)] \rightarrow (p \wedge q)$	合取
$\frac{p \vee q \quad \neg p \vee r}{\therefore q \vee r}$	$[(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)] \rightarrow (q \vee r)$	消解

例3 说出哪个推理规则是下列论证的基础：“现在气温在冰点以下。因此，要么现在气温在冰点以下，要么现在下雨。”

解 设 p 是命题“现在气温在冰点以下”，而 q 是命题“现在正在下雨”。那么这个论证形如

$$\frac{p}{\therefore p \vee q}$$

这是使用附加规则的论证。 ■

例4 说出哪个推理规则是下列论证的基础：“现在气温在冰点以下并且现在下雨。因此，现在气温在冰点以下。”

解 设 p 是命题“现在气温在冰点以下”，而 q 是命题“现在正在下雨”。这个论证形如

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$$

这个论证使用化简规则。 ■

例 5 说出在下列论证里使用哪个推理规则：

若今天下雨，则我们今天将不野餐。若我们今天不野餐，则我们明天将野餐。因此，若今天下雨，则我们明天将野餐。

解 设 p 是命题“今天下雨”，设 q 是命题“我们今天将不野餐”，而设 r 是命题“我们明天将野餐”。则这个论证形如

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

因此，这个论证是假言三段论。

1.5.4 用推理规则建立论证

当有许多前提时，为了证明一个论证是有效的，常常需要多个推理规则。对此通过例 6 和例 7 来说明。在这些例子中每一步论证显示为不同的行，并明确地写出每步的理由。这些例子也说明如何使用推理规则来分析用自然语言表述的论证。

例 6 证明：前提“今天下午没有出太阳并且今天比昨天冷”，“只有今天下午出太阳，我们才去游泳”，“若我们不去游泳，则我们将乘独木舟游览”，以及“若我们乘独木舟游览，则我们将在黄昏时回家”，导致结论“我们将在黄昏时回家”。

解 设 p 是命题“今天下午出太阳”， q 是命题“今天比昨天冷”， r 是命题“我们将去游泳”， s 是命题“我们将乘独木舟游览”，而 t 是命题“我们将在黄昏时回家”。则这些前提成为 $\neg p \wedge q$ ， $r \rightarrow p$ ， $\neg r \rightarrow s$ ， $s \rightarrow t$ 。结论是 t 。我们需要用假设 $\neg p \wedge q$ ， $r \rightarrow p$ ， $\neg r \rightarrow s$ ，以及 $s \rightarrow t$ 和结论 t 给出有效论证。

如下构造一个论证来证明这些前提得出需要的结论。

步骤	理由
1. $\neg p \wedge q$	前提引入
2. $\neg p$	化简，用步骤 1
3. $r \rightarrow p$	前提引入
4. $\neg r$	取拒式，用步骤 2 和 3
5. $\neg r \rightarrow s$	前提引入
6. s	假言推理，用步骤 4 和 5
7. $s \rightarrow t$	前提引入
8. t	假言推理，用步骤 6 和 7

注意，可以用真值表表示无论何时，当 4 个前提为真，那么结论也为真。然而，因为用 5 个变元 p 、 q 、 r 、 s 和 t 来操作，这样的真值表需要 32 行。

例 7 证明：前提“若你发给我电子邮件消息，则我将完成编写程序”，“若你不发给我电子邮件消息，则我将早早地去睡觉”，以及“若我早早地去睡觉，则我将感觉精力充沛地醒来”，导致结论“若我不完成编写程序，则我将感觉精力充沛地醒来”。

解 设 p 是命题“你发给我电子邮件消息”， q 是命题“我将完成编写程序”， r 是命题“我将早早地去睡觉”，而 s 是命题“我将感觉精力充沛地醒来”。则这些前提是 $p \rightarrow q$ ， $\neg p \rightarrow r$ ， $r \rightarrow s$ 。需要的结论是 $\neg q \rightarrow s$ 。我们需要用假设 $p \rightarrow q$ ， $\neg p \rightarrow r$ ，以及 $r \rightarrow s$ 和结论 $\neg q \rightarrow s$ 给出有效论证。

下列论证证明这些前提得出需要的结论。

步骤	理由
1. $p \rightarrow q$	前提引入
2. $\neg q \rightarrow \neg p$	步骤 1 和逆否命题
3. $\neg p \rightarrow r$	前提引入
4. $\neg q \rightarrow r$	假言三段论，用步骤 2 和 3

5. $r \rightarrow s$ 前提引入
 6. $\neg q \rightarrow s$ 假言三段论, 用步骤4和5

1.5.5 消解

已经开发出自动执行推理和证明定理任务的计算机程序。许多这类程序利用称为消解(resolution)的推理规则。这个推理规则基于永真式:

$$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow (q \vee r)$$

消解规则最后的析取 $q \vee r$ 称为消解式(resolvent)。当在此永真式中令 $q=r$ 时, 可得 $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \rightarrow q$ 。而且, 当令 $r=F$ 时, 可得 $(p \vee q) \wedge (\neg p) \rightarrow q$ (因为 $q \vee F \equiv q$)。这是永真式, 析取三段论规则便基于此式。

例8 使用消解证明假设“Jasmine 在滑雪或没有下雪”和“下雪了或 Bart 在打曲棍球”蕴含结论“Jasmine 在滑雪或 Bart 在打曲棍球。”

解 令 p 为命题“下雪了”, q 为命题“Jasmine 在滑雪”, r 为命题“Bart 在打曲棍球”。我们可以将假设分别表示为 $\neg p \vee q$ 和 $p \vee r$ 。使用消解, 命题 $q \vee r$ 成立。

消解在基于逻辑规则的编程语言中扮演着重要的角色, 如在 Prolog 中(其中用到了量化语句的消解规则)。而且, 可以用消解来构建自动定理证明系统。要使用消解来构造命题逻辑中的证明, 假设和结论必须被表示为子句, 子句是变量的析取或这些变量的否定。我们可以将命题逻辑中非子句的语句用一个或多个等价的是子句的语句替换。例如, 假定有一个形如 $p \vee (q \wedge r)$ 的语句。因为 $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, 便可以用两个子句 $p \vee q$ 和 $p \vee r$ 来代替 $p \vee (q \wedge r)$ 。我们可以用语句 $\neg p$ 和 $\neg q$ 来代替形如 $\neg(p \vee q)$ 的语句, 因为德摩根律表明 $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ 。也可以用等价的析取 $\neg p \vee q$ 来代替蕴含 $p \rightarrow q$ 。

例9 证明假设 $(p \wedge q) \vee r$ 和 $r \rightarrow s$ 蕴含结论 $p \vee s$ 。

解 可以将假设 $(p \wedge q) \vee r$ 重写为两个子句 $p \vee r$ 和 $q \vee r$ 。也可以将 $r \rightarrow s$ 替换为等价的子句 $\neg r \vee s$ 。使用子句 $p \vee r$ 和 $\neg r \vee s$, 通过消解便可得出 $p \vee s$ 。

1.5.6 谬误

几种常见的谬误都来源于不正确的论证。这些谬误看上去像是推理规则, 但是它们是基于偶然事件而不是永真式。在这里讨论这些谬误, 是为了说明在正确与不正确的推理之间的区别。

命题 $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$ 不是永真式, 因为当 p 为假而 q 为真时, 它为假。不过, 存在许多把它当做永真式的不正确论证。换句话说, 对于前提 $p \rightarrow q$ 和 q 及结论 p 不是有效论证。这种类型的不正确推理称为肯定结论谬误。

例10 下列论证是否有效?

若你做本书的每一道练习, 则你将学习离散数学。你学习过离散数学。

因此, 你做过本书的每一道练习。

解 设 p 是命题“你做过本书的每一道练习”。设 q 是命题“你学习过离散数学”。这个论证形如: 若 $p \rightarrow q$ 并且 q , 则 p 。这是使用肯定结论谬误的不正确推理的例子。事实上, 你可能通过其他某种方式学习离散数学而没有做本书的每一道练习。(你可能通过阅读、听讲座、做本书的一些但不是全部练习等方式来学习离散数学。)

命题 $[(p \rightarrow q) \wedge \neg p] \rightarrow \neg p$ 不是永真式, 因为当 p 为假而 q 为真时, 它为假。许多不正确的论证都不正确地把它当作了推理规则。这种类型的不正确推理称为否定假设谬误。

例11 设 p 和 q 如同例10那样。若条件语句 $p \rightarrow q$ 为真, 并且 $\neg p$ 为真, 则得出 $\neg p$ 为真这是否正确? 换句话说, 如果假定: 若你做本书里每一道练习, 则你将学习离散数学, 那么假定: 若你没有做过本书里每一道练习, 则你没有学习离散数学, 这是否正确?

解 即使你没有做过本书里每一道练习, 你也可能学过离散数学。这个不正确的论证具有形式: $p \rightarrow q$ 和 $\neg p$ 蕴含 $\neg p$, 这是否定假设谬误的例子。

1.5.7 带量词命题的推理规则

已经讨论了命题的推理规则。现在将要描述包含量词的命题的一些重要的推理规则。在数学论证里大量地使用这些推理规则，通常都没有明确地指出来。

全称例示 用它从前提 $\forall xP(x)$ 得出 $P(c)$ 为真，其中 c 是论域里的具体成员。当从命题“所有女人都聪明”得出“丽沙聪明”时，就使用了全称例示，其中丽沙是论域所有女人中的一员。

全称生成 它说明在对论域里所有元素 c 来说 $P(c)$ 都为真的前提下， $\forall xP(x)$ 为真。当通过从论域里拿出一个任意元素 c 并证明 $P(c)$ 为真来证明 $\forall xP(x)$ 为真时，就使用了全称生成。所选择的元素 c 必须是论域里一个任意的元素，而不是特定的元素。也就是说，当从 $\forall xP(x)$ 断言论域中的每一个元素 c ，而没有控制 c ，但不能得出任何其他关于 c 的假设，除非 c 属于论域中。在许多数学证明里都隐含的使用全称量词的引入，而很少明确地指出来。然而，当应用全称生成时，在错误的推理中增加关于任意元素 c 莫须有的假设是屡见不鲜的。

存在例示 在允许从已经 $\exists xP(x)$ 为真，得出在论域里存在一个使得 $P(c)$ 为真的元素 c 。在这里不能选择一个任意值的 c ，而必须是使得 $P(c)$ 为真的那个 c 。通常不知道 c 是什么，仅仅知道它存在。因为它存在，所以可以给它一个名称(c)而继续论证。

存在生成 用它在已知使 $P(c)$ 为真的一个具体的 c 时，得出 $\exists xP(x)$ 为真。即若知道论域里一个使 $P(c)$ 为真的元素 c ，则知道 $\exists xP(x)$ 为真。

这些推理规则总结在表 1-26 里。下面的例子将要说明如何使用带量词的命题的推理规则。

表 1-26 带量词的命题的推理规则

推 理 规 则	名 称
$\forall xP(x)$ $\therefore P(c)$	全称例示
$P(c), \text{任意 } c$ $\therefore \forall xP(x)$	全称生成
$\exists xP(x)$ $\therefore P(c), \text{对某个元素 } c$	存在例示
$P(c), \text{对某个元素 } c$ $\therefore \exists xP(x)$	存在生成

例 12 证明前提“在本离散数学课堂的每一个人学过一门计算机课程”和“玛拉是本课堂的学生”蕴含结论“玛拉学过一门计算机课程”。

解 设 $D(x)$ 表示“ x 在本离散数学课堂”，并且设 $C(x)$ 表示“ x 学过一门计算机课程”。
则前提是 $\forall x(D(x) \rightarrow C(x))$ 和 $D(\text{玛拉})$ ，结论是 $C(\text{玛拉})$ 。下列步骤可以用来从前提证明结论。

步 骤	理 由
1. $\forall x(D(x) \rightarrow C(x))$	前提引入
2. $D(\text{玛拉}) \rightarrow C(\text{玛拉})$	全称例示，用步骤 1
3. $D(\text{玛拉})$	前提引入
4. $C(\text{玛拉})$	假言推理，用步骤 2 和 3

例 13 证明前提“在这个班上的某个学生没有读过书”和“班上的每个人都通过了第一门考试”蕴含结论“通过考试的某个人没有读过书”。

解 令 $C(x)$ 表示“ x 在这个班中”， $B(x)$ 表示“ x 读过书了”， $P(x)$ 为“ x 通过了第一门考试”。
则前提是 $\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$ 和 $\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$ ，结论是 $\exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$ 。下列步骤可以用来从前提证明结论。

步骤	理由
1. $\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$	前提引入
2. $C(a) \wedge \neg B(a)$	存在例示, 用步骤 1
3. $C(a)$	化简, 用步骤 2
4. $\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$	前提引入
5. $C(a) \rightarrow P(a)$	全称例示, 用步骤 4
6. $P(a)$	假言推理, 用步骤 3 和 5
7. $\neg B(a)$	化简, 用步骤 2
8. $P(a) \wedge \neg B(a)$	合取, 用步骤 6 和 7
9. $\exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$	存在生成, 用步骤 8

1.5.8 命题推理和量化语句推理规则的结合

我们已经学习了命题推理规则和量化语句的推理规则。注意, 在例 12 和 13 中的论证既用了全称例示(量化语句推理规则)也用了假言推理(命题推理规则)。我们常常需要对推理规则结合使用。由于全称例示和假言推理结合使用如此广泛, 这个规则的结合有时称作全称假言推理。这个规则告诉我们: 如果 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ 为真, 且如果 $P(a)$ 对在论域中的一个特定元素 a 为真, 那么 $Q(a)$ 也肯定为真。为便于理解, 注意用全称例示, $P(a) \rightarrow Q(a)$ 为真。那么, 用假言推理, $Q(a)$ 也肯定为真。可以将假言推理描述如下:

$$\begin{array}{l} \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \\ P(a), \text{其中 } a \text{ 是论域中一个特定的元素} \\ \hline \therefore Q(a) \end{array}$$

全称假言推理常常用于数学论证中。这将在例 14 中说明。

例 14 假定“对所有正整数 n , 如果 n 比 4 大, 那么 n^2 小于 2^n ”为真。用全称假言推理证明 $100^2 < 2^{100}$ 。

解 令 $P(n)$ 表示“ $n > 4$ ”, $Q(n)$ 表示“ $n^2 < 2^n$ ”语句“对所有正整数 n , 如果 n 比 4 大, 那么 n^2 小于 2^n ”可以表示为 $\forall n(P(n) \rightarrow Q(n))$, 其中论域为所有正整数。假设 $\forall n(P(n) \rightarrow Q(n))$ 为真。注意 $P(100)$ 为真, 因为 $100 > 4$ 。接着用全称假言推理, $Q(n)$ 为真, 即 $100^2 < 2^{100}$ 。 ■

另一个重要的命题逻辑推理规则和量化语句的推理规则的结合是全称取拒式。全称取拒式结合了全称例示和取拒式, 可以用如下方式表达:

$$\begin{array}{l} \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \\ \neg Q(a), \text{其中 } a \text{ 是论域中一个特定的元素} \\ \hline \therefore \neg P(a) \end{array}$$

将全称取拒式的证明留给读者(见练习 13)。

练习

1. 给出下列论证的论证形式化, 并决定是否有效。如果前提为真, 能断定结论为真吗?

如果苏格拉底是人, 那么苏格拉底是会死的。

苏格拉底是人

$\therefore$ 苏格拉底是会死的

2. 在下列每个论证里使用了什么推理规则?

a) 爱丽丝主修数学。因此, 爱丽丝主修数学或计算机科学。

b) 杰瑞主修数学和计算机科学。因此, 杰瑞主修数学。

c) 若天气下雨, 则游泳池将关闭。天气下雨。因此, 游泳池关闭。

d) 若今天下雪, 则大学将关闭。今天大学没有关闭。因此, 今天没有下雪。

e) 若我去游泳, 则我将在太阳下停留过久。若我在太阳下停留过久, 则我将有晒斑。因此, 若我去游泳, 则我将有晒斑。

3. 使用推理规则证明前提“兰迪努力地工作”，“若兰迪努力地工作，则他是一个笨孩子”，和“若兰迪是一个笨孩子，则他将得不到这个工作”蕴含着结论“兰迪将得不到这个工作”。
4. 在下面的著名论证里使用了什么推理规则？“所有的人都是要死的。苏格拉底是人。因此，苏格拉底是要死的”。
5. 对下列的每组前提，可以得出什么样的相关结论或一组结论？解释从前提获得每个结论所使用的推理规则。
 - a) “若我在某一天休息，则那天下雨或下雪”。“我在周二休息或在周四休息”。“周二出太阳”。“周四未下雪”。
 - b) “若我吃了辣的食物，则我做奇怪的梦”。“若当我睡觉时有雷声，则我做奇怪的梦”。“我没有做奇怪的梦”。
 - c) “我聪明或幸运”。“我不幸运”。“若我幸运，则我将赢得抽奖”。
 - d) “每个主修计算机科学的人都有个人电脑”。“拉尔夫没有个人电脑”。“安妮有个人电脑”。
 - e) “对公司有利的就对美国有利”。“对美国有利的就对你有利”。“对公司有利的就是你购买许多东西”。
 - f) “所有的啮齿类动物都啃它们的食物”。“老鼠是啮齿类动物”。“野兔不啃它们的食物”。“蝙蝠不是啮齿类动物”。
6. 证明如果论证形式由前提 $p_1, p_2, \dots, p_n, q$ 及结论 r 有效，则论证形式由前提 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 及结论 $q \rightarrow r$ 有效。
7. 对下列每个论证，解释对每个步骤使用了哪条推理规则。
 - a) “本班学生道格知道如何用 Java 写程序。知道如何用 Java 写程序的每个人都可以得到高薪的工作。因此，本班的某个人可以得到高薪的工作。”
 - b) “本班的某个人喜欢观察鲸鱼。每个喜欢观察鲸鱼的人都关心海洋污染。因此，本班里某个人关心海洋污染。”
 - c) “本班的 93 个学生每人拥有一台个人电脑。拥有个人电脑的每个人都能使用字处理软件。因此，本班学生泽克能使用字处理软件。”
 - d) “新泽西的每个人都生活在距离海洋 50 英里之内。新泽西的某个人从来没有见过海洋。因此，生活在距离海洋 50 英里之内的某个人从来没有见过海洋。”
8. 判断下列论证是否正确并解释原因。
 - a) 班上的所有学生都理解逻辑。Xavier 是这个班上的学生，因此，Xavier 理解逻辑。
 - b) 每个计算机专业的学生都要学离散数学。Natasha 在学离散数学，因此，Natasha 是计算机专业的。
 - c) 所有鹦鹉都喜欢水果。我养的鸟不是鹦鹉，因此，我养的鸟不喜欢水果。
 - d) 每天吃麦片的人都很健康。Linda 不健康，因此，Linda 没有每天吃麦片。
9. 如下论证错在哪里？令 $H(x)$ 为“ x 很开心”。给定前提 $\exists x H(x)$ ，我们得出 $H(\text{Lola})$ 。因此，LoLa 很开心。
10. 判定下列每个论证是否有效。若论证是正确的，则使用了什么推理规则？若它不正确，则发生了什么谬误？
 - a) 若 n 是使 $n > 1$ 的实数，则 $n^2 > 1$ 。假定 $n^2 > 1$ 。于是 $n > 1$ 。
 - b) 若 n 是使 $n > 3$ 的实数，则 $n^2 > 9$ 。假定 $n^2 \leq 9$ ，于是 $n \leq 3$ 。
 - c) 若 n 是使 $n > 2$ 的实数，则 $n^2 > 4$ 。假定 $n \leq 2$ ，于是 $n^2 \leq 4$ 。
11. 哪些推理规则被用来证明在 1.3 节例 26 里所描述的卡洛尔(Lewis Carroll)论证的结论？
12. 指出如下由“ $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ 为真，那么 $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$ 为真”的论证有哪些错误。

1) $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$	前提引入
2) $\exists x P(x)$	化简，用步骤 1
3) $P(c)$	存在例示，用步骤 2
4) $\exists x Q(x)$	化简，用步骤 1
5) $Q(c)$	存在例示，用步骤 4
6) $P(c) \wedge Q(c)$	合取，用步骤 3 和 5
7) $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$	存在生成
13. 通过证明前提 $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ 和 $\neg Q(a)$ ，其中是对论域中某个特定元素 a ，推出 $\neg P(a)$ ，来证明全称取拒式。

14. 用推理规则证明：若 $\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \wedge S(x)))$ 和 $\forall x(P(x) \wedge R(x))$ 为真，则 $\forall x(R(x) \wedge S(x))$ 为真。
15. 用推理规则证明：若 $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ 和 $\forall x(\neg Q(x) \vee S(x))$ ， $\forall x(R(x) \rightarrow \neg S(x))$ 和 $\exists x \neg P(x)$ 为真，则 $\exists x \neg R(x)$ 为真。
16. 使用消解法证明前提“天上没有下雨或 Yvette 带雨伞了”、“Yvette 没有带雨伞或她没有淋湿”和“天上下雨了或 Yvette 没有淋湿”蕴含“Yvette 没有淋湿”。
17. 用消解法证明复合命题 $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ 不是可满足的。
- *18. 判定下列论证(来自 Kalish and Montague[KaMo64])是否有效：

假如超人能够并愿意防止邪恶，则他将这样做。假如超人不能够防止邪恶，则他将是无能的；假如超人不愿意防止邪恶，则他将是恶意的。超人没有防止邪恶。若超人存在，则他是无能的或恶意的。因此，超人不存在。

1.6 证明导论

1.6.1 引言

本节介绍证明的概念，以及描述构造证明的方法。证明是建立在数学语句真实性基础上的有效论证。证明可以用定理(如果有的话)，假设为真的公理以及之前已经证明的定理的假设。用这些组成部分以及推理规则，证明的最后一步是建立被证明命题的真实性。

在我们的讨论中，从形式化定理证明转向非形式化证明。在 1.5 节介绍的涉及命题和量化语句为真的论证是形式化证明，其中提供了所有步骤，以及给出论证中每一步的所有规则。然而，有用的定理形式化证明会很长且极难给出。实际上，人们使用设计的定理证明几乎都是非形式化证明，其中许多推理规则用于每一步，其中的许多步骤被省略，没有明确列出其中的假设公理和用到的推理规则。非形式化证明常常向人们解释定理为什么为真，虽然计算机很愿意用自动推理系统产生形式化证明。

本节讨论的证明方法很重要，不仅因为它们用于证明数学定理，而且由于它们中的许多应用在计算机科学中。这些应用包括证明计算机程序是正确的，建立安全的操作系统，用人工智能做推理，表明系统说明是一致的，等等。因此，在数学和计算机科学中理解用于证明的技术都非常关键。

1.6.2 一些专用术语

正式地，一个定理是一个能够表明是真的语句。在数学的描述中，定理通常是用来表示被认为至少有些重要的语句。有时把不大重要的定理称为命题(定理也作为事实或结论被提到)。一个定理可以是带一个或多个前提的条件语句及一个结论全称量化。然而它可以是其他类型的逻辑语句。本节后面有一个例子，示范一个带有证明的定理是真的。当建立了定理的真实性时，一个证明就是个有效论证。用在证明中的语句包括公理(或假设)，假设这些语句是真的，如果有的话，定理的前提和以前已经证明的定理。公理用不要求定义的原始术语陈述，而在定理和证明中所用的其他所有术语都必须定义。推理的规则和术语的定义一起用于从其他的断言推出结论，并详列出证明的步骤。实际上，证明的最后一步通常恰是定理的结论。然而，为清晰起见，在证明的最后一步，通常重述定理的结论。

在其他结果证明中很有帮助的不大重要的定理称为引理(复数引理)。复杂证明用一系列引理来证明通常比较容易理解，这里每一个引理都被独立证明。推论是从定理直接建立被证明的定理。猜想是被提出为真的命题，通常是在一些依据的基础上，启发式论证，或是专家的一个直觉。当找到了一个猜想的证明时，猜想就变成了定理。许多猜想表明是错误的，因此它们不是定理。

1.6.3 定理陈述的理解

在介绍证明定理的方法之前，我们需要理解有多少数学定理被陈述。许多定理断言一个性质对论域(比如整数或实数)中的所有元素都成立。虽然这些定理的准确陈述需要包含全称量词，但是数学里的标准约定是省略全称量词。比如，语句

“如果 $x > y$ ，其中 x 和 y 是正实数，那么 $x^2 > y^2$ 。”

其实意味着

“对所有正实数 x 和 y ，如果 $x > y$ ，那么 $x^2 > y^2$ 。”

此外，当证明这种类型的定理时，常常使用全称例示规则而不明确地指出来。证明的第一步通常涉及选择论域里的一个一般元素。随后的步骤是证明这个元素具有所考虑的性质。最后，全称生成蕴含着对论域里所有元素来说定理都成立。

1.6.4 证明定理的方法

Assessment: 现在将注意力转向数学定理的证明上。证明定理会很难。需要所有能帮助我们证明不同结果的“弹药”(方法)。现在介绍一系列不同证明方法。这些方法应该成为你证明定理的部分“拿手戏”。

为证明形如 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ 的定理，我们的目标是表示出 $P(c) \rightarrow Q(c)$ 为真，其中 c 是论域中的任意一元素，然后应用全称生成。在这个证明中，需要表示出条件语句为真。回忆 $p \rightarrow q$ 为真，除非 p 为真且 q 为假。注意当证明语句 $p \rightarrow q$ 时，只需要证明如果 p 为真则 q 为真。下面的讨论将给出条件语句最常见的证明方法。之后，将讨论证明其他类型语句的方法。在 1.7 节，将介绍许多不同的可用于证明多种定理的证明技术。

当读到证明时，你将常常会发现词语“显然”或者“清楚的”。这些词意味着许多步骤已经省略并希望读者有能力补上。遗憾的是，这个假设往往无法保证，读者根本不确定怎么补上这些省略的步骤。我们将努力避免用这些词，并努力避免省略太多步骤。然而，如果包括了证明中所有的步骤，我们的证明将会非常冗长。

1.6.5 直接证明

构造一个条件语句 $p \rightarrow q$ 的直接证明，第一步假设 p 为真；接下来的步骤是用推理规则构造的，最后一步推出 q 也肯定为真。直接证明用于推出如果 p 为真，那么 q 也肯定为真，以致 p 为真、 q 为假的情况不会发生的方法表示出条件语句 $p \rightarrow q$ 为真。在直接证明中假定 p 为真，并且用公理、定义和前面证明过的定理以及推理规则，来证明出 q 也肯定为真。你将发现许多结果的直接证明相当直接，它是用一连串显然的步骤从假设隐含到结论。然而，直接证明有时要求特殊的洞察力并且可能会是需要技巧的。这里呈现的第一个直接证明相当直接；之后，你会看到一些不那么显而易见的证明。

我们将提供几个不同的直接证明。在给出第一个例子前，需要一个定义。

定义 1 整数 n 是偶数，如果存在一个整数 k 使得 $n = 2k$ ；整数 n 是奇数，如果存在一个整数 k 使得 $n = 2k + 1$ 。（注意，一个整数或为偶数或为奇数。）

例 1 给出定理“若 n 是奇数，则 n^2 是奇数”的直接证明。

解 **Example** 注意，这个定理表明 $\forall n(P(n) \rightarrow Q(n))$ ，这里 $P(n)$ 是“ n 是奇数”， $Q(n)$ 是“ n^2 是奇数”。正如已经说过的，我们将遵循数学证明中通常的惯例，证明 $P(n)$ 意味着 $Q(n)$ ，而不用全称例示。为开始这个定理的直接证明，假设这个条件语句的前提为真，即假设 n 是奇数。由奇整数的定义，有 $n = 2k + 1$ ，其中 k 是某个整数。想证明 n^2 也是奇数。把等式 $n = 2k + 1$ 两边平方，这样做得出 $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ 。由奇数定义，得到结论 n^2 是奇数（它是一个整数的 2 倍再加 1）。因此，证明了若 n 是奇数，则 n^2 是奇数。 ■

例 2 给出一个直接证明：如果 m 和 n 都是完全平方数，那么 nm 也是一个完全平方数。（若有一个整数 b ，使得 $a = b^2$ ，则整数 a 是一个完全平方数。）

解 为产生出这个定理的一个直接证明，假定这个条件语句的假设为真。即假定 m 和 n 都是完全平方数。用完全平方数的定义，则有整数 s 和 t 使得 $m = s^2$ ， $n = t^2$ 。证明的目的是表示出 mn 也是完全平方数。向前看到的，将两个等式 $m = s^2$ 和 $n = t^2$ 乘起来证明。这就得到 $mn = s^2 t^2$ ，也就是 $mn = (st)^2$ （用乘法交换律和结合律）。由完全平方数的定义， mn 也是一个完全平方数，因为它是 st 的平方，而 st 为整数。这就证明了如果 m 和 n 都是完全平方数，那么 nm 也是一个完全平方数。 ■

1.6.6 反证法

直接证明从定理的假设推出结论。它们从前提开始, 继续一连串的推演, 最终结束于结论。然而, 我们将发现直接证明方法常常行不通。我们需要形如 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ 的定理的其他证明方法。这种类型的定理证明不是直接证明, 也就是说, 不从假设开始, 以结论结束, 这叫做间接证明。

一个非常有用的间接证明的类型叫做反证。反证用条件语句 $p \rightarrow q$ 等价于它的倒置 $\neg q \rightarrow \neg p$ 的事实。这意味着条件语句 $p \rightarrow q$ 可以用它的倒置 $\neg q \rightarrow \neg p$ 来证明。在用 $p \rightarrow q$ 的反证中, 将 $\neg q$ 作为假设, 用公理、定义和前面证明过的定理, 以及推理规则, 之后证明 $\neg p$ 。我们将用两个例子解释反证。这些例子表明当不容易找到直接证明时用反证会很有效。

例 3 给出定理“若 $3n+2$ 是奇数, 则 n 是奇数”的证明。

解 首先, 试图用直接证明。为构建直接证明, 首先假设 $3n+2$ 是奇整数。这意味着对某个整数 k , $3n+2=2k+1$ 。我们能由此证明 n 是奇数吗? 看到 $3n+1=2k$, 但不能用任何直接的方式得出 n 是奇数的结论。由于直接证明的想法失败, 下面尝试反证法。

反证法的第一步是假设条件语句“若 $3n+2$ 是奇数, 则 n 是奇数”的结论是假的; 也就是说, 假设 n 是偶数。于是由偶数定义, 对某个整数 k 有 $n=2k$ 。把 n 用 $2k$ 代入, 得到 $3n+2=3(2k)+2=6k+2=2(3k+1)$, 这告诉我们 $3n+2$ 是偶数(因为它是 2 的倍数), 因此不是奇数。这是定理前提的否定。因为对这个条件语句结论的否定蕴含着前提为假, 所以原来的条件语句为真。反证法成功, 证明了定理“若 $3n+2$ 是奇数, 则 n 是奇数”。 ■

例 4 证明: 如果 $n=ab$, 其中 a 和 b 是正整数, 那么 $a \leq \sqrt{n}$ 或者 $b \leq \sqrt{n}$ 。

解 因为没有明显的方法从等式 $n=ab$ (其中 a 和 b 是正整数)直接证明 $a \leq \sqrt{n}$ 或者 $b \leq \sqrt{n}$, 所以尝试反证法。

反证法第一步是假定条件语句“如果 $n=ab$, 其中 a 和 b 是正整数, 那么 $a \leq \sqrt{n}$ 或者 $b \leq \sqrt{n}$ ”的结论为假。也就是说, 假定 $(a \leq \sqrt{n}) \vee (b \leq \sqrt{n})$ 为假。用析取和德摩根律, 发现这表明 $(a \leq \sqrt{n})$ 和 $(b \leq \sqrt{n})$ 都为假。可以将不等式乘起来(用的事实是如果 $0 < t$ 且 $0 < v$, 那么 $su < tv$)得到 $ab > \sqrt{n} * \sqrt{n} = n$ 。这表明了 $ab \neq n$, 这与命题 $n=ab$ 矛盾。

因为条件语句结论的否定意味着前提为假, 原来的条件语句为真。反证成功, 这就证明了如果 $n=ab$, 其中 a 和 b 是正整数, 那么 $a \leq \sqrt{n}$ 或者 $b \leq \sqrt{n}$ 。 ■

空证明和平凡证明 当我们知道 p 为假时, 能够很快证明条件语句 $p \rightarrow q$ 为真, 因为当 p 为假时 $p \rightarrow q$ 一定为真。结果, 如果能证明出 p 为假, 那么就得到一个 $p \rightarrow q$ 的证明方法, 叫做空证明。空证明常用于证明一些定理的特殊情况, 这些定理说: 对所有正整数来说, 一个条件语句为真(即形如 $\forall n P(n)$ 的定理, 其中 $P(n)$ 是命题函数)。

例 5 证明命题 $P(0)$ 为真, 其中 $P(n)$ 是“若 $n > 1$, 则 $n^2 > n$ ”, 论域是所有整数。

解 注意命题 $P(0)$ 是条件语句“若 $0 > 1$, 则 $0^2 > 0$ ”。因为前提 $0 > 1$ 为假, 所以 $P(0)$ 自动地为真。 ■

注意 条件语句的结论 $0^2 > 0$ 为假这个事实, 与条件语句的真值无关, 因为前提为假的条件语句保证为真。

如果我们知道结论 q 为真, 很快就能证明条件语句 $p \rightarrow q$ 。通过证明 q 为真, 紧接着得出 $p \rightarrow q$ 一定为真。用 q 为真的事实来证明 $p \rightarrow q$ 的方法叫做平凡证明。当证明定理的特殊情形(见 1.7 节分情形证明的讨论)时, 以及在数学归纳法中, 平凡证明常常是重要的。

例 6 设 $P(n)$ 是“若 a 和 b 是满足 $a \geq b$ 的正整数, 则 $a^n \geq b^n$ ”, 其中论域是所有整数。证明命题 $P(0)$ 为真。

解 命题 $P(0)$ 是“若 $a \geq b$, 则 $a^0 \geq b^0$ ”。因为 $a^0 = b^0 = 1$, 条件语句“若 $a \geq b$, 则 $a^0 \geq b^0$ ”的结论

为真。从而条件语句 $P(0)$ 为真。这是平凡证明法的一个例子。注意在这个证明里不需要前提，它是语句“ $a \geq b$ ”。

证明的小策略 我们已经介绍了证明形如 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ 这类定理的两种重要方法：直接证明和反证法。我们还给出了示例说明如何使用每种方法。然而，当面临证明形如 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ 定理时，要使用哪一种方法呢？这里将提供一些拇指法则，1.7 节将更详细讨论证明策略。当我们想要证明形如 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ 的语句时，首先，快速评估一下直接证明是否可行。这通过扩展前提中的定义开始，然后使用它们（以及公理和可用的定理）进行推理。如果直接证明看来没什么希望，做同样的步骤试一下反证。回顾在反证中，要假设条件语句的结论为假，并使用直接证明法表明这意味着前提必为假。例 7 和例 8 演示了这种策略。在给出示例前，先介绍一个有用的定义。

定义 2 若存在整数 p 和 $q(q \neq 0)$ 使得 $r = p/q$ ，实数 r 是有理数。不是有理数的实数称为无理数。

例 7 证明两个有理数的和是有理数。（注意，如果这里包括隐含量词，这个定理我们想证明：“对于任意的实数 r 和 s ，如果 r 和 s 是有理数，则 $r+s$ 是有理数。”）

解 首先尝试直接证明。假设 r 和 s 是有理数。由有理数的定义，可知存在整数 p 和 $q(q \neq 0)$ 使得 $r = p/q$ ，存在整数 t 和 $u(u \neq 0)$ 使得 $s = t/u$ 。我们能利用这个信息证明 $r+s$ 是有理数吗？很显然，下一步是相加 $r = p/q$ 和 $s = t/u$ ，得到

$$r + s = \frac{p}{q} + \frac{t}{u} = \frac{pu + qt}{qu}$$

因为 $q \neq 0$ 且 $u \neq 0$ ，所以 $qu \neq 0$ 。因此， $r+s$ 已经被表示为两个整数 $pu+qt$ 和 qu 的比，其中 $qu \neq 0$ 。这表示 $r+s$ 是有理数。我们已经完成了两个有理数的和是有理数的证明，直接证明成功了。

例 8 证明：如果 n 是整数且 n^2 是奇数，则 n 是奇数。

解 首先尝试直接证明。假设 n 是整数且 n^2 是奇数。那么，存在整数 k 使得 $n^2 = 2k+1$ 。我们能利用这个信息证明 n 是奇数吗？看来没有明显可行的方法，因为求解 n 会得出等式 $n = \pm \sqrt{2k+1}$ ，这没有什么用。

因为直接证明没有达到目的，下面尝试反证。我们将语句“ n 不是奇数”作为前提。因为每个整数不是奇数便是偶数，这意味着 n 为偶数。这表示存在整数 k 使得 $n = 2k$ 。要证明这个定理，我们需证明这个前提蕴含着“ n^2 不是奇数”的结论，即 n^2 是偶数。我们能利用 $n = 2k$ 实现这个目标吗？对这个等式的两边取平方，可得 $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ ，这表示 n^2 也是偶数，因为 $n^2 = 2t$ （其中 $t = 2k^2$ ）。我们已经证明了如果 n 是整数且 n^2 是奇数，则 n 是奇数。反证成功了。

1.6.7 归谬证明

假设我们想证明 p 是真的，假定可以找到矛盾式 q 使得 $\neg p \rightarrow q$ 为真，因为 q 是假的， $\neg p \rightarrow q$ 为真，我们能够得出 $\neg p$ 必然为假，这意味着 p 为真。怎样才能找到矛盾式 q ，使其帮助我们证明 p 是真的？

因为无论 r 是什么命题， $r \wedge \neg r$ 都是矛盾式。如果我们能够证明对一些命题 r ， $\neg p \rightarrow (r \wedge \neg r)$ 为真时，就能证明 p 是真的。这种类型的证明称为归谬证明。由于归谬证明不能直接证明一个结果，因此它是另一种间接证明的类型。

下面给出几个归谬证明的例子。第一个例子是鸽巢原理（将在 3.2 节深入介绍）的应用。

例 9 证明：在任意 22 天中至少有 4 天属于一个星期的同一天。

解 令 p 为命题“在任意 22 天中至少有 4 天属于一个星期的同一天”。假设 $\neg p$ 为真。这意味着 22 天中至多有 3 天属于一个星期的同一天。因为一个星期有 7 天，所以至多可以选择 21 天。这样得到一个与 22 天的选择矛盾的假说。也就是说，如果 r 是命题“22 天被选择”，当知道 p 是真的，那么我们能够推出 $\neg p \rightarrow (r \wedge \neg r)$ 。因此，已经证明了任意 22 天中至少有 4 天属于一个星期的同一天。

例 10 通过给出归谬证明来证明： $\sqrt{2}$ 是无理数。

解 设 p 是命题“ $\sqrt{2}$ 是无理数”。假定 $\neg p$ 为真。从归谬证明开始，假定 $\neg p$ 为真。注意 $\neg p$ 表示“并非 $\sqrt{2}$ 是无理数”，这就是说 $\sqrt{2}$ 是有理数。我们将要证明 $\neg p$ 为真的假设导致矛盾。

如果 $\sqrt{2}$ 是有理数，则存在整数 a 和 b 满足 $\sqrt{2} = a/b$ ，其中 a 和 b 没有公因子（所以分数 a/b 是既约的）（这里用到了事实：每个有理数都能写成既约分数）。因为 $\sqrt{2} = a/b$ ，所以当这个等式的两端都平方时，就得出 $2 = a^2/b^2$ 。因此， $2b^2 = a^2$ 。

根据偶数的定义，则 a^2 是偶数。下面应用事实：若 a^2 是偶数，则 a 也一定是偶数。另外，因为 a 是偶数，由偶数的定义，所以对某个整数 c ，有 $a = 2c$ 。因此 $2b^2 = 4c^2$ 。

等式两边除以 2 得： $b^2 = 2c^2$ 。

由偶数定义，这意味着 b^2 是偶数。再应用事实：如果一个整数的平方是偶数，那么这个数自身也一定是偶数。因此，我们得出 b 也必然是偶数。

现在，已经证明假设 $\neg p$ 导致等式 $\sqrt{2} = a/b$ ，其中 a 和 b 没有公因子，但 a 和 b 都是偶数，也就是说 2 整除 a 和 b 。注意到命题 $\sqrt{2} = a/b$ ，其中 a 和 b 没有公因子，实际上意味着 2 不能整除 a 和 b 。由于对 $\neg p$ 的假设导致 2 整除 a 和 b 与 2 不能整除 a 和 b 矛盾， $\neg p$ 一定是假的。也就是说，命题 p ：“ $\sqrt{2}$ 是无理数”是真的。我们完成了证明 $\sqrt{2}$ 是无理数。 ■

归谬证明能够用于证明条件语句。在这样的证明中，首先假设结论的否定。然后应用定理前提和结论否定得到一个矛盾式。（这样证明是有效的推理原因是依据 $p \rightarrow q$ 和 $(p \wedge \neg q) \rightarrow F$ 的逻辑等价。为发现这些语句等价，简单注意每个在特定的一种情况下为假，即当 p 为真且 q 为假时。）

注意，对一个条件语句的反证可以改写成归谬证明。在 $p \rightarrow q$ 的反证里，假定 $\neg q$ 为真而证明 $\neg p$ 也必然为真。为了把 $p \rightarrow q$ 的间接证明改写成归谬证明，假定 p 和 $\neg q$ 都为真。然后利用 $\neg q \rightarrow \neg p$ 的证明步骤，来证明 $\neg p$ 也必然为真。这样就得出矛盾式 $p \wedge \neg p$ ，由此完成归谬证明。例 11 说明如何把对条件语句的反证改写成归谬证明。

例 11 给出定理“若 $3n+2$ 是奇数，则 n 是奇数”的归谬证明。

解 假定 p 表示“ $3n+2$ 是奇数”， q 表示“ n 是奇数”。为构造归谬证明，假设 p 和 $\neg q$ 都为真。也就是假设 $3n+2$ 是奇数而 n 不是奇数。因为 n 不是奇数，所以 n 是偶数。按照在例 3 解答里步骤（归谬证明），可以证明若 n 为偶数则 $3n+2$ 是偶数。首先因为 n 偶数，存在整数 k 使得 $n = 2k$ 。这意味着 $3n+2 = 3(2k)+2 = 6k+2 = 2(3k+1)$ 。由于 $3n+2$ 是 $2t$ ，这里 $t = 3k+1$ ， $3n+2$ 是偶数。注意到 $\neg p$ 表示“ $3n+2$ 是偶数”，因为一个整数是偶数当且仅当它不是奇数。由于设 p 和 $\neg p$ 都为真，得出一个矛盾式。这完成了一个归谬证明，证明了如果 $3n+2$ 是奇数，则 n 是奇数。证毕。 ■

注意，也能用矛盾式证明 $p \rightarrow q$ 是真的，通过假设 p 和 $\neg q$ 都为真，来证明 q 也一定为真。这意味着 q 和 $\neg q$ 都为真，矛盾。这一点告诉我们，能够转变一个直接证明为归谬证明。

等价性证明 为了证明一个定理是双条件的，即形如 $p \leftrightarrow q$ 的语句，我们来证明 $p \rightarrow q$ 和 $q \rightarrow p$ 都是真的。这个方法的有效性建立在

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$$

是重言式。

例 12 证明定理“整数 n 是奇数当且仅当 n^2 是奇数”。

Extra Examples **解** 这个定理是形如“ p 当且仅当 q ”，其中 p 是“ n 是奇数”而 q 是“ n^2 是奇数”。（通常不明确地处理为全称量化。）为了证明这个定理，需要证明 $p \rightarrow q$ 和 $q \rightarrow p$ 都为真。

已经证明了（在例 1 里） $p \rightarrow q$ 为真且 $q \rightarrow p$ 为真（在例 8 里）。

因为已经证明了 $p \rightarrow q$ 和 $q \rightarrow p$ 都为真，所以就已经证明了这个定理为真。 ■

有时候定理说几个命题都是等价的。这样的定理说命题 $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ 都是等价的。这个定理可以写成

$$p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow p_n$$

它说所有的 n 个命题都具有相同的真值，因此对所有的 i 和 j ，其中 $1 \leq i \leq n$ ， $1 \leq j \leq n$ ， p_i 和 p_j 是等价的。证明这些命题互相等价的一种方式是使用永真式

$$[p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow p_n] \leftrightarrow [(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \cdots \wedge (p_n \rightarrow p_1)]$$

这个永真式说明，若可以证明条件语句 $p_1 \rightarrow p_2$ ， $p_2 \rightarrow p_3$ ， $\cdots$ ， $p_n \rightarrow p_1$ 都为真，则命题 p_1 ， p_2 ， p_3 ， $\cdots$ ， p_n 都是等价的。

这更加充分地证明对所有的 $i \neq j$ ， $1 \leq i \leq n$ ， $1 \leq j \leq n$ ，都有 $p_i \rightarrow p_j$ 。

当要证一组命题等价时，我们可以建立一个条件语句链，只要能够证明链中任一个推出另一个。例如，通过证明 $p_1 \rightarrow p_3$ 、 $p_3 \rightarrow p_2$ 、 $p_2 \rightarrow p_1$ ，就能够证明 p_1 、 p_2 、 p_3 是等价的。

例 13 对于整数 n ，证明下列三个语句等价：

p_1 ： n 是偶数

p_2 ： $n-1$ 是奇数

p_3 ： n^2 是偶数

解 为了证明这些语句等价，证明条件语句 $p_1 \rightarrow p_2$ ， $p_2 \rightarrow p_3$ 和 $p_3 \rightarrow p_1$ 都为真。

将用直接证明来证明 $p_1 \rightarrow p_2$ 为真。假定 n 为偶数，则对某个整数 k 来说，有 $n=2k$ 。因此， $n-1=2k-1=2(k-1)+1$ 。这意味着 $n-1$ 是奇数，因为它形如 $2m+1$ ，其中 $m=k-1$ 。

仍用直接证明来证明 $p_2 \rightarrow p_3$ 。现在假定 $n-1$ 是奇数，则对某个整数 k 来说，有 $n-1=2k+1$ 。因此， $n=2k+2$ ， $n^2=(2k+2)^2=4k^2+8k+4=2(2k^2+4k+2)$ 。这意味着 n^2 是整数 $2k^2+4k+2$ 的 2 倍，所以 n^2 是偶数。

要证明 $p_3 \rightarrow p_1$ ，用反证法。也就是说，证明如果 n 不是偶数，则 n^2 也不是偶数。这等同于证明如果 n 是奇数，那么 n^2 是奇数，这在例 1 中已证明过了。证毕。

反例 在 1.3 节曾提到，证明形如 $\forall x P(x)$ 的语句为假，只要能找到一个反例，即存在一个例子使 $P(x)$ 为假。当提交一个形如 $\forall x P(x)$ ，我们相信它是假的，或者排斥所有的企图证明，就寻找反例。例 14 说明了反例的应用。

例 14 证明语句“每个正整数都是两个整数的平方和”为假。

反例

解 为了证明此语句为假，我们寻找一个反例，即寻找一个特殊的整数，它不是两个数的平方和。很快发现反例，3 不能写成两个数的平方和。为表达出这是事实，请注意可用的不超过 3 的平方数只有 $0^2=0$ 、 $1^2=1$ ，而 0、1 的每两项相加都得出 3，因此证明了“每个正整数都是两个整数的平方和”为假。

1.6.8 证明中的错误

在构造数学证明时，容易犯一些错误。这里简述其中的一些。这当中最常见的错误是算术和基本代数方面的。甚至专门的数学家也会犯这种错误，尤其是在处理复杂的公式时。任何时候进行这样的计算都应当尽可能仔细地检查。（你应当复习基本代数中让你头疼的方面。）

数学证明的每一步都应当是正确的，并且结论要从之前的步骤中逻辑地导出。许多错误是源于引入不是前面步骤的逻辑推导。下面的例 15~17 说明了这一点。

例 15 下面这个著名的假定“证明”（即 $1=2$ ）错在哪里？

“证明”步骤如下，其中 a 和 b 是两个相等的正整数。

步骤

理由

1. $a=b$

给定的前提

2. $a^2=ab$

步骤 1 两边乘以 a

3. $a^2-b^2=ab-b^2$

步骤 2 两边减去 b^2

4. $(a-b)(a+b)=b(a-b)$

步骤 3 两边分解因式

5. $a+b=b$

步骤 4 两边除以 $a-b$

6. $2b=b$

步骤 5 把 a 替换成 b ，因为 $a=b$ 并化简

7. $2=1$

步骤 6 两边除以 b

解 除了步骤5两边除以 $(a-b)$ 之外，每个步骤都有效，错误在于 $a-b$ 等于零；一个等式两边用同一个数相除只有在除数不是零时才是有效的。

例16 下面这个“证明”错在哪里？

“定理”：若 n^2 是正数，则 n 是正数。

“证明”：假定 n^2 是正数。因为条件命题“若 n 是正数，则 n^2 是正数”为真，所以可以得出 n 是正数。

解 令 $P(n)$ 为“ n 是正数”， $Q(n)$ 为“ n^2 是正数”。则前提是 $Q(n)$ 。命题“如果 n 是正数，则 n^2 是正数”也就是 $\forall n(P(n) \rightarrow Q(n))$ 。从前提 $Q(n)$ 和 $\forall n(P(n) \rightarrow Q(n))$ 不能得出 $P(n)$ ，因为没有使用有效的推理规则。相反，这是一个断言结论的谬误的示例。一个反例是当 $n=-1$ 时， $n^2=1$ 为正数，但 n 却是负的。

例17 下面的“证明”错在哪里？

“定理”：如果 n 不是正数，则 n^2 不是正数。

“证明”：假定 n 不是正数。因为条件语句“如果 n 是正数，则 n^2 是正数”为真，所以可得 n^2 不是正数。

解 如例16那样设定 $P(n)$ 和 $Q(n)$ 。则前提是 $\neg P(n)$ ，语句“如果 n 是正数，则 n^2 是正数”即是 $\forall n(P(n) \rightarrow Q(n))$ 。从前提 $\neg P(n)$ 和 $\forall n(P(n) \rightarrow Q(n))$ 不能得出 $\neg Q(n)$ ，因为没有使用有效的推理规则。相反，这是一个否定前提的谬误示例。如例16那样， $n=-1$ 即为反例。

最后，简要讨论一种比较难应付的错误。许多不正确的论证都基于一种称为偷用论题的谬误。当证明的一个或多个步骤基于待证明命题的正确性时，会发生这样的谬误。换句话说，当命题使用自身或等价于自身的命题来进行证明时会产生这种谬误。所以这种谬误也称为循环论证。

例18 下面的论证是否正确？

假定 n^2 是偶数，则存在某个整数 k 使 $n^2=2k$ 。令存在某个整数 l 使得 $n=2l$ 。这证明了 n 是偶数。

解 这个论证不正确。证明中没有给出论证说明 n 可以写为 $2l$ ， l 为某整数。这是一个循环论证，因为这个命题等价于待证的命题（即 n 是偶数）。当然，结果本身是正确的，只是证明方法不对。

在证明中犯错是学习过程的一部分。当你犯了某个错误并被别人发现时，应该仔细分析哪里出了错误并确保不再犯同样的错误。

1.6.9 仅仅是开始

现在已经开发了一个基本的证明方法库。在下一节将介绍其他重要的证明方法。在第3章将介绍组合证明的概念。

本节介绍了几个形如 $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ 的定理证明方法，包括直接证明和反证法。存在着许多定理，通过直接利用前提和定理里的名词的定义，就容易找出其证明。不过，通常要是不借助于灵活地利用反证—归谬证明，或一些其他的证明技术，就难以证明一个定理。在1.7节中，将讲述证明策略。我们将描述当直接方法行不通时的各种可以用于证明的方法。构造证明是一种只能通过经验学习的艺术，包括写证明，让他人评论你的证明，以及读和分析其他证明。

练习

1. 用直接证法证明：两个奇数之和是偶数。
2. 用直接证法证明：偶数的平方是偶数。
3. 证明：如果 $m+n$ 和 $n+p$ 都是偶数，其中 m 、 n 和 p 都是整数，那么 $m+p$ 也是偶数。你用的是什么证明方法？
4. 用直接证法证明：每个奇数都不同于2的平方。
5. 证明：一个无理数与一个有理数之和是无理数，使用归谬证明。
6. 证明或反驳：两个无理数之积是无理数。
7. 证明：若 x 是无理数，则 $1/x$ 是无理数。
8. 使用归谬证明：如果 $x+y \geq 2$ ，这里 x 、 y 是实数，那么 $x \geq 1$ ，或者 $y \geq 1$ 。
9. 证明：若 n 是整数而且 n^3+5 是奇数，则 n 是偶数，使用

a)反证法证明

b)归谬证明

10. 证明命题 $P(0)$, 其中 $P(n)$ 是命题“若 n 是个大于 1 的正整数, 则 $n^2 > n$ ”。你使用什么类型的证明?
11. 设 $P(n)$ 是命题“若 a 和 b 是正实数, 则 $(a+b)^n \geq a^n + b^n$ ”。证明 $P(1)$ 为真。你使用什么类型的证明?
12. 证明: 在任意 64 天中至少有 10 天指向一个星期的同一天。
13. 用归谬法证明: 没有有理数 r 使得 $r^3 + r + 1 = 0$ 。[提示: 假设 $r = a/b$ 是一个根, 这里 a, b 是整数, a/b 是既约的。通过乘以 b^3 , 得到一个整数的等式。那么看看是否 a 和 b 是某一个奇数或偶数。]
14. 证明: 若 n 是正整数, 则 n 是奇数当且仅当 $5n+6$ 是奇数。
15. 证明或反驳: 若 m 和 n 是整数使得 $mn=1$, 则 $m=1$ 并且 $n=1$, 或者 $m=-1$ 并且 $n=-1$ 。
16. 证明下面三个语句等价: (i) $3x+2$ 是偶数, (ii) $x+5$ 是奇数, (iii) x^2 是偶数。
17. 证明下面三个语句等价: (i) x 是无理数, (ii) $3x+2$ 是无理数, (iii) $x/2$ 是无理数。
18. 下列求解方程 $\sqrt{x+3}=3-x$ 的步骤是否正确? (1) $\sqrt{x+3}=3-x$ 是给定的; (2) $x+3=x^2-6x+9$, 对 (1) 的两边平方; (3) $0=x^2-7x+6$, 从 (2) 的两边都减去 $x+3$; (4) $0=(x-1)(x-6)$, 对 x^2-7x+6 进行因式分解; (5) $x=1$ 或 $x=6$, 因为 $ab=0$ 蕴含 $a=b$ 或 $b=0$, 故从 (4) 可得到解。
19. 证明: 可以通过证明条件语句 $p_1 \rightarrow p_4, p_3 \rightarrow p_1, p_4 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_5$ 和 $p_5 \rightarrow p_3$ 来证明命题 p_1, p_2, p_3, p_4 和 p_5 等价。
20. 证明: 在实数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中至少有一个数大于或等于这些数的平均值。你使用什么类型的证明?
21. 证明: 若 n 是整数, 则下面 4 个语句等价: (i) n 是偶数; (ii) $n+1$ 是奇数; (iii) $3n+1$ 是奇数; (iv) $3n$ 是偶数。

1.7 证明的方法和策略

1.7.1 引言

在 1.6 节介绍了各种不同的证明方法, 并说明了每一种方法如何使用。在这一节, 继续这方面的讨论。我们将介绍几种其他重要的证明方法, 包括考虑个别不同案例的证明和具有预期性质物体的存在性证明。

在 1.6 节只简要讨论了构造证明的策略。这些策略包括选择证明方法, 然后以这个方法为基础, 一步步地成功建立论据。本节在我们已经成功建立一个广泛的证明方法库之后, 将研究一些艺术和科学证明之外的方面。对于如何寻找一个定理的证明方法将提供一些忠告。我们也将描述一些窍门, 包括如何从工作背景中发现证明方法, 并适应存在性证明。

对于数学家的工作, 他们制定猜想, 企图证明或驳斥。这里将简要描述瓦片与骨牌和其他类型的棋盘棋子证明结果的过程。考察这种类型的瓦片, 我们将能够迅速制定猜想和证明定理而不先发展理论。

我们将通过开放问题的角色讨论得到这部分内容。特别地, 要讨论一些有趣的问题, 它们或者是开发数百年后已经被解决的, 或者仍然保持开放的问题。

1.7.2 穷举证明和分情形证明

有时用单一论据通过保持所有的可能情况并不能证明定理。现在介绍一种通过分别考虑不同的情况, 能够用于证明定理的方法。这个方法建立在现在要介绍的一个推理规则上。为了证明形如

$$(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \rightarrow q$$

的条件语句, 可以用永真式 $[(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \rightarrow q] \leftrightarrow [(p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \dots \wedge (p_n \rightarrow q)]$ 作为推理规则。这个推理规则说明, 可以通过分别证明每个条件语句 $p_i \rightarrow q (i=1, 2, \dots, n)$ 来证明由命题 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 的析取式组成前提的原条件语句。这种论证称为分情形证明。有时为了证明条件语句 $p \rightarrow q$ 为真, 方便的做法是用析取式 $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$ 代替 p 作为条件语句的前提, 其中 p 与 $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n$ 等价。

穷举证明 有些定理能够通过有关的小数量例子测试来证明。这样的证明叫做穷举证明。因为这些证明通过穷尽所有可能进行。一个穷举证明是分情形证明的特殊类型, 这里每一种情形都作为独立例子检查。现在对穷举证明给些说明。

例1 证明：当 n 是一个正整数，且 $n \leq 4$ 时， $(n+1)^3 \geq 3^n$ 。

Extra Examples

解 用穷举证明。我们只需检验当 $n=1, 2, 3, 4$ 时， $(n+1)^3 \geq 3^n$ 不等式。对于 $n=1$ ， $(n+1)^3 = 2^3 = 8$ ，且 $3^n = 3^1 = 3$ ；对于 $n=2$ ， $(n+1)^3 = 3^3 = 27$ ，且 $3^n = 3^2 = 9$ ；对于 $n=3$ ， $(n+1)^3 = 4^3 = 64$ ，且 $3^n = 3^3 = 27$ ；对于 $n=4$ ， $(n+1)^3 = 5^3 = 125$ ，且 $3^n = 3^4 = 81$ 。在这四种情况的每一种情形，都得到 $(n+1)^3 \geq 3^n$ 。用穷举证明法方法证明了当 n 是一个正整数，且 $n \leq 4$ 时， $(n+1)^3 \geq 3^n$ 。

例2 证明：在 100 以内，连续的正整数是全幂数的只有 8 和 9（全幂数是指它能写成 n^a ，其中 a 是大于 1 的整数）。

解 可以通过证明在 $n < 100$ 时，只有一对连续的正整数 $n, n+1$ 它们都是全幂数来证明这个事实，即 $n=8$ 时。我们能够证明此事实，通过检验在 100 以内的正整数 n ，首先检查 n 是否是全幂数。如果是，检查 $n+1$ 是否也是全幂数。做这件事最快的方法是简单地看 100 以内所有的全幂数，检查是否它下一个大的整数也是全幂数。100 以内正整数的平方有 1、4、9、16、25、36、49、64、81 和 100。100 以内正整数的立方有 1、8、27 和 64。100 以内正整数的 4 次幂有 1、16 和 81。100 以内正整数的 5 次幂有 1 和 32，100 以内正整数的 6 次幂有 1 和 64。除了 1 以外，100 以内没有正整数的 6 次幂大于 6 次。观察不超过 100 的一系列全幂数，发现只有 $n=8$ 时， n 是全幂数，而 $n+1$ 也是全幂数。即 $2^3=8$ ， $3^2=9$ ，是 100 以内唯一两个连续全幂数。证毕。

当只需要检查有关的小数量命题例子的时候，人们可以进行穷举证明。当要求计算机检查非常庞大的命题例子时，它不会抱怨，但它们仍然有局限性。注意，当不能列出所有要检查的例子时，计算机甚至不能检查所有的例子。

分情形证明 分情形证明一定要覆盖定理中出现的所有可能情况。我们用一组例子分情形说明，在每一个例子中，我们应该检查所有覆盖的可能性。

例3 证明：当 n 为整数时，有 $n^2 \geq n$ 。

解 对每一个正整数，通过考虑 $n=0$ ， $n \geq 1$ 和 $n \leq -1$ 三种情况来证明 $n^2 \geq n$ 。分解证明为三种情况：因为通过考虑 0，正整数和负整数可以直接证明这个结果。

Extra Examples

情况(i) 当 $n=0$ 时，因为 $0^2=0$ ，从而 $0^2 \geq 0$ 。这表明在这种情况下， $n^2 \geq n$ 是真的。

情况(ii) 当 $n \geq 1$ 时，把不等式 $n \geq 1$ 两边同时乘以正整数 n ，得到 $n \cdot n \geq n \cdot 1$ 。这表明对 $n \geq 1$ ，有 $n^2 \geq n$ 。

情况(iii) 当 $n \leq -1$ 时，然而 $n^2 \geq 0$ ，因而有 $n^2 \geq n$ 。

因为在所有的三种情况中，有不等式 $n^2 \geq n$ ，能够得出结论：当 n 为整数时，有 $n^2 \geq n$ 。

例4 用分情形证明法证明 $|xy| = |x||y|$ ，其中 x 和 y 是实数。（ $|a|$ 是 a 的绝对值，当 $a \geq 0$ 时， $|a| = a$ ；当 $a \leq 0$ 时， $|a| = -a$ 。）

解 在这个定理的证明中，用事实：当 $a \geq 0$ 时， $|a| = a$ ；当 $a \leq 0$ 时， $|a| = -a$ ，消除绝对值。由于 $|x|$ 和 $|y|$ 两个在公式中，将需要分成四种情况：(i) x 和 y 都非负；(ii) x 非负， y 是负的；(iii) x 是负的， y 非负；(iv) x 是负的， y 是负的。

（注意：我们通过每一种情况的恰当的符号选择去掉绝对值符号。）

情况(i) 我们看到 $p_1 \rightarrow q$ ，因为当 $x \geq 0$ 且 $y \geq 0$ 时 $xy \geq 0$ ，因此 $|xy| = xy = |x||y|$ 。

情况(ii) 要证明 $p_2 \rightarrow q$ ，注意若 $x \geq 0$ 且 $y < 0$ ，则 $xy \leq 0$ ，因此 $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$ 。（因为 $y < 0$ ，我们有 $|y| = -y$ 。）

情况(iii) 要证明 $p_3 \rightarrow q$ ，可遵循前一种情形的推理过程，只需将 x 和 y 的角色互换。

情况(iv) 要证明 $p_4 \rightarrow q$ ，注意当 $x < 0$ 且 $y < 0$ 时， $xy > 0$ 。因此 $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$ 。

因为已经完成了所有的四项，这些情况包含了所有的可能情况。能够得出结论当 x 和 y 是实数时， $|xy| = |x||y|$ 。

利用分情形证明 已经给出的说明分情形证明的例子提供了一些何时应用这种证明方法的启发。特别地，当同时考虑所有的证明情况不可能时，应该考虑分情形证明。何时应该应用这种证

明方法呢？一般地，当没有明显的思路开始证明，而每一种情况的额外信息又能推进证明，这时寻求分情形证明。例5说明了如何有效地应用分情形证明。

例5 对于十进制数字，一个整数的平方的最末位数字，给出一个猜想，并证明你的结论。

解 最小的完全平方数分别是1、4、9、16、25、36、49、64、81、100、121、144、169、196、225，等等。注意到，完全平方数的最末位数字是：0、1、4、5、6和9，而2、3、7、8从不出现在完全平方数的最末位数字。猜想这样的结论：一个完全平方数的最末位数字是：0、1、4、5、6或9。如何证明这个结论呢？

首先注意到，把整数 n 表示为 $10a+b$ ，这里 a 和 b 是正整数， b 是0、1、2、3、4、5、6、7、8或9。这里 a 是从 n 中分解出10的倍数，从此抽取出 n 的十位数获得的整数。其次， $(10a+b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2 = 10(10a^2 + 2ab) + b^2$ ，因而， n^2 的十进制最末位数字与 b^2 的十进制最末位数字相同。进一步， b^2 的最末位十进制数字与 $(10-b)^2 = 100 - 20b + b^2$ 相同。因此，把证明缩减为以下6种情况：

情况(i) n 的最末尾数字是1或9，这样 n^2 的最后十进制数字是 $1^2=1$ ，或 $9^2=81$ ，即为1。

情况(ii) n 的最末尾数字是2或8，这样 n^2 的最后十进制数字是 $2^2=4$ ，或 $8^2=64$ ，即为4。

情况(iii) n 的最末尾数字是3或7，这样 n^2 的最后十进制数字是 $3^2=9$ ，或 $7^2=49$ ，即为9。

情况(iv) n 的最末尾数字是4或6，这样 n^2 的最后十进制数字是 $4^2=16$ ，或 $6^2=36$ ，即为6。

情况(v) n 的十进制最末尾数字是5，这样 n^2 的十进制最后数字是 $5^2=25$ ，即为5。

情况(vi) n 的最末尾数字是0，这样 n^2 的十进制最后数字是 $0^2=0$ ，即为0。

因为考虑了所有的6种情况，能够得出：当 n 是整数， n^2 的十进制最后数字是0、1、4、5、6或9。 ■

在分情形证明中，有时能估计所有的，但有很少的几个例子。例6就是如此。

例6 证明：对于整数 x 、 y ， $x^2+3y^2=8$ 没有解。

解 由于当 $|x| \geq 3$ 时， $x^2 > 8$ ，同时当 $|y| \geq 2$ 时， $3y^2 > 8$ 。因此能够很快缩减证明，只检查几种简单的情况。这样只剩下 x 取值-2、-1、0、1、2，而 y 取值-1、0、1的情况，我们就能给出一个全面的证明。对于保留的情况，注意到， x^2 的可能取值是0、1、4， $3y^2$ 的可能取值是0和3， x^2 与 $3y^2$ 可能取值的最大和是7。因此，当 x 、 y 是整数时， $x^2+3y^2=8$ 是不可能的。 ■

不失一般性 在例4的证明中，除掉情形(iii) $x < 0$ ， $y \geq 0$ ，因为它与情形(ii) $x \geq 0$ ， $y < 0$ 的 x 和 y 角色互换后相同。为了简短证明，不失一般性，我们可以通过假设，把情形(ii)和(iii)的证明合在一起为 $x \geq 0$ ， $y < 0$ 。这意味着，我们通过情形 $x \geq 0$ ， $y < 0$ 来完成情形 $x < 0$ ， $y \geq 0$ ，道理如上，但要有明显的变化。一般地，术语“不失一般性”用在证明中(缩写为WLOG)时，我们得到如果没有另外的证据要求证明其他指定的情形，可通过证明定理的其中一种情况。也就是说，其他的一系列情况通过简单的变化来论证，或者添加到一些简单的初始步骤中。当然，这个原理的不正确应用会导致不幸的错误发生。有时假设会导致失去一般性。一些假设使得忽略一个情况可以是非常不同于其他情形。这样会导致不完整及不可挽救的证明。事实上，许多著名定理的不正确证明原来依赖于应用“不失一般性”的想法，来论证不能很快从简单情形证明而建立的情形。

现在我们来说明有效应用不失一般性的证明。

例7 证明： $(x+y)^r < x^r + y^r$ 。这里 x 、 y 是正实数， r 是 $0 < r < 1$ 的实数。

解 不失一般性，假设 $x+y=1$ 。[注意：假设对于 $x+y=1$ 已经证明了定理。设 $x+y=t$ ，那么 $x/t+y/t=1$ ，这意味着 $(x/t+y/t)^r < (x/t)^r + (y/t)^r$ 。最后式子两边乘以 t^r ，证得 $(x+y)^r < x^r + y^r$ 。]

假设 $x+y=1$ ，因为 x 、 y 都为正，所以 $0 < x < 1$ ， $0 < y < 1$ 。因为 $0 < r < 1$ ，因此， $0 < 1-r < 1$ ，故 $x^{1-r} < 1$ ， $y^{1-r} < 1$ 。这意味着 $x < x^r$ ， $y < y^r$ 。因此， $x^r + y^r > x+y=1$ 。从而 $(x+y)^r = 1^r < x^r + y^r$ 。这样对于 $x+y=1$ 证明了定理。

因为不失一般性，我们假设 $x+y=1$ ，得到 $(x+y)^r < x^r + y^r$ 这里 x 、 y 是正实数， r 是 $0 < r < 1$ 的实数。 ■

穷举证明和分情形证明的常见错误 推理的一种常见错误是从例子中得出不正确结论。不管考虑多少不同的例子，除非每一种可能情况都覆盖了，否则不能从例子证明定理。证明定理的问题类似于要证明计算机程序总能输出所期望的。除非所有的输入值都测试了，否则无论测试多少输入值，也不能得到程序总会有正确的输出。

例 8 语句“每个正整数都是 18 个四次方整数之和”是否为真？

解 要判断 n 是否可写为 18 个四次方整数的和，我们先从最小的正整数开始考察。因为整数的四次方分别是 0, 1, 16, 81, …，如果能从这些数中选择 18 个项后相加得 n ，则命题得证。可以证明，从 1 到 78 的所有正整数都可以写成 18 个四次方整数的和（细节留给读者证明）。然而，如果认为这就检查够了，那就会得出错误的结论，因为 79 并不是 18 个四次方整数的和（读者请自行验证）。所以，题设语句不为真。 ■

另一个常见错误是由于未考虑到所有情形，导致不正确的证明，因而做出无根据的假设。如例 9 所示。

例 9 下面的“证明”错在哪里？

“定理”：如果 x 是实数，则 x^2 是正实数。

“证明”：令 p_1 为“ x 是正数”， p_2 为“ x 是负数”， q 为“ x^2 是正数”。要证明 $p_1 \rightarrow q$ ，注意，当 x 是正数时， x^2 为正数，因为两个正数 x 和 x 的积肯定为正。要证明 $p_2 \rightarrow q$ ，注意当 x 是负数时， x^2 是正数，因为 x^2 是两个负数的积。证毕。

解 上面的证明存在的问题是忘了考虑 $x=0$ 的情形。当 $x=0$ 时， $x^2=0$ 非正，因此假设的定理为假。如果 p 是“ x 是实数”，那我们可以分三种情形 p_1 、 p_2 和 p_3 来证明结果，其中 p_1 是“ x 是正数”， p_2 是“ x 是负数”， p_3 是“ $x=0$ ”，因为 $p \leftrightarrow p_1 \vee p_2 \vee p_3$ 。 ■

1.7.3 存在性证明

许多定理都断言存在特定类型的对象。这种类型的定理是形如 $\exists xP(x)$ 的命题，其中 P 是谓词。对形如 $\exists xP(x)$ 的命题的证明称为存在性证明。有多种方式来证明这种类型的定理。有时通过找出一个使得 $P(a)$ 为真的元素 a 来给出 $\exists xP(x)$ 的存在性证明。这样的存在性证明称为构造性的。给出非构造性的证明也是可能的；即不是找出使 $P(a)$ 为真的元素 a ，而是以某种其他方式来证明 $\exists xP(x)$ 为真。给出非构造性证明的一种普通方法是使用归谬证明，证明该存在量词化的否定式蕴含着矛盾。下列例 10 说明构造性的存在性证明的概念。例 11 说明非构造性的存在性证明的概念。

例 10 构造性的存在性证明 证明存在某个正整数，可以用两种不同的方式将其表示为正整数的立方和。

Extra Example

解 经过大量的计算（如使用计算机搜索）可找到

$$1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$$

因为 1729 满足题设要求，所以得证。 ■

例 11 非构造性的存在性证明 证明存在无理数 x 和 y 使得 x^y 是有理数。

解 由 1.6 节例 10 可知 $\sqrt{2}$ 是无理数，考虑数 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 。如果它是有理数，那就存在两个无理数 x 和 y 且 x^y 是有理数，即 $x=\sqrt{2}$ ， $y=\sqrt{2}$ 。另一方面，如果 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 是无理数，那么可以令 $x=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 且 $y=\sqrt{2}$ ，因此 $x^y=(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}^{(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2})}=\sqrt{2}^2=2$ 。

这是一个非构造性存在性证明的例子，即我们并没有找出无理数 x 和 y 使得 x^y 是有理数。而我们证明了或者 $x=\sqrt{2}$ ， $y=\sqrt{2}$ ，或者 $x=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ， $y=\sqrt{2}$ ，可能满足性质，但并不知道这两对哪一个满足。 ■

非构造性存在性证明非常微妙，如例 12 所示。

例 12 Chomp 是两个人玩的游戏。在这个游戏中，曲奇饼放在矩形格中。左上角的曲奇饼被毒化了。如图 1-1a 所示。两个玩家轮流移动。每一个玩家都要吃一块留下的曲奇饼，两人都要使右边和/或它下面所有的曲奇饼都被取走（例如如图 1-1b 所示）。如果不要吃毒化

的曲奇饼就没有选择的玩家为失败。请问：两个玩家之一是否有获胜的策略，即其中一个玩家能够一直移动保证其获胜。

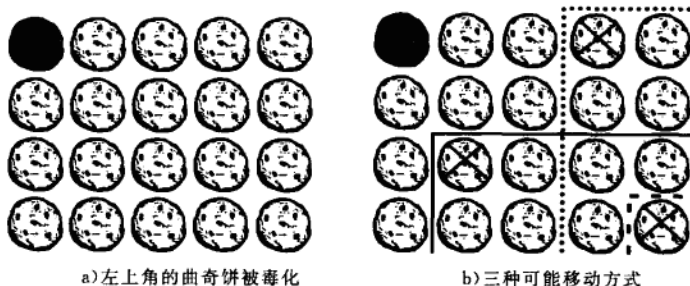


图 1-1 Chomp

解 给第一个玩家获胜策略的非构造性存在证明。也就是说，将证明第一个玩家总有获胜的策略，但对必须怎么移动没有明确的描述。

首先，游戏结束后，不能是一个平局，因为每一步移动至少要吃一块曲奇饼，因此游戏结束不会超过移动 $m \times n$ 步，这里初始网格是 $m \times n$ 。现假设在游戏开始，第一个玩家吃掉了右下角的曲奇饼，这有两种可能，一这是第一个玩家获胜策略的第一步，二或者这是第二个玩家获胜策略的第一步。在第二种情况下，第一个玩家替代恰好要吃右下角的曲奇饼，可以采用第二个玩家获胜策略的第一步相同的步骤(然后继续循环这个获胜策略)。这将保证第一个玩家获胜。

注意，这里证明了获胜策略的存在性，但是没有指定具体的获胜策略。因此，这个证明是非构造性存在性证明。事实上，没有人能够描述 Chomp 的获胜策略，适用于所有的长方形网格通过描述第一个玩家应该遵循的移动方式。然而，获胜策略能够被描述成某种特殊的情况，比如当网格是正方形和当网格只有两行曲奇饼时。

1.7.4 唯一性证明

一些定理断言具有特定性质的元素唯一存在。换句话说，这些定理断言恰有一个元素具有这个性质。要证明这类语句，需要证明有某个元素具有这个性质，且没有其他元素有此性质。唯一性证明的两个部分如下：

存在性：证明存在某个元素 x 具有期望的性质。

唯一性：证明若 $y \neq x$ ，则 y 不具有期望的性质。

等价地，我们可以证明如果 x 和 y 都具有期望的性质，则 $x = y$ 。

注意 证明存在某个唯一元素 x 等同于证明语句 $\exists x(P(x) \wedge \forall y(y \neq x \rightarrow \neg P(y)))$ 。

我们在例 13 中要说明唯一性证明的组成。

例 13 证明：如果 a, b 是实数，并且 $a \neq 0$ ，那么有一个唯一的 r ，使得 $ar + b = 0$ 。

解 首先，注意到实数 $r = -b/a$ 是 $ar + b = 0$ 的一个解，因为 $a(-b/a) + b = -b + b = 0$ 。因此，对于 $ar + b = 0$ 实数 r 是存在的。这是证明的存在性部分。

Example 其次，假设 s 是 $as + b = 0$ 成立的实数。因此 $ar + b = as + b$ ，这里 $r = -b/a$ 。从两边减去 b ，得到 $ar = as$ 。最后式子两边同除以 a ，这里 a 是非零的，得到 $r = s$ 。这意味着如果 $r \neq s$ ，则 $as + b \neq 0$ 。这建立了证明的唯一性部分。

1.7.5 证明策略

发现证明是一项挑战性的工作。当面对待证命题时，应该先用定义替换术语，再仔细分析假设和结论的含义。这样做之后，用一种可用的证明方法去试图证明结果。一般情况下，如果语句是条件语句，就应该首先尝试直接证明；如果这样不行，就尝试间接证明。如果这些方法都不行，就尝试归谬证明。

前推与后推 无论选择什么证明方法, 都需要一个起点。条件语句的直接证明就从假设开始。利用这些假设以及公理和已知定理, 用导向结论的一系列步骤来构造证明。这类推理称为前推, 是用来证明相对简单结果的一类最常见推理。同样, 要开始间接证明, 就从假设的否定开始, 用一系列步骤来得出前提的否定。

但是, 前推常常难以用来证明更复杂的结果, 因为得出想要的结论所需要的推理可能相当复杂。在这种情况下, 使用后推可能会有帮助。为了后推证明命题 q , 就寻找能证明具有性质 $p \rightarrow q$ 的语句 p 。(注意, 寻找能证明使得 $q \rightarrow r$ 的语句 r 不会有帮助, 因为从 $q \rightarrow r$ 和 r 得出 q 为真, 这种推论是错误的。)例 14 和例 15 解释后推。

例 14 给定两个正实数 x 和 y , 其算术均值是 $(x+y)/2$, 其几何均值是 $\sqrt{xy}$ 。当比较成对不同正实数的算术和几何均值时, 发现算术均值总是大于几何均值。(例如, 当 $x=4$ 和 $y=6$ 时, 有 $5=(4+6)/2 > \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{24}$ 。)能否证明这个不等式恒为真?

Extra Example 解 要证明当 x 和 y 是不同正实数时 $(x+y)/2 > \sqrt{xy}$, 可进行回溯, 构造一系列等价的不等式(请读者来证明每对相邻的不等式都是等价的)。这些等价的不等式是:

$$\begin{aligned}(x+y)/2 &> \sqrt{xy}, & (x+y)^2/4 &> xy \\ (x+y)^2 &> 4xy, & x^2 + 2xy + y^2 &> 4xy \\ x^2 - 2xy + y^2 &> 0, & (x-y)^2 &> 0\end{aligned}$$

由于当 $x \neq y$ 时, $(x-y)^2 > 0$, 所以最后一个不等式为真。由于所有这些不等式都等价, 所以当 $x \neq y$ 时, $(x+y)/2 > \sqrt{xy}$ 。一旦构造了这个证明, 就能轻而易举地构造使用前推的证明。现在给出这个证明。

假设 x 和 y 是两个不同实数, 那么 $(x-y)^2 > 0$, 因为非零实数的平方是正的。由于 $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$, 这意味着 $x^2 - 2xy + y^2 > 0$ 。两边同时加 $4xy$, 得 $x^2 + 2xy + y^2 > 4xy$ 。因为 $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$, 因此 $(x+y)^2 > 4xy$, 两边同时除以 4 得, $(x+y)^2/4 > xy$ 。最后, 两边同时开平方(因为不等式两边都是正的, 开方有保序性)得 $(x+y)/2 > \sqrt{xy}$ 。得到, 如果 x 和 y 是两个不同实数, 那么它们的算术均值 $(x+y)/2$ 大于它们的几何均值 $\sqrt{xy}$ 。 ■

例 15 假定甲、乙两人玩游戏, 轮流从最初有 15 块石头的堆中每次取 1、2 或 3 块石头。取最后一块石头的人赢得游戏。证明: 无论乙如何取, 先取的甲都能赢得游戏。

解 为了证明甲总能赢得游戏, 进行回溯。在最后一步, 如果石头堆中剩下 1、2 或 3 块石头, 甲就能获胜。如果乙不得不从有 4 块石头的堆中取石头, 就迫使乙留下 1、2 或 3 块石头。因此, 甲要获胜的一种方法是在倒数第二步, 应该给乙留下 4 块石头。当乙不得不从 8 块石头的堆中取石头时, 此后就会留下 5、6 或 7 块石头, 甲再取石头后就能留下 4 块石头。因此, 为使乙留下 5、6 或 7 块石头, 甲就要在倒数第三步给乙留下 8 块石头。这意味着当轮到甲取时还有 9、10 或 11 块石头。同样, 当甲走第一步时, 应该留下 12 块石头。把这个论证倒过来就证明了无论乙如何取, 甲总是有石头取, 所以甲赢得游戏。这些步骤依次给乙留下 12、8 和 4 块石头。 ■

改造现有证明 用于证明语句方法的很好思路是利用现有的证明。一个现有的证明时常适合于证明一个新结果。即使不是这样, 这个现有证明想法的一部分也是有帮助的。因为现有证明为新证明提供了线索, 你应该去阅读和理解在学习过程中遇到的这些证明。例 16 对这个过程进行了说明。

例 16 在 1.6 节例 10 中证明了 $\sqrt{2}$ 是无理数。现在推测 $\sqrt{3}$ 是无理数。我们能够改造在 1.6 节例 10 的证明来证明 $\sqrt{3}$ 是无理数的吗?

Extra Example 解 为改造在 1.6 节例 10 的证明, 开始先模仿这个证明的步骤。但要用 $\sqrt{3}$ 代替 $\sqrt{2}$ 。首

先, 假设 $\sqrt{3} = c/d$, 这里分数 c/d 是既约的。等式的两端平方得到 $3 = c^2/d^2$ 。因此, $3d^2 = c^2$ 。类似在 1.6 节例 10 中由等式 $2b^2 = a^2$ 证明 2 是 a 和 b 的公因子的方法, 用这个等式能证明 3 一定是 c 和 d 的公因子吗?(回忆如果 t/s 是整数, 则整数 s 是整数 t 的因子。一个整数 n 是偶

数，当且仅当2是 n 的因子。)这里我们仅勾画一些剩下的证明。因为3是 c^2 的因子，它也必然是 c 的因子。并且，因为3是 c 的因子，9就是 c^2 的因子，这意味着9是 $3d^2$ 的因子。因此3是 d^2 的因子，这意味着3是 d 的因子。因而3是 c 和 d 的因子，这是矛盾的。之后添加这些步骤的理由，通过改造 $\sqrt{2}$ 是无理数的证明，将能证明 $\sqrt{3}$ 是无理数。注意：这个证明可以推广到 $\sqrt{n}$ 是无理数，每当 n 是一个非完全平方的正整数。证毕。■

当你遇到要证明一个新理论时，一个好的途径是寻找现有的可以改造的证明，尤其是当新理论与你已经证明过的理论相似时。

1.7.6 寻找反例

在1.5节，介绍了应用反例证明某些语句是错的。当面对一个推测，你一定首先试图去证明这个猜测，如果你的尝试没有成功，你就要试图找到一个反例。如果你不能找到反例，你就一定要再试图证明这个语句。无论如何，寻找反例都是相当重要的方法，它时常能提供对问题的领悟。下面用一些例子说明反例的作用。

例17 在1.6节例14中，通过寻找反例证明了语句“每个正整数都是两个整数的平方和”为假。也就是说，有正整数不能写成两个整数的平方和。尽管不能写出每一个正整数作为两个整数平方和，也许我们能写出每一个正整数作为三个整数平方和。也就是语句“每个正整数都是三个整数的平方和”为真为假呢？

Extra Example 解 因为我们知道并不是每个正整数都是两个整数的平方和，可能最初怀疑每一个正整数作为三个整数平方和。因此，首先寻找反例。也就是说，证明语句“每个正整数都是三个整数的平方和”为假，如果能够找到一个特殊的整数不是三个整数的平方和。为寻找反例，试着写出可满足语句条件的连续的正整数。可以发现 $1=0^2+0^2+1^2$ ， $2=0^2+1^2+1^2$ ， $3=1^2+1^2+1^2$ ， $4=0^2+0^2+2^2$ ， $5=0^2+1^2+2^2$ ， $6=1^2+1^2+2^2$ ，但无法找到方法将7写为三个整数的平方和。要证明7是一个反例，请注意可用的不超过7的平方数只有0、1或4，而三个项(每项为0、1或4)相加却得不出7，所以7是一个反例。得到结论：语句“每个正整数都是三个整数的平方和”为假。

我们已经证明了并不是每个正整数都是三个整数的平方和，下一个问题要问是不是每个正整数都是四个整数的平方和。一些实验提供了证据，答案是对的。例如， $7=1^2+1^2+1^2+2^2$ ， $25=4^2+2^2+2^2+1^2$ 和 $87=9^2+2^2+1^2+1^2$ 。这个产生猜测：“每个正整数都是四个整数的平方和”是真的。对于证明参见[R05]。■

1.7.7 行动证明策略

仿佛数学事实是刻在石头上的，一般认为数学是这样。数学教科书(包括这本书的绝大部分)规范地提出定理和它的证明。而在数学中的介绍不揭示发现的过程。这个过程以探讨概念和例子、提问题、创造猜测和企图通过证明或者通过反例解决一些猜测。这些是数学中日常的工作。相信或者不信，在教科书中所讲授的材料都是以这个方式原始地展开。

人们基于许多类型的可能证据创造猜想。为能够识别可能的模式，特殊情况下的考试能够导致猜想。改变已知定理的假设和结论也能导致似是而非的猜测。其次，猜测也建立在直觉和结果所持有的信念的基础上。无论怎样，猜测产生了，一旦它被明确描述，目标就是证明或者驳斥它。当数学家确信猜测是真的，他们就会努力寻找证明；如果他们不能找到证明，他们就会寻找反例。当他们不能找到反例时，他们又会转回来再次试图证明猜测。尽管许多猜测很快被解决，而一些猜测要抵制数百年的攻击，这导致数学新内容的发展。在以后的章节中将提到几个著名的猜想。

1.7.8 填充

Extra Example 通过对棋盘填充的简要研究，能够说明证明策略的一些方面。研究棋盘的填充是快速发现和证明许多不同结果的很有效方法，而这些证明用到了各种各样的证明方法。在这个方面也几乎创造了无穷多的猜想和研究。首先，需要定义一些术语。一个棋盘是一个由水平

和垂直线分成同样大小方块组成的矩形。跳棋游戏是在8行和8列的木板上进行；这个板称为标准棋盘，如图1-2所示。在这一节，用术语**镶板**指任意矩形大小的棋盘，而且棋盘的一部分包含删除一个或更多个方格组成。一个**骨牌**是一块长方形，由两个方格组成，如图1-3所示。当它的所有方格由不重叠的骨牌覆盖，而没有骨牌悬垂在镶板上，我们说一个镶板由骨牌所填充。现在研究一些有关用骨牌填充镶板的结果。

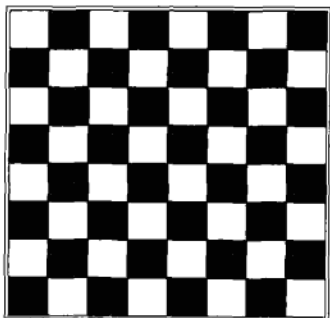


图 1-2 标准棋盘

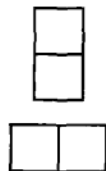


图 1-3 两种骨牌

例 18 我们能用骨牌填充标准棋盘吗？

解 我们找到许多用骨牌填充标准棋盘的方法。例如，可以水平放32块骨牌填充它，如图1-4所示。这样填充的存在性完成了一个构造性的存在证明。当然，做这个填充还有大量其他的方法。可以在板上垂直放32块骨牌，或者水平地和垂直地填充它。但对于一个构造性存在证明需要找到仅仅一个这样的填充就可以。

例 19 我们能填充从标准棋盘中去掉四个角的方格之一得到的镶板吗？

解 为了回答这个问题，注意一个标准棋盘有64个方格，去掉一个方块这样由63个方格产生一个镶板。现在假设能够填充一个从一个标准棋盘中去掉一个角的方格的镶板。因为每一个骨牌盖住两个方格，又没有两个骨牌重叠，没有骨牌悬垂在板上，所以板上一定有偶数个方格。因此，可以用归谬证明法证明去掉一个方格的标准棋盘不能用骨牌填充，因为这样一个板有奇数个方格。

现在考虑一个棘手的情况。

例 20 去掉标准棋盘中左上角和右下角方格得到的镶板，如图1-5所示，能填充这个镶板吗？

解 去掉标准棋盘中两个方格得到的镶板包含 $64 - 2 = 62$ 个方格。因为62是偶数，不能很快排除去掉左上角和右下角方格的标准棋盘填充的存在性，不像例19，排除了去掉一个方格的标准棋盘用骨牌填充的存在性。试图构造这个镶板的填充，读者应该企图的第一个方法一定是成功地放骨牌。然而，无论怎么试验，都不能找到这样的填充。因为我们的努力不能产生一个填充，所以得出一个猜测：填充不存在。

我们一定要试图证明填充不存在，然而证明显示：成功地在镶板上放骨牌已经到了穷途末路。为构造这样的证明，不得不考虑出现的所有可能情况，就像我们做过的成功地放骨牌的所有可能选择一样。例如，覆盖第一行第二栏中的方格有两种选择，而旁边是去掉的左角上方格。我们能用水平放置的填充或者垂直

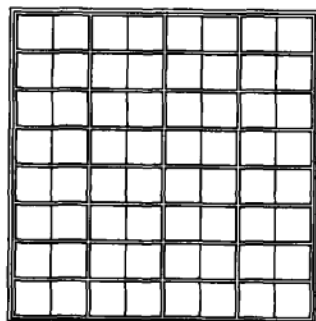


图 1-4 填充标准棋盘

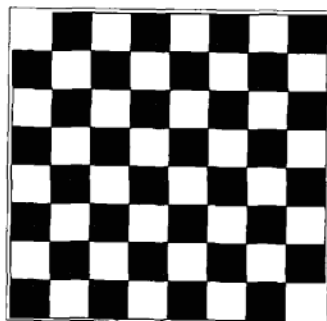


图 1-5 去掉左上角和右下角方格的标准棋盘

放置的填充。这两种选择的每一种都会导致进一步的选择，等等。对于一个人来说，这个并不要很久，就能看到这不是卓有成效的解决计划，尽管计算机通过穷举能够完成这样的证明(练习 11 要求你完成这样的证明，不能填充一个去掉对角的 4×4 棋盘)。

现在需要另一个方法。或许有一个比较容易的方法证明不存在去掉两个对角的填充。正如许多证明，一个关键的观察能启发我们。我们给棋盘的方格涂上颜色，用来改变白和黑方格，如图 1-2 所示。观察得到，对这样镶板的填充，一个骨牌覆盖一个白方格和一个黑方格。其次注意到，这样的镶板白色方格和黑色方格数量不等。我们能用这样的观察通过归谬证明来证明：一个去掉两个对角的标标准棋盘不能用骨牌填充。现在给出这个证明。

证 假如能用骨牌对去掉两个对角的标标准棋盘填充。注意到去掉两个对角的标标准棋盘包含 $64 - 2 = 62$ 个方块。它可以用 $62/2 = 31$ 个骨牌填充。在这个填充中，每个骨牌盖住一个白的和一个黑的方格。因此，这个填充盖住 31 个白的和 31 个黑的方格。然而，当去掉两个对角方格时，或者保留 32 块白的、30 块黑的，或者保留 30 块白的、32 块黑的。这驳斥了能用骨牌覆盖去掉两个对角的标标准棋盘的假设，完成证明。 ■

我们还能用除骨牌之外的其他类型的块来填充。代替骨牌，研究沿着它们的边来连接构建的全等正方形这样相同形状的块来填充。这样的块被称为是多方块。这个术语是由数学家所罗门·戈洛姆在 1953 年杜撰的，他是一本娱乐书籍的作者 [Go94]。两个多方块用同样数量的方形，如果通过旋转和/或翻动四角之一而得到另一个，则将考虑它们相同。例如，有两种类型的三格板(见图 1-6)，它是由三个边连接的正方形组成的多方块。三格板的一种类型是直三格板，它有三个水平连接的正方形；另一个是右三格板，像字母 L 的形状，如果有必要，翻动和/或旋转它。这里将研究用直三格板填充棋盘。

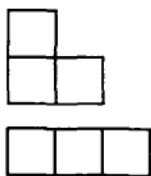


图 1-6 一个右三格板和一个直三格板

例 21 你能用直三格板填充标准棋盘吗？

解 标准棋盘含有 64 个方格，每一个三格板覆盖三个方格。因此，如果三格板填充了一个镶板，镶板的方格数量一定是 3 的倍数。因为 64 不是 3 的倍数，所以三格板不能覆盖 8×8 棋盘。 ■

下面的例 22，考虑了用直三格板填充去掉一个角的标准棋盘问题。

例 22 我们能用直三格板填充去掉四个角的任一个角的标准棋盘吗？一个 8×8 棋盘去掉一个角后包含 $64 - 1 = 63$ 个方格。用直三格板填充任一个去掉一个角的棋盘其四种情况的任一种情况都要用 $63/3 = 21$ 个直三格板。然而当我们试验时，不能找到一个直三格板填充任一个去掉一个角的四种情况的任一种情况。由穷举证明显示这个没有希望。我们能改造例 20 的证明来证明这样的填充不存在吗？

解 我们将给棋盘的方格涂上颜色，企图改造在例 20 给出的归谬证明法证明：应用骨牌填充去掉对角的标标准棋盘是不可能的。因为用直三格板而不是骨牌，我们用三种颜色区分方格而不是两种颜色，如图 1-7 所示。注意到在这个着色中有 21 个灰色方格，21 个黑色方格，22 个白色方格。其次，做一个重要的观察，一个直三格板覆盖棋盘的三个方格，它覆盖一个灰色的、一个黑色的和一个白色的方格。然后注意到三个颜色的每一个都出现在一个角的方格中。于是，在一般没有去掉的时候，可以假设轮换颜色，使去掉的方格是灰色的。因此假设留下的板包含 20 个灰色方格，21 个黑色方格，22 个白色方格。

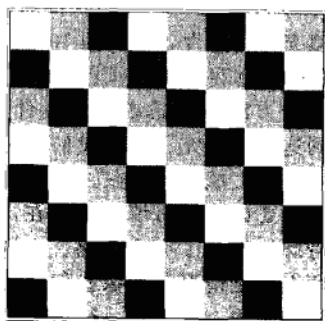


图 1-7 用三种颜色对删除对角的标标准棋盘方格着色

如果能用直三格板填充这块镶板，那么将用 $63/3=21$ 个直三格板。这些直三格板覆盖 21 个灰色方格，21 个黑色方格，21 个白色方格。这与这个镶板包含 20 个灰色方格，21 个黑色方格，22 个白色方格矛盾。因此不能用直三格板填充这个镶板。 ■

1.7.9 未解决问题的作用

在数学中，许多进展是人们在试图解决著名的但尚未解决的问题中而获得的。在过去的 20 年中，许多未解决的问题最后被解决，比如数论中 300 多年前产生的一个猜想的证明。这个猜想断言被称为费尔马大定理的语句为真。

定理 1 费尔马大定理 只要 n 是满足 $n>2$ 的整数，方程

$$x^n + y^n = z^n$$

就没有满足 $xyz \neq 0$ 的整数解 x 、 y 和 z 。

 **注意** 方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 有无穷多个整数解 x 、 y 和 z 。这些解称为毕达哥拉斯三元组[⊖]，对应于具有整数边长的直角三角形的边长。

这个问题有一段很有意思的典故。在 17 世纪，费尔马在一本丢番图的著作的空白处匆匆写道，他有了“巧妙的证明”：当 n 是大于 2 的整数时， $x^n + y^n = z^n$ 没有非平凡的整数解。但他从来没有发表过这个证明（费尔马几乎没有发表过任何东西），在他死后留下的文章中也找不到任何证明。数学家们花了 300 年寻找这个证明却没有成功，尽管许多人相信能找到相对简单的证明。（特殊情形的证明，比如欧拉的当 $n=3$ 时情形的证明和费尔马本人的 $n=4$ 情形的证明，已经找到。）年复一年，少数有声望的数学家认为他们证明了这个定理。在 19 世纪，这些失败的尝试之一导致了所谓代数数论的数论分支的发展。直到 20 世纪 90 年代，当安德鲁·怀尔斯（Adrew Wiles）采用从所谓椭圆曲线论的深奥数论领域中最近发展的思想来证明费尔马大定理时，才找到了几百页长的高等数学的正确证明。从公共电视台 Nova 系列的节目中可以看出，利用这个强有力的理论来寻找费尔马大定理的证明，怀尔斯找了将近 10 年！（感兴趣的读者可以查阅 [Ro05] 来了解关于费尔马大定理的更多信息和关于这个问题及其解决的其他参考资料。）

下面我们给出一个未解决问题，这个问题描述很简单，但却很难求解。

 **例 23 $3x+1$ 猜想** 设 $f(x)$ 是把偶数 x 转换成 $x/2$ 、把奇数 x 转换成 $3x+1$ 的变换。有个著名的猜想（有时称为 $3x+1$ 猜想）说：对所有正整数 x 来说，当反复地应用变换 T 时，最终会得到整数 1。例如，从 $x=13$ 开始，发现 $T(13)=3 \cdot 13+1=40$ ， $T(40)=40/2=20$ ， $T(20)=20/2=10$ ， $T(10)=10/2=5$ ， $T(5)=3 \cdot 5+1=16$ ， $T(16)=8$ ， $T(8)=4$ ， $T(4)=2$ ， $T(2)=1$ 。对于直到 $5.6 \cdot 10^{13}$ 的所有整数都验证了 $3x+1$ 猜想。

$3x+1$ 猜想具有有趣的历史，从 20 世纪 50 年代以来就吸引了数学家们的注意力。这个猜想被多次提出，具有许多其他名称，包括：Collatz 问题、Hasse 算法、Ulam 问题、Syracuse 问题以及 Kakutani 问题等。许多数学家抛开原有工作来花时间解决这个猜想。这引起一则笑话，说这个问题是旨在减缓美国数学研究的阴谋的一部分。参见 Jeffrey Lagarias 的文章 [La85] 来了解对这个问题有意思的讨论以及试图解决这个问题的数学家们所发现的结果。 ■

1.7.10 其他证明方法

本章介绍了证明中使用的基本方法，也描述了如何利用这些方法来证明各种结果。在第 2 章，将用这些证明方法证明有关集合、函数、算法和数论的结果。在这些定理中，将证明著名的停机定理，即存在不能用任何过程来解决的问题。但除了这些讨论过的方法之外还有许多重要的证明方法。2.4 节会介绍康托尔对角化方法，用来证明关于无穷集大小的结果。第 3 章介绍组合证明的概念，用来证明采用计数论证的结果。读者应当注意已经有相关书籍专门描述本节讨论的内容，包括乔治·波利亚（George Polya）的许多优秀著作 ([Po61], [Po71], [Po90])。

⊖ 也叫做勾股数组。——译者注

最后, 请注意: 本书没有给出在数学中能够用于证明定理的步骤。这是一个不存在这样步骤的深奥的数理逻辑定理。

练习

1. 证明: 当 n 是 $1 \leq n \leq 4$ 的正整数时, 有 $n^2 + 1 \geq 2^n$ 。
2. 证明: 若 x 和 y 都是实数, 则 $\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$ 。[提示: 使用分情形证明, 两种情形分别对应于 $x \geq y$ 和 $x < y$ 。]
3. 证明三角不等式: 若 x 和 y 都是实数, 则 $|x| + |y| \geq |x + y|$ (其中 $|x|$ 表示 x 的绝对值, 若 $x \geq 0$ 则它等于 x , 若 $x < 0$ 则它等于 $-x$)。
4. 证明: 存在 100 个连续的不是完全平方的正整数。你的证明是构造性的还是非构造性的?
5. 证明: 存在一对连续的整数, 其中一个整数是完全平方的, 另一个是完全立方的。
6. 证明或驳斥: 存在有理数 x 和无理数 y , 使得 x^y 是无理数。
7. 证明下列每一个命题均可用于表达这样的事实: 存在一个唯一的元素 x 使得 $P(x)$ 为真。(注意, 这等同于命题 $\exists! x P(x)$ 。)
 a) $\exists x \forall y (P(y) \leftrightarrow x = y)$ b) $\exists x P(x) \wedge \forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y)$
 c) $\exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \rightarrow x = y))$
8. 假定 a 和 b 是奇数且 $a \neq b$ 。证明: 存在唯一的整数 c 满足 $|a - c| = |b - c|$ 。
9. 证明: 若 n 是奇数, 则存在唯一的整数 k , 使得 n 是 $k - 2$ 和 $k + 3$ 之和。
10. 证明: 给定实数 x , 存在唯一的数 n 和 ϵ 使得 $x = n - \epsilon$, n 是整数且 $0 \leq \epsilon < 1$ 。
11. 两个整数 x 和 y 的调和均值是 $\frac{2xy}{x+y}$ 。通过计算不同成对正整数的调和均值和几何均值, 形成关于这两种均值相对大小的猜想并证明之。
- *12. 在黑板上写数字 $1, 2, \dots, 2n$, 其中 n 是奇数, 从中挑出两个数 j 和 k , 在黑板上写 $|j - k|$ 并擦掉 j 和 k 。继续这个过程, 直到黑板上只写一个整数为止。证明: 这个整数必为奇数。
13. 已知如下有关十进制数问题的一个猜想: 一个整数 4 次方的十进制最后位数字。用分情形方法证明你的猜想。
14. 证明: 不存在正整数 n 使得 $n^2 + n^3 = 100$ 。
15. 证明: 方程 $x^4 + y^4 = 625$ 没有整数解 x 和 y 。
16. 改造 1.6 节例 4 的证明, 证明: 如果 a, b, c 是正整数, $n = abc$, 则 $a \leq \sqrt[3]{n}$, $b \leq \sqrt[3]{n}$ 或者 $c \leq \sqrt[3]{n}$ 。
17. 证明: 任两个有理数之间都有一个无理数。
- *18. 设 $S = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$, 其中 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 和 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 是排序的两个不同正实数序列, 各自有 n 个元素。
 a) 证明: 在这两个序列的所有排序当中, 当两个序列都排序 (使得每个序列中的元素都以非降序排列) 时, S 取最大值。
 b) 证明: 在这两个序列的所有排序当中, 当一个序列排成非降顺序, 另一个序列排成非升顺序时, S 取最小值。
19. 对下列这些整数验证 $3x + 1$ 猜想:
 a) 6 b) 7 c) 17 d) 21
20. 证明或驳斥: 你能用骨牌填充去掉两个相邻角 (也就是说不是对角) 的标准棋盘。
21. 证明: 你能用骨牌填充带有偶数个方格的长方形棋盘。
22. 通过穷举法证明: 用骨牌填充去掉两个对角的 4×4 棋盘是不存在的。[提示: 首先证明假设去掉左上角和右下角的方格。棋盘原始方格是 1 到 16, 从第一行开始, 在这一行向右移动, 然后在第 2 行最左边的方格开始向右移动, 等等。去掉方块 1 和 16。开始证明时, 注意到 2 或者被一个水平放置的骨牌覆盖, 这个骨牌覆盖 2 和 3, 或者这个骨牌垂直地覆盖 2 和 6。分别考虑每一种情况, 证明产生的所有子情况。]
23. 证明: 从一个 8×8 的棋盘去掉两块白的和两块黑的方格 (颜色如教材所示), 用骨牌填充棋盘留下的方格是不可能的。
- *24. a) 画五种不同的格板, 每一个格板都是由四个角的四个格组成的。
 b) 证明或驳斥, 用五种格板中的每种不同格板, 可填充标准棋盘。

关键术语和结果

术语

命题：一个或为真或为假的语句。

命题变元：代表一个命题的变量。

真值：真或假。

$\neg p$ (p 的否定)：与 p 的真值相反的命题。

逻辑运算符：用于组合命题的运算符。

复合命题：用逻辑运算符组合命题构造出的命题。

真值表：显示命题真值的表。

$p \vee q$ (p 和 q 的析取)：除非 p 和 q 均为假，否则为真的命题。

$p \wedge q$ (p 和 q 的合取)：只有在 p 和 q 均为真时才为真的命题。

$p \oplus q$ (p 和 q 的异或)：当 p 和 q 中恰有一个为真时才为真的命题。

$p \rightarrow q$ (p 蕴含 q)：只有在 p 为真而 q 为假时才为假的命题。

$p \rightarrow q$ 的逆蕴含：条件语句 $q \rightarrow p$ 。

$p \rightarrow q$ 的倒置蕴含：条件语句 $\neg q \rightarrow \neg p$ 。

$p \rightarrow q$ 的反蕴含：条件语句 $\neg p \rightarrow \neg q$ 。

$p \leftrightarrow q$ (双蕴含)：只有 p 和 q 真值相同时才为真的命题。

字位：0 或 1。

布尔变量：以 0 或 1 为值的变量。

字位运算：一个或多个字位上的运算。

位串：一串字位。

按位运算：位串上的运算，对一个位串的字位和另一位串的对应该字位作运算。

永真式：永远为真的复合命题。

矛盾：永远为假的复合命题。

可能式：有时成真有时为假的复合命题。

一致复合命题：为变量赋真值，使所有这些命题为真的复合命题。

复合命题的逻辑等价：总有同样真值的复合命题。

谓词：句子中代表主语属性的那部分。

命题函数：包含一个或多个变量的语句，当每一个变量被指派或被量词约束时，就变成命题。

论域：命题函数中变量可能取到的所有值。

$\exists x P(x)$ ($P(x)$ 的存在量化)：当且仅当在论域中存在一个 x 使 $P(x)$ 为真时才为真的命题。

$\forall x P(x)$ ($P(x)$ 的全称量化)：当且仅当论域中的所有 x 值 $P(x)$ 均为真时才为真的命题。

逻辑等价表达式：无论应用什么样的命题函数和论域，真值都相同的表达式。

自由变量：命题函数中未绑定的变量。

绑定变量：被量化的变量。

量词的作用域：语句中量词所绑定变量的那部分。

论证：一连串的命题。

论证形式：包含命题变量的一连串的复合命题。

前提：论证或论证形式中最后命题以外的命题。

结论：论证或论证形式中最后的命题。

有效论证形式：包含命题变量的一连串的复合命题，它的所有前提为真蕴含结论为真。

有效论证：具有有效论证形式的论证。

推理规则：用于示范论证有效的有效论证形式。

谬误：作为一个推理规则，常常(有时或者更一般)用于不正确推理的无效论证形式。

循环论证或偷用论题：一步或多个步骤基于待证明命题的正确性的推理。

定理：可以证明为真的数学断言。

猜想：真值未知的数学断言。

证明：对定理为真的说明。

公理：常作为证明定理的基础，并假设为真的命题。

引理：用来证明其他定理的简单定理。

推论：可以作为刚刚证明的定理的后果而被证明的命题。

空证明：基于 p 为假的事实而对蕴含式 $p \rightarrow q$ 的证明。

平凡证明：基于 q 为真的事实而对蕴含式 $p \rightarrow q$ 的证明。

直接证明：通过证明当 p 为真时 q 必然为真而进行的对蕴含式 $p \rightarrow q$ 的证明。

反证法：通过证明当 q 是假时 p 一定是假，来证明 $p \rightarrow q$ 为真。

归谬证明：基于蕴含式 $\neg p \rightarrow q$ 的真值(其中 q 是矛盾式)而对命题 p 为真的证明。

穷举证明：通过检查一系列的所有情况所建立的结果得到的证明。

分情形证明：把情况分解为覆盖所有可能的单独情况的证明。

不失一般性：假定一个证明可以通过减少需要证明的情况来证明的一个法则。

反例：使得 $P(x)$ 为假的元素 x 。

构造性的存在性证明：证明具有特定性质的元素存在，通过显式的方式来寻找这样的元素。

非构造性的存在性证明：证明具有特定性质的元素存在，但不是显式地寻找这样的元素。

有理数：可以表示为两个整数 p 和 q (其中 $q \neq 0$) 之比的数。

唯一性证明：证明具有特定性质的元素唯一地存在。

结果

1.2 节表 1-15、表 1-16、表 1-17 给出的逻辑等价关系。

德摩根定律

命题演算的推理规则

带量词命题的推理规则

复习题

1. a) 定义命题的否定。
b) “这是一门烦人的课程”的否定是什么？
2. a) (用真值表) 定义命题 p 和 q 的析取、合取、异或、蕴含和双蕴含。
b) “今晚我去看电影”和“我将完成离散数学作业”的析取、合取、异或、蕴含和双蕴含是什么？
3. a) 给出至少五种用汉语表达条件语句 $p \rightarrow q$ 的方式。
b) 定义条件语句的逆蕴含和倒置。
c) “如果明天阳光明媚，我将到林中散步。”给出此条件语句的逆蕴含和倒置。
4. a) 两个命题逻辑等价的含义是什么？
b) 描述证明两个复合命题逻辑等价的不同方法。
c) 至少用两种方法证明 $\neg p \vee (r \rightarrow \neg q)$ 和 $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$ 等价。
5. (依赖于 1.2 节的练习)
a) 给出一个真值表，解释怎样用析取范式构造一个复合命题使其真值表就是你给出的真值表。
b) 解释为什么 a) 说明运算符 $\wedge$, $\vee$ 和 $\neg$ 是功能完全的。
c) 是否有一个运算符使得只含这个运算符的集合是功能完全的？
6. 什么是谓词 $P(x)$ 的全称和存在量化？什么是它们的否定？
7. a) 量化语句 $\exists x \forall y P(x, y)$ 和 $\forall y \exists x P(x, y)$ 的区别何在？其中 $P(x, y)$ 为谓词。
b) 给出谓词 $P(x, y)$ 的一个实例，使 $\exists x \forall y P(x, y)$ 和 $\forall y \exists x P(x, y)$ 有不同的真值。
8. 描述在命题逻辑中，有效论证是什么意思，并且证明：“如果地球是平的，那你就能行驶到地球边缘”；“你不能行驶到地球边缘”，因此，“地球不是平的”是有效论证。
9. 用推理规则证明：如果前提“所有的斑马都有条纹”，“马克是一匹斑马”是真的，那么结论“马克有条纹”是真的。
10. a) 描述一下条件语句 $p \rightarrow q$ 的直接证明、反证法和归谬证明分别是什么意思。
b) 分别给出语句：“若 n 是偶数，则 $n+4$ 是偶数”的直接证明、反证法和归谬证明。

11. a) 描述证明双条件语句 $p \leftrightarrow q$ 的一种方式。
b) 证明命题：“整数 $3n+2$ 是奇数当且仅当整数 $9n+5$ 是偶数，其中 n 是整数”。
12. 为了证明语句 p_1 , p_2 , p_3 和 p_4 都是等价的，证明条件语句 $p_4 \rightarrow p_2$, $p_3 \rightarrow p_1$ 和 $p_1 \rightarrow p_2$ 都是有效的，这样做是否充分？若不充分，则给出可用来证明这四个语句都是等价的另外一组条件语句。
13. a) 假定形如 $\forall x P(x)$ 的条件语句为假。如何可以证明它为假？
b) 证明语句“对每个正整数 n 来说， $n^2 \geq 2n$ ”为假。
14. 构造性与非构造性存在性证明之间的差异是什么？对这两种证明分别举一个例子。
15. 证明：存在唯一的元素 x 使得 $P(x)$ 为真（其中 $P(x)$ 是命题函数）。这种证明的基础是什么？
16. 阐释如何用分情形证明以下绝对值的结果：对所有实数 x 和 y ，有 $|xy| = |x||y|$ 。

补充练习

1. 令 p 为命题“我将完成本书中的每一道练习”， q 为命题“这门课程我将得‘A’”。将下列各项表示为 p 和 q 的组合。
 - a) 只有完成本书中的每道练习，这门课程我才能得‘A’。
 - b) 这门课程我将得‘A’，而且我将完成本书中每一道练习。
 - c) 或者这门课程我将得‘A’，或者我不完成本书中的每一道练习。
 - d) 这门课程我得‘A’的充分必要条件是完成本书中每一道练习。
2. 求复合命题 $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge \neg r)$ 的真值表。
3. 证明下列命题为永真式。
 - a) $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$
 - b) $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$
4. 给出下列条件语句的逆蕴含、反蕴含和倒置。
 - a) 如果今天下雨，我就开车上班。
 - b) 如果 $|x| = x$ ，那么 $x \geq 0$ 。
 - c) 若 n 大于 3，那么 n^2 大于 9。
5. 给出条件语句 $p \rightarrow q$ 的逆的反蕴含、反的反蕴含、倒置。
6. 给出条件语句 $p \rightarrow q$ 的逆的逆蕴含、反的逆蕴含、倒置的逆蕴含。
7. 用命题变量 p , q , r 和 s 构造一个复合命题，使它在这些命题变量中恰有三个为真时取真值，其他情况下为假。
8. 证明下列语句是不一致的：“如果 Sergei 拿到工作签证，那他将获得签约奖金。”“如果 Sergei 拿到工作签证，那他将拿到高薪。”“如果 Sergei 拿到签约奖金，那他将拿不到高薪。”“Sergei 拿到了工作签证。”
9. 证明下列语句是不一致的：“如果 Miranda 没有修过离散数学课程，那她将不能毕业。”“如果 Miranda 不能毕业，那她将不能胜任那份工作。”“如果 Miranda 读了这本书，那她将能胜任那份工作。”“Miranda 没有修过离散数学课程，但她读过这本书。”
10. 假定你在 1.1 节例 18 中描述的“武士和流氓”共居的岛上遇见三个人 A、B 和 C。如果 A 说“我是流氓，B 是骑士”且 B 说“我们三人中恰有一人是骑士”，那么 A、B 和 C 分别是哪种人？
11. (摘自 [Sm78]) 假定在一个岛上住着三类人：武士、流氓和普通人。武士总是说真话，流氓总是说谎话，普通人有时说谎话有时说真话。侦探为了找出罪犯，询问了岛上的三个人 Amy、Brenda 和 Claire。侦探知道三人中有一人犯罪了，但不知是哪个人。他们也知道罪犯是一个骑士，另两个人不是骑士。此外，侦探还记录了如下供述。Amy 说：“我是清白的。”Brenda 说：“Amy 说的是真的。”Claire 说：“Brenda 不是普通人。”经过分析，侦探找到了罪犯。他是谁？
12. 证明：如果 S 是一个命题，这里 S 是条件命题：“若 S 是真的，则独角兽是存在的”，那么“独角兽是存在的”是真的。证明 S 不能是一个命题（这是著名的罗素悖论）。
13. 证明：假设“牙齿仙女是真人”，“真理仙女就不是真人”，结论“你能在彩虹尽头找到金子”是有效论证。能证明结论是真的吗？
14. 令 $P(x)$ 为语句“学生 x 会微积分”， $Q(y)$ 为“ y 班上有个学生会微积分”。用 $P(x)$ 和 $Q(y)$ 的量化表示下列各项。
 - a) 某个学生会微积分。
 - b) 不是每个学生都会微积分。
 - c) 每个班上都有一个学生会微积分。
 - d) 每个班上的每个学生都会微积分。

e) 至少有一个班没有学生会微积分。

15. 令 $P(m, n)$ 为语句“ m 除尽 n ”, 其中变量 m 和 n 的论域均为正整数集合。给出下列命题的真值。

- a) $P(4, 5)$ b) $P(2, 4)$ c) $\forall m \forall n P(m, n)$
d) $\exists m \forall n P(m, n)$ e) $\exists n \forall m P(m, n)$ f) $\forall n P(1, n)$

16. 确定量词的论域, 使语句 $\exists x \exists y (x \neq y) \wedge \forall z ((z \neq x) \wedge (z \neq y))$ 为真。

17. 确定量词的论域, 使语句 $\exists x \exists y (x \neq y) \wedge \forall z ((z = x) \wedge (z = y))$ 为假。

18. 用量词表达语句“没有人有多于三个的祖母”, 使用命题函数 $G(x, y)$, 它表示“ x 是 y 的祖母。”

19. 用量词表达语句“每个人恰有两个亲生父母”, 使用命题函数 $P(x, y)$, 它表示“ x 是 y 的亲生父母。”

20. 量词 $\exists_n$ 表示“有准确的 n ”, 因此 $\exists_n x P(x)$ 意思是在论域中存在准确的 n 值, 使 $P(x)$ 为真。由所有实数组成论域, 决定以下命题的真值:

- a) $\exists_0 x (x^2 = -1)$ b) $\exists_1 x (|x| = 0)$ c) $\exists_2 x (x^2 = 2)$ d) $\exists_3 x (x = |x|)$

21. 用存在量词、全称量词和命题逻辑表示以下每一个命题, 这里 $\exists_n$ 如练习 20 定义:

- a) $\exists_0 x P(x)$ b) $\exists_1 x P(x)$ c) $\exists_2 x P(x)$ d) $\exists_3 x P(x)$

22. 令 $P(x, y)$ 为命题函数。证明蕴含关系 $\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$ 为永真式。

23. 令 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 为命题函数。求证 $\exists x (P(x) \rightarrow Q(x))$ 和 $\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)$ 有同样的真值。

24. 如果 $\forall y \exists x P(x, y)$ 为真, $\exists x \forall y P(x, y)$ 是否必定也为真?

25. 如果 $\forall x \exists y P(x, y)$ 为真, $\exists x \forall y P(x, y)$ 是否必定也为真?

26. 找出下列语句的否定。

- a) 如果今天下雪, 那么我明天去滑雪。 b) 班上每个人都懂数学归纳法。
c) 班上有些学生不喜欢离散数学。 d) 每堂数学课都有某个学生上着课就睡着了。

27. 用量词表示“班上每个学生都选修过数学学院每个系的某门课”。

28. 用量词表示“在美国某学院的校园里有座楼的每间屋子都漆成了白色”。

29. 用唯一量词表示以下每一个语句: “在这个学校里, 恰有一个数学班, 而本班只有一个学生”, 然后再用量词而不用唯一量词表示这个语句。

30. 描述一个推理规则, 可用它来证明论域中恰有两个元素 x 和 y 使得 $P(x)$ 和 $P(y)$ 为真。用汉语句子表达这个推理规则。

31. 使用推理规则证明如果前提 $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ 、 $\forall x (Q(x) \rightarrow R(x))$ 和 $\neg R(a)$ 为真, 那么结论 $\neg P(a)$ 为真, 其中 a 在论域中。

32. 证明: 若 x^3 是无理数, 则 x 是无理数。

33. 证明: 若 x 是无理数且 $x \geq 0$, 则 $\sqrt{x}$ 是无理数。

34. 证明: 给定一个非负整数 n , 存在一个唯一的非负整数 m 使得 $m^2 \leq n < (m+1)^2$ 。

35. 证明: 存在一个整数 m 使得 $m^2 > 10^{1000}$ 。你的证明是构造性的还是非构造性的?

36. 证明存在这样的正整数: 它可以被以两种不同的方式写成正整数的立方和。使用计算机或计算器来完成。

37. 反驳如下命题: 每个正整数均可表示为 8 个非负整数的立方和。

38. 反驳如下命题: 每个正整数均可表示为至多两个非负整数的平方与一个非负整数的立方的和。

39. 反驳如下命题: 每个正整数均可表示为 36 个非负整数的 5 次方的和。

40. 假设以下定理的真实性: 对任何不是完全平方数的正整数 n , $\sqrt{n}$ 是个无理数。由此证明: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 是无理数。

计算机题目

按给定的输入和输出写程序。

- 已知命题 p 和 q 的真值, 求它们的合取、析取、异或、条件语句和双条件语句的真值。
- 已知长度为 n 的两个位串, 求它们的按位 AND、按位 OR 及按位 XOR。
- 已知模糊逻辑中命题 p 和 q 的真值, 求 p 和 q 的析取和合取的真值(参看 1.1 节练习 21)。

*4. 给定正整数 m, n , 交互玩 Chomp 游戏。

*5. 给出部分棋盘, 用各种不同类型的四角填充, 包括骨牌、两种类型的三格板和大四角。

计算和研究

使用一个计算程序或你已完成的程序做下面的练习。

1. 找出这样的正整数：它不是 9 个不同的正整数的立方和。
2. 找出大于 79 的这样的正整数：它不是 18 个正整数的四次方的和。
3. 找出尽可能多这样的正整数：它可以用正整数的立方和来表示。用两种不同的方式，对 1729 使用这个性质。
- *4. 试图找出不同初始设置曲奇饼的 Chomp 游戏的获胜策略。
- *5. 寻找棋盘和带有四角的部分棋盘的填充。

写作题目

用课本以外的资料，按下列要求写成短文。

1. 讨论如下逻辑悖论：克里特人 Epimenides 的悖论(又叫说谎者悖论)、Jourdain 的纸牌悖论以及理发师悖论。说明如何解决它们。
2. 描述模糊逻辑怎样用于实际应用。参考为一般读者写的一本或几本最近出版的模糊逻辑书。
3. 描述由 Layman Allen 提出的“WFF'N PROOF, The Game of Modern Logic”的基本规则。给出 WFF'N PROOF 中包含的一些博弈示例。
4. 读一些卡罗尔(Lewis Carroll)关于符号逻辑的作品。详细描述他用于表示逻辑论证和推理规则的一些模型。
5. 扩展 1.3 节对 Prolog 的讨论，进一步解释 Prolog 如何使用消解。
6. 讨论在计算逻辑中使用的一些技术，包括 Skolem 的规则。
7. “自动定理证明”是使用计算机来机械地证明定理的任务。讨论自动定理证明的目标和应用，以及在开发自动定理证明器上取得的进步。
8. 讨论如何使用 DNA 计算来求解可满足性问题的示例。
9. 讨论有关 Chomp 游戏已知的获胜策略。
10. 描述在乔治波利亚有关推理的著作中讨论的各种证明策略，包括[Po62]、[Po71]和[Po90]。
11. 举例说明在[Go94]和[Ma91]中描述的几个有关四角棋盘的填充问题和结果。

基本结构：集合、函数、数列与求和

离散数学的许多内容用以表示离散对象，研究离散结构。许多重要的离散结构是由所谓的对象集构建的集合。用联接词构建集合之间的离散结构，这些无序的对象集被广泛地用于计数；关系，代表着对象之间联系的有序对集合。图，是节点集和连接节点的边的集合；有限状态机用于模型计算机。这些是后续章节研究的一些主题。

函数的概念在离散数学中是非常重要的。函数把集合中的每一个元素准确地指派给集合的一个元素。函数对整个离散数学起着重要的作用，用以表示算法的计算复杂性，研究的集合的大小，计算对象的数量，以及无数其他的应用方式。排序和字符串是特殊类型的函数。

2.1 集合

2.1.1 引言

我们将在这一部分学习基本的离散结构，以及由此而得到的各种各样的离散结构，换言之，集合。集合用于把对象组合在一起。通常在一个集合中的对象都有相似的性质。例如，你们学校中目前在册的所有学生可以组成一个集合。同样，任何学校正选修一门离散数学课的学生可以组成一个集合。此外，你们学校在册学生中正选修一门离散数学课的所有学生组成一个集合，这个集合可以从上述两个集合中取共同的元素得到。像集合那样，集合语言是以构造的方式来研究的工具。现在提供集合的一种定义。这是一种直观的定义，不属于正规的集合定义。

定义 1 集合是一组无序的对象。

注意，我们并没有说明对象是什么就已经使用这个术语了。以对象的直观概念为基础把集合描述为一组对象，这是德国数学家康托尔 1895 年首先给出的。从集合的这一直观定义得到的理论导出悖论，即逻辑上的不一致性。这是英国哲学家罗素 1902 年提出的。以称为公理的基本假设作为起点建立集合理论可以避免逻辑上的不一致。我们将不展开集合理论的公理描述，而是使用康托尔的称为朴素集合理论的原始描述，这是因为本书中考虑的所有集合均可用康托尔的原始理论处理而无不一致性。

定义 2 集合中的对象也称为该集合的元素，或成员。也说集合包含它的元素。

现在介绍用于描述集合成员的方法。我们记 $a \in A$ ，也就是表示 a 是集合 A 中一个元素。而 $a \notin A$ 就表示 a 不是集合 A 中的一个元素。注意，小写字母通常用于表示集合中的元素。

有几种方式描述集合，一种方式是在可能的情况下一一列出集合中的元素。我们采用在花括号之间列出所有元素的方法。例如， $\{a, b, c, d\}$ 表示含 4 个元素 a, b, c 和 d 的集合。

例 1 英语字母中所有元音字母的集合 V 可以表示为 $V = \{a, e, i, o, u\}$ 。 ■

例 2 小于 10 的正奇数集合 O 可以表示为 $O = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 。 ■

例 3 尽管集合常用来表示一组具有共同性质的元素，但有的集合中的元素表面上看起来毫不相干。例如，集合 $\{a, 2, \text{Fred}, \text{New Jerseg}\}$ 包含了 4 个元素： $a, 2, \text{Fred}$ 和 New Jerseg 。 ■

有时用花括号表示集合但并不列出它的所有元素。先列出集合中的某些元素，然后当元素的一般形式很明显时就用省略号($\dots$)表示。

例 4 小于 100 的正整数集合可以表示为 $\{1, 2, 3, \dots, 99\}$ 。 ■

描述集合的另一种方式是使用集合的构造符号。我们给出作为集合的成员必须具有的性质，以此来刻画集合的所有元素。例如，小于 10 的所有奇数的集合 O 可以写成

$$O = \{x \mid x \text{ 是小于 } 10 \text{ 的正奇数}\}$$

或者，指定正整数集合的一个范围，如

$$O = \{x \in \mathbf{Z}^+ \mid x \text{ 为奇数}, x < 10\}$$

当无法给出集合所有元素时常用这一类方法来描述集合。例如，所有正有理数集合，可以被写成

$$\mathbf{Q}^+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x = p/q, p, q \text{ 为正整数}\}$$

这些集合用黑体表示，它们在离散数学中发挥着重要的作用：

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \text{ 自然数集}$$

$$\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}, \text{ 整数集}$$

$$\mathbf{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}, \text{ 正整数集}$$

$$\mathbf{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z}, \text{ 和 } q \neq 0\}, \text{ 有理数集}$$

$$\mathbf{R}, \text{ 实数集}$$

(注意，一些人认为 0 不是自然数成员，所以当你阅读其他书籍的时候要检查自然数成员的术语是怎样用的。)

集合可以包含其他的集合，以例 5 为例说明。

例 5 集合 $\{\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}\}$ 包含了 4 个元素，其中每一个都是集合。这 4 个元素是： $\mathbf{N}$ ，自然数集； $\mathbf{Z}$ ，整数集； $\mathbf{Q}$ ，有理数集，以及 $\mathbf{R}$ ，实数集。 ■

注意 计算机科学中的数据类型或类型的概念建立在集合这一概念之上。数据类型或类型是集合的一个称号，它是连同对集合中的对象实施操作的集合。例如，布尔是集合 $\{0, 1\}$ 的一个称号，连同其上一个或多个元素实施运算，像并且、或者和非。

由于许多数学语句需要断定两组以不同方式描述的对象实际上是同一个集合，我们需要理解两个集合相等的含义。

定义 3 两个集合相等当且仅当它们有同样的元素。也就是说，若集合 A 和集合 B 是相等的，当且仅当 $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ 。如果 A 和 B 是相等的集合，记为 $A=B$ 。

例 6 集合 $\{1, 3, 5\}$ 和 $\{3, 5, 1\}$ 相等，因为它们有同样的元素。注意集合中元素的顺序不起作用，还要注意同一个元素被列出来不止一次也没关系。所以 $\{1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5\}$ 和 $\{1, 3, 5\}$ 是同一个集合，因为它们有同样的元素。 ■

还可以用文氏图形象地表示集合。文氏图(或称维恩图)是以英国数学家 John Venn 的名字命名的，他在 1881 年介绍了这种图的使用。我们所考虑的所有对象的集合 U ，称为全集。在文氏图中全集用长方形表示。在长方形内部，圆或其他几何图形用于表示集合，有时用点来表示集合中特定的元素。文氏图常用于表示集合之间的关系。我们用下面的例子解释怎样使用文氏图。

例 7 画一个表示英语字母中元音字母集合 V 的文氏图。

解 画一个长方形表示全集 U ，也就是 26 个英文字母的集合。在长方形中画一个圆表示集合 V ，在圆中用点表示集合 V 的元素(见图 2-1)。 ■

有一个不含任何元素的特殊集合，称为空集，用 $\emptyset$ 表示。空集也可以用 $\{\}$ 表示(这是用花括号内列出所有元素的方式表示集合)。经常具有一定性质的元素组成的集合其实就是空集。例如，大于自身的平方的所有正整数的集合是空集。只有一个元素的集合叫做单元元素集合。

通常的错误是把空集 $\emptyset$ 与单元元素集合 $\{\emptyset\}$ 搞混。集合 $\{\emptyset\}$ 的唯一元素是空集本身！记住这个区别的一个形象比喻是考虑计算机文件系统中的文件夹。空集可以比做一个空的文件夹，包含一个空集合的集合可以比作一个文件夹里只有一个空的文件夹文件。

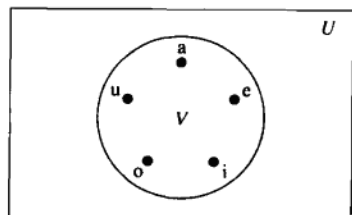


图 2-1 元音字母集合的文氏图

定义 4 集合 A 是集合 B 的子集当且仅当 A 的每个元素也是 B 的元素。我们用记号 $A \subseteq B$ 表

示 A 是 B 的子集。

我们看到, $A \subseteq B$ 当且仅当量化语句

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$

为真。

例 8 小于 10 的所有正奇数的集合, 是小于 10 的所有正整数的集合的子集。有理数集是实数集的一个子集。你们学校主修计算机科学的学生的集合是你们学校全体学生集合的子集。集合{全体中国人民}是{全体中国人民}的子集(也就是说, 它本身)。

定理 1 表明, 每个非空集合 S 都至少有两个子集, 一个是空集, 一个是集合 S 本身, 即 $\emptyset \subseteq S$ 和 $S \subseteq S$ 。

定理 1 对于任意集合 S , (i) $\emptyset \subseteq S$ 和 (ii) $S \subseteq S$ 。

证 这里证明 (i), (ii) 留作练习。

令 S 为一个集合。为了证明 $\emptyset \subseteq S$, 必须证明 $\forall x(x \in \emptyset \rightarrow x \in S)$ 为真。因为空集没有元素, 所以 $x \in \emptyset$ 总是假。因此 $x \in \emptyset \rightarrow x \in S$ 总是真, 因为其假设为假, 并且具有假的假设的条件语句为真。即 $\forall x(x \in \emptyset \rightarrow x \in S)$ 为真。这完成了 (i) 的证明。这是空证明的示例。

如果我们要强调集合 A 是集合 B 的子集, 但 $A \neq B$, 就写成 $A \subset B$, 并说 A 是 B 的真子集。若 $A \subset B$ 是真的, 则必有 $A \subseteq B$, 且必有 B 的某个元素 x 不属于 A , 即如果

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$$

为真, 那么 A 是 B 的真子集。文氏图可以用来表示集合 A 是集合 B 的子集。我们把全集 U 画成长方形。在这长方形中画一表示 B 的圆。由于 A 是 B 的子集, 我们在代表 B 的圆内画表示 A 的圆。图 2-2 所示就是这一关系。

证明两个集合具有相同元素的一个方法是证明它们互为另一个的子集。换言之, 可以证明, 如果 A 和 B 均为集合, 且 $A \subseteq B$ 和 $B \subseteq A$, 则 $A = B$ 。实践表明, 这是证明集合相等的一种有用的方式。也就是说, $A = B$, 其中 A 和 B 是集合, 当且仅当 $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$ 和 $\forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$; 或者 A 和 B 等价, 当且仅当 $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ 。

集合可以以其他集合作为它的成员。例如, 下面列出的就是这样的集合:

$$A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}, B = \{x \mid x \text{ 是集合 } \{a, b\} \text{ 的子集}\}$$

注意, 这两个集合相等, 即 $A = B$ 。同时注意 $\{a\} \in A$, 但是 $a \notin A$ 。

集合广泛用于计数问题。这类问题需要讨论集合的大小。

定义 5 令 S 为集合。若 S 中恰有 n 个不同的元素, n 是非负整数, 就说 S 是有限集合, 而 n 是 S 的基数。 S 的基数用 $|S|$ 表示。

例 9 令 A 为小于 10 的正奇数集合, 则 $|A| = 5$ 。

例 10 令 S 为英语字母集, 那么 $|S| = 26$ 。

例 11 由于空集没有元素, 所以 $|\emptyset| = 0$ 。

我们对不是有限的集合也有兴趣。

定义 6 如果一个集合不是有限的, 就说它是无限的。

例 12 正整数集合是无限的。

无限集合的基数将在 2.4 节讨论。

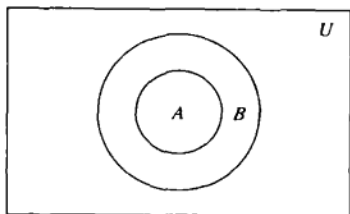


图 2-2 表示 A 是 B 的子集的文氏图

2.1.2 幂集合

许多问题都需要检查一个集合的元素所有可能的组合, 看它们是否具有某种性质。为了考虑集合 S 中元素所有可能的组合, 我们构造一个新集合, 它以 S 的所有子集作为它的元素。

定义 7 已知集合 S , S 的幂集合是集合 S 所有子集的集合。 S 的幂集合用 $P(S)$ 表示。

例 13 集合 $\{0, 1, 2\}$ 的幂集合是什么?

解 幂集合 $P(\{0, 1, 2\})$ 是 $\{0, 1, 2\}$ 所有子集的集合。因此

$$P(\{0, 1, 2\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

注意, 空集和 $\{0, 1, 2\}$ 自身都是这个子集集合的成员。

例 14 空集的幂集合是什么? 集合 $\{\emptyset\}$ 的幂集合是什么?

解 空集只有一个子集, 这就是它自己。因此

$$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

集合 $\{\emptyset\}$ 有两个子集, 即 $\emptyset$ 和集合 $\{\emptyset\}$ 自身。于是

$$P(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

如果一个集合有 n 个元素, 那么它的幂集合有 2^n 个元素。我们将在本书以后的几节中以不同的方式证明这一事实。

2.1.3 笛卡儿积

一组元素中元素的次序往往是重要的。由于集合是无序的, 必须用不同的结构来表示有序的一组元素, 这个结构由有序 n 元组来提供。

定义 8 有序 n 元组 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 是以 a_1 为第 1 个元素, a_2 为第 2 个元素, $\dots$, a_n 为第 n 个元素的有序组。

只有在两个有序 n 元组每一对对应的元素都相等时, 它们才相等。换言之, $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 当且仅当对于 $i=1, 2, \dots, n$, $a_i = b_i$ 。二元组特称为有序偶。有序偶 (a, b) 和 (c, d) 相等当且仅当 $a=c$ 和 $b=d$ 。注意, 除非 $a=b$, 否则 (a, b) 和 (b, a) 不相等。

在随后几章中将要学习的许多离散结构均以 René Descartes 命名的集合的笛卡儿积的概念为基础。我们先定义两个集合的笛卡儿积。

定义 9 令 A 和 B 为集合。 A 和 B 的笛卡儿积用 $A \times B$ 表示, 是所有有序偶 (a, b) 的集合, 其中 $a \in A$ 而 $b \in B$ 。于是

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

例 15 令 A 为某大学所有学生的集合, B 表示该大学开设的所有课程的集合。 A 和 B 的笛卡儿积 $A \times B$ 是什么?

解 笛卡儿积 $A \times B$ 由形为 (a, b) 的所有有序偶组成, 其中 a 是学生, 而 b 是该校开的一门课。集合 $A \times B$ 可以用来表示该校学生选课的所有可能情况。

例 16 $A = \{1, 2\}$ 和 $B = \{a, b, c\}$ 的笛卡儿积是什么?

解 笛卡儿积 $A \times B$ 是

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

笛卡儿积 $A \times B$ 的子集 R 称为从集合 A 到集合 B 的关系。 R 的元素是有序偶, 其中第一个元素属于 A , 第二个元素属于 B 。例如, $R = \{(a, 0), (a, 1), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (c, 0), (c, 3)\}$ 是从集合 $\{a, b, c\}$ 到集合 $\{0, 1, 2, 3\}$ 的关系。我们将在第 5 章详细研究关系。

除非 $A = \emptyset$ 或 $B = \emptyset$ (这样 $A \times B = \emptyset$) 或除非 $A = B$, 否则 $A \times B$ 和 $B \times A$ 不相等。这在下例中说明。

例 17 证明笛卡儿积 $B \times A$ 和 $A \times B$ 不相等, 其中 A 和 B 为例 16 中的集合。

解 笛卡儿积 $B \times A$ 是

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

这不等于例 16 中得到的 $A \times B$ 。

对于两个以上的集合也可以定义笛卡儿积。

定义 10 集合 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的笛卡儿积用 $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ 表示, 这是有序 n 元组

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 的集合, 其中对于 $i=1, 2, \dots, n, a_i \in A_i$. 换言之,

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, i=1, 2, \dots, n\}$$

例 18 笛卡儿积 $A \times B \times C$ 是什么, 其中 $A=\{0, 1\}, B=\{1, 2\}, C=\{0, 1, 2\}$?

解 这一笛卡儿积由所有有序三元组 (a, b, c) 组成, 其中 $a \in A, b \in B, c \in C$. 因此,

$$A \times B \times C = \{(0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 2), (0, 2, 0), (0, 2, 1), (0, 2, 2), \\ (1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 0), (1, 2, 1), (1, 2, 2)\}$$

2.1.4 使用带量词的集合符号

有时我们在符号中显式说明语句的论域。特别地, $\forall x \in S(P(x))$ 表示 $P(x)$ 的全称量化, 其中论域是集合 S . 换句话说, $\forall x \in S(P(x))$ 是 $\forall x(x \in S \rightarrow P(x))$ 的简写。类似地, $\exists x \in S(P(x))$ 表示 $P(x)$ 的存在量化, 论域是 S . 也就是说, $\exists x \in S(P(x))$ 是 $\exists x(x \in S \wedge P(x))$ 的简写。

例 19 语句 $\forall x \in \mathbf{R}(x^2 \geq 0)$ 和 $\exists x \in \mathbf{Z}(x^2 = 1)$ 的含义是什么?

解 语句 $\forall x \in \mathbf{R}(x^2 \geq 0)$ 声称对任意实数 $x, x^2 \geq 0$. 这个语句可以表达为“任意实数的平方是非负的”。这是真语句。

语句 $\exists x \in \mathbf{Z}(x^2 = 1)$ 声称存在一个整数 x 使得 $x^2 = 1$. 这个语句可以表达为“有某个整数, 其平方是 1”。这个语句也是真语句, 因为 $x=1$ 就是这样一个整数 (-1 也是)。

2.1.5 量词的真值集合

我们把集合理论和谓词逻辑的概念结合在一起。给定谓词 P 和论域 D , 定义 P 的真值集合: D 中元素 x 使 $P(x)$ 为真的元素组成的集合。 $P(x)$ 的真值集合记为 $\{x \in D \mid P(x)\}$ 。

例 20 谓词 $P(x), Q(x), R(x)$ 的真值集合都是什么? 其中论域是整数集合, $P(x)$ 是“ $|x|=1$ ”, $Q(x)$ 是“ $x^2=2$ ”, $R(x)$ 是“ $|x|=x$ ”。

解 P 的真值集合 $\{x \in \mathbf{Z} \mid |x|=1\}$ 是满足 $|x|=1$ 的整数集合。因为当 $x=1$ 或 $x=-1$ 时, $|x|=1$, 而没有其他的整数。 P 的真值集合是 $\{-1, 1\}$ 。

Q 的真值集合 $\{x \in \mathbf{Z} \mid x^2=2\}$ 是满足 $x^2=2$ 的整数集合。因为没有整数 x 满足 $x^2=2$, 所以这是个空集。

R 的真值集合 $\{x \in \mathbf{Z} \mid |x|=x\}$ 是满足 $|x|=x$ 的整数集合。因为当且仅当 $x \geq 0$ 时, $|x|=x$, 所以 R 的真值集合是 $\mathbf{N}$, 非负整数集合。

注意, 在域 U 上 $\forall x P(x)$ 为真当且仅当 P 的真值集合是集合 U 。同样, 域 U 上 $\exists x P(x)$ 为真, 当且仅当 P 的真值集合非空。

练习

1. 列出下述集合的成员。

a) $\{x \mid x \text{ 是使得 } x^2=1 \text{ 的实数}\}$

b) $\{x \mid x \text{ 是小于 } 12 \text{ 的正整数}\}$

c) $\{x \mid x \text{ 是某个整数的平方且 } x < 100\}$

d) $\{x \mid x \text{ 是整数且 } x^2=2\}$

2. 判断下面每对集合是否相等。

a) $\{1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5\}, \{5, 3, 1\}$

b) $\{\{1\}\}, \{1, \{1\}\}$

c) $\emptyset, \{\emptyset\}$

3. 对下面的每个集合, 判断 2 是否为它的元素。

a) $\{x \in \mathbf{R} \mid x \text{ 是大于 } 1 \text{ 的整数}\}$

b) $\{x \in \mathbf{R} \mid x \text{ 是某整数的平方}\}$

c) $\{2, \{2\}\}$

d) $\{\{2\}, \{\{2\}\}\}$

e) $\{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$

f) $\{\{\{2\}\}\}$

4. 判断下列语句是真还是假。

a) $0 \in \emptyset$

b) $\emptyset \in \{0\}$

c) $\{0\} \subset \emptyset$

d) $\emptyset \subset \{0\}$

e) $\{0\} \in \{0\}$

f) $\{0\} \subset \{0\}$

g) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$

5. 判断下列语句是真还是假。

a) $x \in \{x\}$

b) $\{x\} \subseteq \{x\}$

c) $\{x\} \in \{x\}$

d) $\{x\} \in \{\{x\}\}$

e) $\emptyset \subseteq \{x\}$

f) $\emptyset \in \{x\}$

6. 用文氏图说明在一年所有的月份集合中不包含字母 R 的所有月份的集合。
7. 用文氏图说明集合关系 $A \subset B$ 和 $B \subset C$ 。
8. 假定 A 、 B 和 C 为集合，且 $A \subseteq B$ ， $B \subseteq C$ 。证明 $A \subseteq C$ 。
9. 下列各集合的基数是什么？
- a) $\{a\}$ b) $\{\{a\}\}$ c) $\{a, \{a\}\}$ d) $\{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$
10. 找出下列各集合的幂集合。
- a) $\{a\}$ b) $\{a, b\}$ c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
11. 下列各集合各有多少个元素？
- a) $P(\{a, b, \{a, b\}\})$ b) $P(\{\emptyset, a, \{a\}, \{\{a\}\}\})$ c) $P(P(\emptyset))$
12. 令 $A = \{a, b, c, d\}$ ， $B = \{y, z\}$ 。求
- a) $A \times B$ b) $B \times A$
13. 什么是笛卡儿积 $A \times B \times C$ ，其中 A 是所有航线的集合， B 和 C 都是所有美国城市的集合。
14. 令 A 为集合，求证 $\emptyset \times A = A \times \emptyset = \emptyset$ 。
15. 如果 A 有 m 个元素， B 有 n 个元素， $A \times B$ 有多少个元素？
16. 解释为什么 $A \times B \times C$ 和 $(A \times B) \times C$ 不同。
17. 将下列量化表达式翻译成汉语句子并确定其真值。
- a) $\forall x \in \mathbb{R}(x^2 \neq -1)$ b) $\exists x \in \mathbb{Z}(x^2 = 2)$ c) $\forall x \in \mathbb{Z}(x^2 > 0)$ d) $\exists x \in \mathbb{R}(x^2 = x)$
18. 给出以下各个谓词的真值集合，这里域是整数集合。
- a) $P(x)$ ：“ $x^2 < 3$ ” b) $Q(x)$ ：“ $x^2 > x$ ” c) $R(x)$ ：“ $2x + 1 = 0$ ”
- *19. 证明：如果有序偶 (a, b) 可以用集合术语定义为 $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ ，那么 $(a, b) = (c, d)$ 当且仅当 $a = c$ 且 $b = d$ 。[提示：首先证明 $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ 当且仅当 $a = c$ 且 $b = d$ 。]
- *20. 给出可以列出有限集合所有子集的步骤。

2.2 集合运算

2.2.1 引言

两个集合可以以许多不同的方式结合在一起。例如，从学校主修数学课的集合和主修计算机科学课的集合入手，可以构成主修数学或计算机科学的学生集合，既主修数学又主修计算机科学的学生集合，不主修数学的学生集合，等等。

定义 1 令 A 和 B 为集合。 A 和 B 的并集用 $A \cup B$ 表示，这是 A 或 B 中或同时在 A 和 B 中的元素组成的集合。

元素 x 属于 A 和 B 的并集当且仅当 x 属于 A 或 x 属于 B 。这说明

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

图 2-3 中的文氏图表示集合 A 和 B 的并集。代表集合 A 的圆圈内和代表 B 的圆圈内的阴影区域表示 A 和 B 的并集。

我们将给出集合并集的例子。

例 1 集合 $\{1, 3, 5\}$ 和集合 $\{1, 2, 3\}$ 的并集是集合 $\{1, 2, 3, 5\}$ ，即

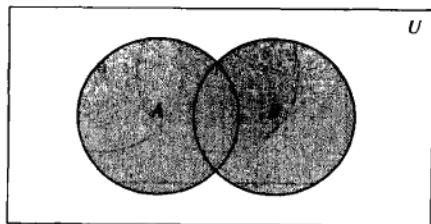
$$\{1, 3, 5\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 5\}$$

例 2 学校主修计算机科学的学生集合与主修数学的学生集合的并集，是或主修数学或主修计算机科学或同时主修这两门课的学生的集合。

定义 2 令 A 和 B 为集合。 A 和 B 的交集用 $A \cap B$ 表示，这是既在 A 中又在 B 中的那些元素的集合。

元素 x 属于集合 A 和 B 的交集当且仅当 x 属于 A 而且 x 属于 B 。这说明

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$



$A \cup B$ 为阴影区

图 2-3 表示 A 和 B 并集的文氏图

图 2-4 中的文氏图表示集合 A 和 B 的交集。同时在代表 A 和 B 的两个圆之内的阴影区域表示 A 和 B 的交集。

我们给出交集的几个例子。

例 3 集合 $\{1, 3, 5\}$ 和 $\{1, 2, 3\}$ 的交集是 $\{1, 3\}$ ，即 $\{1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 3\}$ 。

例 4 学校所有主修计算机科学的学生集合与所有主修数学的学生集合，是所有既主修计算机科学又主修数学的学生的集合。

定义 3 如果两个集合的交集为空集，就说它们不相交。

例 5 令 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 而 $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ 。因为 $A \cap B = \emptyset$ ，所以 A 和 B 不相交。

还有其他组合集合的重要方式。

定义 4 令 A 和 B 为集合。 A 和 B 的差集用 $A - B$ 表示，这是包含只属于 A 而不属于 B 的所有元素的集合。 A 和 B 的差集也称为 B 对于 A 的补集。

元素 x 属于 A 和 B 的差集当且仅当 $x \in A$ 且 $x \notin B$ ，这说明

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

图 2-5 中的文氏图表示集合 A 和 B 的差集。既在表示集合 A 的圆圈内部也在表示集合 B 的圆圈外部的阴影区域表示 $A - B$ 。

让我们举几个差集的例子。

例 6 集合 $\{1, 3, 5\}$ 和 $\{1, 2, 3\}$ 的差集是 $\{5\}$ ；即 $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$ 。这不同于 $\{1, 2, 3\}$ 和 $\{1, 3, 5\}$ 的差集 $\{2\}$ 。

例 7 学校主修计算机科学的学生集合和主修数学的学生集合的差集是学校主修计算机科学但不主修数学的学生集合。

一旦指定了全集 U ，就可以定义集合的补集。

定义 5 令 U 为全集。集合 A 的补集用 $\bar{A}$ 表示，这是 A 对于 U 的补集。集合 A 的补集是 $U - A$ 。

元素 x 属于 $\bar{A}$ 当且仅当 $x \notin A$ 。这说明

$$\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}$$

图 2-6 中代表集合 A 的圆圈外面的阴影区域表示 $\bar{A}$ 。

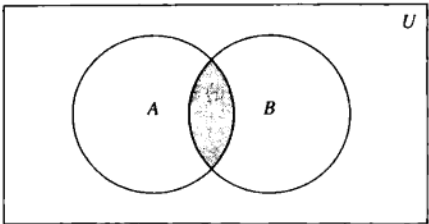


图 2-4 表示 A 和 B 交集的文氏图

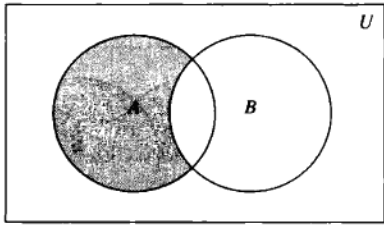


图 2-5 A 和 B 的差集的文氏图

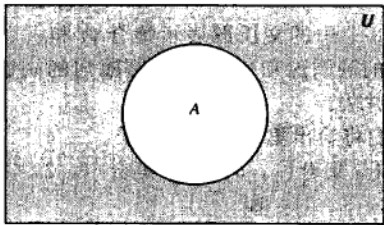


图 2-6 集合 A 的补集的文氏图

我们举几个补集的例子。

例 8 令 $A = \{a, e, i, o, u\}$ (全集为英语字母集)。那么

$$\bar{A} = \{b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z\}$$

例 9 令 A 为大于 10 的正整数的集合 (全集为正整数集合)。那么

$$\bar{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

2.2.2 集合恒等式

表 2-1 列出了最重要的集合恒等式。本节将用三种不同的方法证明其中的几个。介绍这些方法是想说明，对一个问题解往往有不同的途径。表中未证明的恒等式留给读者练习。读者应该注意这些集合恒等式和 1.2 节讨论的逻辑等价的相似之处。事实上，这里给出的集合恒等式可以直接由对应的逻辑等价证明。不仅如此，而且这两者都是布尔代数中成立的恒等式的特殊情况。

表 2-1 集合恒等式

等 式	名 称
$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$	恒等律
$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	支配律
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	幂等律
$\overline{(\overline{A})} = A$	补集律
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	交换律
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$	结合律
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	分配律
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	德摩根定律
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	吸收律
$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$	补律

证明集合相等的一种方法是证明两者中任何一个都是另一个的子集。为了证明一个集合是另一个集合的子集，可以通过证明一个元素如果属于第一个集合，必定属于第二个集合。也就是用直接的方法证明。我们将以确立德摩根第二定律为例说明这一方法。

例 10 证明 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ 。

解 为了证明 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ，我们需要证明 $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ 和 $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$ 。

首先，证明 $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ 。假定 $x \in \overline{A \cap B}$ ，根据补的定义， $x \notin A \cap B$ ，由交的定义， $\neg((x \in A) \wedge (x \in B))$ 为真，(由逻辑)用德摩根定律可得 $\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)$ 。因此，根据否定的定义，有 $x \notin A$ 或 $x \notin B$ 。再由补的定义， $x \in \overline{A}$ 或 $x \in \overline{B}$ ；再由并， $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ ，因此，得证 $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ 。

然后，证明 $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$ 。现假设 $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ ；由并的定义， $x \in \overline{A}$ 或 $x \in \overline{B}$ ；用补的定义， $x \in A$ 或 $x \notin B$ ；所以， $\neg(x \in A) \vee (x \in B)$ 为真。(由逻辑)用德摩根定律可得， $\neg(x \in A) \wedge (x \in B)$ 为真。由交的定义， $\neg(x \in A \cap B)$ 成立；由补的定义，由 $x \in \overline{A \cap B}$ ，这表明 $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$ 。由于已证明这两个集合中，一个是另一个的子集，所以，这两个集合相等，即得证恒等。 ■

另一个更简洁的方法是使用集合构造符，如例 11 所示。

例 11 用集合构造符和逻辑等价证明 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ 。

解 下列一串等式提供了这一恒等关系的证明：

$$\begin{aligned}
 \overline{A \cap B} &= \{x \mid x \notin A \cap B\} && \text{根据补的定义} \\
 &= \{x \mid \neg(x \in (A \cap B))\} && \text{根据不属于符号的含义} \\
 &= \{x \mid \neg(x \in A \wedge x \in B)\} && \text{根据交的定义} \\
 &= \{x \mid \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)\} && \text{根据逻辑等价式的德摩根第一定律} \\
 &= \{x \mid x \notin A \vee x \notin B\} && \text{根据不属于符号的含义} \\
 &= \{x \mid x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}\} && \text{根据补的定义} \\
 &= \{x \mid x \in \overline{A} \cup \overline{B}\} && \text{根据并的定义} \\
 &= \overline{A} \cup \overline{B} && \text{根据集合表示的含义}
 \end{aligned}$$

注意，除了补、并、集合成员、集合表示的定义，这个证明还用到了逻辑等价式的德摩根第一定律。 ■

要证明涉及两个以上集合的集合恒等，可以证明恒等式的每一边是另一边的子集，这我们可用例 12 来说明。

例 12 证明表 2-1 中的第一个分配律：对任意集合 A , B 和 C ，证明

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

解 我们将通过说明等式的每一边是另一边的子集来证明这个恒等式。

假定 $x \in A \cap (B \cup C)$ ，那么 $x \in A$ 且 $x \in B \cup C$ 。根据集合并的定义，可得 $x \in A$ 且 $x \in B$ 或 $x \in C$ ；因此， $x \in A$ 且 $x \in B$ 或 $x \in A$ 且 $x \in C$ 。根据交的定义，可知 $x \in A \cap B$ 或 $x \in A \cap C$ ；使用并的定义，可得出 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ；由此 $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。

现在假定 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ，那么，由并的定义， $x \in A \cap B$ 或 $x \in A \cap C$ ；由交的定义，可得 $x \in A$ 且 $x \in B$ 或 $x \in A$ 且 $x \in C$ ；由此可知， $x \in A$ ， $x \in B$ 或 $x \in C$ ；因此，由并的定义可知， $x \in A$ 且 $x \in B \cup C$ 。而且，由交的定义，可得 $x \in A \cap (B \cup C)$ ；最终得出 $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$ 。这便完成了恒等式的证明。 ■

还可以用成员表来证明集合恒等式。我们考虑一个元素可能属于的集合的每一种组合，并证明在同样的集合组合中的元素属于恒等式两边的集合。用 1 表示元素属于一个集合，用 0 表示元素不属于一个集合（读者应注意成员表和真值表的相似之处）。

例 13 用成员表证明 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ 。

解 表 2-2 给出了这些集合组合的成员表。这表格有 8 行。由于对应于 $A \cap (B \cup C)$ 和 $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ 的两列相同，恒等式有效。 ■

表 2-2 分配性质的成员表

A	B	C	$B \cup C$	$A \cap (B \cup C)$	$A \cap B$	$A \cap C$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

用我们已经证明的这些集合恒等式可以证明其他的集合恒等式。考虑下面的例子。

例 14 令 A, B, C 为集合。证明

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$$

解 我们有

$$\begin{aligned} \overline{A \cup (B \cap C)} &= \bar{A} \cap \overline{(B \cap C)} && \text{由德摩根第一律} \\ &= \bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) && \text{由德摩根第二律} \\ &= (\bar{B} \cup \bar{C}) \cap \bar{A} && \text{由交集的交换律} \\ &= (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A} && \text{由并集的交换律} \end{aligned}$$

2.2.3 扩展的并集和交集

由于集合的并集和交集满足结合律，所以只要 A, B, C 为集合， $A \cup B \cup C$ 和 $A \cap B \cap C$ 均有定义。也就是说，这样表示的含义都是很明确的。我们不需要用括号来指明哪个运算在前，因为 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ 及 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ 。注意 $A \cup B \cup C$ 包含那些至少属于 A, B, C 中一个集合的元素，而 $A \cap B \cap C$ 包含那些属于 A, B, C 全部三个集合的元素。三个集合 A, B, C 的这两种组合如图 2-7 所示。

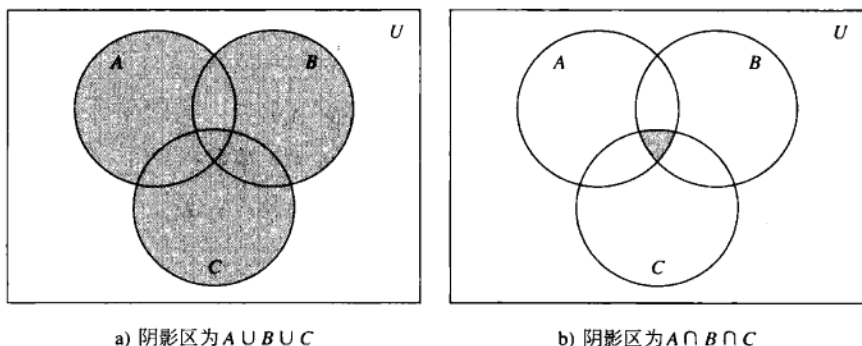


图 2-7 集合 A, B, C 的并集和交集

例 15 令 $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $C = \{0, 3, 6, 9\}$ 。 $A \cup B \cup C$ 和 $A \cap B \cap C$ 是什么集合？

解 $A \cup B \cup C$ 包括那些至少属于 A, B, C 之一的元素。所以

$$A \cup B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$$

集合 $A \cap B \cap C$ 包括那些属于全部三个集合的元素。因此

$$A \cap B \cap C = \{0\}$$

可以考虑任意多个集合的并集和交集。我们采用下面的定义。

定义 6 一组集合的并集是包含那些至少是这组集合中一个集合成员的元素的集合。
用记号

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

表示集合 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的并集。

定义 7 一组集合的交集是包含那些属于这组集合中所有成员集合的元素的集合。
用记号

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$$

表示集合 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的交集。

我们用例 16 说明扩展的并集和交集。

例 16 令 $A_i = \{i, i+1, i+2, \dots\}$ 。那么

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n \{i, i+1, i+2, \dots\} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

而

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n \{i, i+1, i+2, \dots\} = \{n, n+1, n+2, \dots\}$$

我们可以扩展已经介绍的并集和交集到类似的集合。尤其可以使用公式

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

去表示集合 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的并集。类似地，这些集合的交集可以表示为

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

大体上，公式 $\bigcap_{i \in I} A_i$ 和 $\bigcup_{i \in I} A_i$ 分别用于表示对于 $i \in I$ 集合 A_i 的并集和交集。注意，我们这样使用：

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I (x \in A_i)\}$$

和

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I (x \in A_i)\}$$

例 17 对于 $i=1, 2, 3, \dots$ ，集合 $A_i = \{1, 2, 3, \dots, i\}$ 。那么，

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{1, 2, 3, \dots, i\} = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbf{Z}^+$$

和

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{1, 2, 3, \dots, i\} = \{1\}$$

可以看到，这些集合的并集是正整数集，每一个正整数至少属于一个集合，因为整数 n 属于 $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$ ，并集中的每一个元素都是正整数。注意到属于所有的集合的元素只有 1，即这些集合的交集。也就是说， $A_1 = \{1\}$ ，而且 $1 \in A_i (i=1, 2, \dots)$ 。

2.2.4 计算机表示集合的方式

计算机表示集合的方式多种多样。一种办法是把集合的元素无序地存储起来。可是如果这样做，在做集合的并集、交集或差集等运算时会浪费时间，因为这些运算将需要大量的元素检索。我们将要介绍一种利用全集元素的一个任意排序存放元素以表示集合的方法。集合的这种表示法使我们很容易计算集合的组合。

假定全集 U 是有限的（而且大小合适，使 U 的元素个数不超过计算机能使用的内存量）。首先为 U 的元素任意规定一个顺序，例如 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 。于是可以用长度为 n 的位串表示 U 的子集 A ：如果 a_i 属于 A ，则位串中第 i 位是 1；如果 a_i 不属于 A ，则位串中第 i 位是 0。下面的例子阐明了这一方法。

例 18 令 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ，而且 U 的元素从小到大排序，即 $a_i = i$ 。表示 U 中所有奇数的子集、所有偶数的子集和不超过 5 的整数的子集的位串是什么？

解 表示 U 中所有奇数的子集即 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 的位串，其第 1、3、5、7、9 位为 1，其他位为 0，即

$$10 \ 1010 \ 1010$$

（我们已把长度为 10 的位串分成长度为 4 的片段组合以便阅读，因为长位串不易读）。类似地， U 中所有偶数的子集即 $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ ，由位串

$$01 \ 0101 \ 0101$$

表示。 U 中不超过5的所有整数的集合即 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，由位串

$$11\ 1110\ 0000$$

表示。

用位串表示集合便于计算集合的补集、并集、交集和差集。要从表示集合的位串计算它的补集的位串，只需简单地把每个1改为0，每个0改为1，因为 $x \in A$ 当且仅当 $x \notin \bar{A}$ 。注意，当把每个字位看成是真值时，上述运算对应于取每个字位的非，因为1表示真，0表示假。

例 19 我们已经知道集合 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 的位串(全集为 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$)是

$$10\ 1010\ 1010$$

它的补集的位串是什么？

解 用0取代1，用1取代0，即可得到此集合的补集的位串

$$01\ 0101\ 0101$$

这对应着集合 $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ 。

要得到两个集合的并集和交集的位串，我们可以对表示这两个集合的位串按位做布尔运算。只要两个位串的第 i 字位有一个是1，则并集的位串的第 i 位是1，当两个字位都是0时为0。因此，并集的位串是两个集合位串的按位或(bitwise OR)。当两个位串的第 i 字位均为1时，交集的位串第 i 位为1，否则为0。因此交集的位串是两个集合位串的按位与(bitwise AND)。

例 20 集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 和 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 的位串分别是11 1110 0000和10 1010 1010。用位串找出它们的并集和交集。

解 这两个集合的并集的位串是

$$11\ 1110\ 0000 \vee 10\ 1010\ 1010 = 11\ 1110\ 1010$$

它表示的集合是 $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$ 。这两个集合的交集的位串是

$$11\ 1110\ 0000 \wedge 10\ 1010\ 1010 = 10\ 1010\ 0000$$

它表示的集合是 $\{1, 3, 5\}$ 。

练习

1. 令 A 为住在离学校一英里以内的所有学生的集合， B 是走路上学的所有学生的集合。描述一下下列各集合中的学生：

$$\text{a) } A \cap B \qquad \text{b) } A \cup B \qquad \text{c) } A - B \qquad \text{d) } B - A$$

2. 令 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ， $B = \{0, 3, 6\}$ 。求

$$\text{a) } A \cup B \qquad \text{b) } A \cap B \qquad \text{c) } A - B \qquad \text{d) } B - A$$

在练习3~5中，假定 A 是某个未知全集 U 的子集。

3. 证明表2-1中的补集律： $\overline{\bar{A}} = A$ 。

4. 证明表2-1中的支配律：

$$\text{a) } A \cup U = U \qquad \text{b) } A \cap \emptyset = \emptyset$$

5. 证明表2-1中的交换律：

$$\text{a) } A \cup \bar{A} = U \qquad \text{b) } A \cap \bar{A} = \emptyset$$

6. 已知 A 和 B 为两个集合，试证明表2-1中的交换律：

$$\text{a) } A \cup B = B \cup A \qquad \text{b) } A \cap B = B \cap A$$

7. 证明表2-1中的第二个吸收律：如果 A 和 B 为两个集合，那么 $A \cap (A \cup B) = A$ 。

8. 通过以下两种方式证明表2-1中的第一个德摩根律：如果 A 和 B 为两个集合，那么 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ 。

a) 证明两边互为子集 b) 使用成员表

9. 设 A, B, C 为集合。证明 $\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$ 。

a) 用证明等式两边互为子集的办法 b) 用成员表

10. 如果 A 和 B 为集合，证明 $A - B = A \cap \bar{B}$ 。

11. 证明表2-1中的第一个结合律：如果 A, B, C 均为集合，那么 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ 。

12. 证明表2-1中的第二个分配律：如果 A, B, C 均为集合，那么 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 。

13. 令 $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 。求
 a) $A \cap B \cap C$ b) $A \cup B \cup C$ c) $(A \cup B) \cap C$ d) $(A \cap B) \cup C$
14. 画出以下集合 A, B, C, D 的各个组合的文氏图:
 a) $A \cap (B - C)$ b) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ c) $(A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C})$
15. 如果有关集合 A 与 B 的下列性质为真, 你能就 A 和 B 说些什么?
 a) $A \cup B = A$ b) $A \cap B = A$ c) $A - B = A$
 d) $A \cap B = B \cap A$ e) $A - B = B - A$
16. 令 A 和 B 为全集 U 的子集。证明 $A \subseteq B$ 当且仅当 $\bar{B} \subseteq \bar{A}$ 。

集合 A 和 B 的对称差, 用 $A \oplus B$ 表示, 是属于 A 或属于 B 但不同时属于 A 与 B 的元素组成的集合。

17. 求某校主修计算机科学的学生集合与主修数学的学生集合的对称差。
 18. 证明 $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$ 。
 19. 证明: 若 A 是全集 U 的子集, 则
 a) $A \oplus A = \emptyset$ b) $A \oplus \emptyset = A$ c) $A \oplus U = \bar{A}$ d) $A \oplus \bar{A} = U$
20. 如果 $A \oplus B = A$, 你能就集合 A 和 B 说些什么?
 *21. 假定 A, B, C 为集合, 使得 $A \oplus C = B \oplus C$ 。是否必定有 $A = B$?
 22. 若 A, B, C, D 为集合, $(A \oplus B) \oplus (C \oplus D) = (A \oplus D) \oplus (B \oplus C)$ 是否成立?
 *23. 令 $A_i = \{1, 2, 3, \dots, i\}$, $i = 1, 2, 3, \dots$ 。求

a) $\bigcup_{i=1}^n A_i$ b) $\bigcap_{i=1}^n A_i$

24. 令 A_i 为所有长度不超过 i 的非空位串(即长度至少为 1)的集合。求

a) $\bigcup_{i=1}^n A_i$ b) $\bigcap_{i=1}^n A_i$

25. 试求 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 和 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, 如果对于任一正整数 i ,
 a) $A_i = \{-i, -i+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, i-1, i\}$
 b) $A_i = \{-i, i\}$
 c) $A_i = [-i, i]$, 即满足 $-i \leq x \leq i$ 的实数 x 的集合
 d) $A_i = [i, \infty]$, 即满足 $x \geq i$ 的实数 x 的集合

26. 使用上题中的同一个全集, 求下列位串各自代表的集合。
 a) 11 1100 1111 b) 01 0111 1000 c) 10 0000 0001

27. 对应于两个集合之差的位串是什么?

28. 令 $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{b, c, d, g, p, t, v\}$, $C = \{c, e, i, o, u, x, y, z\}$, $D = \{d, e, h, i, n, o, t, u, x, y\}$ 。说明怎样用位串的按位运算求下列集合:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $(A \cup D) \cap (B \cup C)$ d) $A \cup B \cup C \cup D$

29. 集合 A 的后继是 $A \cup \{A\}$ 。求下列集合的后继。

a) $\{1, 2, 3\}$ b) $\emptyset$ c) $\{\emptyset\}$ d) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

有时一个元素在一个无序集中出现的次数也有意义。当同一个元素作为成员可以出现不止一次时, 这个无序元素集就是多重集。符号 $\{m_1 \cdot a_1, m_2 \cdot a_2, \dots, m_r \cdot a_r\}$ 表示的是 a_1 出现 m_1 次, a_2 出现 m_2 次等的多重集。整数 m_i 称为 a_i 的重数, $i = 1, 2, \dots, r$ 。

令 P 和 Q 为多重集, 多重集 P 和 Q 的并集是个多重集, 其中每个元素的重数是该元素在 P 和 Q 中的重数的最大值。 P 和 Q 的交集是个多重集, 其中每个元素的重数是该元素在 P 和 Q 中重数的最小值。 P 和 Q 的差集是个多重集, 其中每个元素的重数是该元素在 P 中的重数减去它在 Q 中的重数, 当然这不能是个负数, 若是负数就以 0 作重数。 P 和 Q 的和集是个多重集, 其中每个元素的重数是该元素在 P 和 Q 中的重数的和, P 和 Q 的并集、交集和差集分别用 $P \cup Q$ 、 $P \cap Q$ 和 $P - Q$ 表示(不要混淆这些运算和集合上的类似运算)。 P 和 Q 的和集用 $P + Q$ 表示。

30. 令 A 和 B 分别为多重集 $\{3 \cdot a, 2 \cdot b, 1 \cdot c\}$ 和 $\{2 \cdot a, 3 \cdot b, 4 \cdot d\}$ 。求

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A - B$ d) $B - A$ e) $A + B$

人工智能中使用模糊集合。全集 U 中每个元素在模糊集合 S 中都有个成员度，即 0 和 1 之间(包括 0 和 1)的实数。模糊集合 S 的表示法是列出其元素及成员度(成员度为 0 的元素不列)。例如，用 $\{0.6 \text{ Alice}, 0.9 \text{ Brian}, 0.4 \text{ Fred}, 0.1 \text{ Oscar}, 0.5 \text{ Rita}\}$ 表示名人集合 F ，说明 F 中 Alice 的成员度为 0.6，Brian 为 0.9，Fred 为 0.4，Oscar 为 0.1，而 Rita 为 0.5(因此这些人里面 Brian 最出名而 Oscar 最不出名)。再假定 R 是富人集合， $R = \{0.4 \text{ Alice}, 0.8 \text{ Brian}, 0.2 \text{ Fred}, 0.9 \text{ Oscar}, 0.7 \text{ Rita}\}$ 。

31. 模糊集合 S 的补是集合 $\bar{S}$ ，元素在 $\bar{S}$ 中的成员度等于 1 减去该元素在 S 中的成员度。求 $\bar{F}$ (不出名者的模糊集合)和 $\bar{R}$ (不富裕者的模糊集合)。
32. 模糊集合 S 和 T 的交集是模糊集合 $S \cap T$ ，其中每个元素的成员度是该元素在 S 和 T 中的成员度的最小值。求既出名又富裕者的模糊集合 $F \cap R$ 。

2.3 函数

2.3.1 引言

在许多情况下我们都会为一个集合的每个元素指派另一个集合(可以就是第一个集合)的一个特定元素。例如，假定对离散数学课的每个学生从 $\{A, B, C, D, F\}$ 中选一个字母作为他的得分。再假定 Adams 的得分是 A ，Chou 的得分是 C ，Goodfriend 的得分是 B ，Rodriguez 的得分是 A ，而 Stevens 的得分是 F 。这一打分如图 2-8 所示。

这种打分就是一个函数。离散数学中函数的概念分外重要。在定义像序列和字符串这样的离散结构时用到函数。函数还用于表示解决一定规模的问题需要的计算机机时。许多计算机程序和子程序被设计用来计算函数值。借助自身定义的函数称为递归函数。

定义 1 令 A 和 B 为非空集合。从 A 到 B 的函数 f 是对元素的一种指派，对 A 的每个元素恰好指派 B 的一个元素。如果 f 指派给 A 中元素 a 的唯一的 B 中元素是 b ，就写成 $f(a) = b$ 。如果 f 是从 A 到 B 的函数，就写成 $f: A \rightarrow B$ 。

注意 函数有时也被称作映射或者变换。

有许多描述函数的方式。有时明确说明指派关系(如图 2-8 所示)，但常用的方式是给出指派公式来定义函数，如 $f(x) = x + 1$ 。有时也用计算机程序来描述函数。

函数 $f: A \rightarrow B$ 也能由从 A 到 B 的关系来定义。见 2.1 节， A 到 B 的关系就是集合 $A \times B$ 的子集。对于 A 到 B 的关系，对每一个 $a \in A$ 的元素都有且仅有一个有序对 (a, b) ，则定义了 A 到 B 的函数 f 。这个函数通过 $f(a) = b$ 来定义。在这个以 a 为第一个元素的关系中， (a, b) 是唯一的有序对。

定义 2 如果 f 是从 A 到 B 的函数，就说 A 是 f 的定义域，而 B 是 f 的伴域。如果 $f(a) = b$ ，就说 b 是 a 的像而 a 是 b 的原像。 A 中元素的所有像元素的集合称为 f 的值域。若 f 是从 A 到 B 的函数，有时也说成 f 把 A 映射到 B 。

图 2-9 表示 A 到 B 的函数。

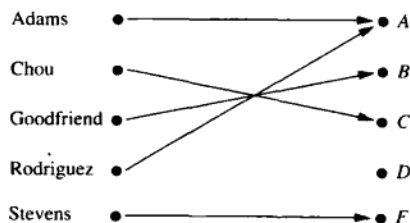


图 2-8 离散数学课成绩

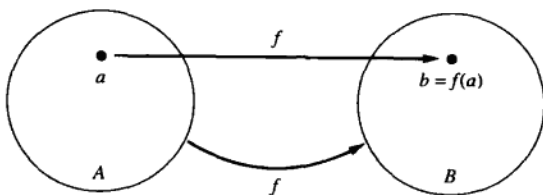


图 2-9 函数 f 把 A 映射到 B

当定义一个函数的时候，我们需要指定它的定义域、伴域、元素定义域到伴域的映射。当有相同的定义域、伴域，相同的映射关系时，我们说这两个函数是相等的。注意，如果改变函数的

定义域或伴域，那么我们将得到一个不同的函数。如果改变元素的映射关系，也会得到一个不同的函数。

例1~5提供了函数的例子。在每个例子中，我们都描述了定义域、伴域、值域和法则。

例1 引用本节开头的例子，给学生打分来描述什么是函数的定义域、伴域、值域。

解 令 G 为函数，表示在离散数学课上一个学生的得分，例如 $G(\text{Adams}) = A$ 。则 G 的定义域是集合 $\{\text{Adams}, \text{Chou}, \text{Goodfriend}, \text{Rodriguez}, \text{Stevens}\}$ ，伴域是集合 $\{A, B, C, D, F\}$ 。 G 的值域是 $\{A, B, C, F\}$ ，因为没有学生得 D 。

例2 令 R 为包含有序对 $(\text{Abdul}, 22)$, $(\text{Brenda}, 24)$, $(\text{Carla}, 21)$, $(\text{Desire}, 22)$, $(\text{Eddie}, 24)$ 和 $(\text{Felicia}, 22)$ 的一个关系，每一对表示一个学生的得分及其年龄。那么，该关系 R 确定的函数是什么？

解 这个关系定义了函数 f ，有 $f(\text{Abdul}) = 22$, $f(\text{Brenda}) = 24$, $f(\text{Carla}) = 21$, $f(\text{Desire}) = 22$, $f(\text{Eddie}) = 24$, $f(\text{Felicia}) = 22$ 。在这里，定义域是 $\{\text{Abdul}, \text{Brenda}, \text{Carla}, \text{Desire}, \text{Eddie}, \text{Felicia}\}$ 。为了定义函数 f ，需要指定一个伴域，我们可以把正整数作为伴域以确保包含每一个学生可能的年龄（注意，可以选择小一点的伴域，但是这会改变函数），最终值域是集合 $\{21, 22, 24\}$ 。

Extra Example

例3 令 f 为函数，指派两个长度或者更大的位串的最后两位。例如， $f(11010) = 10$ 。那么， f 的定义域就是所有两个长度或者更大的位串的集合。而伴域和值域都是集合 $\{00, 01, 10, 11\}$ 。

例4 令 f 为从 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Z}$ 的函数，它指派给每个整数的是该整数的平方。于是 $f(x) = x^2$ ，而 f 的定义域是所有整数的集合， f 的伴域可以从所有整数的集合中选择， f 的值域是所有非负整数中那些完全平方的集合，即 $\{0, 1, 4, 9, \dots\}$ 。

例5 函数的定义域和伴域往往以程序语言描述。例如 Java 语句

```
int floor(float real){...}
```

和 Pascal 语句

```
function floor(x:real):integer
```

都说的是， floor 函数的定义域是实数集合，而它的伴域是整数集合。

具有相同定义域的两个实数值函数可以相加和相乘。

定义3 令 f_1 和 f_2 是从 A 到 $\mathbb{R}$ 的函数，那么 $f_1 + f_2$ 和 $f_1 f_2$ 也是从 A 到 $\mathbb{R}$ 的函数，其定义为

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$$

注意 $f_1 + f_2$ 和 $f_1 f_2$ 的定义是利用 f_1 和 f_2 在 x 的值计算它们在 x 的值。

例6 令 f_1 和 f_2 是从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数，且 $f_1(x) = x^2$ 而 $f_2(x) = x - x^2$ 。函数 $f_1 + f_2$ 和 $f_1 f_2$ 是什么？

解 从函数的和与积的定义知

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = x^2 + (x - x^2) = x$$

$$(f_1 f_2)(x) = x^2(x - x^2) = x^3 - x^4$$

若 f 是从集合 A 到集合 B 的函数，则可以定义 A 的子集的像。

定义4 令 f 为从集合 A 到集合 B 的函数， S 为 A 的一个子集。 S 的像是由 S 中元素的像组成的 B 的子集。我们用 $f(S)$ 表示 S 的像，于是

$$f(S) = \{t \mid \exists s \in S (t = f(s))\}$$

我们也用简写 $\{f(s) \mid s \in S\}$ 来表示这个集合。

注意， S 的像是具有潜在不明确性的。这里， $f(S)$ 表示一个集合，不是集合 S 的值域。

例7 令 $A = \{a, b, c, d, e\}$ 而 $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ，且 $f(a) = 2$, $f(b) = 1$, $f(c) = 4$, $f(d) = 1$ 及 $f(e) = 1$ 。子集 $S = \{b, c, d\}$ 的像是集合 $f(S) = \{1, 4\}$ 。

2.3.2 一对一函数和映上函数

有些函数在它们的定义域的不同成员上有不同的像。这种函数称为一对一的。

定义 5 函数 f 称为一对一的或单射的，当且仅当对于 f 的定义域中的所有 a 和 b ， $f(a) = f(b)$ 蕴含着 $a = b$ 。一对一的函数称为单射。

注意 函数 f 是一一对一的，当且仅当只要 $a \neq b$ 就有 $f(a) \neq f(b)$ 。这种表达 f 为一对一函数的方式是对定义中的蕴含倒置而来。我们可以用量词，如 $\forall a \forall b (f(a) = f(b) \rightarrow a = b)$ 或等价地 $\forall a \forall b (a \neq b \rightarrow f(a) \neq f(b))$ ，来表达 f 是一一对一的，其中论域是函数的定义域。

我们通过一对一的函数和不是一对一的函数示例来说明这个概念。

Assignment 例 8 判断从 $\{a, b, c, d\}$ 到 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的函数 f 是否为一对一的， f 的定义是 $f(a) = 4$ ， $f(b) = 5$ ， $f(c) = 1$ 而 $f(d) = 3$ 。

Extra Examples 解 f 是一一对一的，因为 f 在它定义域的四个元素上取不同的值。图 2-10 说明了这一点。

例 9 判断从整数集到整数集的函数 $f(x) = x^2$ 是否为一对一的。

解 函数 $f(x) = x^2$ 不是一对一的，因为，例如 $f(1) = f(-1) = 1$ ，但 $1 \neq -1$ 。

注意，若定义域限制为 $\mathbb{Z}^+$ ，函数 $f(x) = x^2$ 就是一对一的。(技术上说，当限定一个函数的定义域的时候，我们得到了一个新的函数，被限制的元素的值域与原来是相同的，而被限制的定義域以外的原来定义域的元素就不被限制的函数定义了。)

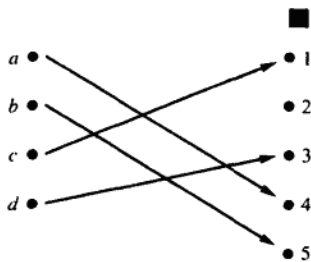


图 2-10 一个一对一函数

例 10 判断函数 $f(x) = x + 1$ 是否为实数集到它自身的一对一函数。

解 函数 $f(x) = x + 1$ 是一一对一的。要证明这一点，只需注意在 $x \neq y$ 时 $x + 1 \neq y + 1$ 。

现在我们给出保证函数为一对一的某些条件。

定义 6 定义域和伴域都是实数集子集的函数 f 称为递增的，如果对 f 的定义域中的 x 和 y ，只要 $x < y$ 就有 $f(x) \leq f(y)$ (若对于 $x < y$ ，恒有 $f(x) < f(y)$ ，则称函数 f 为严格递增的)。类似地， f 是递减的，如果对 f 的定义域中的 x 和 y ，只要 $x < y$ 就有 $f(x) \geq f(y)$ (若对于 $x < y$ ，恒有 $f(x) > f(y)$ ，称函数 f 为严格递减的) (定义中严格一词意味着严格不等式)。

注意 如果 $\forall x \forall y (x < y \rightarrow f(x) \leq f(y))$ ，则函数 f 是递增的；如果 $\forall x \forall y (x < y \rightarrow f(x) < f(y))$ ，则函数 f 是严格递增的。如果 $\forall x \forall y (x < y \rightarrow f(x) \geq f(y))$ ，则函数 f 就是递减的；如果 $\forall x \forall y (x < y \rightarrow f(x) > f(y))$ ，则函数 f 就是严格递减的。这里论域均为函数 f 的定义域。

从上述定义可知，只要函数是严格递增的或者严格递减的，它必定是一对一的。但是，如果一个函数不是严格意义上的递增或递减，就不必然一对一了。

有些函数的值域和伴域相等，也就是说，伴域中的每个成员都是定义域中某个元素的像。具有这一性质的函数称为映上函数。

定义 7 从 A 到 B 的函数 f 称为映上的或满射的，当且仅当对每个 $b \in B$ ，有元素 $a \in A$ 使得 $f(a) = b$ 。如果函数 f 是映上的，就说它是满射函数。

注意 如果 $\forall y \exists x (f(x) = y)$ ，函数 f 就是映上的，其中 x 的论域是函数的定义域， y 的论域是函数的伴域。

我们现在举几个映上函数和非映上函数的例子。

例 11 令 f 为从 $\{a, b, c, d\}$ 到 $\{1, 2, 3\}$ 的函数，其定义为 $f(a) = 3$ ， $f(b) = 2$ ， $f(c) = 1$ 及

$f(d)=3$. f 是映上函数吗?

Extra Examples

解 由于伴域中所有 3 个元素均为定义域中元素的像, f 是映上的. 图 2-11 说明了这一点. 注意, 若伴域是 $\{1, 2, 3, 4\}$, f 就不是映上的. ■

例 12 从整数集到整数集的函数 $f(x)=x^2$ 是映上的吗?

解 f 不是映上的, 因此, 比如说没有 x 使 $x^2=-1$. ■

例 13 从整数集到整数集的函数 $f(x)=x+1$ 是映上的吗?

解 这个函数是映上的, 因为对每个整数 y , 都有一个整数 x 使 $f(x)=y$. 为看出这一点, 只要注意 $f(x)=y$ 的充分必要条件是 $x+1=y$, 而这只要令 $x=y-1$ 就成立.

定义 8 若函数 f 既是一对一的, 又是映上的, 就说它是一一对应或双射的.

下面的例 14 和例 15 阐述双射的概念.

例 14 令 f 为从 $\{a, b, c, d\}$ 到 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的函数, 其定义为 $f(a)=4, f(b)=2, f(c)=1$ 及 $f(d)=3$. f 是双射吗?

解 函数 f 是一对一的和映上的. 它是一对一的, 是因为函数值都不同; 它是映上的, 是因为伴域中的所有 4 个元素, 均为定义域的元素像. 于是 f 是双射. ■

图 2-12 给出了 4 个函数: 其中第 1 个是一对一的, 但不是映上的; 第 2 个是映上的, 但不是一对一的; 第 3 个, 既是一对一的, 又是映上的; 第 4 个既不是一对一的, 也不是映上的. 图 2-12 中的第 5 个对应关系不是函数, 因为它把一个元素传递给两个不同的元素.

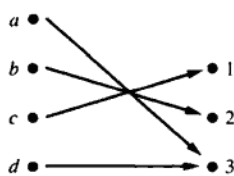


图 2-11 一个映上函数

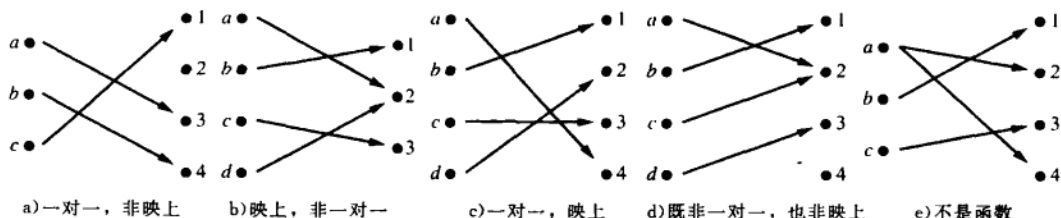


图 2-12 不同类型的对应关系的例子

假定 f 是从集合 A 到它自己的函数. 如果 A 是有限的, 那么 f 是一对一的当且仅当它是映上的. 当 A 为无限集时, 这一结论不一定成立 (参看 2.4 节).

例 15 令 A 为集合. A 上的恒等函数是函数 $\iota_A: A \rightarrow A$, 其中

$$\iota_A(x) = x$$

对所有 $x \in A$. 换言之, 恒等函数 ι_A 是这样的函数, 它赋给每个元素的是这个元素自身. 函数 ι_A 是一对一的和映上的, 所以是双射. ■

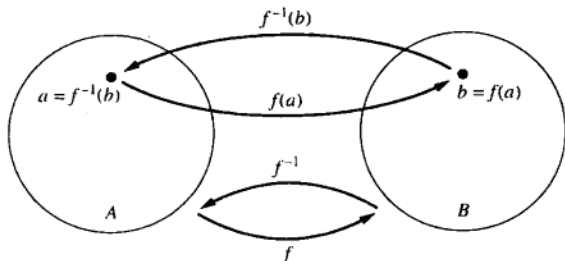
2.3.3 反函数和函数组合

现在考虑从集合 A 到集合 B 的一一对应 f . 由于 f 是映上的函数, B 的每个元素都是 A 中某元素的像. 又由于 f 还是一对一的函数, B 的每个元素都是 A 中唯一的一个元素的像. 于是我们可以定义一个从 B 到 A 的新函数, 把 f 给出的对应关系颠倒过来.

定义 9 令 f 为从集合 A 到集合 B 的一一对应, f 的反函数是这样的函数, 它指派给 B 中元素 b 的是 A 中使得 $f(a)=b$ 唯一元素 a . f 的反函数用 f^{-1} 表示, 于是在 $f(a)=b$ 时 $f^{-1}(b)=a$.

注意 切勿将函数 f^{-1} 与 $1/f$ 混淆, 后者表示定义域中每个元素 x 对应函数值为 $1/f(x)$ 的一个函数, 而且仅当 $f(x)$ 为非 0 实数时有意义, 二者是不同的.

图 2-13 给出了反函数概念的说明.

图 2-13 函数 f^{-1} 是函数 f 的反函数

如果函数 f 不是一一对应, 就无法定义反函数。若 f 不是一一对应, 那么它或者不是一对一的, 或者不是映上的; 如果 f 不是一对一的, 则伴域中的某元素 b 是定义域中多个元素的像。如果 f 不是映上的, 那么伴域中某个元素 b 不是定义域中任何元素的像, 即定义域中不存在元素 a 使 $f(a)=b$ 。总之, 如果 f 不是一一对应, 就不能为伴域中每个元素 b 都指派定义域中唯一的元素 a , 使 $f(a)=b$ (因为对某个 b 或者有多个这样的 a , 或者没有这样的 a)。

一一对应关系称为可逆的, 因为作为函数可以定义它的反函数。如果函数不是一一对应关系, 就说它是不可逆的, 因为这样的函数没有反函数。

例 16 令 f 为从 $\{a, b, c\}$ 到 $\{1, 2, 3\}$ 的函数, 使 $f(a)=2$, $f(b)=3$ 及 $f(c)=1$ 。 f 可逆吗? 如果可逆, 其反函数是什么?

解 f 是可逆的, 因为它是一个一一对应的对应关系。其反函数 f^{-1} 颠倒 f 给出的对应关系, 所以 $f^{-1}(1)=c$, $f^{-1}(2)=a$ 而 $f^{-1}(3)=b$ 。

例 17 令 $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$, 使得 $f(x)=x+1$ 。 f 可逆吗? 如果可逆, 其反函数是什么?

解 f 可逆, 因为前面已证明它是一一对应关系。要颠倒对应关系, 设 y 是 x 的像, 即 $y=x+1$ 。从而 $x=y-1$ 。即 $y-1$ 是 $\mathbf{Z}$ 的唯一元素, 在 f 之下与 y 对应, 于是 $f^{-1}(y)=y-1$ 。

例 18 令 f 是从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的函数, 使 $f(x)=x^2$ 。 f 可逆吗?

解 由于 $f(-2)=f(2)=4$, f 不是一一对应的, 要想定义反函数, 就得为 4 指派两个元素。因此 f 是不可逆的。

有时, 可以限制函数的定义域或者伴域, 或者两者都设限, 得到一个可逆的函数, 正如图 19。

例 19 如果我们限制例 18 中的函数 $f(x)=x^2$ 的定义域是非负数, 那么 f 就是可逆的。

解 因为被限制在非负数范围内, 所以 f 是一一对应的。比如说, 如果 $f(x)=f(y)$, 那么 $x^2=y^2$ 。所以 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)=0$ 。也就是说, $x+y=0$ 或者 $x-y=0$, 则 $x=y$ 或者 $x=-y$ 。因为 x 和 y 都是非负的, 那就只可能 $x=y$ 。因此, 这个函数是一一对应的。同时, 当伴域是非负数时, 对于 $f(x)=x^2$ 是映上的。因为每一个非负数只有一个正平方根。当 y 是非负数时, 刚好 $x=\sqrt{y}$, 也就是 $x^2=y$ 。因此, 函数 $f(x)=x^2$ 在非负数上是一一对应和映上的, 它的反函数为 $f^{-1}(y)=\sqrt{y}$ 。

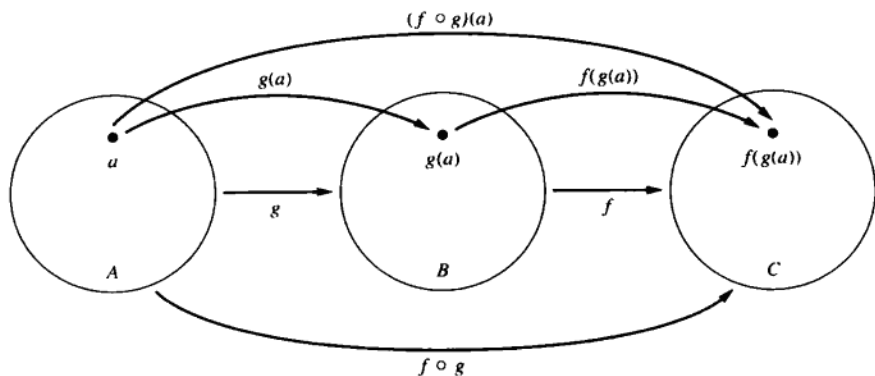
定义 10 令 g 为从集合 A 到集合 B 的函数, f 是从集合 B 到集合 C 的函数, 函数 f 和 g 的组合用 $f \circ g$ 表示, 定义为

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

换句话说, 函数 $f \circ g$ 指派给 A 的元素 a 的就是 f 指派给 $g(a)$ 的。注意, 如果 g 的值域不是 f 的定义域的子集, 就无法定义 $f \circ g$, 图 2-14 解释了函数组合的概念。

例 20 令 g 为从 $\{a, b, c\}$ 到它自己的函数, 使 $g(a)=b$, $g(b)=c$, 而 $g(c)=a$ 。令 f 为从 $\{a, b, c\}$ 到 $\{1, 2, 3\}$ 的函数, 使 $f(a)=3$, $f(b)=2$, 而 $f(c)=1$ 。 f 和 g 的组合是什么? g 和 f 的组合是什么?

解 $f \circ g$ 的定义是 $(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(b) = 2$, $(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(c) = 1$, 而 $(f \circ g)(c) = f(g(c)) = f(a) = 3$ 。

图 2-14 函数 f 和 g 的组合

注意 $g \circ f$ 是没有定义的，因为 f 的值域不是 g 的定义域的一部分。

例 21 令 f 和 g 为从整数集到整数集的函数，其定义为 $f(x) = 2x + 3$ 和 $g(x) = 3x + 2$ 。 f 和 g 的组合是什么？ g 和 f 的组合是什么？

解 $f \circ g$ 和 $g \circ f$ 均有定义，即

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 2) = 2(3x + 2) + 3 = 6x + 7$$

及

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = 3(2x + 3) + 2 = 6x + 11$$

注意 尽管例 21 中对函数 f 和 g 而言 $f \circ g$ 和 $g \circ f$ 均有定义， $f \circ g$ 和 $g \circ f$ 并不相等。换言之，对函数组合而言交换律不成立。

在构造函数和它的反函数的组合时，不论以什么次序组合，得到的都是恒等函数。要看清这一点，假定 f 是从集合 A 到集合 B 的一一对应关系，那么存在反函数 f^{-1} ，而且 f^{-1} 是从 B 到 A 的一一对应关系。反函数把原函数的对应关系颠倒过来，所以当 $f(a) = b$ 时 $f^{-1}(b) = a$ ，当 $f^{-1}(b) = a$ 时， $f(a) = b$ 。因此，

$$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a$$

及

$$(f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(b)) = f(a) = b$$

从而 $f^{-1} \circ f = \iota_A$ ，而 $f \circ f^{-1} = \iota_B$ ，其中 ι_A 和 ι_B 分别是集合 A 和 B 上的恒等函数。这就是说 $(f^{-1})^{-1} = f$ 。

2.3.4 函数的图像

从 A 到 B 的每个函数都对应着 $A \times B$ 中的一个有序偶集合，这个有序偶集合称为该函数的图像，并且往往用图来表示以帮助理解函数的行为。

定义 11 令 f 为从集合 A 到集合 B 的函数，函数 f 的图像是序偶集合 $\{(a, b) \mid a \in A \text{ 且 } f(a) = b\}$ 。

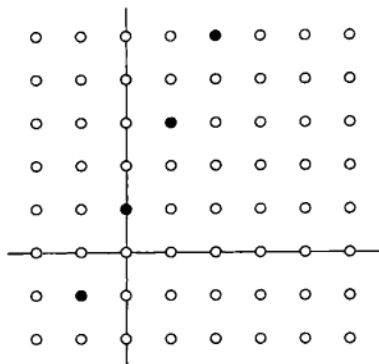
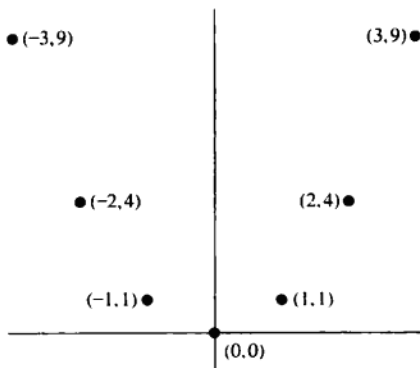
根据定义，从 A 到 B 的函数的图像是 $A \times B$ 的子集，这个子集包含的序偶中第二项等于 B 中由 f 指派给第一项的那个元素。

例 22 图示从整数集到整数集的函数 $f(n) = 2n + 1$ 的图像。

解 f 的图像是形为 $(n, 2n + 1)$ 的序偶的集合，其中 n 为整数。图 2-15 是其图像显示。

例 23 图示整数集到整数集的函数 $f(x) = x^2$ 。

解 f 的图像是形为 $(x, f(x)) = (x, x^2)$ 的序偶的集合，其中 x 为整数。图 2-16 是其图像显示。

图 2-15 从 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Z}$ 的函数 $f(n)=2n+1$ 的图像图 2-16 从 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Z}$ 的 $f(x)=x^2$ 的图像

2.3.5 几个重要的函数

下面介绍离散数学中两个重要的函数，即下取整函数和上取整函数。令 x 为实数。下取整函数把 x 下舍入到小于或等于 x 又最接近 x 的整数，而上取整函数则把 x 上舍入到大于或等于 x 又最接近 x 的整数。在统计对象个数时常使用这两个函数。在分析解一定规模的问题的计算机过程使用的步数时，这两个函数起着重要的作用。

定义 12 下取整函数指派给实数 x 的是小于或等于 x 的最大整数。下取整函数在 x 的值用 $\lfloor x \rfloor$ 表示。上取整函数指派给实数 x 的是大于或等于 x 的最小整数。上取整函数在 x 的值用 $\lceil x \rceil$ 表示。

注意 下取整函数也常称为最大整数函数，这时往往用 $[x]$ 表示。

例 24 下面是下取整函数和上取整函数的若干值：

$$\begin{aligned} \lfloor 1/2 \rfloor &= 0, & \lceil 1/2 \rceil &= 1, & \lfloor -1/2 \rfloor &= -1, & \lceil -1/2 \rceil &= 0, \\ \lfloor 3.1 \rfloor &= 3, & \lceil 3.1 \rceil &= 4, & \lfloor 7 \rfloor &= 7, & \lceil 7 \rceil &= 7 \end{aligned}$$

图 2-17 显示的是下取整函数和上取整函数的图像。在图 2-17a 中，显示下取整函数 $\lfloor x \rfloor$ 。这个函数在 $[n, n+1)$ 区间取同样的值 n ，然后，当 $x=n+1$ 时，取值跳到 $n+1$ 。在图 2-17b 中，显示上取整函数 $\lceil x \rceil$ 。这个函数在 $(n, n+1]$ 区间取同样的值 $n+1$ ，然后，当 x 取略大于 $n+1$ 时，取值跳到 $n+2$ 。

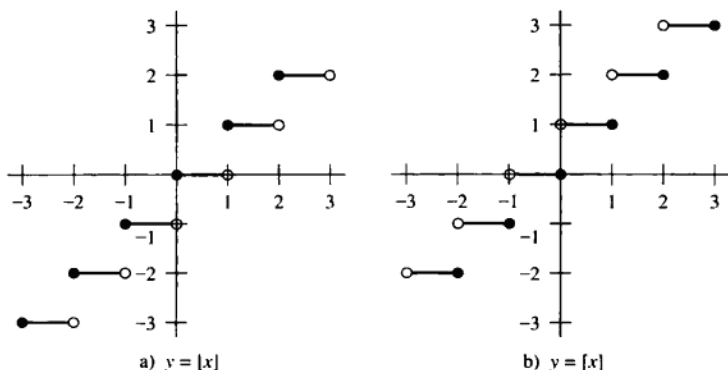


图 2-17 a) 下取整函数图像；b) 上取整函数图像

下取整函数和上取整函数有广泛的应用，包括用于数据存储和数据传输。考虑例 25 和例 26，这是研究数据库和数据通信问题时要完成的典型的基本计算。

例 25 存在计算机磁盘上的数据或数据网络上传输的数据通常表示为字节串。每个字节由 8 个字位组成, 要表示 100 字位的数据需要多少字节?

解 要决定需要的字节数, 就要找出最小的整数, 它至少要与 100 除以 8 的商一样大, 8 是每个字节的字位数。于是, 需要的字节数是 $\lceil 100/8 \rceil = \lceil 12.5 \rceil = 13$ 。 ■

例 26 异步传输模式(ATM)(用于骨干网络上的通信协议)下, 数据按 53 个字节分组, 每组称为一个信元。以速率每秒 500 千字位传输数据的连接上一分钟能传输多少个 ATM 信元?

解 一分钟内这一连接能传输 $500\,000 \times 60 = 30\,000\,000$ 字位。每个 ATM 信元长度是 53 字节, 也就是 $53 \times 8 = 424$ 字位。要计算一分钟能传输多少信元, 需计算不超过 $30\,000\,000$ 除以 424 的最大整数。于是在每秒 500 千字位的连接上一分钟能传输的 ATM 信元数是

$$\lfloor 30\,000\,000/424 \rfloor = 70\,754$$

以 x 代表实数的表 2-3 给出了下取整函数和上取整函数的若干简单但重要的性质。由于这两个函数在离散数学中出现得十分频繁, 看一看表中的恒等式是有益的。表中的每条性质都可以用下取整函数和上取整函数的定义来建立。性质 (1a), (1b), (1c) 和 (1d) 可以直接由定义得出。例如, (1a) 说的是 $\lfloor x \rfloor = n$ 当且仅当 n 小于或等于 x 而 $n+1$ 大于 x 。这恰恰就是 n 为不超过 x 的最大整数的含义, 也就是 $\lfloor x \rfloor = n$ 的定义。性质 (1b)、(1c) 和 (1d) 可以类似地建立起来。我们使用直接证明法来证明 (4a) 是成立的。

表 2-3 上取整函数和下取整函数的有用性质(n 为整数)

(1a) $\lfloor x \rfloor = n$ 当且仅当 $n \leq x < n+1$
(1b) $\lceil x \rceil = n$ 当且仅当 $n-1 < x \leq n$
(1c) $\lfloor x \rfloor = n$ 当且仅当 $x-1 < n \leq x$
(1d) $\lceil x \rceil = n$ 当且仅当 $x \leq n < x+1$
(2) $x-1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x+1$
(3a) $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$
(3b) $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$
(4a) $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$
(4b) $\lceil x+n \rceil = \lceil x \rceil + n$

证 假定 $\lfloor x \rfloor = m$, 其中 m 为整数。由 (1a) 知, $m \leq x < m+1$ 。在这一不等式中加上 n 得 $m+n \leq x+n < m+n+1$ 。再次利用 (1a), 可知 $\lfloor x+n \rfloor = m+n = \lfloor x \rfloor + n$, 这正是我们要证明的。其他性质的证明推迟到练习中去做。 □

除了表 2-3 列出的性质, 上取整函数和下取整函数还有许多其他有用的性质。也有许多关于这些函数的语句看似正确, 实则不然。我们将在例 27 和例 28 中考虑与上取整函数和下取整函数有关的语句。

在考虑下取整函数相关的语句时, 一个有用的方法是令 $x = n + \epsilon$, 其中 $n = \lfloor x \rfloor$ 是一个整数, ϵ 是 x 的分数部分, 满足不等式 $0 \leq \epsilon < 1$ 。类似地, 考虑上取整函数时, 通常写 $x = n - \epsilon$, 其中 $n = \lceil x \rceil$ 且 $0 \leq \epsilon < 1$ 。

例 27 证明: 若 x 是一个实数, 则 $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$ 。

解 要证明这个语句, 令 $x = n + \epsilon$, 其中 n 是正整数且 $0 \leq \epsilon < 1$ 。依据 ϵ 是否小于 $\frac{1}{2}$, 有两种情况要考虑。(选择这两种情况的原因见下面的证明。)

首先考虑 $0 \leq \epsilon < \frac{1}{2}$ 的情况。此时, $2x = 2n + 2\epsilon$ 且 $\lfloor 2x \rfloor = 2n$, 因为 $0 \leq 2\epsilon < 1$ 。类似地, $x + \frac{1}{2} = n + \left(\frac{1}{2} + \epsilon\right)$, 使得 $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = n$, 因为 $0 < \frac{1}{2} + \epsilon < 1$ 。因此

$$\lfloor 2x \rfloor = 2n \text{ 且 } \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = n + n = 2n$$

接下来, 考虑 $\frac{1}{2} \leq \epsilon < 1$ 的情况。此时, $2x = 2n + 2\epsilon = (2n+1) + (2\epsilon-1)$ 。由于 $0 \leq 2\epsilon-1 < 1$,

可得 $\lfloor 2x \rfloor = 2n+1$ 。因为 $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor n + \left(\frac{1}{2} + \epsilon \right) \right\rfloor = \left\lfloor n+1 + \left(\epsilon - \frac{1}{2} \right) \right\rfloor$ 且 $0 \leq \epsilon - \frac{1}{2} < 1$, 可得 $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = n+1$ 。因此, $\lfloor 2x \rfloor = 2n+1$ 且 $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = n + (n+1) = 2n+1$ 。证毕。 ■

例 28 对全体实数 x 和 y , 证明或否定 $\lceil x+y \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$ 。

解 尽管这个语句看似合理, 但它其实是假的。一个反例就是令 $x = \frac{1}{2}$ 且 $y = \frac{1}{2}$, 此时

$$\lceil x+y \rceil = \left\lceil \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rceil = \lceil 1 \rceil = 1, \text{ 但 } \lceil x \rceil + \lceil y \rceil = \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil = 1 + 1 = 2. \quad \blacksquare$$

有几类函数是课本一直要用到的, 其中包括多项式、对数和指数函数。本书中用记号 $\log x$ 表示 x 以 2 为基的对数, 因为 2 是我们将经常使用的对数基数。我们用 $\log_b x$ 表示以 b 为基的对数, 其中 b 是大于 1 的任意实数。用 $\ln x$ 表示自然对数。

另一个我们将在本书中使用的函数是阶乘函数 $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}^+$, 表示为 $f(n) = n!$ 。 $f(n) = n!$ 的值是前几个正整数的积, 因此 $f(n) = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$ [$f(0) = 0! = 1$]。

例 29 我们有 $f(1) = 1! = 1$, $f(2) = 2! = 1 \cdot 2 = 2$, $f(6) = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$, $f(20) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$ 。 ■

例 29 表明阶乘函数随着 n 的增加而迅速递增。通过斯特林公式, 阶乘函数的递增更加清楚, 由高等数学可知, $n! \sim \sqrt{2\pi n} (n/e)^n$ 。我们用 $f(n) \sim g(n)$ 这样的表示法, 意思是随着 n 的无限递增, $f(n)/g(n)$ 趋近于 1 (即 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) = 1$)。符号 $\sim$ 读作“近似于”。斯特林公式以 18 世纪的苏格兰数学家詹姆斯·斯特林命名。

练习

1. 为什么下列几问中的 f 不是从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的函数?

a) $f(x) = 1/x$

b) $f(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = \pm \sqrt{(x^2+1)}$

2. 判断 f 是否为从所有位串的集合到整数集合的函数:

a) $f(S)$ 是 S 中某个 0 字位的位置。

b) $f(S)$ 是 S 中 1 字位的个数。

c) $f(S)$ 是最小整数 i 使 S 中的第 i 字位为 1, 当 S 是不含字位的空串时 $f(S) = 0$ 。

3. 求下列函数的定义域和值域。(注意: 为求得函数定义域, 只需确定被该函数指派了值的元素集合。)

a) 函数在每个位串的值是串中 1 字位个数与 0 字位个数之差。

b) 函数在每个位串的值是串中 0 字位个数的 2 倍。

c) 函数在每个位串的值是把串分成字节 (8 个字位为一字节) 时不够一个字节的字位数。

d) 函数在每个正整数的值是不超过此整数的最大完全平方。

4. 求下列函数的定义域和值域。

a) 函数在每对正整数的值是这两个整数中的最大的整数。

b) 函数在每个正整数的值是 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 中未在整数数位中出现的数。

c) 函数在一个位串的值是串中块 11 出现的次数。

d) 函数在一个位串的值是串中第一个 1 的数值位置, 若位串为全 0, 就赋值 0。

5. 求下列各值:

a) $\lceil 3/4 \rceil$

b) $\lfloor 7/8 \rfloor$

c) $\lceil -3/4 \rceil$

d) $\lfloor -7/8 \rfloor$

e) $\lceil 3 \rceil$

f) $\lfloor -1 \rfloor$

g) $\lfloor 1/2 + \lceil 3/2 \rceil \rfloor$

h) $\lfloor 1/2 \cdot \lfloor 5/2 \rfloor \rfloor$

6. 判断在下列情况下函数 $f: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ 是否是映上的?

a) $f(m, n) = m+n$

b) $f(m, n) = m^2 + n^2$

c) $f(m, n) = m$

d) $f(m, n) = |n|$

e) $f(m, n) = m-n$

7. 给出从整数集到正整数集的函数的明确公式, 使得:

- a) 一对一但非映上。 b) 映上但非一对一。
c) 既映上又一对一。 d) 既不映上又不一对一。

8. 判断下列各函数是否是从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的双射。

- a) $f(x) = 2x + 1$ b) $f(x) = x^2 + 1$
c) $f(x) = x^3$ d) $f(x) = (x^2 + 1)/(x^2 + 2)$

9. 令 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 且 $f(x) > 0$ 。证明: $f(x)$ 严格递减当且仅当函数 $g(x) = 1/f(x)$ 严格递增。

10. 试给出一个定义域与伴域均为实数集的递减而非一对一的函数实例。

11. 证明: 从实数集到非负实数集的函数 $f(x) = |x|$ 不是可逆的, 而若将其定义域限制到非负实数集, 则所得函数为可逆的。

12. 令 $f(x) = \lfloor x^2/3 \rfloor$ 。求 $f(S)$, 如果

- a) $S = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ b) $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
c) $S = \{1, 5, 7, 11\}$ d) $S = \{2, 6, 10, 14\}$

13. 假定 g 是从 A 到 B 的函数, f 是从 B 到 C 的函数。

- a) 证明: 如果 f 和 g 均为一对一函数, 那么 $f \circ g$ 也是一对一函数。
b) 证明: 如果 f 和 g 均为到映上函数, 那么 $f \circ g$ 也是映上函数。

*14. 如果 f 和 $f \circ g$ 都是映上的, 能否得出结论 g 也是映上的? 说明理由。

15. 求证: 从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x) = ax + b$ 是可逆的, 其中 a 和 b 为常数且 $a \neq 0$ 。找出 f 的反函数。

令 f 为从集合 A 到集合 B 的函数, S 为 B 的子集。 S 的逆像定义为 A 的子集, 该子集包含 S 的所有元素的原像。我们用 $f^{-1}(S)$ 表示 S 的逆像, 于是 $f^{-1}(S) = \{a \in A \mid f(a) \in S\}$ 。(警告: 符号 f^{-1} 有两种不同的使用方式。不要将这里引入的符号与可逆函数 f 在 y 处的逆 $f^{-1}(y)$ 混淆。还要注意 $f^{-1}(S)$ 表示集合 S 的逆像, 对所有函数 f 都有意义, 而不仅仅是可逆函数 f 。)

16. 令 $g(x) = \lfloor x \rfloor$ 。求

- a) $g^{-1}(\{0\})$ b) $g^{-1}(\{-1, 0, 1\})$ c) $g^{-1}(\{x \mid 0 < x < 1\})$

17. 令 f 为从 A 到 B 的函数, S 为 B 的子集。求证 $f^{-1}(\bar{S}) = \overline{f^{-1}(S)}$ 。

18. 证明: $\lceil x - 1/2 \rceil$ 是最接近 x 的整数, 除非 x 恰为两个(相邻)整数的中间数, 此时, 它为这两个整数中较小的一个。

19. 证明: 对实数 x , $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$ 。

20. 若 x 为实数, n 为整数, 求证

- a) $x < n$ 当且仅当 $\lfloor x \rfloor < n$ 。 b) $n < x$ 当且仅当 $n < \lceil x \rceil$ 。

21. 证明: 若 n 为整数, 则当 n 为偶数时 $\lfloor n/2 \rfloor = n/2$, n 为奇数时 $\lfloor n/2 \rfloor = (n-1)/2$ 。

22. 有些计算器上有个 INT 函数, 当 x 为非负实数时 $\text{INT}(x) = \lfloor x \rfloor$, 当 x 为负实数时 $\text{INT}(x) = \lceil x \rceil$ 。求证这一函数 INT 满足等式 $\text{INT}(-x) = -\text{INT}(x)$ 。

23. 令 a 和 b 的实数, 且 $a < b$, 用下取整函数及/或上取整函数表示使 $a < n < b$ 的整数 n 的数目。

24. 含 n 个字节的数据需要用几个字节编码? 其中 n 为

- a) 7 b) 17 c) 1001 d) 28800

25. 数据在某以太网上以 1500 个 8 位字节为信息块传输。下面的数据量在这个以太网上各需要多少个信息块传输(注意字节就是 8 位字节)?

- a) 150 千字节的数据。 b) 384 千字节的数据。
c) 1.544 兆字节的数据。 d) 45.3 兆字节的数据。

26. 画出从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x) = \lfloor 2x \rfloor$ 的图像。

27. 画出从 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor x/2 \rfloor$ 的图像。

28. 画出下列各函数的图像:

- a) $f(x) = \lfloor x + 1/2 \rfloor$ b) $f(x) = \lfloor 2x + 1 \rfloor$ c) $f(x) = \lceil x/3 \rceil$
d) $f(x) = \lceil 1/x \rceil$ e) $f(x) = \lceil x - 2 \rceil + \lfloor x + 2 \rfloor$ f) $f(x) = \lfloor 2x \rfloor \lfloor x/2 \rfloor$
g) $f(x) = \lceil \lfloor x - 1/2 \rfloor + 1/2 \rceil$

29. 求 $f(x) = x^3 + 1$ 的反函数。

30. 令 S 为全集 U 的子集。 S 的特征函数 f_S 是从 U 到集合 $\{0, 1\}$ 的函数, 使得若 x 属于 S 则 $f_S(x)=1$, 若 x 不属于 S , 则 $f_S(x)=0$ 。令 A, B 为集合。求证

- a) $f_{A \cap B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$ b) $f_{A \cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x)$
 c) $f_{\bar{A}}(x) = 1 - f_A(x)$ d) $f_{A \oplus B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - 2f_A(x)f_B(x)$

31. 证明或否定下列关于上取整函数和下取整函数的语句。

- a) 对任意实数 x , $\lceil \lfloor x \rfloor \rceil = \lfloor x \rfloor$ 。
 b) 只要 x 是实数, $\lfloor 2x \rfloor = 2 \lfloor x \rfloor$ 。
 c) 只要 x 和 y 是实数, $\lceil x \rceil + \lceil y \rceil - \lceil x+y \rceil = 0$ 或 1 。
 d) 对任意实数 x 和 y , $\lceil xy \rceil = \lceil x \rceil \lceil y \rceil$ 。
 e) 对任意实数 x , $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$ 。

32. 证明: 若 x 是正实数, 则

- a) $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ b) $\lceil \sqrt{\lceil x \rceil} \rceil = \lceil \sqrt{x} \rceil$

用来计算函数值的程序也许不能给出该函数在其所有元素上的正确值。例如程序可能因无限循环或内存溢出而不能给出某个正确值。类似地, 在抽象数学中, 我们常常要讨论仅在实数子集上定义的函数, 如 $1/x$, $\sqrt{x}$ 和 $\arcsin(x)$ 。另外, 我们可能还会用到“最小孩子”函数(此函数对没有孩子的夫妇没有定义)和“日出时间”函数(此函数对北极圈没有定义)。

为研究这种情况, 我们用到部分函数的概念。从集合 A 到集合 B 的部分函数 f 是为 A 的一个子集的每个元素 a 指定 B 中唯一值 b 的指派。 A 的这个子集称为 f 的定义区域。集合 A 和 B 分别称为 f 的定义域和伴域。我们说 f 在 A 中不属于定义区域的元素上未定义。我们用 $f: A \rightarrow B$ 表示 f 是从 A 到 B 的部分函数(这个符号与表示函数的符号一样。符号的上下文将决定 f 究竟是部分函数还是全函数)。当 f 的定义区域等于 A 时, 就说 f 是全函数。

33. 对下列各个部分函数求它的定义域、伴域、定义区域及其未定义的值集合。另外判断它是否为全函数。

- a) $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}, f(n) = 1/n$ b) $f: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, f(n) = \lceil n/2 \rceil$
 c) $f: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Q}, f(m, n) = m/n$ d) $f: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, f(m, n) = mn$
 e) $f: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, f(m, n) = m - n$, 如果 $m > n$

34. a) 证明: 若 S 为基数为 m 的集合, m 为正整数, 则在集合 S 与集合 $\{1, 2, \dots, m\}$ 之间存在一个一一对应。

b) 证明: 若 S, T 均为基数为 m 的集合, m 为正整数, 则在集合 S 与集合 T 之间存在一个一一对应。

*35. 证明函数 $f: \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+ \rightarrow \mathbf{Z}^+$ 是一对一且是映上的, 其中 $f(m, n) = (m+n-2)(m+n-1)/2 + m$ 。

2.4 序列与求和

2.4.1 引言

序列是一系列有序的元素。在离散数学中用许多方式使用序列。第4章将介绍用序列表示某些计数问题的解。在计算机科学中序列也是重要的数据结构。本节包括用来表示序列及序列项之和的记号的阐述。

当可以列举无穷集合的元素时, 这个集合称为可数的。本节末尾讨论可数和不可数集合, 证明有理数集合是可数的而实数集合是不可数的。

2.4.2 序列

序列是用来表示有序表的离散结构。例如 $1, 2, 3, 5, 8$ 是一个含有五项的序列, 而 $1, 3, 9, 27, 81, \dots, 30, \dots$ 是一个无穷序列。

定义1 序列是从整数集合的子集(通常是 $\{0, 1, 2, \dots\}$ 或 $\{1, 2, 3, \dots\}$)到集合 S 的函数。用记号 a_n 表示整数 n 的像。称 a_n 为序列的一个项。

用记号 $\{a_n\}$ 描述序列。(注意 a_n 表示序列 $\{a_n\}$ 的个别项。还要注意序列记号 $\{a_n\}$ 与集合记号有冲突, 但使用这个记号的上下文总是分得清楚何时在处理序列而何时在处理集合。还要注意字母 a

的选择是任意的。)

描述序列是通过按照下标升序来列举序列项。

例 1 考虑序列 $\{a_n\}$, 其中

$$a_n = 1/n$$

从 a_1 开始的这个序列项的表, 即

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

开头是:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

定义 2 几何序列是如下形式的序列

$$a, ar, ar^2, \dots, ar^n, \dots$$

其中初项 a 和公比 r 都是实数。

注意 几何序列是指数函数 $f(x) = ar^x$ 的离散对应物。

例 2 满足 $b_n = (-1)^n$ 、 $c_n = 2 \cdot 5^n$ 和 $d_n = 6 \cdot (1/3)^n$ 的序列 $\{b_n\}$ 、 $\{c_n\}$ 和 $\{d_n\}$ 都是几何序列, 初项和公比分别等于 1 和 -1, 2 和 5 以及 6 和 1/3。表 $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, \dots$ 的开头是:

$$1, -1, 1, -1, 1, \dots$$

表 $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, \dots$ 的开头是:

$$2, 10, 50, 250, 1250, \dots$$

表 $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, \dots$ 的开头是:

$$6, 2, 2/3, 2/9, 2/27, \dots$$

定义 3 等差序列是如下形式的序列

$$a, a+d, a+2d, \dots, a+nd, \dots$$

其中初项 a 和公差 d 都是实数。

注意 等差序列是线性函数 $f(x) = dx + a$ 的离散对应物。

例 3 满足 $s_n = -1 + 4n$ 和 $t_n = 7 - 3n$ 的序列 $\{s_n\}$ 和 $\{t_n\}$ 都是等差序列, 初项和公差分别等于 -1 和 4 以及 7 和 -3。从 $n=0$ 这项开始的表 $s_0, s_1, s_2, s_3, \dots$ 的开头是:

$$-1, 3, 7, 11, \dots$$

表 $t_0, t_1, t_2, t_3, \dots$ 的开头是:

$$7, 4, 1, -2, \dots$$

在计算机科学中经常使用形如 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的序列。这些有穷序列也称为串。这个串也记作 $a_1 a_2 \dots a_n$ 。(回忆一下, 位串是比特位的有限序列, 在 1.1 节介绍)。串 S 的长度是这个串中的项数。空串是没有任何项的串, 记作 λ 。空串长度为 0。

例 4 串 $abcd$ 是长度为 4 的串。

2.4.3 特殊的整数序列

离散数学中的常见问题是找出构造序列项的公式或一般规则。有时候只知道解决问题的序列的一部分项, 目标是确定序列。尽管序列的初始项不能确定整个序列(毕竟存在无穷多个从任何有穷初始项集合开始的序列), 但知道前几项仍有助于形成关于序列本身的合理猜想。一旦形成猜想, 就可以尝试验证找到了正确序列。

当试图从初始项推导序列项的可能公式或规则时, 尝试一下找出这些项中的模式, 再观察一下能否确定如何从前项产生后项。有许多问题可问, 但某些较有用的问题是:

- 是否有相同值连续出现?
- 是否给前项加上常量或与序列中位置有关的量就得出后项?
- 是否给前项乘以特定量就得出后项?

- 是否按照某种方式组合前项就得出后项?
- 是否在各项之间存在循环?

例 5 求具有下列前 5 项的序列公式:

(a) $1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16$ (b) $1, 3, 5, 7, 9$ (c) $1, -1, 1, -1, 1$

解 (a) 可以看出分母都是 2 的幂。满足 $a_n = 1/2^n$ 的序列是候选解序列。这个候选序列是几何序列, 满足 $a=1$ 和 $r=1/2$ 。

(b) 注意每一项都是对前一项加 2 而得到的。满足 $a_n = 2n+1$ 的序列是候选解序列。这个候选序列是等差序列, 满足 $a=1$ 和 $d=2$ 。

(c) 各项轮流取值 1 和 -1。满足 $a_n = (-1)^n$ 的序列是候选解序列。这个候选序列是几何序列, 满足 $a=1$ 和 $r=-1$ 。

例 6 和例 7 说明如何通过分析序列来发现构造项。

例 6 如果前 10 项是 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 则如何产生序列项?

解 注意整数 1 出现 1 次, 整数 2 出现 2 次, 整数 3 出现 3 次, 整数 4 出现 4 次。产生这个序列的合理规则是整数 n 恰好出现 n 次, 所以序列的下 5 项可能都是 5, 随后 6 项可能都是 6, 等等。这种方式产生的序列是候选解序列。

例 7 如果前 10 项是 5, 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59, 则如何产生序列项?

解 注意这个序列第一项之后的前 10 项每项都是给前项加 6 得到的(从相邻项之差为 6 就看出这一点)。因此从 5 开始总共加 $(n-1)$ 次 6 就产生第 n 项, 合理猜测第 n 项为 $5+6(n-1)=6n-1$ 。(这是个等差序列, 满足 $a=5$ 和 $d=6$ 。)

另一种求序列项生成规则的有用技术是对比所求的序列项与熟知的整数序列项, 比如等差序列项、几何序列项、完全平方、完全立方, 等等。表 2-4 显示若干应当记住的序列的前 10 项。

表 2-4 若干有序序列

第 n 项	前 10 项
n^2	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ...
n^3	1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, ...
n^4	1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, 4096, 6561, 10 000, ...
2^n	2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...
3^n	3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19 683, 59 049, ...
$n!$	1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40 320, 362 880, 3 628 800, ...

例 8 如果序列 $\{a_n\}$ 的前 10 项为 1, 7, 25, 79, 241, 727, 2185, 6559, 19 681, 59 047, 试猜想 a_n 的简单公式。

解 要解决这个问题, 先查看相邻项的差, 但没有看出模式。当计算相邻项的比来查看每项是否为前项的倍数时, 发现这个比虽然不是常数却接近于 3。所以有理由怀疑与 3^n 有关的公式产生了这个序列的各项。比较这些项与序列 $\{3^n\}$ 的对应项, 注意到第 n 项要比对应的 3 的幂少 2。看到对于 $1 \leq n \leq 10$ 来说 $a_n = 3^n - 2$, 因而猜想对所有 n 来说, 这个公式成立。

贯穿本书, 可以看到整数序列广泛出现在离散数学中。已经遇到或即将遇到的序列包括: 素数序列、排序 n 个离散对象的方式数(第 3 章)、解决著名的 n 个盘子汉诺塔智力题需要的步数(第 4 章)以及在 n 个月后岛上的兔子数(第 4 章)等。

整数序列还出现在离散数学以外的十分广泛的专题领域中, 包括生物学、工程、化学、物理学以及智力题等。数学家内尔·斯朗(Neil Sloane)在 20 世纪 60 年代构造了超过 100 000 个五花八门妙趣横生的整数序列, 这些序列可以在 1995 年出版的《整数序列百科全书》(Online Encyclopedia of Integer Sequences) ([SIPI95]) 中找到。经过扩充的序列表出现在网络上, 定期地加入新序列。还有通过网络访问的程序, 用来从百科全书中查找给定初始项的解序列。

2.4.4 求和

下一步介绍求和记号。首先描述用来表达序列 $\{a_n\}$ 中

$$a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$$

这些项之和的记号。用记号

$$\sum_{j=m}^n a_j, \quad \sum_{j=m}^n a_j \quad \text{或} \quad \sum_{1 \leq j \leq n} a_j$$

表示

$$a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

此处变量 j 称为求和下标，字母 j 是任意选择作为变量的；换句话说，可以使用任何其他字母，比如 i 或 k 。或者用记号写成

$$\sum_{j=m}^n a_j = \sum_{i=m}^n a_i = \sum_{k=m}^n a_k$$

此处求和下标依次等于从下限 m 开始到上限 n 为止的所有整数。用大写希腊字母 Σ 表示求和。通常的算术定律也适用于求和。例如，当 a 和 b 均为实数时，有

$$\sum_{j=1}^n (ax_j + by_j) = a \sum_{j=1}^n x_j + b \sum_{j=1}^n y_j$$

这里， $x_1, x_2, \dots, x_n$ 及 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 均为实数（此处我们不给出该恒等式的正式证明）。

下面给出求和记号的若干例子。

例 9 表示序列 $\{a_n\}$ 前 100 项之和，对 $n=1, 2, 3, \dots, a_n=1/n$ 。

解 求和下标下限为 1，上限为 100。把这个和写成

$$\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j}$$

例 10 $\sum_{j=1}^5 j^2$ 的值是什么？

解 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^5 j^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 \\ &= 1 + 4 + 9 + 16 + 25 \\ &= 55 \end{aligned}$$

例 11 $\sum_{k=4}^8 (-1)^k$ 的值是什么？

解 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{k=4}^8 (-1)^k &= (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6 + (-1)^7 + (-1)^8 \\ &= 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

有时候平移一下和中的求和下标会有用处。通常这样做是当两个和需要相加而求和下标却不一致时。当平移求和下标时，重要的是适当地修改对应求和项。下面的例子解释这一点。

例 12 假定有和

$$\sum_{j=1}^5 j^2$$

但是希望求和下标在 0 和 4 之间（而不是在 1 和 5 之间）依次取值。为此令 $k=j-1$ 。于是新的求和下标从 0 到 4 依次取值，项 j^2 变成 $(k+1)^2$ 。因此

$$\sum_{j=1}^5 j^2 = \sum_{k=0}^4 (k+1)^2$$

容易验证两个和都是 $1+4+9+16+25=55$ 。

几何序列各项之和经常出现(这种和称为几何级数)。定理1给出几何序列各项之和的公式。

定理1 若 a 和 r 都是实数且 $r \neq 0$, 则

$$\sum_{j=0}^n ar^j = \begin{cases} \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1} & \text{若 } r \neq 1 \\ (n+1)a & \text{若 } r = 1 \end{cases}$$

证 设

$$S = \sum_{j=0}^n ar^j$$

要计算 S , 先给等式两边同乘 r , 然后如下变换得出的和:

$$\begin{aligned} rS &= r \sum_{j=0}^n ar^j && \text{用求和公式代替 } S \\ &= \sum_{j=0}^n ar^{j+1} && \text{分配律} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} ar^k && \text{转换求和下标, 令 } k = j+1 \\ &= \left(\sum_{k=0}^n ar^k \right) + (ar^{n+1} - a) && \text{去除 } k = n+1 \text{ 项, 添加 } k = 0 \text{ 项} \\ &= S + (ar^{n+1} - a) && \text{用 } S \text{ 代替求和公式} \end{aligned}$$

从这些等式看出

$$rS = S + (ar^{n+1} - a)$$

解出 S 就证明了若 $r \neq 1$, 则

$$S = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}$$

若 $r=1$, 则显然这个和等于 $(n+1)a$. □

例13 很多情况下要求双重求和(比如在计算机程序中嵌套循环的分析中)。双重求和的例子是

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 ij$$

要计算双重求和, 先展开内层求和, 再继续计算外层求和:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 ij &= \sum_{i=1}^4 (i + 2i + 3i) = \sum_{i=1}^4 6i \\ &= 6 + 12 + 18 + 24 = 60 \end{aligned}$$

还用求和记号把函数的所有值相加, 或把指标集的各项加起来, 其中求和下标依次等于集合中的所有值。换句话说, 用

$$\sum_{s \in S} f(s)$$

表示对 S 中所有元素 s 的值 $f(s)$ 求和。

例14 $\sum_{s \in \{0, 2, 4\}} s$ 的值是什么?

解 由于 $\sum_{s \in \{0, 2, 4\}} s$ 表示对集合 $\{0, 2, 4\}$ 中所有元素 s 的值求和, 所以

$$\sum_{s \in \{0, 2, 4\}} s = 0 + 2 + 4 = 6$$

某些求和在离散数学中反复出现。掌握这种求和的一组公式会有用处, 所以表2-5为常见求和提供袖珍公式表。

定理1推导了表中的第一个公式。接下来三个公式给出了前 n 个正整数的求和、平方求和以及立方求和。可用许多不同方式推导这三个公式(例如, 参见本节末练习11)。表中最后两个公式与无穷级数有关, 很快就会讨论到。

表 2-5 若干有用的求和公式

和	闭 形 式	和	闭 形 式
$\sum_{k=0}^n ar^k (r \neq 0)$	$\frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}, r \neq 1$	$\sum_{k=1}^n k^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{k=1}^n k$	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\sum_{k=0}^{\infty} x^k, x < 1$	$\frac{1}{1-x}$
$\sum_{k=1}^n k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}, x < 1$	$\frac{1}{(1-x)^2}$

例 15 解释了表 2-5 中的公式是如何使用的。

例 15 求 $\sum_{k=50}^{100} k^2$ 。

解 首先注意由于 $\sum_{k=1}^{100} k^2 = \sum_{k=1}^{49} k^2 + \sum_{k=50}^{100} k^2$, 所以有

$$\sum_{k=50}^{100} k^2 = \sum_{k=1}^{100} k^2 - \sum_{k=1}^{49} k^2$$

利用表 2-5 的公式 $\sum_{k=1}^n k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$, 看出

$$\sum_{k=50}^{100} k^2 = \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} - \frac{49 \cdot 50 \cdot 99}{6} = 338\,350 - 40\,425 = 297\,925$$

若干无穷级数 尽管本书中大多数求和都是有穷求和, 但在离散数学某些部分中无穷级数却是重要的。通常在微积分课程中研究无穷级数, 甚至这些级数的定义也需要使用微积分, 但有时它们也会出现在离散数学中, 因为离散数学也可以处理无穷离散对象集。尤其是将来在离散数学的研究中, 我们将会发现例 16 和例 17 中无穷级数的闭形式非常有用。

例 16 (本例要求微积分知识) 设 x 是实数满足 $|x| < 1$ 。求 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 。

Example 解 根据定理 1, 令 $a=1$ 和 $r=x$ 就看出 $\sum_{n=0}^k x^n = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}$ 。由于 $|x| < 1$, 所以当 k 趋于无穷时, x^{k+1} 趋于 0。所以

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} = \frac{-1}{x - 1} = \frac{1}{1 - x}$$

对已有公式进行微分或积分就产生新的求和公式。

例 17 (本例要求微积分知识) 对下列方程两边微分

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

根据例 16 就发现

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

(根据关于无穷级数的定理, 对 $|x| < 1$ 这个微分有效。)

2.4.5 基数

回忆一下, 2.1 节把有限集的基数定义成集合中的元素个数。换句话说, 有限集合的基数告诉我们何时两个有限集大小相同, 何时一个比另一个大。那么我们是否可以将这种思想推广到无穷集合呢? 回忆一下 2.3 节的练习 34: 任何两个相同大小的有限集之间必然存在一个一一对应。这个发现使得我们可将基数概念推广到所有集合, 包括有限集和无限集(详见定义 4)。

定义 4 集合 A 和集合 B 有相同的基数, 当且仅当存在从 A 到 B 的一一对应。

现在把无限集分为两组, 一组与自然数集合基数相同, 另一组基数不同。

定义 5 有限集或与自然数集基数相同的集合都称为可数的。不是可数的集合称为不可数的。

如果一个无穷集合 S 是可数的，我们用符号 $\aleph_0$ 来表示集合 S 的基数 ($\aleph$ 是希伯来语，希伯来字母表的第一个字母)。记 $|S| = \aleph_0$ ，且说 S 有基数“希伯来零”。

现在给出可数集合与不可数集合的例子。

例 18 证明：正奇数集合是可数集合。

解 要证明正奇数集合是可数的，就说明这个集合与正整数集合之间的一一对应。考虑从 $\mathbb{Z}^+$ 到正奇数集合的函数

$$f(n) = 2n - 1$$

证明 f 既是单的又是满的，即证明 f 是一一对应的。为了看出 f 是单的，假定 $f(n) = f(m)$ 。于是 $2n - 1 = 2m - 1$ ，所以 $n = m$ 。为了看出 f 是满的，假定 t 是正奇数。于是 t 比偶数 $2k$ 少 1，其中 k 是自然数。因此 $t = 2k - 1 = f(k)$ 。图 2-18 显示这个一一对应。

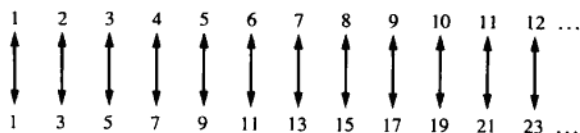


图 2-18 在 $\mathbb{Z}^+$ 和正奇数集合之间的一一对应

无限集是可数的，当且仅当可以把集合中的元素列成序列 (下标是正整数)。这是因为从正整数集到集合 S 的一一对应 f 可表示成序列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ，其中 $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, $\dots$, $a_n = f(n)$, $\dots$ 例如，奇数集列成序列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ，其中 $a_n = 2n - 1$ 。

我们可以通过列举其所包含元素来证明所有整数的集合是可数的。

例 19 证明所有整数的集合是可数的。

证 我们可用以 0 开头，正负整数交替出现的序列来列出所有整数：0, 1, -1, 2, -2, ... 这样，可以确定正整数集与整数集之间的一一对应 (证明函数 $f(n) = n/2$ (n 为偶数)，及 $f(n) = -(n-1)/2$ (n 为奇数) 即为满足条件的一个函数，具体过程留给读者完成)。据此，所有整数的集合是可数的。

奇数集与整数集均为可数集合并不令人感到意外，但许多人对于有理数集也是可数集合的结果颇为惊讶，详见例 20 的证明。

例 20 证明：正有理数集合是可数的。

解 正有理数集合是可数的，这似乎令人惊讶，但下面说明如何把正有理数列成序列 $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ 首先，注意每个正有理数都是两个正整数之商 p/q 。这样排列正有理数：在第 1 行列出分母 $q=1$ 的有理数，在第 2 行列出分母 $q=2$ 的有理数，等等，如图 2-19 所示。

把有理数列成序列的关键是：沿着图 2-19 所示路线，先列出满足 $p+q=2$ 的正有理数 p/q ，再列出满足 $p+q=3$ 的正有理数，然后列出满足 $p+q=4$ 的正有理数，等等。每当遇到已经列出过的数 p/q ，就不再次列出了。例如，当遇到 $2/2=1$ 时就不列出了，因为已经列出过 $1/1=1$ 。所构造的正有理数表的初始项是 1, $1/2$, 2, 3, $1/3$, $1/4$, $2/3$, $3/2$, 4, 5, 等等。由于所有有理数都只列出一次 (读者可以验证它)，所以已经证明了有理数集合是可数的。

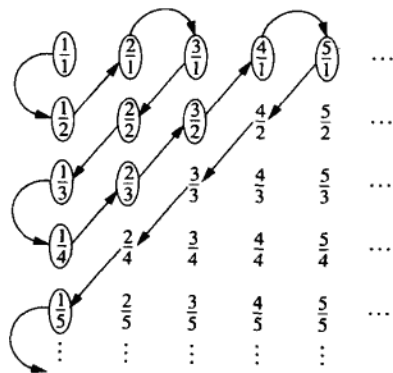


图 2-19 正有理数是可数的

我们已经看到有理数集也是可数集合，那么是否有候选的不可数集合呢？对此，第一个需关注的集合就是实数集。在例 21 中，我们使用乔治·康托尔于 1879 年引入的所谓康托尔对角化论证的重要证明方法来证明实数集合是不可数的。在数理逻辑和计算理论中大量

地使用这个证明方法。

例 21 证明: 实数集合是不可数集合。

解 要证明实数集合是不可数的, 就假定实数集合是可数的并得出矛盾。于是, 所有落在 0 和 1 之间的实数所成的子集合也是可数的(因为可数集合的所有子集合都是可数的)。在此假设下, 在 0 和 1 之间的实数按照某种顺序列出, 比如说 $r_1, r_2, r_3, \dots$, 设这些实数的十进制表示为

$$\begin{aligned} r_1 &= 0.d_{11}d_{12}d_{13}d_{14}\dots \\ r_2 &= 0.d_{21}d_{22}d_{23}d_{24}\dots \\ r_3 &= 0.d_{31}d_{32}d_{33}d_{34}\dots \\ r_4 &= 0.d_{41}d_{42}d_{43}d_{44}\dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

其中 $d_{ij} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 。(例如, 如果 $r_1 = 0.237\,941\,02\dots$, 就有 $d_{11} = 2, d_{12} = 3, d_{13} = 7$, 等等。)于是, 构造新的实数具有十进制展开式 $r = 0.d_1d_2d_3d_4\dots$, 其中用下列规则确定十进制数字:

$$d_i = \begin{cases} 4 & \text{若 } d_{ii} \neq 4 \\ 5 & \text{若 } d_{ii} = 4 \end{cases}$$

(例如, 假定 $r_1 = 0.237\,941\,02\dots, r_2 = 0.445\,901\,38\dots, r_3 = 0.091\,187\,64\dots, r_4 = 0.805\,539\,00\dots$, 等等, 于是 $r = 0.d_1d_2d_3d_4\dots = 0.4544\dots$, 其中因为 $d_{11} \neq 4, d_1 = 4$; 因为 $d_{22} = 4, d_2 = 5$; 因为 $d_{33} \neq 4, d_3 = 4$; 因为 $d_{44} \neq 4, d_4 = 4$; 等等。)

每个实数都有唯一的十进制展开式(展开式结尾全部由数字 9 组成的可能性除外)。于是, 实数 r 不等于 $r_1, r_2, \dots$ 中的任何一个, 因为对每个 i 来说, r 的十进制展开式与 r_i 的十进制展开式在小数点右边第 i 位是不同的。

由于存在着不在列表中而在 0 和 1 之间的实数 r , 所以可以列出在 0 和 1 之间所有实数的假设就必定为假。因此, 不能列出在 0 和 1 之间的所有实数, 在 0 和 1 之间的实数集合是不可数的。任何含有不可数子集合的集合都是不可数的(参见本节末练习 19)。因此实数集合是不可数的。 ■

练习

- 求序列 $\{a_n\}$ 的下列各项, 其中 $a_n = 2 \cdot (-3)^n + 5^n$.
 - a_0
 - a_1
 - a_4
 - a_5
- 序列 $\{a_n\}$ 的项 a_0, a_1, a_2 和 a_3 是什么? 其中 a_n 等于
 - $2^n + 1$
 - $(n+1)^{n+1}$
 - $\lfloor n/2 \rfloor$
 - $\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil$
- 列出下列各序列的前 10 项。
 - 从 2 开始, 每个后续项都比前一项多 3 的序列。
 - 按升序把每个正整数列出 3 次的序列。
 - 按升序把每个正奇数列出 2 次的序列。
 - 第 n 项是 $n! - 2^n$ 的序列。
 - 从 3 开始, 每个后续项都是前一项的 2 倍的序列。
 - 前两项都是 1, 每个后续项都是前两项之和的序列。(这是著名的斐波那契序列, 后文有述。)
 - 第 n 项是数 n 的二进制展开式的位数的序列。
 - 第 n 项是第 n 个英文单词中包含的字母数的序列。
- 求至少 3 个不同的序列, 初始项都是 1, 2, 4, 用简单的公式或规则产生各项。
- 对于下列每个整数表, 给出简单的公式或规则, 以产生从给定的表开始的整数序列项。假定你给出的公式或规则是正确的, 据此写出相应序列的后续三项。
 - 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, ...
 - 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, ...
 - 1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, ...
 - 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, ...
 - 15, 8, 1, -6, -13, -20, -27, ...
 - 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, 47, ...
 - 2, 16, 54, 128, 250, 432, 686, ...
 - 2, 3, 7, 25, 121, 721, 5041, 40321, ...

**6. 证明: 如果 a_n 表示不是完全平方的第 n 个正整数, 则 $a_n = n + \{\sqrt{n}\}$, 其中 $\{x\}$ 表示最接近于实数 x 的整数。

7. 下列各和的值是什么？

$$a) \sum_{k=1}^5 (k+1)$$

$$b) \sum_{j=0}^4 (-2)^j$$

$$c) \sum_{i=1}^{10} 3$$

$$d) \sum_{j=0}^8 (2^{j+1} - 2^j)$$

8. 下列每个几何序列这些项之和的值是什么？

$$a) \sum_{j=0}^5 3 \cdot 2^j$$

$$b) \sum_{j=1}^8 2^j$$

$$c) \sum_{j=2}^8 (-3)^j$$

$$d) \sum_{j=0}^8 2 \cdot (-3)^j$$

9. 计算下列各双重和。

$$a) \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^3 (i+j)$$

$$b) \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^3 (2i+3j)$$

$$c) \sum_{i=1}^3 \sum_{j=0}^2 i$$

$$d) \sum_{i=0}^2 \sum_{j=1}^3 ij$$

10. 证明： $\sum_{j=1}^n (a_j - a_{j-1}) = a_n - a_0$ ，其中 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 是实数序列。这种类型的和称为递进。

11. 从 $k=1$ 到 $k=n$ 对恒等式 $k^2 - (k-1)^2 = 2k-1$ 两边求和，并且利用练习 10，求：

$$a) \sum_{k=1}^n (2k-1) \text{ 的公式 (前 } n \text{ 个奇自然数之和)}$$

$$b) \sum_{k=1}^n k \text{ 的公式}$$

12. 用表 2-5 求 $\sum_{k=100}^{200} k$ 。

*13. 当 m 是正整数时，求 $\sum_{k=0}^m \lfloor \sqrt{k} \rfloor$ 的公式。

对于乘积也有一个特殊记号。 $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ 的乘积表示为 $\prod_{j=m}^n a_j$ 。

14. 下列乘积的值是什么？

$$a) \prod_{i=0}^{10} i$$

$$b) \prod_{i=5}^8 i$$

$$c) \prod_{i=1}^{100} (-1)^i$$

$$d) \prod_{i=1}^{10} 2$$

回忆一下，阶乘函数在正整数 n 上的值(表示成 $n!$)是从 1 到 n 的正整数之积。另外规定 $0! = 1$ 。

15. 求 $\sum_{j=0}^i j!$ 。

16. 确定下列各集合是否可数或不可数。对可数的集合，说明在自然数集合和该集合之间的一一对应。

a) 负整数

b) 偶数

c) 0 和 $1/2$ 之间的实数

d) 7 的整倍数

17. 确定下列各集合是否可数或不可数。对可数的集合，说明在自然数集合和该集合之间的一一对应。

a) 不包含位 0 的全部位串

b) 表示成两整数之商时分母不小于 4 的全部正有理数

c) 十进制表示形式不包含 0 的实数

d) 十进制表示形式包含有限个 1 的实数

18. 如果 A 是不可数集合而 B 是可数集合，那么 $A-B$ 一定不可数吗？

19. 假设 A, B 是集合，证明：如果 A 是不可数集合并且 $A \subseteq B$ ，则 B 是不可数的。

20. 证明：若 A 和 B 是具有相同基数的两个集合， C 和 D 是具有相同基数的两个集合，则 $A \times C$ 与 $B \times D$ 具有相同基数。

*21. 证明：可数的多个可数集合的并集是可数的。

*22. 证明：所有有限位串的集合是可数的。

*23. 证明：用具体的程序设计语言编写的所有计算机程序的集合是可数的。[提示：可以认为用程序设计语言编写的计算机程序是有穷字母表上的符号串。]

*24. 如果存在着求函数值的计算机程序，就说这个函数是可计算的。用练习 23 证明：存在着不可计算的函数。

关键术语和结果

术语

集合：一组互不相同的对象。

公理：理论的一个基本假设。

悖论：逻辑上的不一致性。

集合的元素、成员：集合中的一个对象。

$\emptyset$ (空集)：没有成员的集合。

全集：包含考虑中的所有对象的集合。

文氏图：一个或多个集合的一种图形表示。

$S=T$ (集合相等)： S 和 T 有相同的元素。

$S \subseteq T$ (S 是 T 的子集)： S 的每个元素也是 T 的元素。

$S \subset T$ (S 是 T 的真子集)： S 是 T 的子集，且 $S \neq T$ 。

有限集：含 n 个元素的集合，其中 n 是非负整数。

无限集：不是有限集的集合。

$|S|$ (S 的基数)： S 中元素的个数。

$P(S)$ (S 的幂集合)： S 的所有子集的集合。

$A \cup B$ (A 和 B 的并集)：包含那些至少属于 A 和 B 之一的元素的集合。

$A \cap B$ (A 和 B 的交集)：包含那些既属于 A 又属于 B 的元素的集合。

$A - B$ (A 和 B 的差集)：包含那些只属于 A 而不属于 B 的元素的集合。

$\bar{A}$ (A 的补集)：全集中不属于 A 的元素的集合。

$A \oplus B$ (A 和 B 的对称差)：包含恰属于 A 和 B 之一的那些元素的集合。

成员表：显示集合中元素的成员关系的表格。

从 A 到 B 的函数：一种指派，为 A 中每个元素指派 B 中恰好一个元素。

f 的定义域：指集合 A ，若 f 是从 A 到 B 的函数。

f 的伴域：指集合 B ，若 f 是从 A 到 B 的函数。

b 是 f 之下 a 的像： $b=f(a)$ 。

a 是 f 之下 b 的原像： $f(a)=b$ 。

f 的值域： f 的像的集合。

映上函数，满射：从 A 到 B 的函数，使 B 的每个元素都是 A 中某元素的像。

一对一函数，内射：定义域中每个元素的像都不相同的函数。

一一对应，双射：既是一对一又是映上的函数。

f 的逆：(当 f 是双射时)颠倒由 f 给出的对应关系的函数。

$f \circ g$ (f 和 g 的组合)：为 x 指派 $f(g(x))$ 的函数。

$\lfloor x \rfloor$ (下取整函数)：不超过 x 的最大整数。

$\lceil x \rceil$ (上取整函数)：大于或等于 x 的最小整数。

序列：以整数集合的子集作为定义域的函数。

几何序列：形如 $a, ar, ar^2, \dots$ 的序列，其中 a 和 r 都是实数。

等差序列：形如 $a, a+d, a+2d, \dots$ 的序列，其中 a 和 d 都是实数。

串：有穷序列。

空串：长度为 0 的串。

$\sum_{i=1}^n a_i$ ：和 $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 。

$\prod_{i=1}^n a_i$ ：积 $a_1 a_2 \dots a_n$ 。

可数集：有穷集或可与正整数集一一对应的集合。

不可数集：不是可数的集合。

康托尔对角化论证：可用来证明实数集合是不可数的证明技术。

结果

2.2 节表 2-1 给出诸多集合恒等式。

2.4 节表 2-5 给出求和公式。

有理数集是可数的。
实数集是不可数的。

复习题

1. 解释一个集合是另一个集合子集的含义，如何证明一个集合是另一个集合的子集？
2. 空集表示什么？证明空集是任何集合的子集。
3. a) 定义 $|S|$ (集合 S 的基数)。
b) 给出 $|A \cup B|$ 的公式，其中 A, B 均为集合。
4. a) 定义集合 S 的幂集。
b) 何时空集包含在集合 S 的幂集中？
c) 包含 n 个元素的集合 S ，其幂集含有多少个元素？
5. a) 定义两个集合的并集、交集、差集以及对称差。
b) 正整数集与奇数集的并集、交集、差集及对称差分别是什么？
6. a) 解释两集合相等的含义。
b) 描述尽可能多的方法以证明两集合相等。
c) 用至少两种不同的方法证明 $A - (B \cap C)$ 与 $(A - B) \cup (A - C)$ 是相等的。
7. 解释逻辑等价与集合恒等之间的关系。
8. a) 定义一个函数的定义域、伴域及值域。
b) 令 $f(n) = n^2 + 1$ 为从整数集到整数集的一个函数，则其定义域、伴域、值域分别是什么？
9. a) 解释从正整数集到正整数集的一对一函数的含义。
b) 解释从正整数集到正整数集的映上函数的含义。
c) 列举一个从正整数集到正整数集的既一对一又映上的函数。
d) 列举一个从正整数集到正整数集的一对一而非映上的函数。
e) 列举一个从正整数集到正整数集的非一对一但映上的函数。
f) 列举一个从正整数集到正整数集的既非一对一又非映上的函数。
10. a) 定义一个函数的逆函数。
b) 何时一个函数存在逆函数？
c) 从整数集到整数集的函数 $f(n) = 10 - n$ 是否有逆函数？若有，其逆函数是什么？
11. a) 定义从实数集到整数集的下取整函数和上取整函数。
b) 对于哪些 x 而言， $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ ？
12. 以 8, 14, 32, 86, 248 开头的序列之项推测一个表达式，并据此求出该序列后续三项。
13. 当 $r \neq 1$ 时，几何序列各项之和： $a + ar + \cdots + ar^n$ 是什么？
14. 证明：奇数集合是不可数的。
15. 给一个不可数集合的例子。

补充练习

1. 令 A 为包含字母 x 的英文单词集合， B 为包含字母 q 的英文单词集合。试表示下列 A, B 组合而得的集合：
 - a) 不包含字母 x 的英文单词集合
 - b) 不包含字母 x 和 q 的英文单词集合
 - c) 包含字母 x 而不包含字母 q 的英文单词集合
 - d) 不包含字母 x 或 q 的英文单词集合
 - e) 包含 x 或 q 但不同时包含二者的英文单词集合
2. 证明：若 A 是 B 的子集，则 A 的幂集是 B 的幂集的子集。
3. 假定 A 和 B 均为集合且满足 A 的幂集是 B 的幂集的子集，则 A 一定是 B 的子集吗？
4. 令 E 表示偶数集合， O 表示奇数集合， Z 一如往常表示整数集合。判断下列每个集合所代表的含义：
 - a) $E \cup O$
 - b) $E \cap O$
 - c) $Z - E$
 - d) $Z - O$
5. 证明：若 A 和 B 均为集合，则 $A - (A - B) = A \cap B$ 。
6. 令 A 和 B 为两个集合，证明： $A \subseteq B$ 当且仅当 $A \cap B = A$ 。
7. 令 A, B, C 为三个集合，证明： $(A - B) - C$ 不一定等于 $A - (B - C)$ 。

8. 假定 A 和 B 均为集合, 证明或否定: $(A-B)-C=(A-C)-B$.
9. 假定 A, B, C 和 D 均为集合, 证明或否定: $(A-B)-(C-D)=(A-C)-(B-D)$.
10. 证明: 若 A 和 B 均为有限集合, 则 $|A \cap B| \leq |A \cup B|$ 并判断何时等号成立.
11. 令 A 和 B 为有限全集 U 的两个子集, 按照递增顺序列举出下列各项:
- a) $A, |A \cup B|, |A \cap B|, |U|, |\emptyset|$
- b) $|A-B|, |A \oplus B|, |A|+|B|, |A \cup B|, |\emptyset|$
12. 令 A 和 B 为有限全集 U 的两个子集, 证明: $|\bar{A} \cap \bar{B}| = |U| - |A| - |B| + |A \cap B|$.
13. 令 f 和 g 分别为从 $\{1, 2, 3, 4\}$ 到 $\{a, b, c, d\}$ 和从 $\{a, b, c, d\}$ 到 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的两个函数, 且满足 $f(1)=d, f(2)=c, f(3)=a, f(4)=b$ 和 $g(a)=2, g(b)=1, g(c)=3, g(d)=2$. 则
- a) f 是一一对应函数吗? g 呢?
- b) f 是映上函数吗? g 呢?
- c) f 或 g 是否有逆函数? 若有, 求出其逆函数.
14. 令 f 是从集合 A 到集合 B 的一一对应函数, S, T 均为 A 的子集. 证明: $f(S \cap T) = f(S) \cap f(T)$.
15. 举例证明: 对于非一一对应函数 f , 练习 14 中的等式不一定成立.

假定 f 是从 A 到 B 的一个函数. 我们按照如下规则定义从 $P(A)$ 到 $P(B)$ 的函数 S_f : 对于 A 的每个子集 X , 有 $S_f(X) = f(X)$. 类似地, 我们定义从 $P(B)$ 到 $P(A)$ 的函数 $S_{f^{-1}}$ (按照如下规则: 对于 B 的每个子集 Y , 有 $S_{f^{-1}}(Y) = f^{-1}(Y)$). 并且, 将使用 2.3 节的定义 4 以及集合逆像的定义.

- *16. a) 证明: 若 f 是从 A 到 B 的一一对应函数, 则 S_f 是从 $P(A)$ 到 $P(B)$ 的一一对应函数.
- b) 证明: 若 f 是从 A 到 B 的映上函数, 则 S_f 是从 $P(A)$ 到 $P(B)$ 的映上函数.
- c) 证明: 若 f 是从 A 到 B 的映上函数, 则 $S_{f^{-1}}$ 是从 $P(B)$ 到 $P(A)$ 的一一对应函数.
- d) 证明: 若 f 是从 A 到 B 的一一对应函数, 则 $S_{f^{-1}}$ 是从 $P(B)$ 到 $P(A)$ 的映上函数.
- e) 利用 a) 并通过 d) 得出结论: 若 f 是从 A 到 B 的一一对应, 则 S_f 是从 $P(A)$ 到 $P(B)$ 的一一对应且 $S_{f^{-1}}$ 是从 $P(B)$ 到 $P(A)$ 的一一对应.
17. 证明: 若 f 和 g 均为从 A 到 B 的函数且满足 $S_f = S_g$ (使用练习 16 前言中的定义), 则对于所有 $x \in A$ 必有 $f(x) = g(x)$.
18. 证明: 若 n 是整数, 则 $n = \lceil n/2 \rceil + \lfloor n/2 \rfloor$.
19. 对于哪些实数 x, y 而言, $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ 成立?
20. 对于哪些实数 x, y 而言, $\lceil x+y \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$ 成立?
21. 对于哪些实数 x, y 而言, $\lceil x+y \rceil = \lceil x \rceil + \lfloor y \rfloor$ 成立?
22. 证明: 对于任一整数 n , $\lfloor n/2 \rfloor \lceil n/2 \rceil = \lfloor n^2/4 \rfloor$ 成立.
23. 证明: 若 m 是整数而 x 非整数, 则 $\lfloor x \rfloor + \lfloor m-x \rfloor = m-1$, 若 x 也是整数, 则等于 m .
24. 证明: 若 x 是实数, 则 $\lfloor \lfloor x/2 \rfloor / 2 \rfloor = \lfloor x/4 \rfloor$.
25. 证明: 若 n 是奇数, 则 $\lceil n^2/4 \rceil = (n^2+3)/4$.
26. 证明: 若 m, n 均为正整数, x 为实数, 则 $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + n}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x+n}{m} \right\rfloor$.
- *27. 证明: 若 m 是正整数, x 是实数, 则 $\lfloor mx \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{m} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{m} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor x + \frac{m-1}{m} \right\rfloor$.
- *28. 下面我们来定义乌拉姆数并规定: $u_1=1, u_2=2$. 深入一步, 在判断了小于 n 的整数是否是乌拉姆数之后, 若 n 可以被唯一地记作两个不同乌拉姆数之和, 则令 n 等于下一个乌拉姆数. 注意: $u_3=3, u_4=4, u_5=6, u_6=8$.
- a) 求前 20 个乌拉姆数.
- b) 证明存在无穷多个乌拉姆数.
29. 求 $\prod_{k=1}^{100} \frac{k+1}{k}$ 的值 (此处所使用的乘积符号在 2.4 节练习 14 前言有过定义).
- *30. 试给出一个规则以产生以 1, 3, 4, 8, 15, 27, 50, 92... 开头的序列项, 并据此求出该序列的后续四项.
- *31. 试给出一个规则以产生以 2, 3, 3, 5, 10, 13, 39, 43, 172, 177, 885, 891... 开头的序列项, 并据此求出该序列的后续四项.
- *32. 证明: 若 A, B 均为可数集合, 则 $A \times B$ 也为可数集合.

计算机题目

按给定的输入和输出写程序。

1. 给出含有 n 个元素的集合的两个子集 A, B ，利用位串求出 $\bar{A}, A \cup B, A \cap B, A - B, A \oplus B$ 。
2. 给出来自同一全集的两个多重集合 A, B ，试求 $A \cup B, A \cap B, A - B$ 以及 $A + B$ (参见 2.2 节练习 30 前言)。
3. 给出模糊集合 A, B ，试求 $\bar{A}, A \cup B$ 以及 $A \cap B$ (参见 2.2 节练习 31 前言)。
4. 给出一个从 $\{1, 2, \dots, n\}$ 到整数集合的函数 f ，判断 f 是否是一对一函数。
5. 给出一个从 $\{1, 2, \dots, n\}$ 到其自身的函数 f ，判断 f 是否是映上函数。
6. 给出一个从 $\{1, 2, \dots, n\}$ 到其自身的双射 f ，求 f^{-1} 。

计算和研究

使用一个计算程序或你已完成的程序做下面的练习。

1. 给出两个有限集，试列出这两个集合笛卡儿积中的所有元素。
2. 给出一个有限集，试列出其幂集中的所有元素。
3. 计算从集合 S 到集合 T 的一对一函数的个数，其中 S, T 均为任意大小的有限集。你能否给出这样的函数总个数的一个公式？(我们将在第 3 章给出该公式。)
4. 计算从集合 S 到集合 T 的映上函数的个数，其中 S, T 均为任意大小的有限集。你能否给出这样的函数总个数的一个公式？(我们将在第 4 章给出该公式。)
- *5. 对用以产生序列项的不同规则，随机选取这些规则中的一个，并使用该规则产生特定序列的程序进行汇总。利用提示序列后续项的交互式程序部分判断解答是否是预期的后续项。

写作题目

用课本以外的资料，按下列要求写成短文。

1. 讨论一套公理化集合理论是如何避免罗素悖论而形成的？
2. 调查函数概念最早出现在哪，试描述当时这种思想是如何被运用的。
3. 解释发现《整数序列百科全书》巨大作用的不同方式，并描述几个非比寻常的序列以及它们是如何出现的。
4. 定义最新提出的 EKG 序列并描述它的某些性质以及有关它的一些未解问题。
5. 查阅超越数的定义。解释如何证明这样的数存在以及这些数是如何被构造出来的。考虑哪些典型数可以作为超越数，而哪些典型数是否是超越数至今仍未可知。
6. 讨论无穷基数及连续统假设。

计 数

组合数学这一研究个体安排的学科，是离散数学的重要部分。早在17世纪就开始了这类课题的研究，当时在赌博游戏的研究中出现了组合问题。枚举，具有确定性质的个体的计数，是组合数学的一个重要的部分。我们必须对个体计数来求解许多不同类型的问题。例如，用计数确定算法的复杂性。计数也用于确定是否存在能够充分满足需求的电话号码或因特网地址。此外，计数技术也广泛用于计算事件的概率。

3.1节将要研究的基本计数规则可以求解各种各样的问题。例如，可以用这些规则来计数美国各种不同可能的电话号码，计算机系统中允许使用的密码，以及在比赛结束时赛跑运动员的不同的名次。另一个重要的组合工具是鸽巢原理，将放在3.2节研究。这个原理指出，当把物体放在盒子里时，若物体比盒子多，那么存在一个盒子包含着至少两个物体。例如，我们可以用这个原理证明在15个或者更多的学生中至少有3人出生在相同的星期几。

我们可以用集合中个体的有序或无序安排来描述许多计数问题。这些安排称作排列和组合，在许多的计数问题中都会用到它们。例如，在2000个学生参加的考试竞赛中最终将有100个获胜者被邀请赴宴。我们可以枚举将被邀请的100个学生的可能的组合，以及最终10名获奖者的产生方式。

组合数学的另一个问题涉及生成某个特定类型的所有排列。这在计算机模拟中通常是很重要的。我们将设计算法来生成各种类型的排列。

3.1 计数基础

3.1.1 引言

一个计算机系统的密码由6、7或8个字符组成。每个字符必须是数字或字母表中的字母。每个密码必须至少包含一位数字。问有多少个这样的密码？本节将介绍回答这个问题及各种各样的其他计数问题所需要的技术。

数学和计算机科学中存在着计数问题。例如，我们必须为成功的实验结果和所有可能的实验结果计数，以确定离散事件的概率。我们需要对某个算法用到的操作数计数，以便研究它的时间复杂性。

本节将介绍基本的计数方法。这些方法是几乎所有计数技术的基础。

3.1.2 基本的计数原则

 我们将提出两个基本的计数原则，乘积法则和求和法则。然后将说明怎样用它们来求解许多不同的计数问题。

当一个过程由独立的任务组成时使用乘积法则。

乘积法则 假定一个过程可以被分解成两个任务。如果完成第一个任务有 n_1 种方式，在第一个任务完成之后有 n_2 种方式完成第二个任务，那么完成这个过程有 $n_1 n_2$ 种方式。

 **例1至例10**显示怎样使用乘积法则。

例1 一个新建公司中只有两个雇员 Sanchez 和 Patel，公司租用了一个大楼的底层，共12个办公室。有多少种方法为这两个雇员分配办公室？

解 对这两个雇员分配办公室的过程是这样的：为 Sanchez 分配办公室，有12种方法，为 Patel 分配一个不同的办公室，有11种方法。根据乘法规则，为这两个雇员分配办公室共有 $12 \cdot 11 = 132$ 种方法。 ■

例2 用一个字母和一个不超过100的正整数给礼堂的座位编号。那么不同编号的座位最多有多少?

解 给一个座位编号的过程由两个任务组成,即从26个字母中先选择一个字母分配给这个座位,然后再从100个正整数中选择一个整数分配给它。乘积法则表明一个座位可以有 $26 \cdot 100 = 2600$ 种不同的编号方式。因此,不同编号的座位数至多是2600。 ■

例3 某个计算机中心有32台微机,每台微机有24个端口。问在这个中心里有多少个不同的单机端口?

解 选择一个端口的过程由两个任务组成。首先挑一台微机,然后在这台微机上挑一个端口。因为有32种方式选择微机,而不管选择了哪台微机,又有24种方式选择端口,由乘积法则存在 $32 \cdot 24 = 768$ 个端口。 ■

经常会用到推广的乘积法则。假定一个过程由执行任务 $T_1, T_2, \dots, T_m$ 来完成。如果在完成任务之后用 n_i 种方式来完成 T_i ,那么完成这个过程有 $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_m$ 种方式。可以由两个任务的乘积法则通过数学归纳法证明推广的乘积法则。

例4 有多少个不同的7位二进制串?

解 每位有两种选择方式,可以是0或1。因此,乘积法则表明总共有 $2^7 = 128$ 个不同的7位二进制串。 ■

例5 如果每个车牌由3个字母后跟3个数字的序列构成(任何字母的序列都允许),那么有多少个不同的有效的车牌?

解 对3个字母中的每个字母有26种选择,对3个数字中的每个数字有10种选择。因此,由乘积法则总共有 $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 17\,576\,000$ 个可能的车牌。 ■



例6 计数函数 从一个 n 元集到一个 m 元集存在多少个函数?

解 一个函数对于定义域中 m 个元素中的每个元素都要选择陪域中 n 个元素中的一个元素来对应。因此,由乘积法则存在 $n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^m$ 个从 m 元集到 n 元集的函数。例如,从一个3元集到一个5元集存在 5^3 个不同的函数。 ■

例7 计数一对一函数 从一个 m 元集到一个 n 元集存在多少个一对一函数?

解 首先注意到当 $m > n$ 时没有从 m 元集到 n 元集的一对一函数。现在令 $m \leq n$ 。假设定义域中的元素是 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 。有 n 种方式选择函数在 a_1 的值。因为函数是一对一的,可以有 $n-1$ 种方式选择函数在 a_2 的值(因为 a_1 用过的值不能再用)。一般地,有 $n-k+1$ 种方式选择函数在 a_k 的值。由乘积法则,从一个 m 元集到一个 n 元集存在着 $n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$ 个一对一函数。例如,从一个3元集到一个5元集存在 $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ 个一对一函数。 ■

例8 电话编号计划 在北美,电话号码的格式是由一个编号计划规定的。一个电话号码由10个数字组成,这些数字由一个3位的地区代码、一个3位的局代码以及一个4位的话机代码组成。出于信号的考虑,在一些数字上有某种限制。为了规定允许的格式,令 X 表示可以在0到9之间任意选取的数字, N 表示可以在2到9之间选取的数字,而 Y 表示必须取0或1的数字。下面讨论两个编号计划,分别称为老计划和新计划(老计划是20世纪60年代使用的,已经被新计划代替了,但目前对新号码需求的迅速增长甚至使得这个新计划也将显得落伍了)。正如将要证明的,新计划允许使用更多的号码。

在老计划中,地区代码、局代码和话机代码的格式分别为 NYX 、 NNX 和 $XXXX$,因而电话号码形式为 $NYX-NNX-XXXX$ 。在新计划中,这些代码的格式分别为 NXX 、 NXX 和 $XXXX$,因而电话号码形式为 $NXX-NXX-XXXX$ 。在老计划和新计划下分别可能有多少个不同的北美电话号码?

解 由乘积法则,格式为 NYX 的地区代码有 $8 \cdot 2 \cdot 10 = 160$ 个,格式为 NXX 的地区代码有 $8 \cdot 10 \cdot 10 = 800$ 个。类似地,由乘积法则,存在 $8 \cdot 8 \cdot 10 = 640$ 个格式为 NNX 的局代码。乘积

法则也表明存在着 $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$ 个格式为 XXXX 的话机代码。

因此, 再次使用乘积法则, 结果在老计划下存在

$$160 \cdot 640 \cdot 10\,000 = 1\,024\,000\,000$$

个不同的北美有效的电话号码。在新计划下存在

$$800 \cdot 800 \cdot 10\,000 = 6\,400\,000\,000$$

个不同的电话号码。

例 9 执行下面的代码以后 k 的值是什么?

```

k := 0
for  $i_1 := 1$  to  $n_1$ 
  for  $i_2 := 1$  to  $n_2$ 
    :
    for  $i_m := 1$  to  $n_m$ 
      k := k + 1
  
```

解 k 的初值是 0。这个嵌套的循环每执行一次, k 就加 1。令 T_i 表示执行第 i 个循环的任务, 那么循环执行的次数就是完成任务 $T_1, T_2, \dots, T_m$ 的方法数。因为对每个整数 $i_j, 1 \leq i_j \leq n_j$, 第 j 个循环都执行一次, 执行任务 $T_j (j=1, 2, \dots, m)$ 的方法数就是 n_j 。由乘积法则, 这个嵌套的循环执行了 $n_1 n_2 \cdots n_m$ 次。因此 k 最后的值是 $n_1 n_2 \cdots n_m$ 。

例 10 计数有穷集的子集 用乘积法则证明一个有穷集 S 的不同的子集数是 $2^{|S|}$ 。

解 设 S 是有穷集。按任意的顺序将 S 的元素列成一个表。考虑到在 S 的子集和长为 $|S|$ 的二进制串之间存在着一对一的对应, 即如果表的第 i 个元素在这个子集里, 则该子集对应的二进制的第 i 位为 1, 否则这位为 0。由乘积法则, 存在着 $2^{|S|}$ 个长为 $|S|$ 的二进制串。因此 $|P(S)| = 2^{|S|}$ 。

乘积法则也常用集合的语言表述如下: 如果 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 是有穷集, 那么在这些集合的笛卡儿积中的元素数是每个集合的元素数之积。为把这种表述与乘积法则联系起来, 注意到在笛卡儿积 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m$ 中选一个元素的任务是通过在 A_1 中选一个元素, A_2 中选一个元素, $\dots, A_m$ 中选一个元素来完成的。由乘积法则得到

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_m|$$

现在引入求和法则。

求和法则 如果完成第一项任务有 n_1 种方式, 完成第二项任务有 n_2 种方式, 并且这些任务不能同时完成, 那么完成第一或第二项任务有 $n_1 + n_2$ 种方式。

例 11 说明怎样使用求和法则。

例 11 假定要选一位数学学院的教师或数学专业的学生作为校委会的代表。如果有 37 位数学学院的教师和 83 位数学专业的学生, 那么这个代表有多少种不同的选择?

解 完成第一项任务, 选一位数学学院的教师, 可以有 37 种方式。完成第二项任务, 选一位数学专业的学生, 有 83 种方式。根据求和法则, 结果有 $37 + 83 = 120$ 种可能的方式来挑选这个代表。

可以把求和法则推广到多于两项任务的情况。假定任务 $T_1, T_2, \dots, T_m$ 分别有 $n_1, n_2, \dots, n_m$ 种完成的方式, 并且任何两项任务都不能同时做, 那么完成其中一项任务的方式数是 $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ 。正如例 12 和例 13 所示, 这个推广的求和法则在计数问题中常常用到。这个求和法则可以从两个集合的求和法则使用数学归纳法加以证明(见本节后的练习 30)。

例 12 一个学生可以从三个表中的一个表选择一个计算机课题。这三个表分别包含 23、15 和 19 个可能的课题。那么课题的选择可能有多少种?

解 这个学生有 23 种方式从第一个表中选择课题, 有 15 种方式从第二个表中选择课题, 有

19 种方式从第三个表中选择课题。因此, 共有 $23+15+19=57$ 种选择课题的方式。 ■

例 13 在下面的代码执行后 k 的值是什么?

```

k := 0
for i1 := 1 to n1
    k := k + 1
for i2 := 1 to n2
    k := k + 1
    ⋮
for im := 1 to nm
    k := k + 1

```

解 k 的初值是 0。这个代码块由 m 个不同的循环构成。循环中的每次执行 k 都要加 1。令 T_i 是执行第 i 个循环的任务。因为第 i 个循环被执行 n_i 次, 所以任务 T_i 可以用 n_i 种方式完成。由于任何两个任务不能同时执行, 求和法则证明 k 的最后值, 即完成任务 $T_i (i=1, 2, \dots, m)$ 的方式数是 $n_1+n_2+\dots+n_m$ 。 ■

求和法则可以用集合的语言表述: 如果 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 是不交的集合, 那么在其并集中的元素数是每个集合的元素数之和。为把这种表述与求和法则联系起来, 令 T_i 是从 $A_i (i=1, 2, \dots, m)$ 中选取一个元素的任务。有 $|A_i|$ 种方式做 T_i 。由于任何两个任务不可能同时做, 根据求和法则, 从其中某个集合选择一个元素的方式数, 即在并集中的元素数是

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_m|$$

这个等式仅适用于问题中的集合是不相交的情况。当这些集合含有公共元素时, 情况要复杂得多。本节的后面将对这种情况进行简要的讨论, 更深入的讨论放在第 4 章。

3.1.3 比较复杂的计数问题

许多计数问题不能仅仅使用求和法则或者乘法法则来求解。但是, 许多复杂的计数问题可以使用这两个法则来求解。

Extra Example

例 14 在计算机语言 BASIC 的某个版本中, 变量的名字是含有一个或两个字符的符号串, 其中的大写和小写字母是不加区分的 (一个字符或者取自 26 个英文字母, 或者取自 10 个数字)。此外, 变量名必须以字母作为开始, 并且必须和由两个字符构成的用于程序设计的 5 个保留字相区别。在 BASIC 的这个版本中有多少个不同的变量名?

解 令 V 等于在这个 BASIC 版本中的不同的变量名个数, V_1 是单字符的变量名个数, V_2 是两个字符的变量名个数。那么由求和法则, $V=V_1+V_2$ 。由于单字符变量名必须是字母, 故 $V_1=26$ 。又根据乘法法则存在 $26 \cdot 36$ 个以字母打头以字母数字结尾的 2 位字符串。但是其中 5 个不包含在内, 因此 $V_2=26 \cdot 36-5=931$ 。从而在这个 BASIC 版本中存在 $V=V_1+V_2=26+931=957$ 个不同的变量名。 ■

例 15 计算机系统的每个用户有一个 6~8 个字符构成的密码, 其中每个字符是一个大写字母或者数字, 且每个密码必须至少包含一个数字。有多少可能的密码?

解 设 P 是可能的密码总数, 且 P_6, P_7, P_8 分别表示 6、7 或 8 位的可能的密码数。由求和法则, $P=P_6+P_7+P_8$ 。我们现在找 P_6, P_7 和 P_8 。直接找 P_6 是困难的。而找 6 个大写字母和数字构成的字符串数是容易的, 其中包含那些没有数字的串在内, 然后从中减去没有数字的串数就得到 P_6 。由乘法法则, 6 个字符的串数是 36^6 , 而没有数字的字符串数是 26^6 。因此,

$$P_6 = 36^6 - 26^6 = 2\,176\,782\,336 - 308\,915\,776 = 1\,867\,866\,560$$

类似地得到

$$P_7 = 36^7 - 26^7 = 78\,364\,164\,096 - 8\,031\,810\,176 = 70\,332\,353\,920$$

和

$$P_8 = 36^8 - 26^8 = 2\,821\,109\,907\,456 - 208\,827\,064\,576 = 2\,612\,282\,842\,880$$

从而

$$P = P_6 + P_7 + P_8 = 2\,684\,483\,063\,360$$



例 16 计数因特网网址 在由计算机的物理网络互连而构成的因特网中, 每台计算机(或者更精确地说是计算机的每个网络连接)被分配一个因特网地址。目前正在使用的因特网协议版本 4(IPv4)中, 一个地址是一个 32 位的二进制串。它以网络标识(netid)开始, 后面跟随着主机标识(hostid), 该标识把一个计算机认定为某个指定网络的成员。

根据网络标识和主机标识位数的不同, 使用 3 种地址形式。用于最大网络的 A 类地址, 由 0 后跟 7 位的网络标识和 24 位的主机标识构成。用于中等规模网络的 B 类地址, 由 10 后跟 14 位的网络标识和 16 位的主机标识构成。用于最小网络的 C 类地址, 由 110 后跟 21 位的网络标识和 8 位的主机标识构成。由于特定用途, 对地址有着某些限制: 1111111 在 A 类网络的网络标识中是无效的, 全 0 和全 1 组成的主机标识对任何网络都是无效的。因特网上的一台计算机有一个 A 类、B 类或 C 类地址。(除了 A 类、B 类和 C 类地址外, 还有 D 类地址和 E 类地址。D 类地址在多台计算机同时编址时用于多路广播, 它由 1110 后跟 28 位组成。E 类地址保留为将来应用, 由 11110 后跟 27 位组成。D 类和 E 类地址不会分配给因特网中的一台计算机作为 IP 地址。)图 3-1 显示了 IPv4 的编址。(A 类和 B 类网络标识的数量限制已经使得 IPv4 编址不够用了; 将代替 IPv4 的 IPv6 使用 128 位地址来解决这个问题。)

位数	0	1	2	3	4	8	16	24	31	
A类	0	网络标识					主机标识			
B类	1	0	网络标识					主机标识		
C类	1	1	0	网络标识					主机标识	
D类	1	1	1	0	多路广播地址					
E类	1	1	1	1	0	地址				

图 3-1 因特网地址(IPv4)

对因特网上的计算机有多少不同的有效 IPv4 地址?

解 令 x 是因特网上计算机的有效地址数, x_A 、 x_B 和 x_C 分别表示 A 类、B 类和 C 类的有效地址数。由求和法则, $x = x_A + x_B + x_C$ 。

为了找到 x_A , 由于 1111111 是无效的, 故存在 $2^7 - 1 = 127$ 个 A 类的网络标识。对于每个网络标识, 存在 $2^{24} - 2 = 16\,777\,214$ 个主机标识, 这是由于全 0 和全 1 组成的主机标识是无效的。因此,

$$x_A = 127 \cdot 16\,777\,214 = 2\,130\,706\,178$$

为了找到 x_B 和 x_C , 首先注意到存在 $2^{14} = 16\,384$ 个 B 类网络标识和 $2^{21} = 2\,097\,152$ 个 C 类网络标识。对每个 B 类网络标识存在着 $2^{16} - 2 = 65\,534$ 个主机标识, 而对每个 C 类网络标识存在着 $2^8 - 2 = 254$ 个主机标识, 这也是考虑到全 0 和全 1 组成的主机标识是无效的。因而,

$$x_B = 1\,073\,709\,056, \quad x_C = 532\,676\,608$$

我们可以断言 IPv4 有效地址的总数是

$$x = x_A + x_B + x_C = 2\,130\,706\,178 + 1\,073\,709\,056 + 532\,676\,608 = 3\,737\,091\,842$$

3.1.4 容斥原理

当同时做两个任务时, 我们不能使用求和法则来计数完成其中一个任务的方式。把对每个任务的方式数加起来将导致计数结果的增大, 因为同时完成两个任务的那些方式被计数了两次。为了正确地计数完成其中一个任务的方式, 我们先把完成每个任务的方式数加起来, 然后再减去同时完成

解 在图 3-3 的树图中, 以每次比赛的得胜者给出了决赛可能进行的所有方式。我们看到了 20 种不同的决赛的方式。

灰色表示得胜

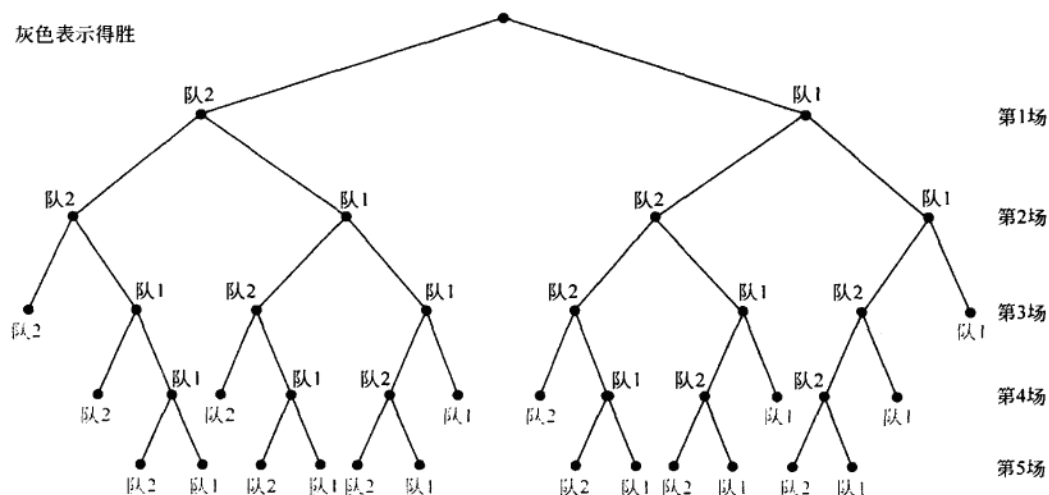


图 3-3 5 次决赛胜 3 次

例 21 假设“我爱新泽西”T 恤衫有 5 种不同的规格: S、M、L、XL 和 XXL。又知道 XL 规格只有三种颜色, 红色、绿色和黑色, XXL 规格只有绿色和黑色。除此之外, 其他规格有四种颜色, 白色、红色、绿色和黑色。如果每种规格和颜色的 T 恤衫至少一件, 一个纪念品商店必须库存多少件不同的 T 恤衫?

解 图 3-4 的树图给出了所有规格和颜色的配对。从中可知这个纪念品商店老板必须库存 17 件不同的 T 恤衫。

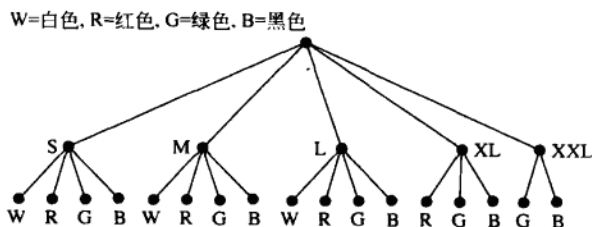


图 3-4 计数不同的 T 恤衫

练习

- 一个学院有 18 个数学专业和 325 个计算机科学专业的学生。
 - 选两个代表, 使得一个是数学专业的且另一个是计算机科学专业的, 有多少种方式?
 - 选一个数学专业或计算机科学专业的代表又有多少种方式?
- 一次多项选择考试包含 10 个问题。每个问题有 4 个可能的答案。
 - 在这次考试中如果每个问题都要回答, 一个学生回答这些问题可能有多少种方式?
 - 在这次考试中如果允许某些答案空缺, 一个学生回答这些问题可能有多少种方式?
- 从纽约到丹佛有 6 条不同的航线, 而从丹佛到旧金山有 7 条。如果选一个到丹佛的航班, 接着选一个到旧金山的航班, 那么从纽约经丹佛到旧金山的旅行有多少种不同的可能性?
- 如果用 3 个字母作为姓名的缩写, 人们可以有多少种不同的选择?
- 如果这 3 个字母以 A 开始, 人们又可以有多少种不同的选择?

6. 首尾都是 1 的 10 位二进制串有多少个?
7. 位数不超过 n 且全由 1 组成的二进制串有多少个? 这里的 n 是正整数。
8. 位数不超过 4 且由小写字母构成的串有多少个?
9. 由 5 个 ASCII 码构成且至少(在符号位)包含一个 @ 字符的串有多少个? (注: 有 128 个不同的 ASCII 码。)
10. 在 50 到 100 之间有多少个正整数
 - a) 能被 7 整除? 这些整数是什么?
 - b) 能被 11 整除? 这些整数是什么?
 - c) 能被 7 和 11 同时整除? 这些整数是什么?
11. 在 100 到 999 之间包含多少个正整数
 - a) 被 7 整除?
 - b) 是奇数?
 - c) 有相同的 3 个十进制数字?
 - d) 不被 4 整除?
 - e) 被 3 或 4 整除?
 - f) 不被 3 也不被 4 整除?
 - g) 被 3 整除但不被 4 整除?
 - h) 被 3 和 4 整除?
12. 有多少个串含有 3 个十进制数字且
 - a) 同一数字不能出现 3 次?
 - b) 以奇数字开始?
 - c) 恰有 2 个数字是 4?
13. 一个委员会由 50 个州构成, 每个州可从州长或两个参议员中选一个参加, 有多少种不同的方式?
14. 用 2 个字母后跟 4 个数字或者 2 个数字后跟 4 个字母可构成多少种车牌?
15. 用 2 个或 3 个字母后跟 2 个或 3 个数字可构成多少种车牌?
16. 由 8 个英语字母可构成多少个串?
 - a) 如果字母可以重复且不包含元音字母
 - b) 如果字母不能重复且不包含元音字母
 - c) 如果字母可以重复且以元音字母开始
 - d) 如果字母不能重复且以元音字母开始
 - e) 如果字母可以重复且包含至少一个元音字母
 - f) 如果字母可以重复且包含恰好一个元音字母
 - g) 如果字母可以重复且以 X 开始并至少包含一个元音字母
 - h) 如果字母可以重复且以 X 开始和结束并至少包含一个元音字母
17. 从 5 元素集到含有下述元素数的集合有多少一对一的函数?
 - a) 4
 - b) 5
 - c) 6
 - d) 7
18. 从集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 到集合 $\{0, 1\}$ 有多少个满足下列条件的函数? 这里的 n 是正整数。
 - a) 是一一对一的
 - b) 对 1 和 n 赋值为 0
 - c) 对恰好一个小于 n 的正整数赋值为 1
19. 从 m 元素集到 n 元素集有多少个部分函数(见 2.3 节的练习 33)? 这里的 m 和 n 是正整数。
20. 如果一个字符串反转后所得结果与原来的字符串一样, 就称它是一个回文。有多少个长为 n 的二进制串是回文?
21. 在一个婚礼上摄影师安排 6 个人在一排拍照, 包含新娘和新郎在内, 如果满足下述条件, 有多少种安排方式?
 - a) 新娘必须在新郎旁边
 - b) 新娘不在新郎旁边
 - c) 新娘在新郎左边的某个位置
22. 有多少个 10 位二进制串以 3 个 0 开始或以 2 个 0 结束?
- **23. 有多少个 8 位二进制串包含 3 个连续的 0 或者 4 个连续的 1?
24. 有多少个不超过 100 的正整数能被 4 或 6 整除?
25. 假定一个计算机系统的口令最少有 8 个、最多有 12 个字符, 其中口令中的每个字符可以是小写英文字母、大写英文字母、数字、或 6 个特殊字符 *、>、<、!、+、= 中的一个。
 - a) 该计算机系统可有多少个不同的口令?
 - b) 有多少个口令含有 6 个特殊字符中的一个?
 - c) 如果一个黑客核对每个可能的口令需要 1 纳秒时间, 他要核对完所有可能的口令需要多长时间?
26. 假定在将来的某个时间世界上的每部电话将被分配一个号码, 这个号码包含一个 1 到 3 位数字的形如 X 、

XX 或 XXX 的国家代码, 后面跟随着一个 10 位数字的形如 NXX-NXX-XXXX 的电话号码(如例 7 所描述的)。在这个编码计划中, 全世界将有多少个不同的有效电话号码?

27. 有多少种不同的方式排列字母 a 、 b 、 c 和 d , 使得 b 不紧跟在 a 的后边?
28. 使用树图确定 $\{3, 7, 9, 11, 24\}$ 的子集数, 使得子集中的元素之和小于 28。
29. a) 假设运动鞋的流行式样对男女都适用。女鞋的大小号码是 6, 7, 8, 9, 男鞋的大小号码是 8, 9, 10, 11 和 12。男鞋有白色和黑色, 而女鞋是白色、红色和黑色。如果一个商店各种大小和颜色的男、女运动鞋必须至少存一双, 用树图确定所需的鞋的数目。
b) 使用计数原理回答(a)中的问题。
30. 从两个任务的求和法则使用数学归纳法证明关于 m 个任务的求和法则。
31. 具有 n 条边的凸多边形有多少条对角线?(如果在多边形内或边界的每两个顶点的连线完全在这个集合之内, 则称为凸多边形。)

3.2 鸽巢原理

3.2.1 引言

有 20 只鸽子要飞往 19 个鸽巢栖息。由于有 20 只鸽子, 而只有 19 个鸽巢, 所以这 19 个鸽巢中至少有 1 个鸽巢里最少栖息着 2 只鸽子。为了说明这个结论是真的, 注意: 如果每个鸽巢中最多栖息着 1 只鸽子的话, 那么最多只有 19 只鸽子有住处, 其中每只鸽子一个巢。这个例子阐述了一个一般原理, 叫做鸽巢原理, 该原理断言: 如果鸽子数比鸽巢数多, 那么一定有一个鸽巢里至少有 2 只鸽子(见图 3-5)。当然, 这个原理除了鸽子和鸽巢外也可以用于其他对象。

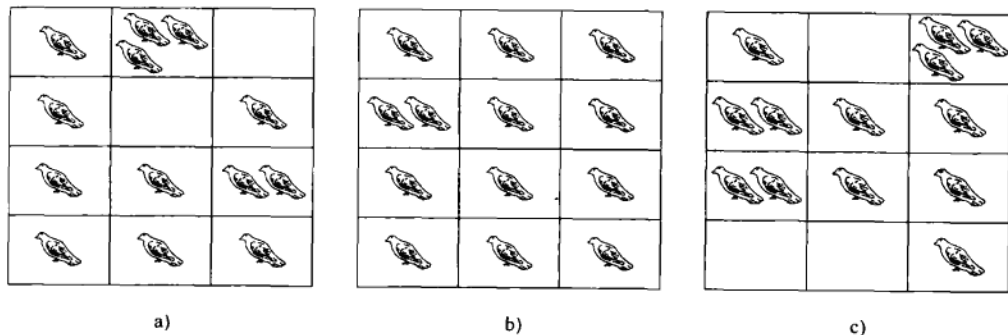


图 3-5 鸽子比鸽巢多

定理 1 鸽巢原理 如果 $k+1$ 个或更多的物体放入 k 个盒子, 那么至少有一个盒子包含了 2 个或更多的物体。

证 假定 k 个盒子中没有一个盒子包含的物体多于 1 个, 那么物体总数至多是 k , 这与至少有 $k+1$ 个物体矛盾。□

鸽巢原理也叫做狄利克雷抽屉原理, 以 19 世纪的德国数学家狄利克雷命名, 他经常在工作中使用这个原理。下面的例子说明了怎样使用鸽巢原理。

例 1 在一组 367 个人中一定至少有 2 个人有相同的生日, 这是由于只有 366 个可能的生日。

例 2 在 27 个英文单词中一定至少有 2 个单词以同一个字母开始, 因为英文字母表中只有 26 个字母。

例 3 如果考试给分是从 0 到 100, 班上必须有多少个学生才能保证在这次期末考试中至少有 2 个学生得到相同的分数?

解 期末考试有 101 个分数。鸽巢原理证明在 102 个学生中一定至少有 2 个学生具有相同的

分数。

鸽巢原理在许多证明中都是有用的工具，有些证明结果是令人意外的，正如图4所给出的。

例4 证明：对每个整数 n ，存在一个数是 n 的倍数，且在它的十进制表示中只出现0和1。

Extra Example

解 令 n 是正整数。考虑 n 个整数 $1, 11, 111, \dots, 11\cdots1$ (在这个数表中，最后一个整数的十进制表示中具有 $n+1$ 个1)。注意到当一个整数被 n 整除时存在 n 个可能的余数。因为这个数表中有 $n+1$ 个整数，由鸽巢原理必有两个整数在除以 n 时有相同的余数。这两个整数之差的十进制表示中只含有0和1，且它能被 n 整除。

3.2.2 广义鸽巢原理

鸽巢原理指出当物体比盒子多时一定至少有2个物体在同一个盒子里。但是当物体数超过盒子数的倍数时可以得出更多的结果。例如，在任意21个十进制数字中一定有3个是相同的。这是由于21个物体被分配到10个盒子里，那么某个盒子的物体一定多于2个。

定理2 广义鸽巢原理 如果 N 个物体放入 k 个盒子，那么至少有一个盒子包含了至少 $\lceil N/k \rceil$ 个物体。

证 假定没有盒子包含了比 $\lceil N/k \rceil - 1$ 多的物体，那么物体总数至多是

$$k\left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1\right) < k\left(\left(\frac{N}{k} + 1\right) - 1\right) = N$$

这里用到不等式 $\lceil N/k \rceil < (N/k) + 1$ 。这与存在有总数 N 个物体矛盾。 $\square$

一类普遍的问题是，把一些物体分到 k 个盒子中要使得某个盒子至少含有 r 个物体，求这些物体的最少个数。当有 N 个物体时，广义鸽巢原理告诉我们，只要 $\lceil N/k \rceil \geq r$ 一定有 r 个物体在同一个盒子里。满足 $N/k > r-1$ 的最小正整数，即 $N = k(r-1) + 1$ ，是满足不等式 $\lceil N/k \rceil \geq r$ 的最小正整数。还可能有更小的 N 值吗？答案是没有。原因是如果我们有 $k(r-1)$ 个物体，我们可以在 k 个盒子中的每个盒子放 $r-1$ 个物体，因此没有一个盒子至少有 r 个物体。

当思考这种问题时下面的想法是有用的，就是在不断地放物体时怎样避免一个盒子至少有 r 个物体出现。为避免把第 r 个物体加到任何一个盒子里，每个盒子最终将以具有 $r-1$ 个物体结束。如果不允许放第 r 个物体到一个盒子里，就没有办法增加下一个物体。

例5至例8说明了怎样使用广义鸽巢原理。

例5 在100个人中至少有 $\lceil 100/12 \rceil = 9$ 个人生在同一个月。

Extra Example

例6 如果有5个可能的成绩 A, B, C, D 和 F ，那么在一个离散数学班里最少要多少个学生才能保证至少6个学生得到相同的分数？

解 为保证至少6个学生得到相同的分数，所需的最少学生数是使得 $\lceil N/5 \rceil = 6$ 的最小整数 N 。这样的最小整数是 $N = 5 \cdot 5 + 1 = 26$ 。如果只有25个学生，可能是每5个学生得到同样的分数，而没有6个学生得到同样的分数。于是，26是保证至少6个学生得到相同的分数所需的最少学生数。

例7 a) 从一副标准的52张牌中必须选多少张牌才能保证选出的牌中至少有3张是同样的花色？

b) 必须选多少张牌才能保证选出的牌中至少有3张是红心？

解 a) 假设存在四个盒子保存四种花色的牌，选中的牌放在同种花色的盒子里。使用广义鸽巢原理，如果选了 N 张牌，那么至少有一个盒子含有至少 $\lceil N/4 \rceil$ 张牌。因此如果 $\lceil N/4 \rceil \geq 3$ ，我们知道至少选了3张同种花色的牌。使得 $\lceil N/4 \rceil \geq 3$ 的最小的整数 N 是 $N = 2 \cdot 4 + 1 = 9$ ，所以9张牌就足够了。注意到，如果选8张牌，可能每种花色2张牌。因而必须选9张牌才能保证选出的牌中至少3张是同样的花色。想到这一点的一个好方法就是注意到在选了8张牌以后没有办法避免出现3张同样花色的牌。

b) 我们不用广义鸽巢原理回答这个问题，因为我们要保证存在3张红心而不仅仅是3张同样花色的牌。注意到在最坏情况下，选一张红心以前可能选了所有的黑桃、方块、梅花，总共39张牌，下面选的3张牌将都是红心。因此为得到3张红心，可能需要选42张牌。

例8 为保证一个州的2500万个电话有不同的10位电话号码,所需地区代码的最小数是多少?(假定电话号码是 $NXX-NXX-XXXX$ 形式,其中前3位是地区代码, N 表示从2到9包含的十进制数字, X 表示任何十进制数字)。

解 有800万个形如 $NXX-XXXX$ 的不同的电话号码(如3.1节的例8所示)。因此,由广义鸽巢原理,在2500万个电话号码中,一定至少有 $\lceil 25\,000\,000/8\,000\,000 \rceil$ 个同样的电话号码。因而至少需要4个地区代码来保证所有的10位号码是不同的。 ■

例9 尽管没有用到广义鸽巢原理,也用到了类似的原理。

例9 假设计算机科学实验室有15台工作站和10台服务器。可以用一条电缆直接把工作站连到服务器。同一时刻只有一条到服务器的直接连接是有效的。我们想保证在任何时刻任何一组不超过10个工作站可以通过直接连接同时访问不同的服务器。尽管我们可以通过将每台工作站直接连接到每台服务器(使用150条连线)来做到这一点,达到这个目标所需要的最少直接连线的数目是多少?

解 将工作站标记为 $W_1, W_2, \dots, W_{15}$, 服务器标记为 $S_1, S_2, \dots, S_{10}$ 。假设对于 $k=1, 2, \dots, 10$, 我们连接 W_k 到 S_k , 并且 $W_{11}, W_{12}, W_{13}, W_{14}$ 和 W_{15} 中的每个工作站都连接到所有的10个服务器。总共60条直接连线。很清楚,在任何时刻任何一组不超过10个工作站可以通过直接连接同时访问不同的服务器。为看到这一点只要注意到下述事实:如果这个组包含工作站 $W_j (1 \leq j \leq 10)$, 那么 W_j 可以访问服务器 S_j 。对于组里的每个工作站 $W_k (k \geq 11)$, 一定存在不在组里的工作站 $W_j (1 \leq j \leq 10)$ 与之对应, 因此 W_k 可以访问服务器 S_j (这是由于存在多少个不在组里的工作站 $W_j, 1 \leq j \leq 10$, 至少存在同样多的服务器 S_j 可以被其他工作站访问)。

现在假设在工作站和服务器之间直接连线少于60条。那么某个服务器将至多连接 $\lfloor 59/10 \rfloor = 5$ 工作站。(如果所有的服务器连接到至少6个工作站, 那么将存在至少 $6 \cdot 10 = 60$ 条直接连线。)这意味着剩下的9个服务器对于其他10个工作站同时访问不同的服务器就不够用了。因此,至少需要60条直接连线,从而得到答案是60。 ■

3.2.3 巧妙使用鸽巢原理

在鸽巢原理的许多有趣应用中,必须用某种巧妙的方式选择放入盒子的物体。下面将描述这样的一些应用。

例10 在30天的一个月里,某棒球队一天至少打一场比赛,但至多打45场。证明一定有连续的若干天内这个队恰好打了14场。

解 令 a_j 是在这个月的第 j 天或第 j 日之前所打的场数,则 $a_1, a_2, \dots, a_{30}$ 是不同正整数的一个递增序列,其中 $1 \leq a_j \leq 45$ 。从而 $a_1+14, a_2+14, \dots, a_{30}+14$ 也是不同正整数的一个递增序列,其中 $15 \leq a_j+14 \leq 59$ 。

60个正整数 $a_1, a_2, \dots, a_{30}, a_1+14, a_2+14, \dots, a_{30}+14$ 全都小于等于59。因此,由鸽巢原理有两个正整数相等。因为整数 $a_j, j=1, 2, \dots, 30$ 都不相同,并且 $a_j+14, j=1, 2, \dots, 30$ 也不相同,一定存在下标 i 和 j 满足 $a_i = a_j+14$ 。这意味着从第 $j+1$ 天到第 i 天恰好打了14场比赛。 ■

例11 证明在不超过 $2n$ 的任意 $n+1$ 个正整数中一定存在一个正整数被另一个正整数整除。

解 把 $n+1$ 个整数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中的每一个都写成2的幂与一个奇数的乘积。换句话说,令 $a_j = 2^{k_j} q_j, j=1, 2, \dots, n+1$, 其中 k_j 是非负整数 q_j 是奇数。整数 $q_1, q_2, \dots, q_{n+1}$ 都是小于 $2n$ 的正奇数。因为只存在 n 个小于 $2n$ 的正奇数,由鸽巢原理, $q_1, q_2, \dots, q_{n+1}$ 中必有两个相等。于是,存在整数 i 和 j 使得 $q_i = q_j$ 。令 q_i 与 q_j 的公共值是 q , 那么 $a_i = 2^{k_i} q, a_j = 2^{k_j} q$ 。因而,若 $k_i < k_j$, 则 a_i 整除 a_j ; 若 $k_i > k_j$, 则 a_j 整除 a_i 。 ■

巧妙地应用鸽巢原理证明了在不同整数的序列中存在着确定长度的递增或递减子序列。在给出这个应用之前先回顾某些定义。假定 $a_1, a_2, \dots, a_N$ 是实数序列。它的一个子序列是形为 $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m}$ 的序列, 其中 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq N$ 。因此一个子序列是从初始序列得到的序列, 按

照原来的顺序选取初始序列的某些项,也许要排除其他的项。如果这个序列的每一项都大于它前面的项,就称为严格递增的,如果每一项都小于它前面的项,就称为严格递减的。

定理 3 每个由 n^2+1 个不同实数构成的序列都包含一个长为 $n+1$ 的严格递增子序列或严格递减子序列。

在证明定理 3 之前先给出一个例子。

例 12 序列 8, 11, 9, 1, 4, 6, 12, 10, 5, 7 包含 10 项。注意到 $10=3^2+1$, 存在四个长为 4 的递增子序列, 即 1, 4, 6, 12; 1, 4, 6, 7; 1, 4, 6, 10 和 1, 4, 5, 7。也存在一个长为 4 的递减子序列, 即 11, 9, 6, 5。

现在给出定理的证明。

证 令 $a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1}$ 是 n^2+1 个不同实数的序列。和序列中的每一项 a_k 联系着一个有序对, 即 (i_k, d_k) , 其中 i_k 是从 a_k 开始的最长的递增子序列的长度, 且 d_k 是从 a_k 开始的最长的递减子序列的长度。

假定没有长为 $n+1$ 的递增或递减子序列。那么 i_k 和 d_k 都是小于或等于 n 的正整数, $k=1, 2, \dots, n^2+1$ 。因此, 由乘积法则关于 (i_k, d_k) 存在 n^2 个可能的有序对。根据鸽巢原理, n^2+1 个有序对中必有两个相等。换句话说, 存在项 a_i 和 a_t , $s < t$, 使得 $i_s = i_t$ 和 $d_s = d_t$ 。我们将证明这是不可能的。由于序列的项是不同的, 不是 $a_s < a_t$ 就是 $a_s > a_t$ 。如果 $a_s < a_t$, 那么由于 $i_s = i_t$, 那么把 a_t 加到从 a_s 开始的递增子序列前面就构造出一个从 a_s 开始的长为 i_s+1 的递增子序列。从而产生矛盾。类似地, 如果 $a_s > a_t$, 可以证明 d_t 一定大于 d_s , 从而也产生矛盾。□

最后的例子说明了怎样把广义鸽巢原理用于组合学的重要部分拉姆齐理论, 它是以英国数学家拉姆齐而命名的。一般地说, 拉姆齐理论可用于处理集合元素的子集分配问题。

例 13 假定一组有 6 个人, 任两个人或者是朋友或者是敌人。证明在这组人中或存在 3 个人彼此都是朋友, 或存在 3 个人彼此都是敌人。

解 令 A 是 6 个人中的一人, 组里其他 5 个人中至少有 3 个人是 A 的朋友, 或至少有 3 个人是 A 的敌人。这可从广义鸽巢原理得出, 因为当 5 个物体分成两个集合时, 其中的一个集合至少有 $\lceil 5/2 \rceil = 3$ 个元素。若是前一种情况, 假定 B, C 和 D 是 A 的朋友。如果这 3 个人中有 2 个人也是朋友, 那么这 2 个人和 A 构成彼此是朋友的 3 人组。否则, B, C 和 D 构成彼此为敌人的 3 人组。对于后一种情况的证明, 当 A 存在 3 个或更多的敌人时可以用类似的方法处理。■

拉姆齐数 $R(m, n)$ (其中 m 和 n 是大于或等于 2 的正整数) 表示: 假设晚会上每两个人是朋友或者是敌人, 那么在一个晚会上使得或者有 m 个人两两都是朋友, 或者有 n 个人两两都是敌人所需要的最少人数。例 13 显示 $R(3, 3) \leq 6$ 。在一组 5 个人中, 其中每两个人是朋友或是敌人, 可能没有 3 个人两两是朋友, 也没有 3 个人两两是敌人, 因此我们断言 $R(3, 3) = 6$ 。

可以证明某些关于拉姆齐数的有用的性质, 但是对于大多数拉姆齐数找到精确的值是困难的。根据对称性可以证明 $R(m, n) = R(n, m)$ 。对于每个正整数 $n \geq 2$ 我们也有 $R(2, n) = n$ (见练习 14)。只知道 9 个拉姆齐数 $R(m, n)$ ($3 \leq m \leq n$) 的精确值, 其中包括 $R(4, 4) = 18$ 。对许多其他的拉姆齐数只知道界, 包括 $R(5, 5)$ 在内, 已知它满足 $43 \leq R(5, 5) \leq 49$ 。有兴趣了解更多有关拉姆齐数知识的读者可以参考 [MiRo91] 或 [GrRoSp90]。

练习

- 假定周末不排课, 证明: 在任一组 6 门课中一定有 2 门课安排在同一天上课。
- 抽屉里有一打棕色的短袜和一打黑色的短袜, 全都没有配好对。一个人在黑暗中随机取出一些袜子。
 - 必须取多少只袜子才能保证至少有 2 只袜子是同色的?
 - 必须取多少只袜子才能保证至少有 2 只袜子是黑色的?
- 证明: 在任意 5 个整数中 (不一定是连续的) 有 2 个整数被 4 除的余数相等。
- 设 n 是正整数。证明: 在任意一组 n 个连续的正整数中恰好有 1 个被 n 整除。
- 在一个大学里每个学生来自 50 个州中的一个州, 那么必须有多少个学生注册才能保证至少有 100 个学生

来自同一个州?

- *6. 设 $(x_i, y_i, z_i) (i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ 是 xyz 空间中一组具有整数坐标的 9 个不同的点。证明：至少有一对点的连线中点的坐标是整数。
7. a) 如果从前 8 个正整数中选 5 个整数一定存在一对整数其和等于 9。
b) 如果不是选 5 个而是选 4 个整数，a) 的结论还为真吗?
8. 从集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 中必须选多少个数才能保证其中至少有一对数之和等于 7?
9. 一个公司在仓库储存产品。仓库中的存储柜由它们的通道、在通道中的位置和货架来指定。整个仓库有 50 个通道，每个通道 85 个水平位置，每个位置 5 个货架。公司产品数至少是多少才能使得在同一个存储柜中至少有 2 个产品?
10. 在 25 个学生的离散数学班中，学生有一年级的、二年级的或者三年级的。
a) 证明：这个班至少有 9 个是一年级的，或至少有 9 个是二年级的，或至少有 9 个是三年级的。
b) 证明：这个班至少有 3 个是一年级的，或至少有 19 个是二年级的，或至少有 5 个是三年级的。
11. 构造 16 个正整数的序列，使得它没有 5 项的递增或递减子序列。
- *12. 用伪码描述一个算法产生一个不同整数序列的最大递增或递减子序列。
13. 证明：在任一组 10 个人中(其中任两个人或者是朋友或者是敌人)或存在 3 个人彼此都是朋友，或存在 4 个人彼此都是敌人；并且存在 3 个人彼此是敌人，或存在 4 个人彼此是朋友。
14. 证明：如果 n 是正整数， $n \geq 2$ ，那么拉姆齐数 $R(2, n)$ 等于 n 。
15. 证明：在加利福尼亚州(人口 3600 万)至少有 6 个人姓名的 3 个缩写字母相同并且他们生在一年的同一天(但不一定是同一年)。
16. 一个大学有 38 个不同的时间段来安排课程，如果有 677 门不同的课程，那么需要多少个不同的教室?
17. 一个计算机网络由 6 台计算机组成。每台计算机直接连接到零台或者更多的其他计算机。证明：网络中至少有两台计算机直接连接相同数目的其他计算机。
18. 把 100 台计算机连接到 20 台打印机上，为保证 20 台计算机可以直接访问 20 台不同的打印机，找出至少需要多少条缆线。证明你的答案。
19. 一个摔跤选手是 75 小时之内的冠军。该选手一小时至少赛一场，但总共不超过 125 场。证明：存在着连续的若干个小时使得该选手恰好进行了 24 场比赛。
20. 如果 f 是从 S 到 T 的函数，其中 S 和 T 是有穷集，并且 $m = \lceil |S| / |T| \rceil$ ，那么证明至少存在 S 的 m 个元素映射到 T 的同一个值。即存在 S 中的元素 $s_1, s_2, \dots, s_m$ 使得 $f(s_1) = f(s_2) = \dots = f(s_m)$ 。
- *21. 设 x 是无理数。证明：对于某个不超过 n 的正整数 j ，在 jx 和到 jx 最近的整数之间的差的绝对值小于 $1/n$ 。
- *22. 在这个问题中概述了基于广义鸽巢原理的定理 3 的证明，使用的记号与教科书中的证明一样。
a) 假定 $i_k \leq n$ ， $k=1, 2, \dots, n^2+1$ 。使用广义鸽巢原理证明：存在 $n+1$ 个项 $a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_{n+1}}$ 满足 $i_{k_1} = i_{k_2} = \dots = i_{k_{n+1}}$ ，其中 $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_{n+1}$ 。
b) 证明： $a_{k_j} > a_{k_{j-1}}$ ， $j=1, 2, \dots, n$ 。[提示：假定 $a_{k_j} < a_{k_{j-1}}$ ，证明这将推出 $i_{k_j} > i_{k_{j-1}}$ 的矛盾。]
c) 使用(a)和(b)证明：如果没有长为 $n+1$ 的递增子序列，那么一定有同样长的递减子序列。

3.3 排列与组合

3.3.1 引言

许多计数问题都可以通过找到特定大小的集合中不同元素排列的不同方法数来得以解决，其中这些元素的次序是有限制的。许多其他计数问题也可以通过从特定大小的集合元素中选择特定数量元素的方法数来得以解决，其中这些元素的次序是不受限制的。例如，从 5 个学生中选出 3 个学生站成一行照相，有多少种选择方法？从 4 个学生中选出 3 个学生组成一个委员会，有多少种选择方法？本节将开发一些方法来解决此类问题。

3.3.2 排列

先通过解决引言中提出的第一个问题以及一些其他相关问题开始本节内容。

例 1 从 5 个学生中选出 3 个学生站成一行照相，有多少种选择方法？让所有 5 个学生站成一行照相，有多少种排列方法？

Extra Examples

解 首先注意: 选择学生时次序是有限制的。从 5 个学生中选择第一个学生站在一行的第一个位置有 5 种方法。一旦这个学生被选定之后, 则有 4 种方法选择第二个学生站在一行的第二个位置。当第一和第二个学生都被选定之后, 则有 3 种方法选择第三个学生站在一行的第三个位置。根据乘法原理, 共有 $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ 种方法从 5 个学生中选出 3 个学生站成一行来照相。

为了排列所有 5 个学生站成一行来照相, 选择第一个学生时有 5 种方法, 选择第二个学生时有 4 种方法, 第三个学生时有 3 种方法, 第四个学生时有 2 种方法, 第五个学生时有 1 种方法。因此, 共有 $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ 种方法让所有 5 个学生站成一行来照相。 ■

例 1 阐述了不同个体有次序的排列是如何计数的。这也引出了几个术语。

集合中不同元素的排列, 是对这些元素一种有序的安排。我们也对集合中某些元素的有序安排感兴趣。对一个集合中 r 个元素的有序安排称为一个 r 排列。

不同个体集合的一个排列是这些个体的一种有序安排。我们也对集合的某些元素的有序安排感兴趣。一个集合的 r 个元素的有序安排叫做 r 排列。

例 2 设 $S = \{1, 2, 3\}$ 。3, 1, 2 是 S 的一个排列, 3, 2 是 S 的一个 2 排列。 ■

一个 n 元集的 r 排列数记为 $P(n, r)$ 。我们可以使用乘积法则求出 $P(n, r)$ 。

例 3 设 $S = \{1, 2, 3\}$ 。 S 的 2 排列有如下有序安排: $a, b; a, c; b, a; b, c; c, a;$ 和 c, b 。因此, 具有 3 个元素的这个集合共有 6 个 2 排列。为了说明所有具有 3 个元素的集合都有 6 个 2 排列, 注意到: 有 3 种方法选择排列中的第一个元素, 有 2 种方法选择排列中的第二个元素, 这是因为第二个元素必须不同于第一个元素。根据乘法规则, 有 $P(3, 2) = 3 \cdot 2 = 6$ 。 ■

下面利用乘法规则找出求 $P(n, r)$ 的一个公式, 其中 n 和 r 都是任意正整数, 且 $1 \leq r \leq n$ 。

定理 1 具有 n 个不同元素的集合的 r 排列数是

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

证 选择这个排列的第一个元素可以有 n 种方法, 因为集合中有 n 个元素。选择排列的第二个元素有 $n-1$ 种方法, 由于在使用了为第一个位置挑出的元素之后集合里还留下了 $n-1$ 个元素。类似地, 选择第三个元素有 $n-2$ 种方法, 依此类推, 直到选择第 r 个元素恰好有 $n-(r-1) = n-r+1$ 种方法。因此, 由乘积法则, 存在

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

个集合的 r 排列。 □

注意 只要 n 是一个非负整数, 就有 $P(n, 0) = 1$, 这是因为恰好有一种方法来排列 0 个元素, 也就是说, 恰好有一个排列中没有元素, 即空排列。

下面给出定理 1 的一个有用的推论。

推论 1 如果 n 和 r 都是整数, 且 $0 \leq r \leq n$, 则

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

证 当 n 和 r 是整数, 且 $1 \leq r \leq n$ 时, 由定理 1 有

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

因为只要 n 是非负整数, 就有 $\frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$, 我们知道公式 $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ 当 $r=0$ 时也成立。 □

由定理 1 知道, 如果 n 是一个正整数的话, 则有 $P(n, n) = n!$ 。用一些例子来说明这个结论。

例 4 在进入竞赛的 100 个不同的人中有多少种方法选出一个一等奖得主、一个二等奖得主和一个三等奖得主?

解 不管哪个人得哪个奖, 选取 3 个得奖人的方法数是从 100 个元素的集合中有序选择 3 个元素的方法数, 即 100 个元素的集合的 3 排列数。因此, 答案是

$$P(100, 3) = 100 \cdot 99 \cdot 98 = 970\,200$$

例 5 假定有 8 个赛跑运动员。第一名得到一枚金牌，第二名得到一枚银牌，第三名得到一枚铜牌。如果比赛可能出现所有可能的结果，有多少种不同的颁奖方式？

解 颁奖方式就是 8 元素的集合的 3 排列数。因此存在 $P(8, 3) = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ 种可能的颁奖方式。

例 6 假定一个女推销员要访问 8 个不同的城市。她的访问必须从某个指定的城市开始，但对其他 7 个城市的访问可以按照任何次序进行。当访问这些城市时，这个女推销员可以有多少种可能的次序？

解 由于第一个城市是确定的，而其他 7 个城市可以是任意的顺序，故城市之间可能的路径数是 7 个元素的排列数。因此，这个女推销员有 $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ 种方式选择她的旅行。比如说，如果这个女推销员想要在城市中找出具有最短距离的路径，并且她对每一条可能的路径计算总距离，那么她必须考虑 5040 条路径。

例 7 字母 ABCDEFGH 有多少种排列包含串 ABC？

解 由于字母 ABC 必须成组出现，我们可以通过找 6 个对象，即组 ABC 和单个字母 D、E、F、G 和 H 的排列数得到答案。由于这 6 个对象可以按任何次序出现，因此，存在 $6! = 720$ 种 ABCDEFGH 字母的排列，其中 ABC 成组出现。

3.3.3 组合

现在把注意力转到无序选择个体的计数上来。我们先通过解决本章引言中提出的第二个问题开始本节内容。

例 8 从 4 个学生中选出 3 个学生组成一个委员会，有多少种选择方法？

解 为了回答这个问题，只需从含有 4 个学生的集合中找到具有 3 个元素的子集的个数。我们知道，一共有 4 个这样的子集，每个子集中都有一个不同的学生，因为选择 4 个学生等价于从 4 个学生中选出一个人离开这个集合。这就意味着有 4 种方法选择 3 个学生组成一个委员会，其中这些被学生的次序是无关紧要的。

例 8 阐明了这样一个事实：许多计数问题都可以通过从具有 n 个元素的集合中求得特定大小的子集的个数来得以解决，其中 n 是一个正整数。

 集合元素的一个 r 组合是从这个集合无序选取的 r 个元素。于是，简单地说，一个 r 组合是这个集合的一个 r 个元素的子集。

例 9 设 S 是集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ ，那么 $\{1, 3, 4\}$ 是 S 的一个 3 组合。

具有 n 个不同元素集合的 r 组合数记为 $C(n, r)$ 。注意 $C(n, r)$ 也记作 $\binom{n}{r}$ 并且称为二项式系数。在 3.4 节我们将学习这个记号。

例 10 因为 $\{a, b, c, d\}$ 的 2 组合是 $\{a, b\}$ ， $\{a, c\}$ ， $\{a, d\}$ ， $\{b, c\}$ ， $\{b, d\}$ 和 $\{c, d\}$ 6 个子集，有 $C(4, 2) = 6$ 。

可以用关于集合的 r 排列数的公式确定 n 元素的集合的 r 组合数。为此只需要注意到集合的 r 排列可以按下述方法得到：首先构成集合的 r 组合，接着排列这些组合中的元素。下面的定理给出了 $C(n, r)$ 的值，它的证明就是基于这个观察。

定理 2 设 n 是正整数， r 是满足 $0 \leq r \leq n$ 的整数， n 元素的集合的 r 组合数等于

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

证 可以如下得到这个集合的 r 排列。先构成集合的 $C(n, r)$ 个 r 组合，然后以 $P(n, r)$ 种方式排序每个 r 组合中的元素，这可以用 $P(r, r)$ 种方式来做。因此，

$$P(n, r) = C(n, r) \cdot P(r, r)$$

这就推出

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{P(r, r)} = \frac{n!/(n-r)!}{r!/(r-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad \square$$

尽管定理 2 中的公式很清楚,但对很大的 n 和 r 而言,这个公式并没有什么用处。其原因是:在实际计算中,只能对较小的整数才能求得阶乘的准确值,而且当用浮点数来计算时,从定理 2 的公式中得到的结果可能并不是一个整数值。因此,当计算 $C(n, r)$ 时,首先注意到:如果从定理 2 的 $C(n, r)$ 计算公式的分子和分母中都消去 $(n-r)!$ 后,可以得到

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

因此,为了计算 $C(n, r)$,可以从分子和分母中消去分母中所有较大的因式,再把分子中所有没有消去的项相乘,然后再除以分母中较小的因式。[如果是用手而不是用机器计算的话,有必要再在 $n(n-1)\cdots(n-r+1)$ 和 $r!$ 中消去公因数。]注意:许多计算器中都有一个关于计算 $C(n, r)$ 内置函数,这些函数可以对相对较小的 n 和 r 求得结果,许多计算机程序也可以用来求 $C(n, r)$ 的值。[这些函数可能会称为 $chose(n, k)$ 或 $binom(n, k)$ 。]

例 11 说明了当 k 相对于 n 较小时,以及当 k 接近于 n 时,如何计算 $C(n, r)$ 。该例子也给出了组合数 $C(n, r)$ 的一个关键的恒等式。

例 11 从一副 52 张标准扑克牌中选出 5 张,共有多少种不同方法?从一副 52 张标准扑克牌中选出 47 张,又有多少种不同方法?

解 因为从 52 张牌中选出 5 张,这 5 张牌的次序不受限制,所以不同的选择方法数共有

$$C(52, 5) = \frac{52!}{5!47!}$$

为了计算 $C(52, 5)$,首先在分子和分母中都消去 $47!$,得

$$C(52, 5) = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

上述表达式还可以化简:首先将分子中的 50 除以分母中的因子 5,则在分子中得到因子 10,然后将分子中的 48 除以分母中的因子 4,则在分子中得到因子 12,再将分子中的 51 除以分母中的因子 3,则在分子中得到因子 17,最后,将分子中的 52 除以分母中的因子 2,在分子中得到因子 26。于是得到

$$C(52, 5) = 26 \cdot 17 \cdot 10 \cdot 49 \cdot 12 = 2\,598\,960$$

因此,从一副 52 张标准扑克牌中选出 5 张,共有 2 598 960 种不同方法。

注意:从一副 52 张标准扑克牌中选出 47 张,不同选择方法数为

$$C(52, 47) = \frac{52!}{47!5!}$$

不用再计算这个值了,因为 $C(52, 5) = C(52, 47)$ 。(因为在计算它们的公式中,只有分母中 $5!$ 和 $47!$ 的次序是不同的。)因此有:从一副 52 张标准扑克牌中选出 47 张,共有 2 598 960 种不同方法。 ■

在例 11 中,我们看到 $C(52, 5) = C(52, 47)$ 。这是引理 2 中关于 r 组合数一个有用的恒等式的一个特例。

推论 2 设 n 和 r 是满足 $r \leq n$ 的非负整数,那么 $C(n, r) = C(n, n-r)$ 。

证 由定理 2 得到

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C(n, n-r) = \frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

因此, $C(n, r) = C(n, n-r)$ 。 □

通过证明在推论 1 的等式两边使用了不同的理由对同样的个体进行计数,也可以证明推论 1。我们在定义 1 描述了这种重要的证明类型。

定义 1 组合证明是一种证明, 在这个证明中使用计数的论述而不使用某些其他的方法如代数技巧来证明一个定理。

可以使用组合证明证出许多涉及二项式系数的恒等式。如果可以显示一个恒等式两边通过不同的方法计数了同样的元素, 那么对这个恒等式就可以使用组合证明。现在提供一个推论 1 的组合证明。

证 设 S 是 n 个元素的集合。 S 的每个具有 r 个元素的子集 A 对应于一个具有 $n-r$ 个元素的子集, 即 $\bar{A}$, 因此 $C(n, r) = C(n, n-r)$ 。 $\square$

例 12 有多少种方式从 10 个选手的网球队中选择 5 个选手外出参加在另一个学校的比赛?

解 答案由 10 元素集合的 5 组合数给出。根据定理 2, 这个组合数是

$$C(10, 5) = \frac{10!}{5!5!} = 252$$

例 13 一组 30 个人被培训作为宇航员去完成首次登陆火星的任务。有多少种方式选出 6 个人的小组来完成这个任务(假设所有的小组成员有同样的工作)?

解 因为不考虑这些人被选的次序, 从 30 个人中选 6 个人的小组的方式数是 30 元素集合的 6 组合数。根据定理 2, 这种组合数是

$$C(30, 6) = \frac{30!}{6!24!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 593\,775$$

例 14 有多少个长为 n 的二进制串恰好包含 r 个 1?

解 在长为 n 的二进制串中 r 个 1 的位置构成了集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的 r 组合。因此, 有 $C(n, r)$ 个长为 n 的二进制串恰好包含 r 个 1。

例 15 为开发学校的离散数学课程要选出一个委员会。如果数学系有 9 个教师, 计算机科学系有 11 个教师。而这个委员会要由 3 个数学系的教师和 4 个计算机科学系的教师组成, 那么有多少种选择方式?

解 由乘积法则, 答案是 9 元素集合的 3 组合数与 11 元素集合的 4 组合数之积。根据定理 2, 选择这个委员会的方式数是

$$C(9, 3) \cdot C(11, 4) = \frac{9!}{3!6!} \cdot \frac{11!}{4!7!} = 84 \cdot 330 = 27\,720$$

练习

- 列出 $\{a, b, c\}$ 的所有排列。
- $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ 有多少个排列以 a 结尾?
- 求出下面的每个值

a) $P(6, 3)$	b) $P(6, 5)$	c) $P(8, 1)$
d) $P(8, 5)$	e) $P(8, 8)$	f) $P(10, 9)$
- 求出 9 元素集合的 5 排列数。
- 在一场 12 匹马的赛马中, 如果所有的比赛结果都是可能的, 对于第一名、第二名和第三名有多少种可能性?
- 多少个 10 位二进制串包含

a) 恰好 4 个 1?	b) 至多 4 个 1?	c) 至少 4 个 1?	d) 0 的个数和 1 的个数相等?
--------------	--------------	--------------	--------------------
- 一个组有 n 个男士和 n 个女士。如果把他们男女相间地排成一排, 有多少种方式?
- 有多少种不同的方式从英语字母表中选择 5 个字母?
- 一个 100 个元素的集合有多少个子集包含的元素多于 2 个?
- 一个硬币被掷 10 次, 每次可能出现头像或者非头像。有多少种可能的结果

a) 包含各种不同的情况?	b) 包含恰好 2 个头像?
c) 至多有 3 个不是头像?	d) 头像和非头像的数目相等?
- 字母 ABCDEFG 有多少个排列包含

a) 串 BCD?	b) 串 CFGA?	c) 串 BA 和 GF?	d) 串 ABC 和 DE?
-----------	------------	---------------	----------------

- e) 串 ABC 和 CDE? f) 串 CBA 和 BED?
12. 有多少种方式使得 8 个男士和 5 个女士站成一排并且没有两个女士彼此相邻? [提示: 先放男士, 然后考虑女士可能的位置.]
13. 把编号为 1, 2, ..., 100 的 100 张票卖给 100 个不同的人来抽奖。有 4 项不同的奖, 包括 1 项大奖(到塔希提岛旅游)。如果满足下面的条件, 有多少种不同的抽奖方式?
- 没有限制。
 - 拿 47 号票的人赢得了大奖。
 - 拿 47 号票的人赢了一项奖。
 - 拿 47 号票的人没赢奖。
 - 拿 19 和 47 号票的人都赢了奖。
 - 拿 19、47 和 73 号票的人都赢了奖。
 - 拿 19、47、73 和 97 号票的人都赢了奖。
 - 拿 19、47、73 和 97 号票的人都没赢奖。
 - 拿 19、47、73 或 97 号票的人赢得了大奖。
 - 拿 19 和 47 号票的人赢了奖, 但拿 73 和 97 号票的人没赢奖。
14. 一个俱乐部有 25 个成员。
- 有多少种方式从中选择 4 个人作为董事会成员。
 - 有多少种方式中选出俱乐部的主席、副主席、书记和司库?
- *15. 用不超过 100 的正整数构成 4 排列, 其中有多少个排列包含 3 个连续的整数 $k, k+1, k+2$?
- 这里的连续指按照整数通常的顺序, 并且这些连续整数可能被排列中的其他整数分开。
 - 这里的连续不但指整数是连续的, 而且它们在排列中的位置也是连续的。
16. 英语字母表中包含 21 个辅音和 5 个元音。由英语字母表的 6 个小写字母可构成多少字符串使得它们包含
- 恰好 1 个元音?
 - 恰好 2 个元音?
 - 至少 1 个元音?
 - 至少 2 个元音?
17. 假定某个系包含 10 名男士和 15 名女士。有多少种方式组成一个 6 人委员会且使得它含有相同数量的男士和女士?
18. 有多少个二进制串恰好包含 8 个 0 和 10 个 1, 如果每个 0 后面紧跟着 1 个 1?
19. 有多少个 10 位二进制串包含至少 3 个 1 和至少 3 个 0?
20. 有多少种方式用 3 个字母后跟 3 个数字组成汽车牌照并且没有字母和数字出现 2 次?
21. 如果允许出现并列名次, 3 匹马参加马赛有多少种结果? (注: 可以 2 匹或 3 匹马并列。)
- *22. 有 6 名运动员参加百米赛跑。如果允许并列名次, 有多少种方式授予 3 块奖牌? (跑得最快的运动员得金牌, 恰好只被一个运动员超过的运动员得银牌, 恰好被 2 个运动员超过的运动员得铜牌。)

3.4 二项式系数

正如在 3.3 节谈到的, 具有 n 个元素的集合的 r 组合数常常记作 $\binom{n}{r}$, 由于这些数出现在二项式的幂 $(a+b)^n$ 的展开式中作为系数, 因此这些数叫做二项式系数。我们将讨论二项式定理, 这个定理将二项式的幂表示成与二项式系数有关的项之和。我们将用组合证明来证明这个定理。我们也将显示怎样用组合证明来建立某些恒等式, 它们是表示二项式系数之间关系的许多不同恒等式中的一部分。

3.4.1 二项式定理

二项式定理给出了二项式幂的展开式的系数。一个二项式只不过是两项的和, 例如 $x+y$ 。(这些项可以是常数与变量的积, 但这里先不考虑。)例 1 说明了为什么这个定理成立。

例 1 $(x+y)^3$ 的展开式可以使用组合推理而不是用三个项的乘法得到。当 $(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y)$ 被展开时, 把所有由第一个和的一项、第二个和的一项与第三个和的一项产生的乘积加起来。从而出现了形如 x^3 、 x^2y 、 xy^2 和 y^3 的项。为得到形如 x^3 的项, 在每个和里必须选择

一个 x , 只有一种方式能做到这一点。因此, 乘积中 x^3 项的系数是 1。为得到形如 x^2y 的项, 必须从三个和中的两个和里选 x (而因此在另一个和里选 y)。于是, 这种项的个数是三个个体的 2 组合数, 即 $\binom{3}{2}$ 。类似地, 形如 xy^2 项的个数是三个和中选一个来提供 x 的方式数 (而另两个和中都要选 y), 有 $\binom{3}{1}$ 种方式能够做到这一点。最后, 得到 y^3 的唯一方式是三个和的每一个都选择 y , 恰好有一种方式能够做到这一点。因此得到

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)(x+y) = (xx+xy+yx+yy)(x+y) \\ &= xx x + xx y + xy x + xyy + yxx + yxy + yyx + yyy \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\end{aligned}$$

现在叙述二项式定理。

定理 1 二项式定理 设 x 和 y 是变量, n 是非负整数, 那么

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j} y^j \\ &= \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n\end{aligned}$$

证 这里给出定理的组合证明。当乘积被展开时其中的项都是下述形式: $x^{n-j} y^j$ ($j=0, 1, 2, \dots, n$)。为计数形如 $x^{n-j} y^j$ 的项数, 观察到必须从 n 个和中选 $n-j$ 个 x (从而乘积中其他的 j 个项都是 y) 才能得到这种项。因此, $x^{n-j} y^j$ 的系数是 $\binom{n}{n-j}$, 它等于 $\binom{n}{j}$, 定理得证。 $\square$

例 2~例 4 说明了二项式定理的应用。

例 2 $(x+y)^4$ 的展开式是什么?

解 由二项式定理得到

$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= \sum_{j=0}^4 \binom{4}{j} x^{4-j} y^j \\ &= \binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^3 y + \binom{4}{2} x^2 y^2 + \binom{4}{3} x y^3 + \binom{4}{4} y^4 \\ &= x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4x y^3 + y^4\end{aligned}$$

例 3 在 $(x+y)^{25}$ 的展开式中 $x^{12} y^{13}$ 的系数是什么?

解 由二项式定理得到这个系数是

$$\binom{25}{13} = \frac{25!}{13!12!} = 5\,200\,300$$

例 4 在 $(2x-3y)^{25}$ 的展开式中 $x^{12} y^{13}$ 的系数是什么?

解 首先注意到这个表达式等于 $(2x+(-3y))^{25}$ 。由二项式定理, 我们有

$$(2x+(-3y))^{25} = \sum_{j=0}^{25} \binom{25}{j} (2x)^{25-j} (-3y)^j$$

因此, 当 $j=13$ 时得到展开式中 $x^{12} y^{13}$ 的系数, 即

$$\binom{25}{13} 2^{12} (-3)^{13} = -\frac{25!}{13!12!} 2^{12} 3^{13}$$

我们可以用二项式定理证明某些有用的恒等式。正如推论 1、2 和 3 所示。

推论 1 设 n 为非负整数, 那么

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

证 用二项式定理, 令 $x=1$ 和 $y=1$, 我们有

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

这正是所需要的结果。 □

推论 1 也有一个好的组合证明, 我们现在给出这个证明。

证 一个 n 元素集合有 2^n 个不同的子集。每个子集有 0 个元素, 1 个元素, 2 个元素, $\dots$, n 个元素。具有 0 个元素的子集有 $\binom{n}{0}$ 个, 1 个元素的子集有 $\binom{n}{1}$ 个, 2 个元素的子集有 $\binom{n}{2}$ 个, $\dots$, n 个元素的子集有 $\binom{n}{n}$ 个。于是

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

计数了 n 元素集合的子集总数。这证明了

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad \square$$

推论 2 设 n 是正整数, 那么

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

证 由二项式定理得出

$$0 = 0^n = ((-1) + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$$

从而证明了推论。 □

注意 推论 2 推出

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots$$

推论 3 设 n 是非负整数, 那么

$$\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} = 3^n$$

证 注意到这个公式的左边是二项式定理提供的对 $(1+2)^n$ 的展开式。因此, 由二项式定理可以看出

$$(1+2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 2^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$$

因此

$$\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} = 3^n \quad \square$$

3.4.2 帕斯卡恒等式和三角形

二项式系数满足许多不同的恒等式。现在我们介绍其中最重要的一些恒等式。

定理 2 帕斯卡恒等式 设 n 和 k 是满足 $n \geq k$ 的正整数, 那么有

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

证 假定 T 是包含 $n+1$ 个元素的集合。令 a 是 T 的一个元素且 $S = T - \{a\}$ 。注意到 T 的包含 k 个元素的子集有 $\binom{n+1}{k}$ 个。然而 T 的含 k 个元素的子集或者包含 a 和 S 中的 $k-1$ 个元素, 或者不包含 a 但包含 S 中的 k 个元素。由于 S 的 $k-1$ 元子集有 $\binom{n}{k-1}$ 个, 故 T 含 a 在内的 k 元子集有

$\binom{n}{k-1}$ 个。又由于 S 的 k 元子集有 $\binom{n}{k}$ 个, 故 T 的不含 a 的 k 元子集有 $\binom{n}{k}$ 个。从而得到

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

□

注意 这里给出了帕斯卡恒等式的一个组合证明。也可以从关于 $\binom{n}{r}$ 的公式通过代数推导来证明这个恒等式(见节末的练习 10)。

注意 对所有整数 n , 可以用帕斯卡恒等式和初始条件 $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ 递归地定义二项式系数。这些递归定义用于计算二项式系数, 因为使用这些递归定义只需要整数加法。

帕斯卡恒等式是二项式系数以三角形表示的几何排列的基础, 如图 3-6 所示。

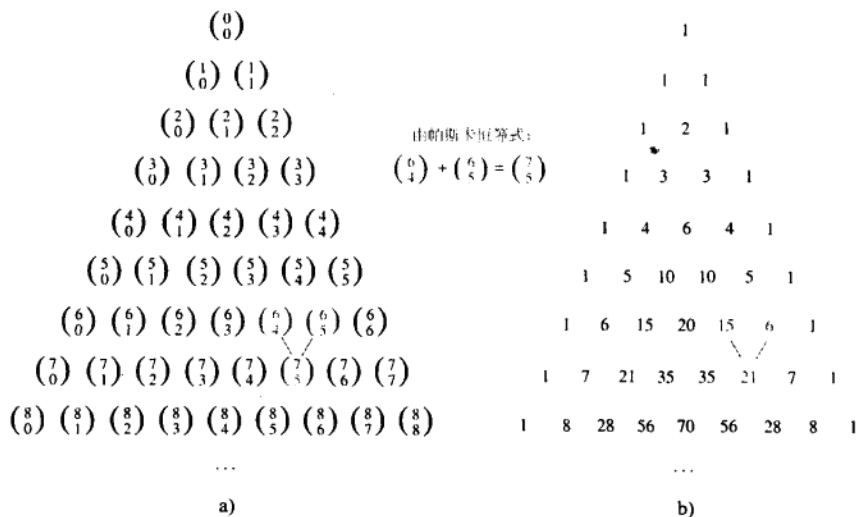


图 3-6 帕斯卡三角形

这个三角形的第 n 行由二项式系数

$$\binom{n}{k}, k = 0, 1, \dots, n$$

组成。这个三角形叫做帕斯卡三角形。帕斯卡恒等式证明, 当这个三角形中两个相邻的二项式系数相加时, 就产生了下一行在这两个系数之间的二项式系数。

3.4.3 其他的二项式系数恒等式

我们从众多二项式系数恒等式中选两个恒等式, 用它们的组合证明来作为本节的结束。

定理 3 范德蒙德恒等式 设 m 、 n 和 r 是非负整数, 其中 r 不超过 m 或 n , 那么

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{m}{r-k} \binom{n}{k}$$

注意 这个恒等式是由 18 世纪的数学家亚历山大·舍费尔·范德蒙德发现的。

证 假定在第一集合中有 m 个项, 第二集合中有 n 个项。从这两个集合的并集中取 r 个元素的方式数是 $\binom{m+n}{r}$ 。从并集中取 r 个元素的另一种方式是先从第一个集合中取 k 个元素, 接着从

第二个集合中取 $r-k$ 个元素, 其中 k 是满足 $0 \leq k \leq r$ 的整数。由乘积法则, 这可以用 $\binom{m}{k} \binom{n}{r-k}$ 种方式完成。所以, 从这个并集中选取 r 个元素的总方式数等于

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{m}{r-k} \binom{n}{k}$$

这就证明了范德蒙德恒等式。 □

推论 4 来自范德蒙德恒等式。

推论 4 如果 n 是一个非负整数, 那么

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

证 在范德蒙德恒等式中令 $m=r=n$ 得到

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

最后一步的相等是使用了恒等式 $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ 。 □

我们可以通过计数具有不同性质的二进制串来证明组合恒等式, 如定理 4 的证明所示。

定理 4 设 n 和 r 是非负整数, $r \leq n$, 那么

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{j=r}^n \binom{n}{j}$$

证 我们使用组合证明。由 3.3 节例 14, 左边 $\binom{n+1}{r+1}$ 计数了 $n+1$ 位长包含了 $r+1$ 个 1 的二进制串。

我们证明, 在具有 $r+1$ 个 1 的二进制串中, 通过考虑与最后一个 1 可能位置的相关情况, 等式右边计数了同样的对象。这最后一个 1 一定出现在位置 $r+1, r+2, \dots$, 或者 $n+1$ 。此外, 如果最后一个 1 出现在第 k 位, 那么一定有 r 个 1 出现在前 $k-1$ 位。因此, 根据 3.3 节例 14, 这样的二进制串有 $\binom{k-1}{r}$ 个, 对所有的 k 求和, 其中 $r+1 \leq k \leq n+1$, 我们发现

$$\sum_{k=r+1}^{n+1} \binom{k-1}{r} = \sum_{j=r}^n \binom{n}{j}$$

个 n 位二进制串恰含有 $r+1$ 个 1。(注意, 最后一步是改变变量 $j=k-1$ 的结果。)由于左边和右边计数了同样的对象, 因此相等。这就完成了证明。 □

练习

1. 求 $(x+y)^4$ 的展开式

a) 使用组合理由, 如例 1 所示。

b) 使用二项式定理。

2. 求 $(x+y)^6$ 的展开式。

3. 在 $(x+y)^{100}$ 的展开式中有多少个项?

4. 在 $(2-x)^{15}$ 中 x^9 的系数是什么?

5. 在 $(2x-3y)^{200}$ 中 $x^{101}y^{99}$ 的系数是什么?

*6. 给出一个关于 $(x^2-1/x)^{100}$ 的展开式中 x^k 系数的公式, 其中 k 是一个整数。

7. 帕斯卡三角形中包含二项式系数 $\binom{9}{k}$ ($0 \leq k \leq 9$) 的行是什么?

8. 证明: 对一切正整数 n 和 k ($0 \leq k \leq n$), $\binom{n}{k} \leq 2^n$ 。

*9. 证明: 如果 n 和 k 是整数, 其中 $1 \leq k \leq n$, 那么 $\binom{n}{k} \leq n^k / 2^{k-1}$ 。

10. 使用关于 $\binom{n}{r}$ 的公式证明帕斯卡恒等式。

11. 证明: 如果 n 和 k 是整数, $1 \leq k \leq n$, 那么 $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ 。

a) 使用组合证明。[提示: 证明恒等式两边计数了从一个 n 元素集合中选 k 个元素, 然后从这个子集中再选 1 个元素的方法。]

b) 使用基于 3.3 节定理 2 给出的 $\binom{n}{r}$ 公式的代数证明。

12. 证明: 如果 n 和 k 是正整数, 那么 $\binom{n+1}{k} = (n+1) \binom{n}{k-1} / k$ 。

使用这个恒等式构造一个二项式系数的归纳的定义。

13. 设 n 是正整数, 证明 $\binom{2n}{n+1} + \binom{2n}{n} = \binom{2n+2}{n+1} / 2$ 。

*14. 证明 $\sum_{k=0}^r \binom{n+k}{k} = \binom{n+r+1}{r}$ 。其中 n 和 r 是正整数。

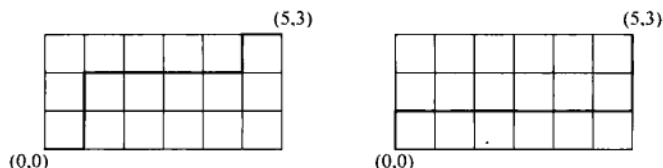
a) 用组合论证

b) 用帕斯卡恒等式

*15. 给出关于 $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$ 的组合证明。[提示: 以两种方法计数选择一个委员会然后选择这个委员会领导的方式数。]

16. 证明: 一个非空集合具有奇数个元素的子集数与具有偶数个元素的子集数相等。

17. 在这个练习里, 我们将要计数 xy 平面上在原点和 (m, n) 点之间的路径数。这些路径由一系列步构成, 其中每一步是向右或者向上移动一个单位(不允许向左或向下移动)。下图给出了两条这种从 $(0, 0)$ 到 $(5, 3)$ 的路径(用粗线标识)。



a) 证明上述每条这种类型的路径可以用由 m 个 0 和 n 个 1 组成的二进制串表示, 其中 0 表示向右移动一个单位, 1 表示向上移动一个单位。

b) 从 a) 推断存在着 $\binom{m+n}{n}$ 条所求类型的路径。

18. 使用练习 17 证明定理 4。[提示: 计数练习 17 所描述的那种 n 步路径数。每条路径必须在一个 $(n-k, k)$ 点结束, 其中 $k=0, 1, 2, \dots, n$ 。]

19. 使用练习 17 证明练习 14 中的恒等式。[提示: 首先观察到从 $(0, 0)$ 到 $(n+1, r)$ 的路径数等于 $\binom{n+1+r}{r}$ 。其次, 按照开始向上恰好走 k 个单位分别计数每一类路径, 其中 $k=0, 1, 2, \dots, r$, 然后对结果求和。]

*20. 如果一个序列的前若干项如下列出, 对于它的第 n 项确定一个与二项式系数有关的公式。[提示: 对帕斯卡三角形的观察有助于问题的求解。虽然以这一组给定的项作为开始的序列有无数多个, 但下面列出的每个序列都是所求的那种序列的开始。]

a) 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, ...

b) 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, ...

c) 1, 2, 6, 20, 70, 252, 924, 3432, 12870, 48620, ...

d) 1, 1, 2, 3, 6, 10, 20, 35, 70, 126, ...

e) 1, 1, 1, 3, 1, 5, 15, 35, 1, 9, ...

f) 1, 3, 15, 84, 495, 3003, 18564, 116280, 735471, 4686825, ...

3.5 排列与组合的推广

3.5.1 引言

在许多计数问题里元素可以被重复使用。例如，一个字母或一个数字可以在一个车牌中多次使用。当选一打多纳圈时，每种可以被重复地选择。这与本章前面讨论的计数问题形成对照，因为在那里我们只考虑每个项至多可以使用一次的排列和组合。在这一节我们将介绍怎样求解元素可以多次使用的计数问题。

还有，某些计数问题涉及不可区分的元素。例如，为计数单词 *SUCCESS* 的字母可能被重新排列的方式数，必须考虑相同字母的放置。这又与前面讨论的所有元素都被认为是不同的计数问题大相径庭。在这一节，我们将描述怎样求解某些元素是不可区分的计数问题。

此外，这一节也将解释怎样求解另一类重要的计数问题，即计数把不同的元素放入盒子的方法数的问题。这种问题的一个例子是把扑克牌发给 4 个玩牌人的不同的方式数。

把在本章前面描述的方法与这一节引入的方法一起考虑，就构成一个求解广泛的计数问题的有用的工具箱。当把第 4 章讨论的新方法再加到这个库里，你将能够求解在广泛的研究领域中产生的大多数计数问题。

3.5.2 有重复的排列

当元素允许重复时，使用乘积法则可以很容易地计数排列数，正如例 1 所示。

例 1 用英文字母可以构成多少个 r 位字符串？

解 因为有 26 个字母，且每个字母可以被重复使用，由乘积法则可以看出存在 26^r 个 r 位字符串。 ■

定理 1 给出了当允许重复时一个 n 元素集合的 r 排列数。

定理 1 具有 n 个物体的集合允许重复的 r 排列数是 n^r 。

证 当允许重复时，在 r 排列中对 r 个位置中的每个位置有 n 种方式选择集合的元素，因为对每个选择，所有 n 个物体都是有效的。因此，由乘积法则，当允许重复时存在 n^r 个 r 排列。 □

3.5.3 有重复的组合

考虑下面元素允许重复的组合的实例。

例 2 从包含苹果、橙子和梨的碗里选 4 个水果。如果选择水果的顺序无关，且只关心水果的类型而不管是该类型的哪一个水果，那么当碗中每类水果至少有 4 个时有多少种选法？

解 为了求解这个问题，我们列出选择水果的所有可能的方式。共有 15 种方式：

4 个苹果	4 个橙子	4 个梨
3 个苹果，1 个橙子	3 个苹果，1 个梨	3 个橙子，1 个苹果
3 个橙子，1 个梨	3 个梨，1 个苹果	3 个梨，1 个橙子
2 个苹果，2 个橙子	2 个苹果，2 个梨	2 个橙子，2 个梨
2 个苹果，1 个橙子，1 个梨	2 个橙子，1 个苹果，1 个梨	2 个梨，1 个苹果，1 个橙子

这个解是从 3 个元素的集合{苹果，橙子，梨}中允许重复的 4 组合数。 ■

为求解这种类型的更复杂的计数问题，我们需要计数一个 n 元素集合的 r 组合的一般方法。在例 3 中，我们将给出这一方法。

例 3 从包含 1 美元、2 美元、5 美元、10 美元、20 美元、50 美元及 100 美元的钱袋中选 5 张纸币，有多少种方式？假定不管纸币被选的次序，同种币值的纸币都是不加区别的，并且至少每种纸币有 5 张。

解 因为纸币被选的次序是无关的且 7 种不同类型的纸币都可以选 5 次，问题涉及的是计数从 7 个元素的集合中允许重复的 5 组合数。列出所有的可能性将是乏味的，因为存在许多的解。相反，我们将给出一种方法来计数允许重复的组合数。

假设一个零钱盒子有7个隔间,每个保存一种纸币,如图3-7所示。这些隔间被6块隔板分开,正如图中所画的。每选择1张纸币就在相应的隔间里放置1个标记。图3-8针对选择5张纸币的3种不同方式给出了这种对应,其中的竖线表示6个隔板,星表示5张纸币。

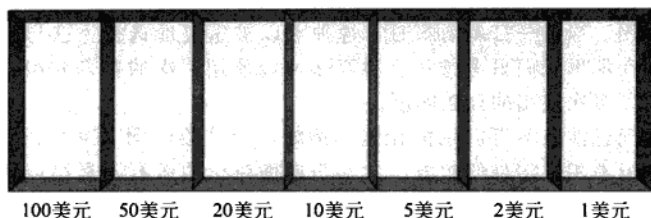


图 3-7 有 7 种类型纸币的零钱盒

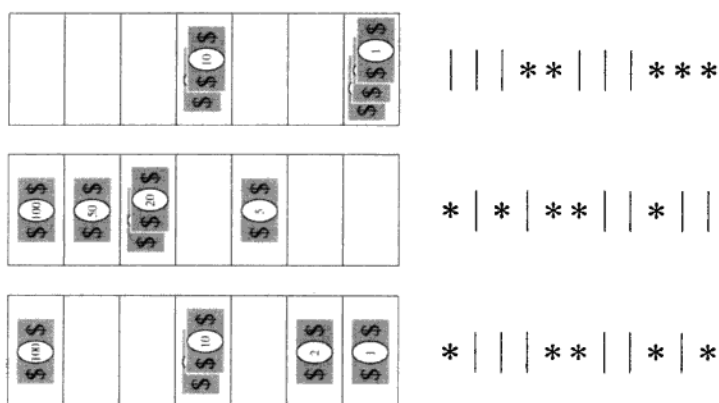


图 3-8 选择 5 张纸币的方式实例

选择 5 张纸币的方法数对应了安排 6 条竖线和 5 颗星的方法数。因此,选择 5 张纸币的方法数就是从 11 个可能的位置选 5 颗星位置的方法数。这对应了从含 11 个物体的集合中无序地选择 5 个物体的方法数,可以有 $C(11, 5)$ 种方式。因此存在

$$C(11, 5) = \frac{11!}{5!6!} = 462$$

种方式从有 7 类纸币的袋中选择 5 张纸币。

定理 2 将这个讨论一般化。

定理 2 n 个元素的集合中允许重复的 r 组合有 $C(n+r-1, r) = C(n+r-1, n-1)$ 个。

证 当允许重复时 n 元素集合的每个 r 组合可以用 $n-1$ 条竖线和 r 颗星的表表示。这 $n-1$ 条竖线用来标记 n 个不同的单元。每当集合的第 i 个元素出现在组合中,第 i 个单元就包含一颗星。例如,4 元素集合的一个 6 组合用 3 条竖线和 6 颗星来表示。这里

$$* * | * || * * *$$

代表了恰包含 2 个第一元素、1 个第二元素、0 个第三元素和 3 个第四元素的组合。

正如我们已经看到的,包含 $n-1$ 条竖线和 r 颗星的每一个不同的表对应了 n 元素集合的允许重复的一个 r 组合。这种表的个数是 $C(n-1+r, r)$, 因为每个表对应了从包含 r 颗星和 $n-1$ 条竖线的 $n-1+r$ 个位置中取 r 个位置来放 r 颗星的一种选择。这种表的个数还等于 $C(n-1+r, n-1)$, 因为每个表对应于取 $n-1$ 个位置来放 $n-1$ 条竖线的一种选择。□

例 4 至例 6 说明怎样使用定理 2。

Extra Example

例 4 设一家甜点店有 4 种不同类型的甜点, 那么从中选 6 块甜点有多少种不同的方式? 假定只关心甜点的类型, 而不管是哪一块甜点或者选择的次序。

解 选择 6 块甜点的方式数是具有 4 类元素集合的 6 组合数。由定理 2 这等于 $C(4+6-1, 6) = C(9, 6)$ 。由于

$$C(9, 6) = C(9, 3) = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$$

因此, 选择 6 块甜点的不同方式数有 84 种。

定理 2 也可以用于求给定线性方程的整数解的个数。这可以由例 5 来说明。

例 5 方程

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

有多少个解? 其中 x_1 、 x_2 和 x_3 是非负整数。

解 为计数解的个数, 注意到一个解对应了从 3 元素集合中选 11 个元素的方式, 以使得 x_1 选自第一类, x_2 选自第二类, x_3 选自第三类。因此, 解的个数等于 3 元素集合允许重复的 11 组合数。由定理 2 存在解的个数为

$$C(3+11-1, 11) = C(13, 11) = C(13, 2) = \frac{13 \cdot 12}{1 \cdot 2} = 78$$

当对变元加上限制时, 也可以求出这个方程的解的个数。例如, 当变元是满足 $x_1 \geq 1$ 、 $x_2 \geq 2$ 且 $x_3 \geq 3$ 的整数时, 也可以求出这个方程的解的个数。满足此限制的方程的解对应于 11 个项的选择, 使得项 x_1 取自第一类, 项 x_2 取自第二类, 项 x_3 取自第三类, 并且第一类元素至少取 1 个, 第二类元素至少取 2 个, 第三类元素至少取 3 个。因此, 先选 1 个第一类的元素, 2 个第二类的元素, 3 个第三类的元素; 然后再多选 5 个元素。由定理 2, 可以用

$$C(3+5-1, 5) = C(7, 5) = C(7, 2) = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21$$

种方式做到。于是, 对给定限制的方程存在 21 个解。

例 6 显示了怎样计数在确定变量值时产生的允许重复的组合数, 当每次通过某一类确定的嵌套循环时, 这个变量的值都会增加。

例 6 在下面的伪码被执行后 k 的值是什么?

```

k := 0
for i1 := 1 to n
    for i2 := 1 to i1
        ⋮
    for im := 1 to im-1
        k := k + 1

```

解 k 的初值是 0, 且对于满足

$$1 \leq i_m \leq i_{m-1} \leq \cdots \leq i_1 \leq n$$

的整数序列 $i_1, i_2, \dots, i_m$, 每次通过这个嵌套循环时 k 的值就加 1。这种整数序列的个数是从 $\{1, 2, \dots, n\}$ 中允许重复地选择 m 个整数的方式数。(为看到这一点只需注意到一旦这个整数序列选定以后, 如果我们按非降顺序排列序列中的整数, 这就唯一地确定了一组对 $i_m, i_{m-1}, \dots, i_1$ 的赋值。相反, 每个这样的赋值对应了一个唯一的无序集合。)所以由定理 2 得出在这个代码被执行后 $k = C(n+m-1, m)$ 。

从一个 n 元素集合中, 允许重复和不允许重复地选择 r 个元素, 其有序或无序的选择数的公式在表 3-1 给出。

表 3-1 允许和不允许重复的组合与排列

类 型	允许重复	公 式
r 排列	不	$\frac{n!}{(n-r)!}$
r 组合	不	$\frac{n!}{r! (n-r)!}$
r 排列	是	n^r
r 组合	是	$\frac{(n+r-1)!}{r! (n-1)!}$

3.5.4 具有不可区别物体的集合的排列

在计数问题中某些元素可能是没有区别的。在这种情况下必须小心避免重复计数。考虑例 7。

例 7 重新排序单词 *SUCCESS* 中的字母能构成多少个不同的串？

解 因为 *SUCCESS* 中的某些字母是重复的，答案并不是 7 个字母的排列数。这个单词包含 3 个 S、2 个 C、1 个 U 和 1 个 E。为确定重新排序单词中的字母能构成多少个不同的串，首先，注意到 3 个 S 可以用 $C(7, 3)$ 种不同的方式放在 7 个位置中，剩下 4 个空位。然后可以用 $C(4, 2)$ 种方式放 2 个 C，留下 2 个空位。又可以用 $C(2, 1)$ 种方式放 U，留下 1 个空位。因此，放 E 只有 $C(1, 1)$ 种方式。从而，由乘积法则，产生的不同的串数是

$$\begin{aligned} C(7, 3)C(4, 2)C(2, 1)C(1, 1) &= \frac{7!}{3!4!} \cdot \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{2!}{1!1!} \cdot \frac{1!}{1!0!} \\ &= \frac{7!}{3!2!1!1!} \\ &= 420 \end{aligned}$$

使用和例 7 同样的推理，能够证明定理 3。

定理 3 设类型 1 的相同的物体有 n_1 个，类型 2 的相同的物体有 n_2 个，…，类型 k 的相同的物体有 n_k 个，那么 n 个物体的不同排列数是

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

证 为确定排列数，首先注意到可以用 $C(n, n_1)$ 种方式在 n 个位置中放类型 1 的 n_1 个物体，剩下 $n - n_1$ 个空位。然后用 $C(n - n_1, n_2)$ 种方式放类型 2 的物体，剩下 $n - n_1 - n_2$ 个空位。继续放类型 3 的物体，…，类型 $k - 1$ 的物体，直到最后可用 $C(n - n_1 - n_2 - \cdots - n_{k-1}, n_k)$ 种方式放类型 k 的物体。因此由乘积法则，不同排列的总数是

$$\begin{aligned} &C(n, n_1)C(n - n_1, n_2)\cdots C(n - n_1 - \cdots - n_{k-1}, n_k) \\ &= \frac{n!}{n_1!(n - n_1)!} \frac{(n - n_1)!}{n_2!(n - n_1 - n_2)!} \cdots \frac{(n - n_1 - \cdots - n_{k-1})!}{n_k!0!} \\ &= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} \end{aligned}$$

3.5.5 把物体放入盒子

许多计数问题都可以通过枚举把不同物体放入不同盒子的方式数来解决(这些被放入盒子的物体的次序是无关紧要的)。这些物体既可以是可辨别的，即每个都是不同的，也可以是不可辨别的，即认为每个都是相同的。可辨别的物体有时称为是有标号的，而不可辨别的物体则称为是没有标号的。类似地，盒子也可以是可辨别的，即每个盒子都不同，也可以是不可辨别的，即每个都相同。可辨别的盒子通常称为是有标号的，而不可辨别的盒子则称为是没有标号的。当利用把物体放入盒子的模型来解决计数问题时，需要确定物体是不是有标号的，盒子是不是有标号的。尽管从计数问题的内容中可以明确地做出决定，但计数问题有时是不明确的，这

使我们很难确定究竟使用哪个模型。在这种情况下,最好的办法就是说明一下你做了什么样的假定,并解释为什么你所选择的模型与你所做的假定是不相违背的。

Extra Examples

我们将会看到,计算把物体放入可辨别的盒子的方式数,不管物体是不是可辨别的,这种计数问题都有封闭的计算公式;然而不幸的是,如果要计算把物体放入不可辨别的盒子里的方式数时,不管物体是不是可辨别的,这种计数问题都没有封闭的计算公式。

可辨别的物体与可辨别的盒子 首先考虑把可辨别的物体放入可辨别的盒子时的情况。考虑例8,在该例子中,物体就是扑克牌,盒子就是选手的手。

例8 有多少种方式把52张标准的扑克牌发给4个人使得每个人5张牌?

解 我们将使用乘法法则求解这个问题。开始,第一个人得到5张牌可以有 $C(52, 5)$ 种方式。第二个人得到5张牌可以有 $C(47, 5)$ 种方式,因为只剩下47张牌。第三个人得到5张牌可以有 $C(42, 5)$ 种方式。最后,第四个人得到5张牌可以有 $C(37, 5)$ 种方式。因此,发给4个人每人5张牌的方式总数是

$$\begin{aligned} C(52, 5)C(47, 5)C(42, 5)C(37, 5) &= \frac{52!}{47!5!} \cdot \frac{47!}{42!5!} \cdot \frac{42!}{37!5!} \cdot \frac{37!}{32!5!} \\ &= \frac{52!}{5!5!5!5!32!} \end{aligned}$$

注意 例8的解等于52个物体的排列数,这些物体分成5个不同的类,其中四类,每类有5个相同的物体,第五类有32个物体。可以通过在这种排列和给人发牌之间定义一个一一对应来说明这个等式。为定义这个对应,首先把牌从1到52排序。然后将发给第一个人的牌与分配给第一类物体在排列中的位置对应。类似地,发给第二、第三和第四个人的牌分别与第二、第三、第四类物体所分配的位置对应。没有发给任何人的牌与第五类物体所分配的位置对应。读者应该能够验证这是一个一一对应。

例8是涉及把不同的物体分配到不同的盒子的一个典型的问题。这些不同的物体是52张牌,5个不同的盒子是4个人的手和其余的牌。可以使用下面的定理求解把不同的物体分配到不同的盒子的计数问题。

定理4 把 n 个不同的物体分配到 k 个不同的盒子使得 n_i 个物体放入盒子 i ($i=1, 2, \dots, k$)的方式数等于

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

定理4可以使用乘法法则证明。详细证明见本节的练习24。它也可以通过在定理3计数的排列和定理4计数的放物体的方法之间建立一一对应来给出证明。

不可辨别的物体与可辨别的盒子 计算将 n 个不可辨别的物体放入 k 个可辨别的盒子的方法数问题,其结果等价于在允许重复计数的情况下,对具有 k 个元素的集合计算 n 组合数的问题。其原因是:在允许重复计数的情况下,具有 k 个元素集合的 n 组合数与将 n 个不可辨别的球放入 k 个可辨别的盒子的方法数之间存在一个一一对应的关系。为了建立这种对应关系,每次将一个球放入第 i 个盒子,则对应于集合中的第 i 个元素被纳入了 n 组合数。

例9 将10个不可辨别的球放入8个可辨别的桶里,共有多少种方法?

解 将10个不可辨别的球放入8个可辨别的桶里的方法数等于在允许重复计数的情况下,从具有8个元素的集合中取出的10组合的个数。因此有

$$C(8+10-1, 10) = C(17, 10) = \frac{17!}{10!7!} = 19\,448$$

这意味着有 $C(n+r-1, n-1)$ 种方法将 r 个不可辨别的球放入 n 个可辨别的盒子。

可辨别的物体与不可辨别的盒子 计算将 n 个可辨别的物体放入 k 个不可辨别的盒子的方式数问题,要比计算将物体(不管物体是不是可辨别的)放入可辨别的盒子的方法数问题都困难。我们

将用一个例子来说明这一点。

例 10 将 4 个不同的雇员安排在 3 间不可辨别的办公室，有多少种方式？其中每间办公室可以安排任意个数的雇员。

解 我们将通过枚举雇员安排在办公室的所有方式来求解该问题。设 A, B, C, D 分别代表 4 个雇员。首先注意：可以把 4 个雇员都安排在同一间办公室；也可以将 3 个雇员安排在同一间办公室，第 4 个雇员安排在另一间办公室；也可以将 2 个雇员安排在同一间办公室，另外 2 个雇员安排在另一间办公室；最后，还可以将 2 个雇员安排在同一间办公室，而另外 2 个雇员各安排一间不同的办公室。上述每一种安排方式都可以用把 A, B, C, D 分成不相交的子集的方式来表示。

恰好有一种方式将所有 4 个雇员都安排在同一间办公室，用 $\{\{A, B, C, D\}\}$ 来表示。恰好有 4 种方式将 3 个雇员安排在同一间办公室，而第 4 个雇员安排在另一间不同的办公室，用 $\{\{A, B, C\}, \{D\}\}, \{\{A, B, D\}, \{C\}\}, \{\{A, C, D\}, \{B\}\}$ 和 $\{\{B, C, D\}, \{A\}\}$ 来表示。恰好有 3 种方式将 2 个雇员安排在同一间办公室，另外 2 个雇员安排在另一间办公室，用 $\{\{A, B\}, \{C, D\}\}, \{\{A, C\}, \{B, D\}\}$ 和 $\{\{A, D\}, \{B, C\}\}$ 来表示。最后，有 6 种方式将 2 个雇员安排在同一间办公室，而另外 2 个雇员各安排一间不同的办公室。分别用 $\{\{A, B\}, \{C\}, \{D\}\}, \{\{A, C\}, \{B\}, \{D\}\}, \{\{A, D\}, \{B\}, \{C\}\}, \{\{B, C\}, \{A\}, \{D\}\}, \{\{B, D\}, \{A\}, \{C\}\}$ 和 $\{\{C, D\}, \{A\}, \{B\}\}$ 来表示。

计算所有的可能性，得到：共有 14 种方式将 4 个不同的雇员安排在 3 间不可辨别的办公室。思考这个问题的另外一种方法是：将要安排的办公室数是多少。注意：将 4 个不同雇员安排在 3 间不可辨别的办公室（没有空办公室）共有 6 种方式，将 4 个不同雇员安排在两间不可辨别的办公室（有一间空办公室）共有 7 种方式，将 4 个不同雇员全安排在同一间办公室共有 1 种方式。 ■

关于计算把 n 个可辨别的物体放入 j 个不可辨别的盒子数问题，我们没有一个简单可用的封闭公式。但是，却有一个相当复杂的计算公式，下面将给出这个公式，如果读者愿意，可以忽略该公式的讨论部分。设 $S(n, j)$ 表示将 n 个可辨别的物体放入 j 个不可辨别的盒子的方式数，其中不允许有空的盒子。数 $S(n, j)$ 称为第二类斯特灵数。例如，例 10 证明了 $S(4, 3) = 6$ ， $S(4, 2) = 7$ 和 $S(4, 1) = 1$ 。我们看到将 n 个可辨别的物体放入 k 个不可辨别的盒子（其中非空的盒子数等于 $k, k-1, \dots, 2$ ，或 1）的方式数等于

$$\sum_{i=1}^k S(n, i)$$

例如，跟踪例 10 的推理过程，将 4 个不同雇员安排在 3 间不可辨别的办公室共有

$$S(4, 1) + S(4, 2) + S(4, 3) = 1 + 7 + 6 = 14$$

种方式。利用容斥原理（见 4.6 节）可以证明：

$$S(n, j) = \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i \binom{j}{i} (j-i)^n$$

因此，将 n 个不可辨别的物体放入 k 个不可辨别的盒子的方法数等于

$$\sum_{j=1}^k S(n, j) = \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i \binom{j}{i} (j-i)^n$$

（关于第二类斯特灵数的详细信息，可以参考组合数学教材，如 [B607]、[Br99]、[RoTe05] 以及 [MiRo91] 中的第 6 章。）

不可辨别的物体与不可辨别的盒子 有些计数问题可以通过确定将不可辨别的物体放入不可辨别的盒子的方式数而得解决。用一个例子来说明这一原理。

例 11 将同一本书的 6 个副本放到 4 个相同的盒子里，其中每个盒子都能容纳 6 个副本，有多少种不同的方式？

解 我们来枚举所有的放入方式。对每一种放入方式，将按照具有最多副本数的盒子的次序依次列出每个盒子中的副本数，即列出的次序是递减的。那么，放入方式有

6,
5, 1
4, 2
4, 1, 1
3, 3
3, 2, 1
3, 1, 1, 1
2, 2, 2
2, 2, 1, 1

例如, 4, 1, 1 表示: 有一个盒子中有 4 份副本、第二个盒子中有 1 份副本、第三个盒子中有 1 份副本(第四个盒子是空的)。因为已经枚举了将 6 个副本放到最多 4 个盒子里的所有方式, 我们知道, 共有 9 种方式来完成这项任务。

将 n 个不可辨别的物体放入 k 个不可辨别的盒子, 等价于将 n 写成最多 k 个非递增正整数的和。如果 $a_1 + a_2 + \cdots + a_j = n$, 其中 $a_1, a_2, \cdots, a_j$ 都是正整数, 且 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_j$, 那么就说 $a_1, a_2, \cdots, a_j$ 是将正整数 n 划分成 j 个正整数的一个划分。可以看到, 如果 $p_k(n)$ 是将正整数 n 划分成最多 k 个正整数的方式数的话, 那么将 n 个不可辨别的物体放入 k 个不可辨别的盒子里的方式数就是 $p_k(n)$ 。关于这个数, 我们没有更简单的公式来表示它了。

练习

1. 从一个 3 元素集合中允许重复地有序选取 5 个元素有多少种不同的方式?
2. 6 个字母的字符串有多少个?
3. 分配 3 种工作给 5 个雇员, 如果每个雇员可以得到 1 种以上的工作, 那么有多少种不同的分配方式?
4. 从一个 5 元素集合中允许重复地无序选取 3 个元素有多少种不同的方式?
5. 一个百吉饼店有洋葱百吉饼、罂粟子百吉饼、鸡蛋百吉饼、咸味百吉饼、粗制燕麦百吉饼、芝麻百吉饼、葡萄干百吉饼和普通百吉饼, 有多少种方式选择
 - a) 6 个百吉饼?
 - b) 12 个百吉饼?
 - c) 24 个百吉饼?
 - d) 12 个百吉饼, 并且每类至少有 1 个?
 - e) 12 个百吉饼, 并且至少有 3 个鸡蛋百吉饼和不超过 2 个咸味百吉饼?
6. 一个小猪储钱罐包含 100 个相同的 1 美分和 80 个相同的 5 美分硬币, 从中选 8 个硬币有多少种方式?
7. 一个出版商有 3000 本离散数学书, 如果这些书是没有区别的, 那么将这些书存储在 3 个库房有多少种方式?
8. 方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$ 有多少个解? 其中 $x_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ 是非负整数, 并且使得
 - a) $x_1 \geq 1$
 - b) $x_i \geq 2, i=1, 2, 3, 4, 5$
 - c) $0 \leq x_1 \leq 10$
 - d) $0 \leq x_1 \leq 3, 1 \leq x_2 < 4, x_3 \geq 15$
9. 有多少 10 位三进制数字(0, 1 或 2)串恰含有 2 个 0、3 个 1 和 5 个 2?
10. 假设一个大家庭有 14 个孩子, 包括 2 组三胞胎、3 组双胞胎以及 2 个单胞胎。这些孩子坐在一排椅子上, 如果相同的三胞胎或双胞胎的孩子不能互相区分, 那么有多少种方式?
11. 把 6 个相同的球放到 9 个不同的箱子里有多少种方法?
12. 把 12 个不同的物体放到 6 个不同的盒子里并且每个盒子有 2 个物体, 有多少种方法?
13. 有多少个小于 1 000 000 的正整数其数字之和等于 19?
14. 一次离散数学的期末考试有 10 道题。如果总分数是 100 且每道题至少 5 分, 那么有多少种方式来分配这些题的分数?
15. 如果被传送的二进制串必须以 1 开始, 必须有另外 3 位 1(使得传送的 1 共有 4 位), 必须包含总共 12 位 0, 必须每个 1 后面至少跟随 2 个 0, 那么有多少个不同的二进制串?
16. 使用 ABRACADABRA 中的所有字母可以构造多少个不同的串?

17. 使用 ORONO 中的某些或全部字母可以构造多少个不同的串?
18. 用 EVERGREEN 中的字母可以构造多少个至少含 7 个字符的串?
19. 一个学生有 3 个芒果、2 个番木瓜和 2 个猕猴桃。如果这个学生每天吃 1 个水果, 并且只考虑水果的类型, 那么有多少种不同的方式吃完这些水果?
20. 有多少种不同的方式在 xyz 空间上从原点 $(0, 0, 0)$ 到达 $(4, 3, 5)$ 点? 这个旅行的每一步是在 x 正方向移动一个单位, y 正方向移动一个单位, 或者 z 正方向移动一个单位。 (x, y, z) 负方向的移动是禁止的, 即不允许回头。
21. 把一副标准的 52 张扑克牌发给 5 个人, 每个人得到 7 张牌, 有多少种方式?
22. 当把一副标准的 52 张牌发给 4 个人时, 若使得每个人有一手包含 1 个 A 的牌, 这种概率是多少?
23. n 本书放在 k 个不同的书架上有多少种方式?
- 如果这些书是同一种书。
 - 如果所有的书都不同, 并且考虑这些书在书架上的位置。
- *24. 通过先把物体放入第一个盒子, 然后把物体放入第二个盒子, $\dots$, 的方法, 使用乘法法则证明定理 4。
- *25. 在这个练习中, 我们将通过在两个集合之间建立一一对应来证明定理 2。这两个集合分别是集合 $S = \{1, 2, \dots, n\}$ 的允许重复的 r 组合的集合和集合 $T = \{1, 2, 3, \dots, n+r-1\}$ 的 r 组合的集合。
- 把 S 的允许重复的 r 组合中的元素排成一个递增序列 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_r$ 。证明: 对这个序列的第 k 项加上 $k-1$ 而构成的序列是严格递增的。断言这个序列由 T 的 r 个不同的元素构成。
 - 证明 a) 所描述的过程在 S 的允许重复的 r 组合的集合与 T 的 r 组合的集合之间定义了一一对应。[提示: 通过把 T 的满足 $1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_r \leq n+r-1$ 的 r 组合 $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$, 与从第 k 个元素减去 $k-1$ 得到的 S 的允许重复的 r 组合相联系, 证明这个对应是可逆的。]
 - 断言存在着 $C(n+r-1, r)$ 个 n 元素集合的允许重复的 r 组合。
26. 有多少种不同的方式将 6 个可辨别的物体放入 4 个不可辨别的盒子, 使得每个盒子里至少有 1 个物体?
27. 有多少种不同的方式将 6 个临时雇员安排到 4 个相同的办公室, 使得每个办公室中至少有 1 个临时雇员?
28. 有多少种不同的方式将 6 个不可辨别的物体放入 4 个不可辨别的盒子, 使得每个盒子里至少有 1 个物体?
29. 有多少种不同的方式将 9 张相同的 DVD 放入 3 个不可辨别的盒子, 使得每个盒子里至少有 2 张 DVD?
30. 有多少种不同的方式将 5 个球放到 3 个盒子里, 要求每个盒子里至少有 1 个球, 如果
- 球与盒都是有标号的?
 - 球是有标号的, 但盒子是没有标号的?
 - 球是没有标号的, 但盒子是有标号的?
 - 球与盒都是没有标号的?
- *31. 假如一个武器巡视员必须对五个不同场所中的每个场所巡视两次, 每天巡视一个场所。巡视员可以自由选择巡视场所的次序, 但他不能连着两天都巡视 X 场所, 因为 X 场所是最可疑的场所。那么, 该巡视员有多少种不同的方式来巡视这些场所?
- *32. 证明多项式定理: 如果 n 是正整数, 则

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_m = n} C(n; n_1, n_2, \dots, n_m) x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}$$

其中

$$C(n; n_1, n_2, \dots, n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!}$$

是多项式系数。

33. 求 $(x+y+z)^{10}$ 中的 $x^3 y^2 z^5$ 的系数。

3.6 生成排列和组合

3.6.1 引言

本章前几节已经描述了各种类型的排列和组合的计数方法, 但是有时候需要生成排列和组合, 而不仅仅是计数。考虑下面三个问题。第一, 假设一个销售商必须访问 6 个城市。应该按照什么顺序访问这些城市而使得总的旅行时间最少? 一种方法就是确定 $6! = 720$ 种不同顺序的访问时间并且选择具有最小旅行时间的访问顺序。第二, 假定 6 个数的集合中某些数的和是 100。找出这些数的一种方法就是生成所有 $2^6 = 64$ 个子集并且检查它们的元素和。第三, 假设一个实验室有 95 个雇员, 一个项目需要一组 12 人组成的有 25 种特定技能的雇员。(每个雇员可能有一种或多种技

能)。找出这组雇员的一种方法就是找出所有的12个雇员的小组,然后检查他们是否有所需要的技能。这些例子都说明为了解问题常常需要生成排列和组合。

3.6.2 生成排列

任何 n 元素集合可以与集合 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 建立一一对应。我们可以如下列出任何 n 元素集合的所有排列:生成 n 个最小正整数的排列,然后用对应的元素替换这些整数。已经建立了许多不同的算法来生成这个集合的 $n!$ 个排列。我们将要描述的算法是以 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 的排列集合上的字典顺序为基础的。按照这个顺序,如果对于某个 k , $1 \leq k \leq n$, $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}$ 并且 $a_k < b_k$, 那么排列 $a_1 a_2 \dots a_n$ 在排列 $b_1 b_2 \dots b_n$ 的前边。换句话说,如果在 n 个最小正整数集合的两个排列不等的第一位置,一个排列的数小于第二个排列的数,那么这个排列按照字典顺序排在第二个排列的前边。

例1 集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的排列 23415 在排列 23514 的前边,因为这些排列在前两位相同,但第一排列在第三位中的数是4,小于第二排列在第三位中的数5。类似地,排列 41532 在排列 52143 的前边。

生成 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的排列的算法基础是从一个给定排列 $a_1 a_2 \dots a_n$ 按照字典顺序构造下一个排列的过程。我们将说明怎样做到这一点。首先假设 $a_{n-1} < a_n$, 交换 a_{n-1} 和 a_n 可得到一个更大的排列。没有其他的排列既大于原来的排列并且又小于这个通过交换 a_{n-1} 与 a_n 得到的排列。例如,在 234156 后面的下一个最大的排列是 234165。另一方面,如果 $a_{n-1} > a_n$, 那么由交换这个排列中的最后两项不可能得到一个更大的排列。看看排列中的最后3个整数,如果 $a_{n-2} < a_{n-1}$, 那么可以重新安排这3个数而得到下一个最大的排列。 a_{n-1} 和 a_n 中比较小的数大于 a_{n-2} , 先把这个数放在位置 $n-2$, 然后把剩下的那个数和 a_{n-2} 按照递增的顺序放到最后两个位置。例如,在 234165 后面的下一个最大的排列是 234516。

另一方面,如果 $a_{n-2} > a_{n-1}$ (且 $a_{n-1} > a_n$), 那么不可能由安排在这个排列的最后三项而得到更大的排列。基于这个观察,可以描述一个一般的方法,对于给定的排列 $a_1 a_2 \dots a_n$ 依据字典顺序来生成下一个最大的排列。首先,找到整数 a_j 和 a_{j+1} 使得 $a_j < a_{j+1}$ 且

$$a_{j+1} > a_{j+2} > \dots > a_n$$

即在这个排列中的最后一对相邻的整数,使得这个对的第一个整数小于第二个整数。然后,把 $a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_n$ 中大于 a_j 的最小的整数放到第 j 个位置,再按照递增顺序从位置 $j+1$ 到 n 列出 $a_j, a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_n$ 中其余的整数,这就得到依照字典顺序的下一个最大的排列。容易看出,没有其他的排列大于排列 $a_1 a_2 \dots a_n$ 而小于这个新生成的排列。(对这一事实的验证留给读者作为练习)。

例2 在 362541 后面按照字典顺序下一个最大的排列是什么?

解 使得 $a_j < a_{j+1}$ 的最后一对整数 a_j 和 a_{j+1} 是 $a_3 = 2$ 和 $a_4 = 5$ 。排列在2右边大于2的最小整数是 $a_5 = 4$, 因此4被放在第三位置。然后整数2, 5和1依递增顺序放到最后3个位置,即这个排列的最后3个位置是125。于是,下一个最大排列是 364125。

为生成整数 $1, 2, 3, \dots, n$ 的 $n!$ 个排列,按照字典顺序由最小的排列,即 $123 \dots n$ 开始,连续施用 $n! - 1$ 次生成下一个最大排列的过程,就得到 n 个最小的整数按字典顺序的所有排列。

例3 按字典顺序生成整数 $1, 2, 3$ 的排列。

解 从 123 开始,由交换3和2得到下一个排列132。下一步,因为 $3 > 2$ 和 $1 < 3$, 排列在132中的3个整数,把3和2中较小的放到第一个位置,然后按递增顺序把1和3放到位置2和3而得到213。跟着213的是231,它是由交换1和3得到的,因为 $1 < 3$ 。下一个最大的排列把3放在第一位置,后面是1和2按递增顺序排列,即312。最后,交换1和2得到最后一个排列321。

算法1显示了在给定排列不是最大的排列 $n n-1 n-2 \dots 2 1$ 时,在它的后面按照字典顺序找到下一个最大排列的过程。

算法 1 按字典顺序生成下一个最大排列

procedure *next permutation* ($a_1 a_2 \cdots a_n$: $\{1, 2, \dots, n\}$ 的排列, 不等于 $n n-1 \cdots 2 1$)

$j := n-1$

while $a_j > a_{j+1}$

$j := j-1$

{ j 是使得 $a_j < a_{j+1}$ 的最大下标}

$k := n$

while $a_j > a_k$

$k := k-1$

{ a_k 是在 a_j 右边大于 a_j 的最小整数}

交换 a_j 和 a_k

$r := n$

$s := j+1$

while $r > s$

begin

交换 a_r 和 a_s

$r := r-1$

$s := s+1$

end

{这把在第 j 位后边的排列尾部按递增顺序放置}

3.6.3 生成组合



怎样可以生成一个有穷集的元素的所有组合呢? 由于一个组合仅仅就是一个子集, 我们可以利用在 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 和 n 位二进制串之间的对应。

如果 a_k 在子集中, 对应的二进制串在位置 k 有一个 1; 如果 a_k 不在子集中, 对应的二进制串在位置 k 有一个 0。如果可以列出所有的 n 位二进制串, 那么通过在子集和二进制串之间的对应就可以列出所有的子集。

一个 n 位二进制串也是一个在 0 到 2^n-1 之间的整数的二进制展开式。按照它们的二进制展开式, 作为整数根据递增顺序可以列出这 2^n-1 个二进制串。为生成所有的 n 位二进制展开式, 从具有 n 个 0 的二进制串 $000\cdots 00$ 开始。然后, 继续找下一个最大的展开式, 直到得到 $111\cdots 11$ 为止。在每一步找下一个最大的二进制展开式时, 先确定从右边起第一个不是 1 的位置。然后把这个位置右边的所有的 1 变成 0 并且将这第一个 0 (从右边数) 变成 1。

例 4 找出在 10 0010 0111 后面的下一个最大的二进制串。

解 这个串从右边数不是 1 的第 1 位是从右边起的第 4 位。把这一位变成 1 并且将它后面所有的位变成 0。这就生成了下一个最大的二进制串 10 0010 1000。

生成在 $b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_1b_0$ 后面的下一个最大的二进制串的过程给出在算法 2 中。

算法 2 生成下一个最大的二进制串

procedure *next bit string* ($b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_1b_0$: 不等于 $11\cdots 11$ 的二进制串)

$i := 0$

while $b_i = 1$

begin

$b_i := 0$

$i := i+1$

end

$b_i := 1$

下面将给出生成集合 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 的 r 组合的算法。一个 r 组合可以表示成一个序列, 这个序列按照递增的顺序包含了这个子集中的元素。使用在这些序列上的字典顺序可以列出这些 r 组合。在 $a_1 a_2 \dots a_r$ 后面的下一个组合可以按下面的方法得到: 首先, 找到序列中使得 $a_i \neq n-r+i$ 的最后元素 a_i , 然后用 a_i+1 代替 a_i , 且对于 $j=i+1, i+2, \dots, r$ 用 $a_i+j-i+1$ 代替 a_j 。请读者证明这就按字典顺序生成了下一个最大的组合。下面的例子说明了这个过程。

例 5 找出集合 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 在 $\{1, 2, 5, 6\}$ 后面的下一个最大的4组合。

解 在具有 $a_1=1, a_2=2, a_3=5, a_4=6$ 的项中使得 $a_i \neq 6-4+i$ 的最后的项是 $a_2=2$ 。为得到下一个最大的4组合, 把 a_2 加1得 $a_2=3$ 。然后, 置 $a_3=3+1=4$ 且 $a_4=3+2=5$ 。从而下一个最大的4组合是 $\{1, 3, 4, 5\}$ 。 ■

算法3用伪码给出了这个过程。

算法 3 按字典顺序生成下一个 r 组合

procedure *next r-combination* ($\{a_1, a_2, \dots, a_r\} : \{1, 2, \dots, n\}$ 的满足 $a_1 < a_2 < \dots < a_r$ 的不等于 $\{n-r+1, \dots, n\}$ 的真子集)

$i := r$

while $a_i = n-r+i$

$i := i-1$

$a_i := a_i + 1$

for $j := i+1$ **to** r

$a_j := a_i + j - i$

练习

- 按照字典顺序排列下述 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的排列: 43521, 15432, 45321, 23451, 23514, 14532, 21345, 45213, 31452, 31542。
- 找出按照字典顺序跟在下面每一个排列后面的下一个最大的排列。
a) 1432 b) 54123 c) 12453 d) 45231 e) 6714235 f) 31528764
- 使用算法1按照字典顺序生成前4个正整数的24个排列。
- 使用算法3列出集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的所有的3组合。
- 证明: 算法3按字典顺序生成给定 r 组合后面的下一个最大的 r 组合。
- 列出 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的所有3排列。

下面的练习建立了另一个算法来生成 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 的排列。这个算法是基于整数的康托尔展开。每个小于 $n!$ 的非负整数有一个唯一的康托尔展开式

$$a_1 1! + a_2 2! + \dots + a_{n-1} (n-1)!$$

其中 a_i 是一个不超过 i 的非负整数, $i=1, 2, \dots, n-1$ 。整数 $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ 叫做这个整数的康托尔数字。

给定 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的一个排列。令 a_{k-1} 是排列中在 k 后面且小于 k 的整数个数, $k=2, 3, \dots, n$ 。例如, 在排列43215中, a_1 是在2后面且小于2的整数个数, 所以 $a_1=1$ 。类似地, 对这个例子 $a_2=2, a_3=3$ 且 $a_4=0$ 。考虑从 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 的排列的集合到小于 $n!$ 的非负整数的集合的函数。这个函数把一个排列映到一个非负整数, 而这个整数把以这种方式定义的 $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ 作为它的康托尔数字。

*7. 证明: 这里描述的对应是 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 的排列的集合与小于 $n!$ 的非负整数之间的双射。

关键术语和结果

术语

组合数学: 研究物体安排的科学。

枚举: 物体安排的计数。

树图: 由根、从根出发的分支以及从分支的某些端点出发的其他分支构成的图。

排列：集合元素的一个有序的安排。

r 排列：集合的 r 个元素的一个有序安排。

$P(n, r)$ ： n 元素集合的 r 排列数。

r 组合：集合的 r 个元素的无序选取。

$C(n, r)$ ： n 元素集合的 r 组合数。

$\binom{n}{r}$ (二项式系数)：也是 n 元素集合的 r 组合数。

组合证明：基于计数变量的证明。

帕斯卡三角形：二项式系数的一种表示，其中三角形的第 i 行包含 $\binom{i}{j}$, $j=0, 1, 2, \dots, i$ 。

结果

乘法法则：一种基本的计数技术。这个法则指出，当一个过程由两个子任务构成时，完成这个过程的方式数是完成第一个任务的方式数和完成第一个任务之后再第二个任务的方式数之积。

求和法则：一种基本的计数技术。这个法则指出，如果两个任务不能同时做，那么用这种或那种方式完成任务的总方式数是完成两种任务的方式数之和。

鸽巢原理：当比 k 多的物体放到 k 个盒子时，一定存在一个盒子包含了至少 2 个物体。

广义鸽巢原理：当 N 个物体放入 k 个盒子时，一定存在一个盒子包含了至少 $\lceil N/k \rceil$ 个物体。

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\text{帕斯卡恒等式: } \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$\text{二项式定理: } (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

当允许重复时，一个 n 元素集合有 n^r 个 r 排列。

当允许重复时，一个 n 元素集合有 $C(n+r-1, r)$ 个 r 组合。

如果类型 i 的不可区分的物体有 n_i 个, $i=1, 2, 3, \dots, k$, 那么 n 个物体的排列有 $n! / (n_1! n_2! \dots n_k!)$ 个。

生成集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的排列的算法。

复习题

- 解释怎样用求和与乘法法则找出长度不超过 10 的二进制串的个数。
- 解释怎样找出长度不超过 10 且至少有 1 位 0 的二进制串的个数。
- 怎样用乘法法则找出从 m 元素集合到 n 元素集合的函数个数？
 - 从一个 5 元素集合到一个 10 元素集合存在多少个函数？
 - 怎样用乘法法则找出从 m 元素集合到 n 元素集合的一对一函数的个数？
 - 从一个 5 元素集合到一个 10 元素集合存在多少个一对一函数？
 - 从一个 5 元素集合到一个 10 元素集合存在多少个映上(注：满射)的函数？
- 如果首先赢 4 个球的队就能取胜，你怎样找出两个队加赛的所有可能的结果数？
- 你怎样找出以 101 开始或以 010 结束的 10 位二进制串数？
- 叙述鸽巢原理。
 - 解释怎样用鸽巢原理证明在 11 个整数中至少 2 个整数的最后一位相同？
- 叙述广义鸽巢原理。
 - 解释怎样用广义鸽巢原理证明在 91 个整数中有 10 个整数的最后一位数字相同？

8. a) 一个 n 元素集合的 r 排列和 r 组合的区别是什么?
 b) 推导一个与 n 元素集合的 r 组合数及 r 排列数有关的等式。
 c) 有多少种方式从一班 25 个学生中选 6 个学生参加一个委员会?
 d) 有多少种方式从一班 25 个学生中选 6 个学生担任委员会中不同的常务委员?
9. a) 什么是帕斯卡三角形?
 b) 在帕斯卡三角形中的一行是怎样从它的上一行产生的?
10. 什么是恒等式的组合证明? 这样的证明与代数证明有什么不同?
11. 解释怎样用组合论证证明帕斯卡恒等式。
12. a) 叙述二项式定理。
 b) 解释怎样用组合论证证明二项式定理。
 c) 求在 $(2x+5y)^{201}$ 的展开式中 $x^{100}y^{101}$ 项的系数。
13. a) 解释怎样找出与从 n 个物体允许重复地无序选取 r 个物体的方法数有关的公式。
 b) 如果同种类型的物体是不加区分的, 那么从 5 种不同类型的物体中选择 12 个物体有多少种方式?
 c) 从这 5 种不同类型的物体中选择 12 个物体, 如果第一类物体必须至少 3 个, 那么有多少种方式?
 d) 从这 5 种不同类型的物体中选择 12 个物体, 如果第一类物体不多于 4 个, 那么有多少种方式?
 e) 从这 5 种不同类型的物体中选择 12 个物体, 如果第一类物体必须至少 2 个, 但是第二类物体不超过 3 个, 那么有多少种方式?
14. a) 设 n 和 r 是正整数, 解释为什么方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$ 的解的个数等于 n 元素集合的允许重复的 r 组合数。这里的 x_i 是非负整数, $i=1, 2, 3, \cdots, n$ 。
 b) 方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=17$ 有多少个非负整数解?
 c) b) 的方程有多少个正整数解?
15. a) n 个物体有 k 种不同的类型, 其中类型 1 有 n_1 个无区别的物体, 类型 2 有 n_2 个无区别的物体, $\cdots$, 类型 k 有 n_k 个无区别的物体, 推导一个与这些物体的排列数有关的公式。
 b) 有多少种方式来排序单词 *INDISCREETNESS* 的字母?
16. 描述一个算法来生成 n 个最小正整数集合的所有排列。
17. a) 把 52 张标准的扑克牌发给 6 个人, 每人 5 张牌, 有多少种方式?
 b) 有多少种方式把 n 个有区别的物体分配给 k 个有区别的盒子且使得第 i 个盒子含有 n_i 个物体?
18. 描述一个算法来生成 n 个最小正整数集合的所有的组合。

补充练习

1. 从 10 个不同的项中选 6 项有多少种方式?
 a) 若这些项是有序选择的并且不允许重复。
 b) 若这些项是有序选择的并且允许重复。
 c) 若这些项是无序选择的并且不允许重复。
 d) 若这些项是无序选择的并且允许重复。
2. 从 6 个不同的项中选 10 项有多少种方式?
 a) 若这些项是有序选择的并且不允许重复。
 b) 若这些项是有序选择的并且允许重复。
 c) 若这些项是无序选择的并且不允许重复。
 d) 若这些项是无序选择的并且允许重复。
3. 一个考试包含 100 个真假判断题。如果答案可以空缺, 一个学生回答这些考题可能有多少种不同的方式?
4. 有多少个 10 位二进制串以 000 开始或以 111 结束?
5. 字母表 $\{a, b, c\}$ 上有多少个 10 位字符串恰有 3 个 a 或恰有 4 个 b ?
6. 一个校园电话系统的内部电话号码由 5 个数字组成, 且第一个数字不等于 0。在这个系统中可以分配多少个不同的电话号码?
7. 一个冰激凌屋有 28 种不同味道的冰激凌、8 种不同的果汁和 12 种配料。
 a) 如果每种味道的可以不止 1 勺, 并且不考虑次序, 那么取 3 勺冰激凌放在一个盘中有多少种不同的方式?
 b) 如果一个小圣代包含 1 勺冰激凌、1 种果汁和 1 种配料, 那么有多少种不同的小圣代?
 c) 如果一个大圣代包含 3 勺冰激凌、2 种果汁和 3 种配料。其中每种味道的冰激凌可以不止 1 个并且不考虑次序, 每种果汁只能用 1 次且不考虑次序, 同时每种配料也只能用 1 次并且不考虑次序。那么有多少种不同的大圣代?

8. 有多少个小于 1000 的正整数
- a) 恰有 3 个十进制数字? b) 有奇数个十进制数字?
- c) 至少有 1 个十进制数字等于 9? d) 没有奇数个十进制数字?
- e) 有两个连续的十进制数字等于 5? f) 是回文(即正读和倒读是一样的)?
9. 当用十进制记法写出从 1 到 1000 的数时, 有多少个下面的数字被用到?
- a) 0 b) 1 c) 2 d) 9
10. 有黄道十二宫, 需要有多少人才能保证其中至少 6 个人在同一宫?
11. 一个幸运卡甜点公司制作 213 种不同的幸运卡。一个学生使用这个公司的幸运卡在餐馆吃饭。如果这个学生没有获得 4 张同样的幸运卡, 那么他在这个餐馆吃饭最多可以吃多少次?
12. 为保证至少 2 个人人生在一周的同一天和同一个月(可以不在同一年), 那么需要多少人?
13. 证明: 在 10 个不超过 50 的正整数集合中至少有 2 个不同的 5 元子集有同样的和。
14. 一包棒球卡有 20 张。如果总共有 550 种不同的卡, 那么需要买多少包卡才能保证其中的 2 张卡是一样的。
15. a) 从一副牌中需要选多少张牌才能保证至少选中 2 张 A?
- b) 从一副牌中需要选多少张牌才能保证至少选中 2 张 A 和 2 种点数?
- c) 从一副牌中需要选多少张牌才能保证至少有 2 张同样点数的牌?
- d) 从一副牌中需要选多少张牌才能保证至少有 2 张不同点数的牌?
- *16. 证明: 在任何 $n+1$ 个不超过 $2n$ 的正整数中必存在 2 个数互素。
- *17. 证明: 在 m 个整数的序列中存在若干个连续的整数其和可被 m 整除。
18. 证明: 如果放 5 个点在边长为 2 的正方形中, 那么其中至少有 2 个点的距离不超过 $\sqrt{2}$ 。
19. 证明: 一个有理数的十进制展开式一定从某一点出现循环。
20. 曾经有一种计算机病毒通过感染的邮件信息感染了一台微机, 该病毒在这台微机的邮箱中向 100 个邮件地址都发送了自身的副本。那么, 当该微机将感染的邮件信息发送 5 次之后, 它所感染的不同计算机的最大数量是多少?
21. 有多少种方式从 20 种多纳圈中选 12 个多纳圈?
- a) 如果没有 2 个多纳圈是同种的? b) 如果所有的多纳圈都是同种的?
- c) 如果不加限制? d) 如果至少有 2 种多纳圈?
- e) 如果必须至少有 6 个蓝莓馅的多纳圈? f) 如果至多有 6 个蓝莓馅的多纳圈?
22. 求 n , 如果
- a) $P(n, 2) = 110$ b) $P(n, n) = 5040$ c) $P(n, 4) = 12P(n, 2)$
23. 求 n , 如果
- a) $C(n, 2) = 45$ b) $C(n, 3) = P(n, 2)$ c) $C(n, 5) = C(n, 2)$
24. 证明: 如果 n 和 r 是非负整数且 $n \geq r$, 则
- $$P(n+1, r) = P(n, r)(n+1)/(n+1-r)$$
- *25. 设 S 是 n 元素集合, 存在多少个有序对 (A, B) 使得 A 和 B 是 S 的子集且 $A \subseteq B$? [提示: 证明 S 中的每个元素属于 A , $B-A$ 或 $S-B$.]
26. 通过构造在集合的具有偶数个元素的子集与具有奇数个元素的子集之间的对应, 给出关于 5.4 节推论 2 的组合证明。[提示: 取定集合的一个元素 a , 如下构造对应: 如果 a 不在子集中就把它放到子集中; 如果 a 在子集中就把它从子集中取出。]
27. 设 n 和 r 是非负整数且 $r < n$ 。证明
- $$C(n, r-1) = C(n+2, r+1) - 2C(n+1, r+1) + C(n, r+1)$$
28. 使用数学归纳法证明 $\sum_{j=2}^n C(j, 2) = C(n+1, 3)$, 其中 n 是大于 1 的整数。
29. 证明: 如果 n 是整数, 则
- $$\sum_{k=0}^n 3^k \binom{n}{k} = 4^n$$
30. 在这个练习中我们将推导一个关于 n 个最小正整数的平方和的公式。我们将用两种方式计数三元组 (i, j, k) 的个数, 其中 i, j 和 k 是整数且满足 $0 \leq i < k, 0 \leq j < k, 1 \leq k \leq n$ 。

a) 证明: 对于给定的 k 存在 k^2 个这样的三元组, 因此有 $\sum_{k=1}^n k^2$ 个这样的三元组。

b) 证明: 具有 $0 \leq i < j < k$ 的三元组个数和 $0 \leq j < i < k$ 的三元组个数都等于 $C(n+1, 3)$ 。

c) 证明: 具有 $0 \leq i = j < k$ 的三元组个数等于 $C(n+1, 2)$ 。

d) 把 a)、b) 和 c) 组合起来得出

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k^2 &= 2C(n+1, 3) + C(n+1, 2) \\ &= n(n+1)(2n+1)/6\end{aligned}$$

*31. 设 $n \geq 4$, 有多少个 n 位二进制串恰好 01 在其中出现两次?

32. 设集合 S 和子集族 $A_1, A_2, \dots, A_n$, 其中每个子集含有 d 个元素, $d \geq 2$ 。如果可以把两种不同的颜色分配给 S 的元素, 每个元素一种颜色, 且使得每个子集 A_i 都包含了两种颜色的元素, 则称这个子集族是可 2 涂色的。设 $m(d)$ 是最大的正整数, 使得对于每个子集族, 如果子集数小于 $m(d)$, 且每个子集含 d 个元素, 就是可 2 涂色的。

a) 证明: 具有 $2d-1$ 个元素的集合 S 的所有 d 子集构成的子集族不是可 2 涂色的。

b) 证明: $m(2)=3$ 。

**c) 证明: $m(3)=7$ 。[提示: 证明 $\{1, 3, 5\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 4, 7\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 5, 7\}, \{3, 6, 7\}, \{4, 5, 6\}$ 不是可 2 涂色的。然后证明所有具有 3 个元素的 6 个集合的集合族每个都是可 2 涂色的。]

33. 一个教授为一次离散数学考试出了 20 道多选题, 每道题可能的答案为 a, b, c 或 d 。如果具有答案 a, b, c 和 d 的试题数分别为 8, 3, 4 和 5, 且试题可以用任意的顺序安排, 那么可能有多少种不同的答案。

34. 8 个人围圆桌就座有多少种不同的安排? 其中如果一种安排通过旋转能从另一种安排得到, 那么就认为这两种安排是一样的。

35. 把 24 个学生分给 5 个指导教师有多少种方式?

36. 一蒲式耳包含 20 个无区别的 Delicious 苹果、20 个无区别的 Macintosh 苹果和 20 个无区别的 Granny Smith 苹果, 从中选 12 个苹果, 如果每类至少选 3 个有多少种方式?

37. 方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 17$ 有多少个非负整数解?

a) 若 $x_1 > 1, x_2 > 2, x_3 > 3$

b) 若 $x_1 < 6, x_3 > 5$

c) 若 $x_1 < 4, x_2 < 3, x_3 > 5$

38. 使用单词 PEPPERCORN 的所有字母构成字符串。

a) 可以构成多少个不同的字符串?

b) 其中有多少字符串以 P 开始和结束?

c) 在多少个字符串中有 3 个连续的 P ?

39. 10 元素集合有多少个子集

a) 少于 5 个元素?

b) 多于 7 个元素?

c) 有奇数个元素?

40. 一个交通逃逸事故的证人告诉警察, 肇事汽车的车牌包含 3 个字母后面跟着 3 个数字, 以字母 AS 开始且包含数字 1 和 2。有多少不同的车牌符合这个描述?

41. 有多少种方式把 n 个相同的物体放入 m 个不同的容器而使得没有一个容器是空的?

42. 6 个男孩和 8 个女孩坐在一排椅子上, 如果没有两个男孩相邻, 有多少种方式?

43. 将 6 个物体放入 5 个盒子中有多少种方式, 如果

a) 物体与盒子都是有标号的?

b) 物体是有标号的, 但盒子是没有标号的?

c) 物体是没有标号的, 但盒子是有标号的?

d) 物体与盒子都是没有标号的?

44. 将 5 个物体放入 6 个盒子中有多少种方式, 如果

a) 物体与盒子都是有标号的?

b) 物体是有标号的, 但盒子是没有标号的?

c) 物体是没有标号的, 但盒子是有标号的?

d) 物体与盒子都是没有标号的?

45. 设计一个算法生成一个有穷集的所有允许重复的 r 排列。

46. 设计一个算法生成一个有穷集的所有允许重复的 r 组合。

*47. 证明: 如果 m, n 为整数, $m \geq 3, n \geq 3$, 那么 $R(m, n) \leq R(m, n-1) + R(m-1, n)$ 。

*48. 在一组 6 个人中, 每两个人是朋友或者是敌人, 证明在这组人中不存在 3 个人两两是朋友, 也不存在 4 个人两两是敌人。从而证明了 $R(3, 4) \geq 7$ 。

计算机题目

按下述给定的输入和输出写程序。

1. 给定正整数 n 和不超过 n 的非负整数, 找出 n 元素集合的 r 排列数和 r 组合数。
2. 给定正整数 n 和 r , 找出 n 元素集合的允许重复的 r 排列数和允许重复的 r 组合数。
3. 给定正整数列, 找出这个序列的最长的递增和递减子序列。
- *4. 给定方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = C$, 其中 C 是一个常数, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是非负整数, 列出所有的解。
5. 给定正整数 n , 按字典顺序列出集合 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 的所有的排列。
6. 给定正整数 n 和不超过 n 的非负整数 r , 按字典顺序列出集合 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 的所有的 r 组合。
7. 给定正整数 n 和不超过 n 的非负整数 r , 按字典顺序列出集合 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 的所有的 r 排列。
8. 给定正整数 n , 列出集合 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 的所有的组合。
9. 给定正整数 n 和 r , 列出集合 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 的允许重复的所有 r 排列。
10. 给定正整数 n 和 r , 列出集合 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 的允许重复的所有 r 组合。

计算和研究

使用一个计算程序或你已完成的程序做下面的练习。

1. 当两个队加时赛时, 赢的队是 9 分中首先得 5 分、11 分中首先得 6 分、13 分中首先得 7 分和 15 分中首先得 8 分的队。找出加时赛的可能的结果数。
2. 哪些二项式系数是奇数? 你能根据数的特征给出一个猜想吗?
3. 目前还不知道二项式系数 $C(2n, n)$ 是否一定被一个素数的平方整除, 也不知道当 n 增长时在 $C(2n, n)$ 的素数分解中最大的指数是否无界增长。通过对于尽可能多的正整数 n 找 $C(2n, n)$ 的分解式中素数的最小和最大的幂来探索这个问题。
4. 尽量找出更多的小于 200 的奇数 n , 使得 $C(n, \lfloor n/2 \rfloor)$ 不能被一个素数的平方整除。根据你的证据给出一个臆测公式。
- *5. 对每个小于 100 的整数, 确定 $C(2n, n)$ 是否能被 3 整除。根据 n 的三位展开基中的数字, 你能臆测一个公式来告诉我们: 关于哪个整数 n , 二项式系数 $C(2n, n)$ 能被 3 整除吗?
6. 生成 8 元素集合的所有的排列。
7. 生成 9 元素集合的所有的 6 排列。
8. 生成 8 元素集合的所有的组合。
9. 生成 7 元素集合允许重复的所有 5 组合。

写作题目

用本书以外的资料, 按下列要求写成短文。

1. 描述狄利克雷和其他的数学家对鸽巢原理的早期应用。
2. 讨论扩充目前电话编码计划的方式以适合对更多电话号码飞速增长的需求。(看看你是否能够找到某些来自电信产业的建议。) 对你要讨论的每个新的编码计划说明怎样找到它所支持的不同电话号码的个数。
3. 本书描述了许多组合恒等式。找一找关于这种恒等式的资料, 并且描述除了本书引入之外的其他重要的组合恒等式。给出其中某些恒等式的有代表性的证明, 包括组合证明。
4. 描述在统计力学中的质点分布所使用的不同的模型, 包括麦克斯韦-玻尔兹曼、玻色-爱因斯坦和费米-狄拉克(Fermi-Dirac)统计, 在每种情况下描述模型中使用的计数技术。
5. 定义第一类斯特林数并且描述它们的某些性质以及所满足的恒等式。
6. 定义第二类斯特林数并且描述它们的某些性质以及所满足的恒等式。
7. 定义拉姆齐数, 叙述和证明显示它们存在的拉姆齐定理, 并且描述目前已知的有关拉姆齐数的结果。
8. 描述生成 n 元素集合所有排列的其他算法, 这些算法不是在 3.6 节给出的算法。把这些算法的计算复杂性与书上和 3.6 节练习所描述算法的计算复杂性进行比较。
9. 至少描述一种方法生成一个正整数 n 的所有的剖分。

高级计数技术

许多计数问题用第 3 章讨论的方法是不容易求解的。一个问题是：有多少个 n 位二进制串不包含两个连续的 0？为求解这个问题，令 a_n 是这种 n 位二进制串数，可以证明 $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ 。这个等式叫做递推关系，它和初始条件 $a_1 = 2$ 和 $a_2 = 3$ 确定了序列 $\{a_n\}$ 。此外，从这个与序列的项有关的等式可以找到 a_n 的显式公式。正如我们将要看到的，可以用一种类似的技术来求解许多不同的计数问题。

我们也将看到，可以用形式幂级数（也叫做生成函数）来求解许多计数问题，其中 x 的幂的系数代表我们感兴趣的序列的项。除了求解计数问题，生成函数还可用于求解递推关系以及证明组合恒等式。

许多其他类型的计数问题不能使用第 3 章所讨论的技术求解，例如：有多少种方式把 7 项工作分给 3 个雇员而使得每个雇员至少得到一项工作？有多少个素数小于 1000？可以用计数集合并集中的元素数来求解这两个问题。我们将开发一种叫做容斥原理的技术来计数在集合并集中的元素个数，并且将说明怎样用这种技术求解计数问题。

可以用本章学到的技术与第 3 章的基本技术一起求解许多计数问题。

4.1 递推关系基础

4.1.1 引言

一群细菌的数目每小时增加一倍。如果开始有 5 个细菌，在 n 小时末将有多少个细菌？为求解这个问题，令 a_n 是 n 小时末的细菌数。因为细菌数每小时增加一倍，只要 n 是正整数，关系 $a_n = 2a_{n-1}$ 就成立。对所有的非负整数 n ，这个关系和初始条件 $a_0 = 5$ 一起唯一地确定了 a_n 。利用这一信息可找出关于 a_n 的公式。

某些计数问题不能用第 3 章给出的技术求解，但可以通过找到序列的项之间的关系，如在涉及细菌的问题中的关系，即递推关系来求解。我们将研究各种能用递推关系构造模型的计数问题。我们也将在本节和 4.2 节建立一些方法，针对满足某类递推关系的序列，求出序列的项的显式公式。

4.1.2 递推关系

一个序列的递归定义指定了一个或多个初始的项以及一个由前项确定后项的规则。可以用递归定义来求解计数问题。对于递归定义，这个从某些前项求后项的规则就叫做递推关系。

定义 1 关于序列 $\{a_n\}$ 的递推关系是一个等式，它把 a_n 用序列中在 a_n 前面的一项或多项即 $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ 来表示，这里 $n \geq n_0$ ， n_0 是一个非负整数。如果一个序列的项满足递推关系，这个序列就叫做递推关系的解。

在递归和递推关系之间存在重要的联系，关于这一点我们在本章的后边再做研究。递归算法依据较小规模的同一问题的一个或者多个实例的解得到规模为 n 的问题的解。因此，当我们分析一个递归算法的复杂性时，我们得到一个递推关系，它把求解规模为 n 的问题需要的运算次数用求解一个或多个小规模实例的同一问题所需要的运算次数来表示。

例 1 令 $\{a_n\}$ 是一个序列，它满足递推关系 $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ ， $n = 2, 3, 4, \dots$ ，且 $a_0 = 3$ ， $a_1 = 5$ ，那么 a_2 和 a_3 是什么？

解 从递推关系可以看出, $a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$ 且 $a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$ 。 ■

例2 确定序列 $\{a_n\}$ 是否为递推关系 $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $n=2, 3, 4, \dots$ 的解。这里 $a_n = 3n$, n 是非负整数。对 $a_n = 2^n$ 和 $a_n = 5$ 也回答同一个问题。

解 假设对每一个非负整数 n , $a_n = 3n$, 那么对于 $n \geq 2$, 可以看出 $2a_{n-1} - a_{n-2} = 2[3(n-1)] - 3(n-2) = 3n = a_n$ 。于是, $\{a_n\}$ 是该递推关系的解, 其中 $a_n = 3n$ 。

假设对每一个非负整数 n , $a_n = 2^n$ 。注意到 $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ 。因为 $2a_1 - a_0 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 \neq a_2$, 不难看出序列 $\{a_n\}$ 不是该递推关系的解, 其中 $a_n = 2^n$ 。

假设对每一个非负整数 n , $a_n = 5$, 那么对于 $n \geq 2$ 有 $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2 \cdot 5 - 5 = 5 = a_n$ 。因此, $\{a_n\}$, $a_n = 5$ 是该递推关系的解。 ■

序列的初始条件说明了在递推关系起作用的首项之前的那些项。例如, 例1中的 $a_0 = 3$ 和 $a_1 = 5$ 是初始条件。递推关系和初始条件唯一地确定了一个序列。这是由于一个递推关系和初始条件一起提供了这个序列的递归定义。只要使用足够多次, 序列的任何一项都可以从初始条件开始通过递推关系求出。但是对于某些特定类型的序列, 可以有更好的方法通过它的递推关系和初始条件来计算它的项。我们将在本节和4.2节讨论这些方法。

4.1.3 用递推关系构造模型

我们可以使用递推关系构造各种问题的模型, 例如找复利, 计数岛上的兔子, 确定汉诺塔难题的移动次数, 以及计数具有确定性质的二进位串。

例3 复利 假设一个人在银行的储蓄账户上存了10 000美元, 年复利是11%。那么在30年后账上将有多少钱?

Example

解 为求解这个问题, 令 P_n 表示 n 年后账上的钱数。因为 n 年后账上的钱等于在 $n-1$ 年后账上的钱加上第 n 年的利息, 易见序列 $\{P_n\}$ 满足递推关系

$$P_n = P_{n-1} + 0.11P_{n-1} = (1.11)P_{n-1}$$

初始条件是 $P_0 = 10\,000$ 。

我们可以使用迭代法找到关于 P_n 的公式。注意

$$P_1 = (1.11)P_0$$

$$P_2 = (1.11)P_1 = (1.11)^2 P_0$$

$$P_3 = (1.11)P_2 = (1.11)^3 P_0$$

⋮

$$P_n = (1.11)P_{n-1} = (1.11)^n P_0$$

当代入初始条件 $P_0 = 10\,000$, 就得到公式 $P_n = (1.11)^n 10\,000$ 。我们可以使用数学归纳法验证它的正确性。公式对 $n=0$ 是正确的, 这是初始条件的直接结果。假定 $P_n = (1.11)^n 10\,000$, 那么由递推关系和归纳假设,

$$P_{n+1} = (1.11)P_n = (1.11)(1.11)^n 10\,000 = (1.11)^{n+1} 10\,000$$

这证明了对 P_n 的显式公式是正确的。

将 $n=30$ 代入公式 $P_n = (1.11)^n 10\,000$ 就证明了在30年后账上包含

$$P_{30} = (1.11)^{30} 10\,000 = 228\,922.97 \text{ 美元}$$

例4 说明了怎样用递推关系建立关于岛上兔子数的模型。

Example

例4 兔子和斐波那契数 考虑下面的问题, 它是由里奥那多·底·比萨, 也就是斐波那契, 于13世纪在《算书》(Liber abaci)一书中提出来的。一对刚出生的兔子(一公一母)被放到岛上。每对兔子出生后两个月才开始繁殖后代。如图4-1所示, 在出生两个月以后, 每对兔子在每个月都将繁殖一对新的兔子。假定兔子不会死去, 找出 n 个月后关于岛上兔子对数的递推关系。

解 用 f_n 表示 n 个月后的兔子对数。我们将证明 f_n , $n=1, 2, 3, \dots$ 是斐波那契序列的项。

可以用递推关系建立兔子数的模型。在第1个月末, 岛上的兔子对数是 $f_1 = 1$ 。由于这对兔子

新生的对数 (至少两个月大)	已有的对数 (比两个月小)	月	新生的 对数	已有的 对数	总对数
		1	0	1	1
		2	0	1	1
		3	1	1	2
	 	4	1	2	3
 	  	5	2	3	5
  	   	6	3	5	8

图 4-1 岛上的兔子

在第 2 个月没有繁殖, 因此 $f_2=1$ 。为找到 n 个月后的兔子对数, 要把前一个月岛上的对数 f_{n-1} 加上新生的对数, 而这个数等于 f_{n-2} , 因为每对两个月大的兔子都生出一对新兔子。

因此, 序列 $\{f_n\}$ 满足递推关系

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 3$$

和初始条件 $f_1=1$ 和 $f_2=1$ 。由于这个递推关系和初始条件唯一地确定了这个序列, 因此 n 个月后岛上的兔子对数由第 n 个斐波那契数给出。 ■

例 5 涉及一个著名的难题。

例 5 汉诺塔 19 世纪后期由法国数学家埃德沃德·卢卡斯发明的一个流行的游戏叫做汉诺塔, 它由安装在一个板上的 3 根柱子和若干大小不同的盘子构成。开始时, 这些盘子按照大小的次序放在第一根柱子上, 使得大盘子在底下(如图 4-2 所示)。游戏的规则是: 每一次把 1 个盘子从一根柱子移动到另一根柱子, 但是不允许这个盘子放在比它小的盘子上面。游戏的目标是把所有的盘子按照大小的次序都放到第二根柱子上, 并且将最大的盘子放在底部。

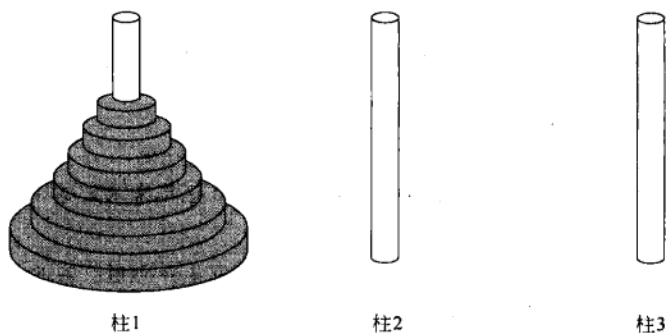


图 4-2 汉诺塔的初始位置

令 H_n 表示解 n 个盘子的汉诺塔问题所需要的移动次数。建立一个关于序列 $\{H_n\}$ 的递推关系。

解 开始 n 个盘子在柱 1。按照游戏规则我们可以用 H_{n-1} 次移动将上边的 $n-1$ 个盘子移到柱 3(图 4-3 说明了此刻的柱子和盘子)。在这些移动中保留最大的盘子不动。然后, 我们用一次移动将最大的盘子移到第二根柱子上。我们可以再使用 H_{n-1} 次移动将柱 3 上的 $n-1$ 个盘子移到柱 2。

把它们放到最大的盘子上面, 这个最大的盘子一直放在柱2的底部。容易看出, 使用更少的步数是不可能求解这个难题的。这就证明了

$$H_n = 2H_{n-1} + 1$$

初始条件是 $H_1 = 1$, 因为依照规则一个盘子可以用1次移动从柱1移到柱2。

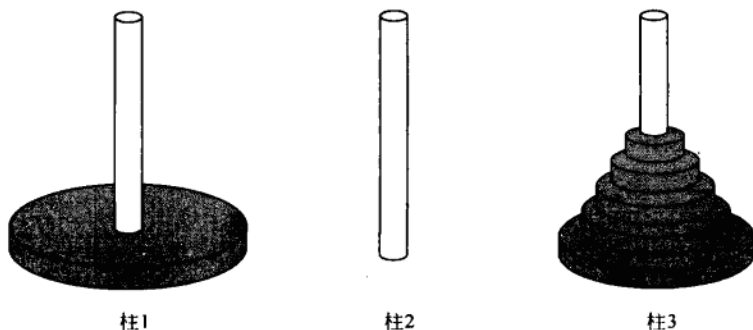


图 4-3 汉诺塔的一个中间位置

我们可以使用迭代方法求解这个递推关系。

$$\begin{aligned} H_n &= 2H_{n-1} + 1 \\ &= 2(2H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 H_{n-2} + 2 + 1 \\ &= 2^2(2H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3 H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\ &\vdots \\ &= 2^{n-1} H_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \cdots + 2 + 1 \\ &= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

为了用序列前面的项表示 H_n , 我们重复地用到这个递推关系。在倒数第二个等式中用了初始条件 $H_1 = 1$ 。最后一个等式是基于等比序列的求和公式得出的, 这个公式可以在 2.4 节的定理 1 中找到。

用迭代方法找出了具有初始条件 $H_1 = 1$ 的递推关系 $H_n = 2H_{n-1} + 1$ 的解。这个公式可以用数学归纳法证明。证明留给读者作为节后的练习。

关于这个难题有一个古老的传说, 在汉诺有一座塔, 那里的僧侣按照这个游戏的规则从一个柱子到另一个柱子移动 64 个金盘子, 据说当他们结束游戏时世界就到了末日。如果这些僧侣 1 秒钟移动 1 个盘子, 这个世界将在他们开始多久以后终结?

根据这个显式公式, 僧侣需要

$$2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$$

次移动来搬这些盘子。每次移动需要 1 秒钟, 他们将用 5000 亿年来求解这个难题, 因此这个世界的寿命应该相当长。 ■

注意 许多人研究了源自例 5 所述汉诺塔难题的各种问题。某些问题用到更多的柱子, 某些问题允许同样大小的盘子, 某些问题对盘子的移动类型加以限制。一个最古老和最有趣的问题是雷夫难题^①, 它是 1907 年由亨利·杜德尼在他的《坎特伯雷谜题》(Canterbury Puzzle)一书中提出来的。这个难题是雷夫出的, 他让一个朝圣者把一堆各种大小的奶酪从 4 个凳子中的一个移到另一个, 移动中不允许把直径较大的奶酪放在较小的奶酪上面。如果用柱子和盘子的概念来表述雷夫难题, 除了使用 4 根柱子之外,

① 雷夫, Reve, 更常见的拼写是 reeve, 这个词在古代是指地方长官(governor)。

其他和汉诺塔的规则一样。你可能会奇怪没有人能够确定求解 n 个盘子的雷夫难题所需要的最少移动次数。但是, 存在一个猜想, 至今已经超过 50 年了。这个猜想认为所需移动的最少次数等于由弗雷姆(Frame)和斯图尔特(Stewart)在 1939 年发明的算法所使用的移动次数。(更详细的信息参见节末的练习 27~30 和 [St94]。)

例 6 说明了怎样用递推关系计数具有指定长度和某种性质的二进制串。

例 6 对于不含 2 个连续 0 的 n 位二进制串的个数找出递推关系和初始条件。有多少个这样的 5 位二进制串?

解 设 a_n 表示不含 2 个连续 0 的 n 位二进制串数。为得到一个关于 $\{a_n\}$ 的递推关系, 由求和法则, 不含 2 个连续 0 的 n 位二进制串的个数等于以 0 结尾的这种二进制串数加上以 1 结尾的这种二进制串数。我们将假定 $n \geq 3$, 使得二进制串至少有 3 位。

精确地说, 不含 2 个连续 0 并以 1 结尾的 n 位二进制串就是在不含 2 个连续 0 的 $n-1$ 位二进制串的尾部加上一个 1。因此存在 a_{n-1} 个这样的二进制串。

不含 2 个连续 0 并以 0 结尾的 n 位二进制串在它们的 $n-1$ 位必须是 1; 否则它们就将以 2 个 0 结尾。因而, 精确地说, 不含 2 个连续 0 并以 0 结尾的 n 位二进制串就是在不含 2 个连续 0 的 $n-2$ 位二进制串的尾部加上 10。因此存在 a_{n-2} 个这样的二进制串。

如图 4-4 所示, 可以断言对于 $n \geq 3$ 有

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

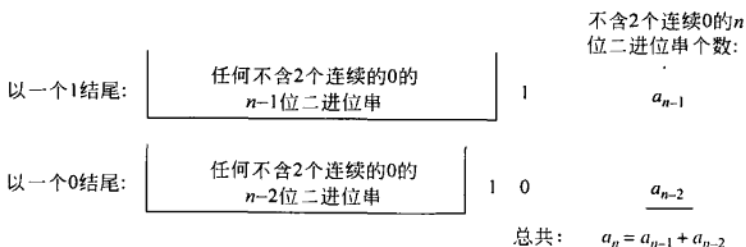


图 4-4 计数不含 2 个连续的 0 的 n 位二进制串

初始条件是 $a_1 = 2$, 因为 1 位的二进制串是 0 和 1, 没有连续的 2 个 0。而 $a_2 = 3$, 因为 2 位的二进制串中满足条件的是 01, 10 和 11。使用 3 次递推关系就可得到 a_5

$$a_3 = a_2 + a_1 = 3 + 2 = 5$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 5 + 3 = 8$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 8 + 5 = 13$$

注意 $\{a_n\}$ 和斐波那契序列满足同样的递推关系。因为 $a_1 = f_3$ 且 $a_2 = f_4$, 从而有 $a_n = f_{n+2}$ 。

例 7 说明怎样用递推关系建立编码字数的模型, 这种编码字是通过确定的正确性检测所允许的。

例 7 编码字的枚举 一个计算机系统把一个十进制数字串作为一个编码字, 如果它包含偶数个 0, 就是有效的。例如, 1 230 407 869 是有效的, 而 120 987 045 608 不是有效的。设 a_n 是有效的 n 位编码字的个数。找出一个关于 a_n 的递推关系。

解 注意到 $a_1 = 9$, 因为存在 10 个 1 位十进制数字串, 并且只有一个, 即串 0 是无效的。通过考虑怎样由 $n-1$ 位的数字串构成一个 n 位有效数字串, 就可以推导出关于这个序列的递推关系。从少 1 位数字的串构成 n 位有效数字串有两种方式。

第一种, 在一个 $n-1$ 位的有效数字串后面加上一个非 0 的数字就可以得到一个 n 位的有效数字串。加这个数字的方式有 9 种。因此用这种方法构成 n 位有效数字串的方式有 $9a_{n-1}$ 种。

第二种, 在一个无效的 $n-1$ 位数字串后面加上一个 0 就可以得到 n 位有效的数字串。(这将产生具有偶数个 0 的串, 因为无效的 $n-1$ 位数字串有奇数个 0。)这样做的方式数等于无效的 $n-1$ 位数字串的个数。因为存在 10^{n-1} 个 $n-1$ 位数字串, 其中有 a_{n-1} 个是有效的, 通过在无效的 $n-1$ 位数字串后面加上一个 0 就得到 $10^{n-1} - a_{n-1}$ 个 n 位的有效数字串。

因为所有的 n 位有效数字串都用这两种方式之一产生, 从而存在

$$\begin{aligned} a_n &= 9a_{n-1} + (10^{n-1} - a_{n-1}) \\ &= 8a_{n-1} + 10^{n-1} \end{aligned}$$

个 n 位有效数字串。

例 8 中的递推关系在许多不同的场合都可以见到。

例 8 求关于 C_n 的递推关系, 其中 C_n 是通过在 $n+1$ 个数 $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$ 的乘积中加括号来规定乘法的次序的方式数。例如, $C_3 = 5$, 因为对 $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ 有 5 种加括号的方式来原因乘法的次序:

$$\begin{aligned} &((x_0 \cdot x_1) \cdot x_2) \cdot x_3 \quad (x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2)) \cdot x_3 \quad (x_0 \cdot x_1) \cdot (x_2 \cdot x_3) \\ &x_0 \cdot ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \quad x_0 \cdot (x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)) \end{aligned}$$

解 为求关于 C_n 的递推关系, 我们注意到无论怎样在 $x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$ 中插入括号总有一个“ $\cdot$ ”运算符留在所有括号的外边, 即执行最后一次乘法的运算符。[例如, 在 $(x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2)) \cdot x_3$ 中的最后一个运算符, 在 $(x_0 \cdot x_1) \cdot (x_2 \cdot x_3)$ 中的第二个运算符。]这个最后的运算符出现在 $n+1$ 个数中的两个数之间, 比如说 x_k 和 x_{k+1} 之间。当最后的运算符出现在 x_k 和 x_{k+1} 之间时, 存在 $C_k C_{n-k-1}$ 种方式插入括号来确定 $n+1$ 个数被乘的次序, 因为有 C_k 种方式在乘积 $x_0 \cdot x_1 \cdots x_k$ 中插入括号来确定这 $k+1$ 个数的乘法次序, 且有 C_{n-k-1} 种方式在乘积 $x_{k+1} \cdot x_{k+2} \cdots x_n$ 中插入括号来确定这 $n-k$ 个数的乘法次序。由于这个最后的运算符可能出现在 $n+1$ 个数的任两个数之间, 所以

$$\begin{aligned} C_n &= C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \cdots + C_{n-2} C_1 + C_{n-1} C_0 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1} \end{aligned}$$

注意到初始条件是 $C_0 = 1$ 和 $C_1 = 1$ 。这个递推关系可以用生成函数的方法求解, 这种方法将在 4.4 节讨论。可以证明 $C_n = C(2n, n)/(n+1)$ 。(见节末的练习 20。)

序列 $\{C_n\}$ 是卡塔兰 (Catalan) 数的序列。这个序列是除上例之外的许多不同计数问题的解(细节见 [MiRo91] 或 [Ro84a] 中有关卡塔兰数的一章)。

练习

1. 求给定序列的前 5 项, 每个序列由下面的递推关系和初始条件定义。

a) $a_n = 6a_{n-1}$, $a_0 = 2$

b) $a_n = a_{n-1}^2$, $a_1 = 2$

c) $a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$

d) $a_n = na_{n-1} + n^2 a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$

e) $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 0$

2. 令 $a_n = 2^n + 5 \cdot 3^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

a) 求 a_0 , a_1 , a_2 , a_3 和 a_4 。

b) 证明 $a_2 = 5a_1 - 6a_0$, $a_3 = 5a_2 - 6a_1$, $a_4 = 5a_3 - 6a_2$ 。

c) 证明: 对一切整数 n , $n \geq 2$, $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ 。

3. 序列 $\{a_n\}$ 是递推关系 $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2}$ 的解吗? 如果

a) $a_n = 0$

b) $a_n = 1$

c) $a_n = 2^n$

d) $a_n = 4^n$

e) $a_n = n4^n$

f) $a_n = 2 \cdot 4^n + 3n \cdot 4^n$

g) $a_n = (-4)^n$

h) $a_n = n^2 4^n$

4. 证明序列 $\{a_n\}$ 是递推关系 $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2n - 9$ 的解, 如果

a) $a_n = -n + 2$

b) $a_n = 5(-1)^n - n + 2$

c) $a_n = 3(-1)^n + 2^n - n + 2$

d) $a_n = 7 \cdot 2^n - n + 2$

5. 用例 5 中用到的迭代方法求下面每个递推关系和初始条件的解。

a) $a_n = 3a_{n-1}$, $a_0 = 2$

b) $a_n = a_{n-1} + 2$, $a_0 = 3$

c) $a_n = a_{n-1} + n$, $a_0 = 1$

d) $a_n = a_{n-1} + 2n + 3$, $a_0 = 4$

- e) $a_n = 2a_{n-1} - 1, a_0 = 1$ f) $a_n = 3a_{n-1} + 1, a_0 = 1$ g) $a_n = na_{n-1}, a_0 = 5$ h) $a_n = 2na_{n-1}, a_0 = 1$
6. 假设一群细菌的数目每小时增长为 3 倍。
 - a) 建立关于 n 小时后细菌数的递推关系。
 - b) 如果初始的群体有 100 个细菌, 那么 10 小时后将有多少个细菌?
 7. 一个工厂逐月增长地定做体育赛车。在第 1 个月只做了 1 辆, 在第 2 个月做了 2 辆, 照此下去, 到第 n 个月做了 n 辆。
 - a) 对这个工厂前 n 个月生产的赛车数构造一个递推关系。
 - b) 在第一年生产了多少辆赛车?
 - c) 求出这个工厂在前 n 个月生产赛车数的显式公式。
 8. 借 5000 美元, 利率 7%, 如果每个月还款 100 美元, 找出关于第 k 个月末欠款余额 $B(k)$ 的递推关系。[提示: 将 $B(k)$ 用 $B(k-1)$ 项表示, 月息是 $(0.07/12)B(k-1)$ 。]
 9. 用数学归纳法验证在例 5 导出的求解汉诺塔难题所需移动次数的公式。
 10. 一台出售邮票簿的售货机只接受 1 美元硬币、1 美元纸币以及 5 美元纸币。
 - a) 找出与放 n 美元到这台售货机的方式数有关的递推关系, 这里要考虑硬币和纸币放入的次序。
 - b) 初始条件是什么?
 - c) 一本邮票簿需 10 美元, 有多少种付款方式?
 11. a) 求与包含 2 个连续 0 的 n 位二进制串的个数有关的递推关系。
 - b) 初始条件是什么?
 - c) 包含 2 个连续 0 的 7 位二进制串有多少个?
 12. a) 求与不包含 3 个连续 0 的 n 位二进制串的个数有关的递推关系。
 - b) 初始条件是什么?
 - c) 不包含 3 个连续 0 的 7 位二进制串有多少个?
 13. a) 一个人爬阶梯, 如果每次可以上 1 或 2 阶, 求与爬 n 步阶梯的方式数有关的递推关系。
 - b) 初始条件是什么?
 - c) 这个人爬 8 步阶梯上飞机有多少种方式?
 14. a) 求与不包含 2 个连续 0 的 n 位三进制串的个数有关的递推关系。
 - b) 初始条件是什么?
 - c) 不包含 2 个连续 0 的 6 位三进制串有多少个?
 - *15. a) 求与不包含 2 个连续 0 或 2 个连续 1 的 n 位三进制串的个数有关的递推关系。
 - b) 初始条件是什么?
 - c) 不包含 2 个连续 0 或 2 个连续 1 的 6 位三进制串有多少个?
 - *16. a) 求与不包含连续的相同符号的 n 位三进制串的个数有关的递推关系。
 - b) 初始条件是什么?
 - c) 不包含连续的相同符号的 6 位三进制串有多少个?
 17. 信息通过信道传送要使用两个信号。一个信号的传送需要 1 微秒, 而另一个信号的传送需要 2 微秒。
 - a) 求与在 n 微秒内发送的不同信息数有关的递推关系, 其中信息由这两个信号的序列构成, 并且信息中的每个信号后面都紧跟着下一个信号。
 - b) 初始条件是什么?
 - c) 用这两个信号在 10 微秒内可以发送多少条不同的信息?
 18. a) 如果 R_n 是一个平面被 n 条直线划分出的区域个数, 其中没有两条直线是平行的也没有 3 条直线交于一点, 找出由 R_n 满足的递推关系。
 - b) 使用迭代求出 R_n 。
 - *19. a) 找出由 S_n 满足的递推关系, 其中 S_n 是三维空间被 n 个平面分成的区域数, 如果每 3 个平面交于一点, 但没有 4 个平面交于一点。
 - b) 使用迭代求出 S_n 。
 20. 包含偶数个 0 的 7 位二进制串有多少个?
 21. a) 用地砖铺一条人行道, 地砖是红色、绿色或灰色的。如果没有两块红砖相邻且同色的地砖是不加区别的, 找出与用 n 块砖铺一条路的方式数有关的递推关系。

b) 对于(a)中的递推关系有什么初始条件?

c) 用7块砖铺一条在(a)中所描述的路有多少种方式?

*22. 设 $S(m, n)$ 表示从 m 元素集到 n 元素集的映上函数个数。证明 $S(m, n)$ 满足递推关系

$$S(m, n) = n^m - \sum_{k=1}^{n-1} C(n, k) S(m, k)$$

其中 $m \geq n$ 且 $n > 1$, 初始条件是 $S(m, 1) = 1$ 。

23. a) 使用在例8所建立的递推关系确定 C_5 , 即为确定相乘的次序在6个数的乘积中加括号的方式数。

b) 使用在例8的解答中所提到的关于 C_5 的封闭公式检验你在(b)得到的结果。

 练习 24~26 是格雷厄姆·克努斯(Graham Knuth)和帕塔什尼克(Patashnik)在[GrKnPa94]所描述的约瑟夫问题(Josephus Problem)的一种变形。这个问题来源于历史学家弗拉维乌斯·约瑟夫的一本账。41个犹太叛民在一世纪犹太-罗马战争期间被罗马人追赶逃入山洞, 约瑟夫是这群人中的一个。这些叛民宁愿死也不愿被俘。他们决定围成一个圆圈并且围着这个圆圈重复数数, 每数到3就杀掉这个位置的人而留下其他的人。但是约瑟夫和另一个叛民不愿意这样被杀掉。他们确定了应该站的位置是最后两个活下来的叛民的位置。我们考虑的问题开始时有 n 个人, 记为1到 n , 站成一个圆圈。每一步, 每第2个仍旧活着的人将被排除, 直到只剩下一个人为止。我们把生还的人数记作 $J(n)$ 。

24. 对每个正整数 n 的值, $1 \leq n \leq 16$, 确定 $J(n)$ 的值。

25. 对于 $n \geq 1$, 证明 $J(n)$ 满足递推关系 $J(2n) = 2J(n) - 1$ 和 $J(2n+1) = 2J(n) + 1$, 且 $J(1) = 1$ 。

26. 根据你关于 $J(n)$ 的公式确定 $J(100)$, $J(1000)$ 和 $J(10\,000)$ 。

练习 27~30 涉及雷夫难题, 即具有4个柱和 n 个盘子的汉诺塔变形问题。在给出这些练习之前, 我们描述一个弗雷姆-斯图尔特(Frame-Stewart)算法, 它把盘子从柱1移到柱4并且没有较大的盘子放在较小的盘子上面。给定盘子数 n 作为输入, 这个算法依赖于一个整数 k 的选择, $1 \leq k \leq n$ 。当只有一个盘子时, 把它从柱1移到柱4, 然后算法停止。对于 $n > 1$, 算法递归地使用下面的3步。首先使用所有的4根柱递归地把最小的 $n-k$ 个盘子从柱1移到柱2。下一步使用汉诺塔问题的三根柱算法, 不使用放 $n-k$ 个最小盘子的柱, 把 k 个最大的盘子递归地从柱1移到柱4。最后, 使用所有4根柱递归地将 $n-k$ 个最小的盘子移到柱4。弗雷姆和斯图尔特证明, 使用他们的算法, 为了达到最少的移动次数, 应该选择 k 使得 n 是不超过第 k 个三角形数 $t_k = k(k+1)/2$ 的最小的正整数, 即 $t_{k-1} < n \leq t_k$ 。有一个未被证实的猜想, 称为弗雷姆猜想, 就是不管盘子怎样移动, 该算法对于求解这个难题所需要的移动次数最少。

27. 证明: 具有4个盘子的雷夫难题最少可以使用9次移动求解。

28. 证明: 如果 $R(n)$ 是由弗雷姆-斯图尔特算法求解具有 n 个盘子的雷夫难题所使用的移动次数, 这里选择 k 是满足 $n \leq k(k+1)/2$ 的最小的整数, 那么 $R(n)$ 满足递推关系 $R(n) = 2R(n-k) + 2^k - 1$ 和 $R(0) = 0$, $R(1) = 1$ 。

*29. 证明: 如果 k 如练习28所选, 那么 $R(n) = \sum_{i=1}^k i2^{i-1} - (t_k - n)2^{k-1}$ 。

*30. 证明: $R(n)$ 是 $O(\sqrt{n}2^{\sqrt{n}})$ 。

设 $\{a_n\}$ 是实数序列, 这个序列的后向差分递归地定义如下:

第一差分 ∇a_n 是

$$\nabla a_n = a_n - a_{n-1}$$

从 $\nabla^k a_n$ 得到第 $k+1$ 差分 $\nabla^{k+1} a_n$, 即

$$\nabla^{k+1} a_n = \nabla^k a_n - \nabla^k a_{n-1}$$

31. 证明: $a_{n-2} = a_n - 2\nabla a_n + \nabla^2 a_n$ 。

32. 用 $a_n, \nabla a_n, \nabla^2 a_n$ 的项表示递推关系 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ 。

4.2 求解线性递推关系

4.2.1 引言

 各种各样的递推关系出现在模型里。某些递推关系可以用迭代或者其他的特别技术求解。但是, 有一类重要的递推关系可以用一种系统的方法明确地求解。在这种递推关

系中, 序列的项由它的前项的线性组合来表示。

定义 1 一个常系数的 k 阶线性齐次递推关系是形如

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

的递推关系, 其中 $c_1, c_2, \dots, c_k$ 是实数, $c_k \neq 0$ 。

这个定义中的递推关系是线性的, 因为它的右边是序列前项的倍数之和。这个递推关系是齐次的, 因为所出现的各项都是 a_j 的倍数。序列各项的系数都是常数而不是依赖于 n 的函数。阶为 k 是因为 a_n 由序列前面的 k 项来表示。

根据数学归纳法第二原理, 满足这个定义的递推关系的序列由这个递推关系和 k 个初始条件

$$a_0 = C_0, a_1 = C_1, \dots, a_{k-1} = C_{k-1}$$

唯一地确定。

例 1 递推关系 $P_n = (1, 11)P_{n-1}$ 是 1 阶的线性齐次递推关系。递推关系 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ 是 2 阶的线性齐次递推关系。递推关系 $a_n = a_{n-5}$ 是 5 阶的线性齐次递推关系。

下面是一些常系数的但不是线性齐次递推关系的例子。

例 2 递推关系 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}^2$ 不是线性的。递推关系 $H_n = 2H_{n-1} + 1$ 不是齐次的。递推关系 $B_n = nB_{n-1}$ 不是常系数的。

研究线性齐次递推关系有两个理由。第一, 在建立问题的模型时经常出现这种递推关系。第二, 它们可以用系统的方法求解。

4.2.2 求解常系数线性齐次递推关系

求解常系数线性齐次递推关系的基本方法是寻找形如 $a_n = r^n$ 的解, 其中 r 是常数。注意 $a_n = r^n$ 是递推关系 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$ 的解, 当且仅当

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \cdots + c_k r^{n-k}$$

当等式的两边除以 r^{n-k} 并且从左边减去右边时, 我们得到等价的方程

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_{k-1} r - c_k = 0$$

因此, 序列 $\{a_n\}$ 以 $a_n = r^n$ 作为解, 当且仅当 r 是这后一个方程的解。这个方程叫做该递推关系的特征方程。方程的解叫做该递推关系的特征根。正如我们将要看到的, 可以用这些特征根给出这种递推关系的所有解的显式公式。

我们首先看一个 2 阶常系数线性齐次递推关系的处理结果。然后, 叙述相应的阶可能大于 2 的一般性结果。由于得到一般性结果所需要的证明比较复杂, 本书不再赘述。

我们现在回到 2 阶线性齐次递推关系。首先, 考虑存在两个不等的特征根的情况。

定理 1 设 c_1 和 c_2 是实数。假设 $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ 有两个不等的根 r_1 和 r_2 , 那么序列 $\{a_n\}$ 是递推关系 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ 的解, 当且仅当 $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, $n=0, 1, 2, \dots$, 其中 α_1 和 α_2 是常数。

证 证明这个定理必须做两件事。首先, 必须证明如果 r_1 和 r_2 是特征方程的根, 并且 α_1 和 α_2 是常数, 那么序列 $\{a_n\}$ ($a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$) 是递推关系的解。第二, 必须证明如果序列 $\{a_n\}$ 是解, 那么对某个常数 α_1 和 α_2 有 $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ 。

现在我们将证明如果 $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, 那么序列 $\{a_n\}$ 是递推关系的解。因为 r_1 和 r_2 是 $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ 的根, 从而 $r_1^2 = c_1 r_1 + c_2$, $r_2^2 = c_1 r_2 + c_2$ 。

从这些等式可以看出

$$\begin{aligned} c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} &= c_1 (\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2 (\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) \\ &= \alpha_1 r_1^{n-2} (c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2} (c_1 r_2 + c_2) \\ &= \alpha_1 r_1^{n-2} r_1^2 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2^2 \\ &= \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \\ &= a_n \end{aligned}$$

这证明了序列 $\{a_n\}$ 以 $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ 作为递推关系的解。

为证明递推关系 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ 的每一个解 $\{a_n\}$ 都有形式 $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, $n=0, 1, 2, \dots$, α_1 和 α_2 为某个常数。假设 $\{a_n\}$ 是递推关系的解, 初始条件是 $a_0 = C_0$, $a_1 = C_1$ 。下面证明存在常数 α_1 和 α_2 使得具有 $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ 的序列 $\{a_n\}$ 满足同样的初始条件。这要求

$$a_0 = C_0 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$a_1 = C_1 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2$$

我们可以求解这两个关于 α_1 和 α_2 的方程。从第一个方程得到 $\alpha_2 = C_0 - \alpha_1$ 。把它代入第二个方程得

$$C_1 = \alpha_1 r_1 + (C_0 - \alpha_1) r_2$$

因此,

$$C_1 = \alpha_1 (r_1 - r_2) + C_0 r_2$$

这说明了

$$\alpha_1 = \frac{(C_1 - C_0 r_2)}{r_1 - r_2}$$

和

$$\alpha_2 = C_0 - \alpha_1 = C_0 - \frac{(C_1 - C_0 r_2)}{r_1 - r_2} = \frac{C_0 r_1 - C_1}{r_1 - r_2}$$

这里关于 α_1 和 α_2 的表达式依赖于 $r_1 \neq r_2$ 的事实。(当 $r_1 = r_2$ 时, 这个定理不成立。)因此, 由于这两个 α_1 和 α_2 的值, 具有 $\alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ 的序列 $\{a_n\}$ 满足这两个初始条件。因为这个递推关系和这些初始条件唯一地确定了这个序列, 从而得出 $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ 。□

常数线性齐次递推关系的特征根可能是复数。定理 1(和本节后面的定理)在这种情况下仍旧适用。具有复数特征根的递推关系在本书中不进行讨论。熟悉复数的读者可以做节末的练习 20。

例 3 和例 4 说明怎样用定理 1 求解递推关系。

例 3 什么是如下递推关系的解? 其中 $a_0 = 2$ 和 $a_1 = 7$ 。

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

解 可用定理 1 求解这个问题。递推关系的特征方程是 $r^2 - r - 2 = 0$ 。它的根是 $r = 2$ 和 $r = -1$ 。因此, 序列 $\{a_n\}$ 是递推关系的解当且仅当

$$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 (-1)^n$$

α_1 和 α_2 是常数。由初始条件, 得

$$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$a_1 = 7 = \alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot (-1)$$

求解这两个等式得 $\alpha_1 = 3$ 和 $\alpha_2 = -1$ 。因此, 关于这个递推关系和初始条件的解是序列 $\{a_n\}$, 其中

$$a_n = 3 \cdot 2^n - (-1)^n$$

例 4 找一个关于斐波那契数的显式公式。

解 斐波那契数的序列满足递推关系 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ 和初始条件 $f_0 = 0$ 及 $f_1 = 1$ 。特征方程 $r^2 - r - 1 = 0$ 的根是 $r_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ 和 $r_2 = (1 - \sqrt{5})/2$ 。因此, 从定理 1 得到斐波那契数由

$$f_n = \alpha_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

给出, 其中 α_1 和 α_2 为常数。可用初始条件 $f_0 = 0$ 和 $f_1 = 1$ 确定这些常数。我们有

$$f_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$f_1 = \alpha_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + \alpha_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1$$

对这些关于 α_1 和 α_2 的联立方程的解是

$$\alpha_1 = 1/\sqrt{5}, \quad \alpha_2 = -1/\sqrt{5}$$

于是, 斐波那契数由下面的式子给出:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

当存在二重特征根时定理1不再适用。如果发生这种情况,当 r_0 是特征方程的一个二重根时那么 $a_n = nr_0^n$ 是递推关系的另一个解。定理2说明了怎样处理这种情况。

定理2 设 c_1 和 c_2 是实数, $c_2 \neq 0$ 。假设 $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ 只有一个根 r_0 。序列 $\{a_n\}$ 是递推关系 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ 的解,当且仅当 $a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$, $n=0, 1, 2, \dots$, 其中 α_1 和 α_2 是常数。

定理2的证明留作节末的练习。例5说明了这个定理的应用。

例5 具有初始条件 $a_0=1$ 和 $a_1=6$ 的递推关系

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$$

的解是什么?

解 $r^2 - 6r + 9 = 0$ 唯一的根是 $r=3$ 。因此,这个递推关系的解是:

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$$

其中 α_1 和 α_2 是常数。使用初始条件得

$$a_0 = 1 = \alpha_1$$

$$a_1 = 6 = \alpha_1 \cdot 3 + \alpha_2 \cdot 3$$

求解这两个方程得 $\alpha_1=1$ 和 $\alpha_2=1$ 。从而,这个具有给定初始条件的递推关系的解是

$$a_n = 3^n + n 3^n$$

我们现在叙述这个关于常系数线性齐次递推关系的解的一般性结果,这里的阶可以大于2且假定特征方程有不等根。这个结果的证明留给读者作为练习。

定理3 设 $c_1, c_2, \dots, c_k$ 是实数。假设特征方程

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \dots - c_k = 0$$

有 k 个不等的根 $r_1, r_2, \dots, r_k$ 。那么序列 $\{a_n\}$ 是递推关系

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

的解,当且仅当

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \dots + \alpha_k r_k^n$$

$n=0, 1, 2, \dots$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 是常数。

我们用例6说明定理的使用。

例6 求出具有初始条件 $a_0=2$, $a_1=5$ 和 $a_2=15$ 的递推关系

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$$

的解。

解 这个递推关系的特征多项式是

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6$$

因为 $r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = (r-1)(r-2)(r-3)$, 所以特征根是 $r=1$, $r=2$ 和 $r=3$ 。因此,递推关系的解的形式是

$$a_n = \alpha_1 \cdot 1^n + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot 3^n$$

为找到常数 α_1, α_2 以及 α_3 , 使用初始条件得

$$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$a_1 = 5 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 2 + \alpha_3 \cdot 3$$

$$a_2 = 15 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 4 + \alpha_3 \cdot 9$$

当求解这三个关于 α_1, α_2 和 α_3 的联立方程时,得到 $\alpha_1=1$, $\alpha_2=-1$ 且 $\alpha_3=2$ 。于是,这个递推关系和给定初始条件的唯一解是满足

$$a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n$$

的序列 $\{a_n\}$ 。

我们现在叙述关于常系数线性齐次递推关系的最一般化的结果,这里允许特征方程有重根。要点是对于特征方程的每个根 r ,通解是形如 $P(n)r^n$ 的项之和,其中 $P(n)$ 是 $m-1$ 次多项式,而

m 是这个根的重数。我们把证明作为一个挑战性的练习留给读者。

定理 4 设 $c_1, c_2, \dots, c_k$ 是实数, 假设特征方程

$$r^k - c_1 r^{k-1} - \dots - c_k = 0$$

有 t 个不等的根 $r_1, r_2, \dots, r_t$, 其重数分别为 $m_1, m_2, \dots, m_t$, 满足 $m_i \geq 1, i=1, 2, \dots, t$, 且 $m_1 + m_2 + \dots + m_t = k$ 。那么序列 $\{a_n\}$ 是递推关系

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

的解, 当且仅当

$$\begin{aligned} a_n = & (a_{1,0} + a_{1,1}n + \dots + a_{1,m_1-1}n^{m_1-1})r_1^n \\ & + (a_{2,0} + a_{2,1}n + \dots + a_{2,m_2-1}n^{m_2-1})r_2^n \\ & + \dots + (a_{t,0} + a_{t,1}n + \dots + a_{t,m_t-1}n^{m_t-1})r_t^n \end{aligned}$$

$n=0, 1, 2, \dots$, 其中 $a_{i,j}$ 是常数, $1 \leq i \leq t$ 且 $0 \leq j \leq m_i - 1$ 。

例 7 说明在特征方程有重根时怎样用定理 4 求一个线性齐次递推关系的通解形式。

例 7 假设线性齐次递推关系的特征方程的根是 2, 2, 2, 5, 5 和 9 (即有 3 个根, 根 2 的重数为 3, 根 5 的重数为 2, 根 9 的重数为 1)。那么通解形式是什么?

解 由定理 4, 解的一般形式是

$$(a_{1,0} + a_{1,1}n + a_{1,2}n^2)2^n + (a_{2,0} + a_{2,1}n)5^n + a_{3,0}9^n$$

我们现在说明在特征方程有 3 重根时如何用定理 4 求解常系数线性齐次递推关系。

例 8 找出具有初始条件 $a_0=1$, $a_1=-2$ 和 $a_2=-1$ 的递推关系

$$a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$$

的解。

解 这个递推关系的特征方程是

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$$

因为 $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = (r+1)^3$, 特征方程只有一个 3 重根 $r=-1$ 。由定理 4, 这个递推关系的解是下述形式

$$a_n = a_{1,0}(-1)^n + a_{1,1}n(-1)^n + a_{1,2}n^2(-1)^n$$

为求出常数 $a_{1,0}$, $a_{1,1}$ 和 $a_{1,2}$, 使用初始条件, 得到

$$a_0 = 1 = a_{1,0}$$

$$a_1 = -2 = -a_{1,0} - a_{1,1} - a_{1,2}$$

$$a_2 = -1 = a_{1,0} + 2a_{1,1} + 4a_{1,2}$$

这 3 个方程的联立解是 $a_{1,0}=1$, $a_{1,1}=3$, $a_{1,2}=-2$ 。于是, 这个递推关系和给定初始条件的唯一解是序列 $\{a_n\}$, 其中

$$a_n = (1 + 3n - 2n^2)(-1)^n$$

4.2.3 常系数线性非齐次的递推关系

我们已经知道如何求解常系数线性齐次的递推关系。是否有一种相对简单的技术来求解如像 $a_n = 3a_{n-1} + 2n$ 的常系数线性但是非齐次的递推关系呢? 我们将看到, 仅仅对某些特定类型的递推关系存在肯定的回答。

递推关系 $a_n = 3a_{n-1} + 2n$ 是一个常系数线性非齐次递推关系, 即形如

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} + F(n)$$

的递推关系的例子, 其中 $c_1, c_2, \dots, c_k$ 是实数, $F(n)$ 是只依赖于 n 且不恒为 0 的函数。递推关系

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

叫做相伴的齐次递推关系。它在非齐次递推关系的解中起了重要的作用。

例 9 递推关系 $a_n = a_{n-1} + 2^n$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n^2 + n + 1$, $a_n = 3a_{n-1} + n3^n$ 和 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + n!$ 是常系数线性非齐次递推关系。相伴的线性齐次递推关系分别是 $a_n = a_{n-1}$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_n = 3a_{n-1}$ 和 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ 。

关于常系数线性非齐次递推关系的一个关键事实是, 每个解都是一个特解与相伴的线性齐次递推关系的一个解之和, 正如定理 5 所述。

定理 5 如果 $\{a_n^{(p)}\}$ 是常系数非齐次线性递推关系

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$$

的一个特解, 那么每个解都是 $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ 的形式, 其中 $\{a_n^{(h)}\}$ 是相伴的齐次递推关系

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

的一个解。

证 由于 $\{a_n^{(p)}\}$ 是非齐次递推关系的特解, 我们知道

$$a_n^{(p)} = c_1 a_{n-1}^{(p)} + c_2 a_{n-2}^{(p)} + \cdots + c_k a_{n-k}^{(p)} + F(n)$$

现在假设 $\{b_n\}$ 是常系数非齐次递推关系的第二个解, 使得

$$b_n = c_1 b_{n-1} + c_2 b_{n-2} + \cdots + c_k b_{n-k} + F(n)$$

从第二个等式减去第一个等式得

$$b_n - a_n^{(p)} = c_1 (b_{n-1} - a_{n-1}^{(p)}) + c_2 (b_{n-2} - a_{n-2}^{(p)}) + \cdots + c_k (b_{n-k} - a_{n-k}^{(p)})$$

从而得到 $\{b_n - a_n^{(p)}\}$ 是相伴的线性齐次递推关系的一个解, 比如说是 $\{a_n^{(h)}\}$ 。因此, 对所有的 n 有 $b_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)}$ 。 $\square$

由定理 5, 我们看到求解常系数非齐次递推关系的关键是找一个特解。然后每个解都是这个特解与相伴的齐次递推关系的一个解之和。尽管不存在对每个函数 $F(n)$ 都有效的一般性方法来求这种解, 但有某些技术对特定的函数类型 $F(n)$, 例如多项式函数与常数的幂函数有效。例 10 和例 11 就说明了这一点。

例 10 求递推关系 $a_n = 3a_{n-1} + 2n$ 的所有的解。具有 $a_1 = 3$ 的解是什么?

解 为求解这个常系数线性非齐次递推关系, 我们需要求解与它相伴的线性齐次方程并且找到一个关于给定非齐次方程的特解。相伴的线性齐次方程是 $a_n = 3a_{n-1}$ 。它的解是 $a_n^{(h)} = \alpha 3^n$, 其中 α 是常数。

我们现在找一个特解。因为 $F(n) = 2n$ 是 n 的 1 次多项式, 解的一个合理的尝试就是 n 的线性函数, 比如说 $p_n = cn + d$, 其中 c 和 d 是常数。为确定是否存在这种形式的解, 假设 $p_n = cn + d$ 是一个这样的解。那么方程 $a_n = 3a_{n-1} + 2n$ 就变成 $cn + d = 3(c(n-1) + d) + 2n$ 。化简和归并同类项得 $(2+2c)n + (2d-3c) = 0$ 。从而, $cn + d$ 是一个解, 当且仅当 $2+2c=0$ 和 $2d-3c=0$ 。这说明 $cn + d$ 是一个解当且仅当 $c = -1$ 和 $d = -3/2$ 。因而, $a_n^{(p)} = -n - 3/2$ 是一个特解。

根据定理 5, 所有的解都是下述形式

$$a_n = a_n^{(p)} + a_n^{(h)} = -n - 3/2 + \alpha \cdot 3^n$$

其中 α 是常数。

为找出具有 $a_1 = 3$ 的解, 在得到的通解公式中令 $n=1$ 。我们有 $3 = -1 - 3/2 + 3\alpha$, 这就推出 $\alpha = 11/6$ 。我们要找的解是 $a_n = -n - 3/2 + (11/6)3^n$ 。 $\blacksquare$

例 11 求出下述递推关系

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n$$

的所有的解。

解 这是一个线性非齐次递推关系。它的相伴的齐次递推关系

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$$

的解是 $a_n^{(h)} = \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot 2^n$, 其中 α_1 和 α_2 是常数。因为 $F(n) = 7^n$, 一个合理的解是 $a_n^{(p)} = C \cdot 7^n$, 其中 C 是常数。把这些项代入递推关系得 $C \cdot 7^n = 5C \cdot 7^{n-1} - 6C \cdot 7^{n-2} + 7^n$ 。提出公因式 7^{n-2} , 这个等式变成 $49C = 35C - 6C + 49$, 从而推出 $20C = 49$ 或 $C = 49/20$ 。于是, $a_n^{(p)} = (49/20)7^n$ 是特解。由定理 5, 所有的解都有下述形式

$$a_n = \alpha_1 \cdot 3^n + \alpha_2 \cdot 2^n + (49/20)7^n$$

在例 10 和例 11 中, 我们凭经验猜想了一个特定形式的解。在两种情况下, 我们都能找到特

解。这并不是偶然的。每当 $F(n)$ 是 n 的多项式和一个常数的 n 次幂之积时, 我们就能知道一个特解恰好是什么形式, 正如定理 6 所述。定理 6 的证明作为一个挑战性的练习留给读者。

定理 6 假设 $\{a_n\}$ 满足线性非齐次递推关系

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$$

其中 $c_1, c_2, \dots, c_k$ 是实数, 且

$$F(n) = (b_r n^r + b_{r-1} n^{r-1} + \cdots + b_1 n + b_0) s^n$$

其中 $b_0, b_1, \dots, b_r$ 和 s 是实数。当 s 不是相伴的线性齐次递推关系的特征方程的根时, 存在一个下述形式的特解

$$(p_r n^r + p_{r-1} n^{r-1} + \cdots + p_1 n + p_0) s^n$$

当 s 是特征方程的根且它的重数是 m 时, 存在一个下述形式的特解

$$n^m (p_r n^r + p_{r-1} n^{r-1} + \cdots + p_1 n + p_0) s^n$$

注意当 s 是相伴的线性齐次递推关系的特征方程的 m 重根时, 因式 n^m 保证给出的特解不是相伴的线性齐次递推关系的一个解。我们下面给出一个例子说明定理 6 所提供的特解形式。

例 12 当 $F(n)=3^n$, $F(n)=n3^n$, $F(n)=n^2 2^n$ 和 $F(n)=(n^2+1)3^n$ 时, 线性非齐次递推关系 $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + F(n)$ 的特解有什么形式?

解 相伴的线性齐次递推关系是 $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ 。它的特征方程 $r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2 = 0$ 有一个 2 重的单根 3。 $F(n)$ 的形式为 $P(n)s^n$, 其中 $P(n)$ 是一个多项式, s 是一个常数。为应用定理 6, 我们需要知道 s 是否是这个特征方程的根。

由于 $s=3$ 是重数 $m=2$ 的根而 $s=2$ 不是根, 定理 6 告诉我们如果 $F(n)=3^n$, 特解的形式是 $p_0 n^2 3^n$; 如果 $F(n)=n3^n$, 特解的形式是 $n^2(p_1 n + p_0)3^n$; 如果 $F(n)=n^2 2^n$, 特解的形式是 $(p_2 n^2 + p_1 n + p_0)2^n$; 如果 $F(n)=(n^2+1)3^n$, 特解的形式是 $n^2(p_2 n^2 + p_1 n + p_0)3^n$ 。■

在求解定理 6 所谈的那种类型的递推关系时, 若 $s=1$ 一定要小心处理。特别是把定理用于 $F(n)=b_r n^r + b_{r-1} n^{r-1} + \cdots + b_1 n + b_0$, 参数 s 取值 $s=1$ 时(尽管项 1^n 没有明确地出现)的情况。根据这个定理, 解的形式就依赖于是否 1 是相伴的线性齐次递推关系的特征方程的根。这将在例 13 中说明, 它说明了怎样用定理 6 找出前 n 个正整数之和的公式。

例 13 设 a_n 是前 n 个正整数的和, 即

$$a_n = \sum_{k=1}^n k$$

注意, a_n 满足线性非齐次递推关系

$$a_n = a_{n-1} + n$$

(为从前 $n-1$ 个正整数的和 a_{n-1} 得到前 n 个正整数的和 a_n , 只需加上 n 即可)。注意初始条件是 $a_1=1$ 。

对于 a_n , 相伴的线性齐次递推关系是

$$a_n = a_{n-1}$$

这个齐次递推关系的解是 $a_n^{(h)} = c(1)^n = c$, 其中 c 是一个常数。为找到 $a_n = a_{n-1} + n$ 的所有的解, 我们仅需要找一个特解。由定理 6, 由于 $F(n)=n=n(1)^n$ 且 $s=1$ 是相伴的线性齐次递推关系的特征方程的 1 阶根, 存在一个形如 $n(p_1 n + p_0) = p_1 n^2 + p_0 n$ 的特解。

把它代入递推关系得到 $p_1 n^2 + p_0 n = p_1 (n-1)^2 + p_0 (n-1) + n$ 。化简得 $n(2p_1 - 1) + (p_0 - p_1) = 0$, 这意味着 $2p_1 - 1 = 0$ 和 $p_0 - p_1 = 0$, 即 $p_0 = p_1 = 1/2$ 。因此

$$a_n^{(p)} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

是一个特解。所以, 原递推关系 $a_n = a_{n-1} + n$ 的所有的解由 $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c + n(n+1)/2$ 给出。由于 $a_1=1$, 我们有 $1 = a_1 = c + 1 \cdot 2/2 = c + 1$, 故 $c=0$ 。从而 $a_n = n(n+1)/2$ 。(这和 2.4 节表 2-5 给出的以及前面导出的公式一样。) ■

练习

1. 确定下面哪些是常系数线性齐次递推关系, 如果是, 求它们的阶。

$$a) a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} + 5a_{n-3}$$

$$b) a_n = 2na_{n-1} + a_{n-2}$$

$$c) a_n = a_{n-1} + a_{n-4}$$

$$d) a_n = a_{n-1} + 2$$

$$e) a_n = a_{n-1}^2 + a_{n-2}$$

$$f) a_n = a_{n-2}$$

$$g) a_n = a_{n-1} + n$$

2. 求解下述具有给定初始条件的递推关系。

$$a) a_n = 2a_{n-1}, n \geq 1, a_0 = 3$$

$$b) a_n = a_{n-1}, n \geq 1, a_0 = 2$$

$$c) a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 0$$

$$d) a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, n \geq 2, a_0 = 6, a_1 = 8$$

$$e) a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2}, n \geq 2, a_0 = 0, a_1 = 1$$

$$f) a_n = 4a_{n-2}, n \geq 2, a_0 = 0, a_1 = 4$$

$$g) a_n = a_{n-2}/4, n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 0$$

3. 使用 4.1 节练习 17 描述的两个信号在 n 微秒内可以传送多少不同的信息?

4. 使用 1×2 和 2×2 的块铺满一块 $2 \times n$ 的长方形板, 有多少种方式?

5. 年初把一笔 100 000 美元的钱存入一个投资基金。在每年的最后一天得到两份红利。第一份红利是当年账上钱数的 20%。第二份红利是前一年账上钱数的 45%。

a) 如果不允许取钱, 找出一个关于 $\{P_n\}$ 的递推关系, 其中 P_n 是第 n 年末账上的钱数。

b) 如果不允许取钱, n 年以后账上有多少钱?

6. 卢卡斯数满足递推关系

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

和初始条件 $L_0 = 2$ 和 $L_1 = 1$ 。

a) 证明 $L_n = f_{n-1} + f_{n+1}$, $n = 2, 3, \dots$, 其中 f_n 是第 n 个斐波那契数。

b) 求出卢卡斯数的显式公式。

7. 求解 $a_n = 7a_{n-2} + 6a_{n-3}$, $a_0 = 9$, $a_1 = 10$, $a_2 = 32$ 。

8. 求解 $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$, $a_0 = 7$, $a_1 = -4$, $a_2 = 8$ 。

9. 证明下述涉及斐波那契数和二项式系数的恒等式:

$$f_{n+1} = C(n, 0) + C(n-1, 1) + \dots + C(n-k, k)$$

其中 n 是正整数且 $k = \lfloor n/2 \rfloor$ 。[提示: 设 $a_n = C(n, 0) + C(n-1, 1) + \dots + C(n-k, k)$ 。证明序列 $\{a_n\}$ 和斐波那契序列满足的递推关系和初始条件一样。]

10. 求解递推关系 $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$, $a_0 = 5$, $a_1 = -9$, $a_2 = 15$ 。

11. 如果线性齐次递推关系的特征方程的根是 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, 3, 3, -4, 那么它的解的一般形式是什么?

12. 考虑非齐次线性递推关系 $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$ 。

a) 证明 $a_n = -2^{n+1}$ 是这个递推关系的一个解。

b) 使用定理 5 找出这个递推关系的所有解。

c) 找出具有 $a_0 = 1$ 的解。

13. a) 确定常数 A 和 B 的值, 使得 $a_n = An + B$ 是递推关系 $a_n = 2a_{n-1} + n + 5$ 的一个解。

b) 使用定理 5 找出这个递推关系的所有解。

c) 找出这个递推关系具有 $a_0 = 4$ 的解。

14. 什么是线性非齐次递推关系 $a_n = 8a_{n-2} - 16a_{n-4} + F(n)$ 的特解的一般形式? 如果

$$a) F(n) = n^3$$

$$b) F(n) = (-2)^n$$

$$c) F(n) = n2^n$$

$$d) F(n) = n^2 4^n$$

$$e) F(n) = (n^2 - 2)(-2)^n$$

$$f) F(n) = n^4 2^n$$

$$g) F(n) = 2$$

15. a) 找出递推关系 $a_n = 2a_{n-1} + 3^n$ 的所有解。

b) 找出(a)中的递推关系具有初始条件 $a_1 = 5$ 的解。

16. 找出递推关系 $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$ 的所有解。[提示: 找形如 $qn2^n + p_1n + p_2$ 的特解, 其中 q, p_1, p_2 是常数。]

17. 找出递推关系 $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + (n+1)2^n$ 的所有解。

18. 找出递推关系 $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 2^n + n + 3$ 的具有 $a_0 = 1, a_1 = 4$ 的解。

19. 设 a_n 是前 n 个三角形数的和, 即 $a_n = \sum_{k=1}^n t_k$, 其中 $t_k = k(k+1)/2$. 证明 $\{a_n\}$ 满足线性非齐次递推关系 $a_n = a_{n-1} + n(n+1)/2$ 和初始条件 $a_1 = 1$. 使用定理 6 求解这个递推关系以确定关于 a_n 的公式.
- *20. a) 求线性齐次递推关系 $a_n = a_{n-4}$ 的特征根. (注: 这些根包含复数.)
 b) 求(a)的递推关系具有 $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -1$ 和 $a_3 = 1$ 的解.
- *21. a) 用例 4 找到的关于第 n 个斐波那契数 f_n 的公式证明 f_n 是最接近

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

的整数.

- b) 确定对哪些 n 有 f_n 大于

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

对哪些 n 有 f_n 小于

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

22. 假设留在岛上的每对遗传工程培育的兔子在一个月大时生出 2 对新兔子, 在两个月大和以后的每个月都生出 6 对新兔子. 没有兔子死去, 也没有兔子从岛上离开.
 a) 一对新生的兔子留在岛上, 求出与 n 个月后岛上兔子对数有关的递推关系.
 b) 通过求解(a)中的递推关系确定一对新生的兔子留在岛上 n 个月以后岛上的兔子对数.
23. 在一个充满活力的新软件公司, 一个新女雇员的初始工资为 50 000 美元, 公司允诺每年年底她的工资将是她前一年工资的 2 倍, 并且她在公司的每年都将额外增加 10 000 美元.
 a) 构造一个与被雇用的第 n 年她的工资数有关的递推关系.
 b) 求解这个递推关系找出她被雇用的第 n 年的工资.
- **24. 证明定理 4.
25. 求解具有初始条件 $T(1)=6$ 的递推关系 $T(n) = nT^2(n/2)$. [提示: 令 $n=2^k$, 然后做替换 $a_k = \log T(2^k)$ 以得到一个线性非齐次的递推关系.]

4.3 分治算法和递推关系

4.3.1 引言

许多递归算法把一个给定输入的问题划分成一个或多个小问题. 连续施用这种划分直到可以很快地找到这些较小问题的解. 例如, 在执行一个二分检索时把对一个元素在表中的搜索归约为对该元素在长度减半的表中的搜索. 我们继续施用这种分解直到只剩下一个元素. 当我们使用归并排序算法排序一个整数的数表时, 我们将这个表划分成相等大小的两半并且分别排序每一半. 然后将两个排好序的半个数表归并. 这种类型的递归算法的另一个例子就是整数乘法的过程, 它将两个整数相乘的问题分解成三组位数减半的整数相乘. 这种分解连续施用直到只剩下一位的整数为止. 这些过程叫做分治算法. 这是因为它们将一个问题的划分成较小规模的同一问题的一个或多个实例, 然后用这些小问题的解来处理这个问题以找到初始问题的解, 这当中也许需要一些额外的工作.

这一节将说明怎样用递推关系分析分治算法的计算复杂性. 我们将用这些递推关系估计许多不同的分治算法(包括我们在本节引入的算法)所使用的运算次数.

4.3.2 分治递推关系

假设一个递归算法把一个规模为 n 的问题分成 a 个子问题, 其中每个子问题的规模是 n/b (为简单起见, 假设 n 是 b 的倍数; 实际上, 较小的问题的规模常常是小于等于或者大于等于 n/b 的最近的整数). 此外, 假设在把子问题的解组合成原来问题的解的算法处理步中需要总量为 $g(n)$ 的额外的运算. 那么, 如果 $f(n)$ 表示求解规模为 n 的问题所需的运算数, 则得出 f 满足递推关系

$$f(n) = af(n/b) + g(n)$$

这就叫做分治递推关系。

首先我们将建立一些可用于研究某些重要算法的复杂性的分治递推关系。然后将说明怎样用这些分治递推关系估计这些算法的复杂性。

例1 二分搜索 当 n 是偶数时, 二分检索算法把对某个元素在长度为 n 的搜索序列中的搜索转变成对同一元素在长度为 $n/2$ 的搜索序列中的二分检索。(因此, 规模为 n 的问题已经被分解成规模为 $n/2$ 的问题。)为执行这个分解需要 2 次比较(一次是为了确定要用到表的哪一半, 另一次是为了确定表是否还有项留下来)。所以, 如果 $f(n)$ 是在规模为 n 的搜索序列中搜索一个元素所需要的比较次数, 那么当 n 是偶数时 $f(n) = f(n/2) + 2$ 。

例2 找一个序列的最大和最小 考虑下面的查找序列 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 中最小和最大元素的算法。如果 $n=1$, 那么 a_1 就是最大和最小的元素。如果 $n>1$, 把这个序列分成两个序列, 或者两者有同样多的元素, 或者一个集合比另一个集合多一个元素。问题就归约成查找两个较小序列的最大和最小元素。比较两个较小集合的最大和最小元素, 从而得到全体的最大和最小元素, 原问题的解就得到了。

设 $f(n)$ 是找 n 元素集合的最小和最大元素所需要的总的比较次数。我们已经说明了当 n 是偶数时一个规模为 n 的问题可以归约成两个规模为 $n/2$ 的问题, 这里要使用 2 次比较, 一次是比较两个集合的最小元素, 而另一次是比较两个集合的最大元素。当 n 是偶数时就得到递推关系 $f(n) = 2f(n/2) + 2$ 。

例3 归并排序 归并排序算法把一个具有 n 个项(其中 n 为偶数)的待排序的表划分成两个表, 每个表 $n/2$ 个元素, 并且用少于 n 次的比较将两个排好序的表归并成一个排好序的表。因此, 通过归并排序算法排序 n 个元素的表用到的比较次数小于 $M(n)$, 其中函数 $M(n)$ 满足分治递推关系

$$M(n) = 2M(n/2) + n$$

例4 整数的快速乘法 令人惊讶的是存在许多比整数乘法的传统算法更有效的算法。这里描述的一个有效的算法就用到了分治技术。这个快速的乘法算法开始把每个 $2n$ 位的二进制整数分成两块, 每块 n 位。然后, 原来 $2n$ 位的二进制整数的乘法被分解成 3 个 n 位二进制数的乘法, 还要加上移位和加法。

假设 a 和 b 是两个整数的 $2n$ 位的二进制表达式(为了使得它们等长, 如果需要的话, 可在这些表达式前面加上若干个 0)。令

$$a = (a_{2n-1} a_{2n-2} \dots a_1 a_0)_2, \quad b = (b_{2n-1} b_{2n-2} \dots b_1 b_0)_2$$

令

$$a = 2^n A_1 + A_0, \quad b = 2^n B_1 + B_0$$

其中

$$A_1 = (a_{2n-1} \dots a_{n+1} a_n)_2, \quad A_0 = (a_{n-1} \dots a_1 a_0)_2$$

$$B_1 = (b_{2n-1} \dots b_{n+1} b_n)_2, \quad B_0 = (b_{n-1} \dots b_1 b_0)_2$$

快速整数乘法算法是基于恒等式

$$ab = (2^{2n} + 2^n)A_1 B_1 + 2^n(A_1 - A_0)(B_0 - B_1) + (2^n + 1)A_0 B_0$$

关于这个恒等式的一个重要的事实就是, 它证明了两个 $2n$ 位整数的乘法可以用 3 个 n 位整数的乘法加上加法、减法以及移位来实现。这证明了如果 $f(n)$ 是两个 n 位整数相乘所需的按位运算的总数, 那么

$$f(2n) = 3f(n) + Cn$$

这个等式成立的理由如下: 3 次 n 位整数的乘法可以使用 $3f(n)$ 次按位运算实现。每次加法、减法和移位使用的运算次数是 n 位运算的常数倍, 而 Cn 表示由这些运算用到的总的按位运算数。

例5 快速矩阵乘法 使用矩阵乘法的定义进行两个 $n \times n$ 矩阵相乘需要 n^3 次乘法和 $n^2(n-1)$ 次加法。因此, 按照这种方法计算两个 $n \times n$ 矩阵之积需要 $O(n^3)$ 次运算(乘法和加法)。令人惊讶的是, 对于两个 $n \times n$ 矩阵相乘存在更有效的分治算法。这个由 V. 斯特拉森于

1969年提出的算法当 n 是偶数时将两个 $n \times n$ 矩阵的相乘归约为两个 $(n/2) \times (n/2)$ 矩阵的7次相乘和 $(n/2) \times (n/2)$ 矩阵的15次相加。(要了解这个算法的细节见[CoLeRiSt01]。)于是,如果 $f(n)$ 是用到的运算(乘法和加法)次数,那么当 n 是偶数时有

$$f(n) = 7f(n/2) + 15n^2/4$$

正如例1~例5所示,在许多不同的情况中都出现了形如 $f(n) = af(n/b) + g(n)$ 的递推关系。可以对满足这种递推关系的函数的阶作出估计。假设 f 满足这个递推关系,其中 n 可被 b 整除。令 $n = b^k$,其中 k 是一个正整数。那么

$$\begin{aligned} f(n) &= af(n/b) + g(n) \\ &= a^2 f(n/b^2) + ag(n/b) + g(n) \\ &= a^3 f(n/b^3) + a^2 g(n/b^2) + ag(n/b) + g(n) \\ &\vdots \\ &= a^k f(n/b^k) + \sum_{j=0}^{k-1} a^j g(n/b^j) \end{aligned}$$

由于 $n/b^k = 1$,从而有

$$f(n) = a^k f(1) + \sum_{j=0}^{k-1} a^j g(n/b^j)$$

我们可以使用这个关于 $f(n)$ 的等式估计满足分治关系的函数的阶。

定理1 设 f 是满足递推关系

$$f(n) = af(n/b) + c$$

的增函数,其中 n 被 b 整除, $a \geq 1$, b 是大于1的整数, c 是一个正实数。那么

$$f(n) \text{ 是 } \begin{cases} O(n^{\log_b a}) & \text{如果 } a > 1 \\ O(\log n) & \text{如果 } a = 1 \end{cases}$$

进一步,当 $n = b^k$,其中 k 是正整数,

$$f(n) = C_1 n^{\log_b a} + C_2$$

其中 $C_1 = f(1) + c/(a-1)$ 且 $C_2 = -c/(a-1)$ 。

证 首先令 $n = b^k$ 。由定理前面的讨论得到的关于 $f(n)$ 的表达式和 $g(n) = c$,我们有

$$f(n) = a^k f(1) + \sum_{j=0}^{k-1} a^j c = a^k f(1) + c \sum_{j=0}^{k-1} a^j$$

先考虑 $a=1$ 的情况。那么有

$$f(n) = f(1) + ck$$

由于 $n = b^k$,我们有 $k = \log_b n$,于是

$$f(n) = f(1) + c \log_b n$$

当 n 不是 b 的幂时,对某个正整数 k 有 $b^k < n < b^{k+1}$ 。由于 f 是增加的,故 $f(n) \leq f(b^{k+1}) = f(1) + c(k+1) = (f(1) + c) + ck \leq (f(1) + c) + c \log_b n$ 。因此,当 $a=1$ 时在两种情况下 $f(n)$ 都是 $O(\log n)$ 。

现在假设 $a > 1$ 。首先假定 $n = b^k$, k 是正整数。由几何级数的求和公式得

$$\begin{aligned} f(n) &= a^k f(1) + c(a^k - 1)/(a - 1) \\ &= a^k [f(1) + c/(a - 1)] - c/(a - 1) \\ &= C_1 n^{\log_b a} + C_2 \end{aligned}$$

这是由于 $a^k = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$,其中 $C_1 = f(1) + c/(a-1)$ 且 $C_2 = -c/(a-1)$ 。

现在假设 n 不是 b 的幂。那么 $b^k < n < b^{k+1}$,其中 k 是一个非负整数。由于 f 是增加的,

$$\begin{aligned} f(n) &\leq f(b^{k+1}) = C_1 a^{k+1} + C_2 \\ &\leq (C_1 a) a^{\log_b n} + C_2 \\ &\leq (C_1 a) n^{\log_b a} + C_2 \end{aligned}$$

这是由于 $k \leq \log_b n < k+1$ 。

于是, $f(n)$ 是 $O(n^{\log_a b})$ 。 □

例 6~9 说明怎样使用定理 1。

例 6 设 $f(n) = 5f(n/2) + 3$ 且 $f(1) = 7$, 求 $f(2^k)$, 其中 k 是一个正整数。如果 f 是一个增函数, 请估计 $f(n)$ 。

解 从定理 1 的证明, 考虑 $a=5, b=2, c=3$, 我们看到如果 $n=2^k$, 那么

$$\begin{aligned} f(n) &= a^k [f(1) + c/(a-1)] + [-c/(a-1)] \\ &= 5^k [7 + (3/4)] - 3/4 \\ &= 5^k (31/4) - 3/4 \end{aligned}$$

又如果 $f(n)$ 是增加的, 定理 1 证明了 $f(n)$ 是 $O(n^{\log_a b}) = O(n^{\log_5 2})$ 。 ■

我们可以使用定理 1 估计二分检索算法和例 2 查找序列的最小和最大元素的算法的计算复杂性。

例 7 估计二分检索使用的比较次数。

解 在例 1 中证明了当 n 是偶数时 $f(n) = f(n/2) + 2$, 其中 $f(n)$ 是在规模为 n 的序列中实现一个二分检索需要的比较次数。因此得出 $f(n)$ 是 $O(\log n)$ 。 ■

例 8 估计用例 2 给定的算法查找序列的最大和最小元素所使用的比较次数。

解 在例 2 我们证明了当 n 是偶数时 $f(n) = 2f(n/2) + 2$, 其中 f 是算法需要的比较次数。于是, 由定理 1 得到 $f(n) = O(n^{\log_2 2}) = O(n)$ 。 ■

我们现在叙述一个更一般、更复杂的定理, 定理 1 是它的特例。这个定理(或者更强的版本)有时称作主定理(Master Theorem), 因为它在分析许多重要的分治算法的复杂性中很有用。

定理 2 主定理 设 f 是满足递推关系

$$f(n) = af(n/b) + cn^d$$

的增函数, 其中 $n = b^k$, k 是一个正整数, $a \geq 1$, b 是大于 1 的整数, c 和 d 是实数, 满足 c 是正的且 b 是非负的。那么

$$f(n) \text{ 是 } \begin{cases} O(n^d) & \text{如果 } a < b^d \\ O(n^d \log n) & \text{如果 } a = b^d \\ O(n^{\log_a b}) & \text{如果 } a > b^d \end{cases}$$

定理 2 的证明留给读者作为本节末的练习 11~13。

例 9 归并排序的复杂性 在例 3 我们解释了用归并排序来排序 n 个元素的表使用的比较次数少于 $M(n)$, 其中 $M(n) = 2M(n/2) + n$ 。根据主定理(定理 2)我们找到 $M(n)$ 是 $O(n \log n)$ 。 ■

例 10 估计使用例 4 描述的快速乘法算法做两个 n 位整数相乘所需要的按位运算次数。

解 例 4 证明了当 n 是偶数时 $f(n) = 3f(n/2) + Cn$, 其中 $f(n)$ 是使用快速乘法算法做两个 n 位整数相乘所需的按位运算次数。于是, 由定理 2 得到 $f(n)$ 是 $O(n^{\log_3 3})$ 。注意 $\log_3 3 \sim 1.6$ 。因为通常的乘法算法使用 $O(n^2)$ 次按位运算, 所以对于足够大的整数, 包括实际应用中出现的大整数, 快速乘法算法在时间复杂性方面比通常的算法有了本质的改进。 ■

例 11 估计使用例 5 的矩阵乘法算法做两个 $n \times n$ 矩阵相乘所需要的乘法和加法次数。

解 令 $f(n)$ 表示使用例 5 提到的算法做两个 $n \times n$ 矩阵相乘所需的加法和乘法次数。当 n 是偶数时我们有 $f(n) = 7f(n/2) + 15n^2/4$ 。于是由定理 2 得到 $f(n)$ 是 $O(n^{\log_7 7})$ 。注意 $\log_7 7 \sim 2.8$ 。由于通常的两个 $n \times n$ 矩阵相乘的算法要用 $O(n^3)$ 次加法和乘法, 显然, 对足够大的整数 n , 包括出现在许多实际应用中的大整数, 这个算法比通常的算法在时间复杂性方面更加有效。 ■

最接近点对问题 我们在结束这一节之前引入一个来自于计算几何的分治算法, 计算几何是离散数学的一部分, 专注于求解几何问题的算法。

例 12 最接近点对问题 平面上有 n 个点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 的集合, 其中两点 (x_i, y_i) 和 (x_j, y_j) 之间的距离是通常的欧几里得距离

$$\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

考虑确定其中最接近的点对的问题。这个问题见于许多应用中，例如确定在某航空控制中心管理的特定高度的空间最近的一对飞机。怎样以一种有效的方式找到这个最近的点对？

解 为解决这个问题，可以首先确定每对点的距离，然后找到这些距离的最小值。但是，这种方法需要 $O(n^2)$ 次的距离计算和比较，因为存在 $C(n, 2) = n(n-1)/2$ 个点对。不过存在一个精致的分治算法，对于 n 个点可以用 $O(n \log n)$ 次的距离计算和比较求解这个最接近点对问题。我们在这里描述的算法是归功于米凯尔·萨莫斯(见[PrSa85])。

为了简单起见，假设 $n = 2^k$ ，其中 k 是正整数。(我们避免某些当 n 不是 2 的幂时必需的技术上的考虑)。当 $n = 2$ 时，只有一对点；在这两个点之间的距离就是最小距离。

算法的递归部分将问题划分成两个子问题，每个涉及一半的点。第一步使用归并排序算法，根据这些点的 x 坐标对点进行排序。这需要 $O(n \log n)$ 次运算。一旦根据它们的 x 坐标对这些点排好序，我们画一条垂线 ℓ 将 n 个点分成两部分，左半部分和右半部分大小相等，每部分包含 $n/2$ 个点，如图 4-5 所示。(如果有任何点落到划分线 ℓ 上，必要的话，我们把它们分在这两部分里。)在后面的递归步骤我们不再需要根据 x 坐标排序，因为我们可以从所有的点中选择对应的排序子集。这个选择是可以用 $O(n)$ 次比较完成的任务。

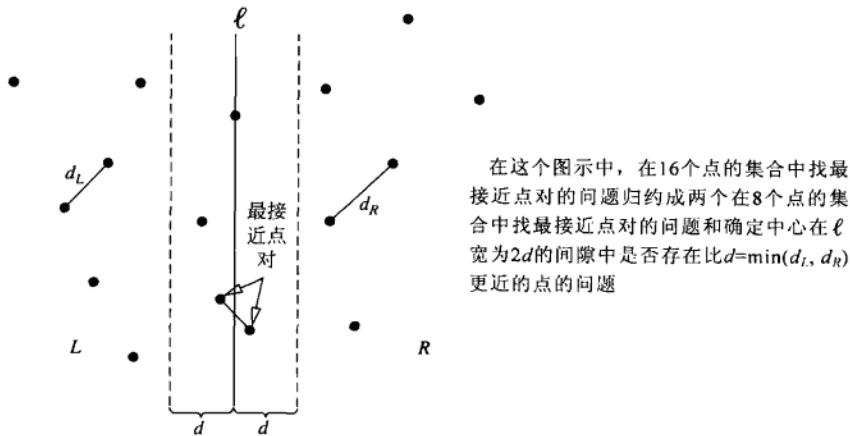


图 4-5 求解最接近点对问题的算法的递归步

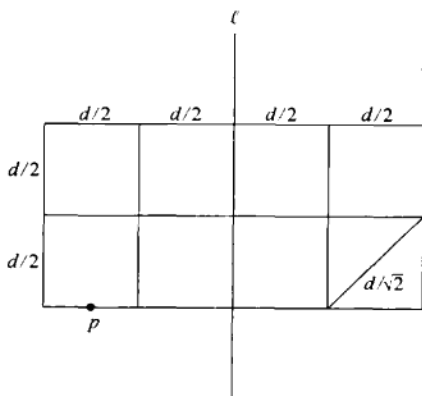
最接近的点对的位置有三种可能：(1) 它们两点都在左部区域 L ，(2) 它们两点都在右部区域 R ，(3) 一点在左部区域且另一点在右部区域。递归地使用这个算法计算 d_L 和 d_R ，其中 d_L 是在左部区域的点之间的最小距离， d_R 是在右部区域的点之间的最小距离，令 $d = \min(d_L, d_R)$ 。为了成功地将在原始集合找最接近点对的问题划分成在两个区域分别找最短距离的问题，我们必须处理算法的治之部分，这要求我们考虑最接近的点处在不同的区域的情况，即一点在 L 中，另一点在 R 中。因为存在一对点距离为 d ，或者它们都在 R 中，或者它们都在 L 中。对于分在不同区域的最接近的点，要求其距离一定小于 d 。

如果一点在左边区域，一点在右边区域且处在小于 d 的距离内，这些点一定位于宽度 $2d$ 的以 ℓ 作为其中心的垂直间隙中。(否则，这些点的距离一定大于它们的 x 坐标之差，而这个距离将超过 d 。)为了检查在这个间隙中的点，我们对它们进行排序并按照 y 坐标递增的顺序把它们列出来。这可以使用归并排序用 $O(n \log n)$ 次运算做到，并且只需在算法开始时做一次，而不是在每个递归步做。在每个递归步，我们从已经按照其 y 坐标排好序的所有点的集合，构造在这个区域内的根据其 y 坐标排序的点的子集，这可以用 $O(n)$ 次比较做到。

从间隙中具有最小 y 坐标的一个点开始，我们连续地检查间隙中的每个点，计算这个点与

隙中所有其他具有较大 y 坐标且与这个点的距离小于 d 的点之间的距离。注意到为检查点 p ，我们只需要考虑在 p 和下述矩形中的一组点之间的距离。这个矩形的高为 d ，宽为 $2d$ ， p 在它的底边上，并且它的垂直边与 l 的距离为 d 。

我们可以证明在这个点集中至多存在 8 个点，其中包含 p 在内(或者在这个 $2d \times d$ 的矩形的边上)。为了看到这一点，注意到在图 4-6 所示的 8 个 $d/2 \times d/2$ 的正方形中，每个正方形内部至多可能存在一个点。这是由于在一个正方形的边上或者内部最远距离的点是到对角线的长度 $d/\sqrt{2}$ (使用勾股定理可以得到)，这个距离小于 d ，并且每个这样的正方形是完全处在左区域或者右区域内。这意味着在这一步我们至多只需要与 d 比较 7 个距离，这些距离是在 p 和矩形内部或者边上 7 个或者更少的其他的点之间。



包含 p 在内，至多 8 个点可能处在中心在 l 的 $2d \times d$ 的矩形内或者边上，因为 8 个 $(d/2) \times (d/2)$ 的正方形中，每个内部或边上至多可能存在一个点。

图 4-6 说明对间隙中的每个点至多需要考虑另外 7 个点

由于在宽为 $2d$ 的间隙中的总点数不超过 n (集合中的总点数)，至多需要与 d 比较 $7n$ 个距离以找到点之间的最小距离。即只存在 $7n$ 个距离可能小于 d 。因此，一旦用归并排序按照这些点的 x 坐标和 y 坐标对它们进行排序以后，我们发现求解最接近点对问题需要的比较次数不超过满足递推关系

$$f(n) = 2f(n/2) + 7n$$

的增函数 $f(n)$ ，其中 $f(2)=1$ 。根据定理 2，得到 $f(n)$ 是 $O(n \log n)$ 。用归并排序算法根据点的 x 坐标和 y 坐标对点做两次排序，做每次排序用 $O(n \log n)$ 次比较，在算法的 $O(\log n)$ 个步中的每一步，这些坐标的排序子集每次可以用 $O(n)$ 次比较得到。因此，这个最接近点对问题可以用 $O(n \log n)$ 次比较求解。

练习

- 在 64 个元素的集合中，做二分检索需要多少次比较？
- 使用快速乘法算法乘 $(1110)_2$ 和 $(1010)_2$ 。
- 确定在例 4 中的常数 C 的值，并且使用它估计用快速乘法算法做两个 64 位二进制整数相乘所需要的按位运算次数。
- 假设当 n 被 3 整除时有 $f(n) = f(n/3) + 1$ 和 $f(1) = 1$ ，求
 - $f(3)$
 - $f(27)$
 - $f(729)$
- 假设当 n 被 5 整除时有 $f(n) = f(n/5) + 3n^2$ 和 $f(1) = 4$ ，求
 - $f(5)$
 - $f(125)$
 - $f(3125)$
- 假设 n 个投票人为不同的候选人(可能存在多于 2 个候选人)进入某个办公室投票，选票作为一个序列的元素。如果一个人得到的选票超过半数他就赢得竞选。
 - 设计一个分治算法确定是否一个候选人得到半数选票，如果是，则确定这个候选人是谁。[提示：设 n 为偶数，并且将选票序列划分成两个序列，每个序列具有 $n/2$ 个元素。注意到如果对于两个半长序列每一个都没有得到一半以上的选票，那么一个人就不可能得到所有选票的一半以上。]

b) 使用主定理估计你在(a)中设计的算法所需要的比较次数。

7. 设函数 f 满足递推关系 $f(n) = 2f(\sqrt{n}) + 1$, 其中 n 是大于 1 的完全平方数且 $f(2)=1$ 。

a) 求 $f(16)$ 。

b) 求关于 $f(n)$ 的大 O 估计。[提示: 做替换 $m = \log n$ 。]

**8. 这个练习涉及求 n 个实数序列的连续项的最大和问题。当所有的项都是正数时, 所有项之和就给出了答案, 但是当某些项是负数时情况就比较复杂了。例如, 序列 $-2, 3, -1, 6, -7, 4$ 的连续项的最大和是 $3 + (-1) + 6 = 8$ 。(这个练习基于 [Be86])。

a) 使用伪码描述一个求解该问题的算法, 这个算法依次找从第一项开始的连续项之和, 从第二项开始的连续项之和, 等等, 并在算法执行时记录当前找到的最大和。

b) 依照所做的计算的次数与比较次数确定在(a)中算法的计算复杂性。

c) 设计一个分治算法求解这个问题。[提示: 假设序列中有偶数个项, 把这个序列分成两半。解释当连续项的最大和包含了在两个半序列的项时怎样处理这种情况。]

d) 使用(c)中的算法求下面每个序列的连续项的最大和: $-2, 4, -1, 3, 5, -6, 1, 2; 4, 1, -3, 7, -1, -5, 3, -2; -1, 6, 3, -4, -5, 8, -1, 7$ 。

e) 对于(c)中的分治算法使用的求和次数和比较次数求一个递推关系。

f) 使用主定理估计这个分治算法的计算复杂性。依照计算复杂性把这个算法和(a)中的算法做比较, 结果如何?

9. 使用例 12 描述的求最接近点对的算法, 使用点之间的欧几里得距离, 求下述点 $(1, 2), (1, 6), (2, 4), (2, 8), (3, 1), (3, 6), (3, 10), (4, 3), (5, 1), (5, 5), (5, 9), (6, 7), (7, 1), (7, 4), (7, 9), (8, 6)$ 的最接近点对。

10. 如果两点间的距离定义是 $d((x_i, y_i), (x_j, y_j)) = \max(|x_i - x_j|, |y_i - y_j|)$, 使用例 12 描述的算法中用的那些合理的步骤并加以改变, 构造一个求两点之间的最小距离的算法。

在练习 11~13 中, 假设 f 是一个满足递推关系 $f(n) = af(n/b) + cn^d$ 的增函数, $a \geq 1$, b 是大于 1 的整数, c 和 d 是正实数。这些练习提供一个关于定理 2 的证明。

*11. 证明: 如果 $a = b^d$ 且 n 是 b 的幂, 那么 $f(n) = f(1)n^d + cn^d \log_b n$ 。

*12. 证明: 如果 $a \neq b^d$ 且 n 是 b 的幂, 那么 $f(n) = C_1 n^d + C_2 n^{\log_b a}$, 其中

$$C_1 = b^d c / (b^d - a) \text{ 且 } C_2 = f(1) + b^d c / (a - b^d)$$

13. 使用练习 12 证明: 如果 $a > b^d$, 那么 $f(n)$ 是 $O(n^{\log_b a})$ 。

4.4 生成函数

4.4.1 引言

表示序列的一种有效方法就是生成函数, 它把序列的项作为一个形式幂级数中变量 x 的幂的系数。可以用生成函数求解许多类型的计数问题, 例如在各种限制下选取或分配不同种类物体的方式数, 使用不同面额的硬币换一美元的方式数等。也可以用生成函数求解递推关系。它先把关于序列的项的递推关系转换成涉及生成函数的方程, 然后求解这个方程并找出关于这个生成函数的封闭形式。从这个封闭形式可以找到生成函数的幂级数的系数, 从而求解了原来的递推关系。生成函数也可以利用函数之间相对简单的关系来证明组合恒等式, 由于这些关系可以转换成涉及序列的项的恒等式。生成函数是有用的工具, 除了本节描述的内容以外, 可以用它来研究序列的许多性质, 例如建立关于序列的项的渐进公式。

我们从序列的生成函数的定义开始。

定义 1 实数序列 $a_0, a_1, \dots, a_k, \dots$ 的生成函数是无穷级数

$$G(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

注意 定义 1 给出的 $\{a_k\}$ 的生成函数有时叫做 $\{a_k\}$ 的普通的生成函数, 以和这个序列的其他类型的生成函数相区别。

例 1 序列 $\{a_k\}$ 具有 $a_k = 3$, $a_k = k+1$ 和 $a_k = 2^k$ 的生成函数分别是 $\sum_{k=0}^{\infty} 3x^k$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k, \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k.$$

我们通过置 $a_{n+1}=0$, $a_{n+2}=0$, 依此下去, 把一个有限序列 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 扩充成一个无限序列, 就可以定义一个实数的有限序列的生成函数。这个无限序列 $\{a_n\}$ 的生成函数 $G(x)$ 是一个 n 次多项式, 因为当 $j>n$ 时没有形如 $a_j x^j$ 的项出现, 即

$$G(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

例 2 序列 1, 1, 1, 1, 1, 1 的生成函数是什么?

解 1, 1, 1, 1, 1, 1 的生成函数是

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

由 2.4 节的定理 1 有

$$(x^6 - 1)/(x - 1) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$

因此, $G(x) = (x^6 - 1)/(x - 1)$ 是序列 1, 1, 1, 1, 1, 1 的生成函数。

例 3 设 m 是正整数。令 $a_k = C(m, k)$, $k=0, 1, 2, \dots, m$ 。那么序列 $a_0, a_1, \dots, a_m$ 的生成函数是什么?

解 这个序列的生成函数是

$$G(x) = C(m, 0) + C(m, 1)x + C(m, 2)x^2 + \dots + C(m, m)x^m$$

二项式定理证明 $G(x) = (1+x)^m$ 。

4.4.2 关于幂级数的有用事实

当用生成函数求解计数问题时, 通常将它们考虑成形式幂级数。这里忽略了这些级数的收敛问题。但是为了应用某些微积分的结果, 考虑幂级数对什么 x 收敛有时是很重要的。在我们的讨论中将不涉及收敛性问题。熟悉微积分的读者如果了解所涉及级数的收敛性的细节, 可以参阅有关这方面内容的教科书。

现在我们将叙述某些与无穷级数有关的重要事实, 这些将在研究生成函数时用到。这些事实的讨论和相关的结果都可以在微积分教科书中找到。

例 4 函数 $f(x) = 1/(1-x)$ 是序列 1, 1, 1, 1, $\dots$ 的生成函数, 因为对 $|x| < 1$ 有

$$1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \dots$$

例 5 函数 $f(x) = 1/(1-ax)$ 是序列 1, a , a^2 , a^3 , $\dots$ 的生成函数, 因为当 $|ax| < 1$ 或等价地说对 $|x| < 1/|a|$, $a \neq 0$ 有

$$1/(1-ax) = 1 + ax + a^2 x^2 + \dots$$

我们也需要了解两个生成函数是怎样相加和相乘的。这些结果的证明也可以在微积分教科书中找到。

定理 1 令 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$, 那么

$$f(x) + g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k$$

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \right) x^k$$

注意 正如本节所考虑的所有级数一样, 定理 1 只有当幂级数在一个区间内收敛时才有效。但是, 生成函数的定理并不局限于这种级数。在级数不收敛的情况下, 定理 1 中的命题可以看成是生成函数和与积的定义。

我们将在例 6 中说明怎样使用定理 1。

例6 设 $f(x)=1/(1-x)^2$ 。用例4求出表达式 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 中的系数 $a_0, a_1, a_2, \dots$ 。

解 由例4看出

$$1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

因此,由定理1有

$$1/(1-x)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k 1 \right) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k$$

注意 这一结果也可以通过微分从例4导出。从已知生成函数的恒等式产生新的恒等式的一种有用的技术就是求导。

为了用生成函数求解许多重要的计数问题,我们需要在指数不是正整数的情况下应用二项式定理。在叙述广义二项式定理之前,我们需要定义广义二项式系数。

定义2 设 u 是实数且 k 是非负整数,那么广义二项式系数 $\binom{u}{k}$ 定义为

$$\binom{u}{k} = \begin{cases} u(u-1)\cdots(u-k+1)/k! & \text{若 } k > 0 \\ 1 & \text{若 } k = 0 \end{cases}$$

例7 求广义二项式系数 $\binom{-2}{3}$ 和 $\binom{1/2}{3}$ 的值。

解 在定义2中取 $u=-2$ 和 $k=3$ 得

$$\binom{-2}{3} = \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!} = -4$$

类似地取 $u=1/2$ 和 $k=3$ 得

$$\begin{aligned} \binom{1/2}{3} &= \frac{(1/2)(1/2-1)(1/2-2)}{3!} \\ &= (1/2)(-1/2)(-3/2)/6 \\ &= 1/16 \end{aligned}$$

当上边的参数是负整数时,例8对广义二项式系数提供了一个有用的公式。我们后面的讨论中会用到它。

例8 当上边的参数是负整数时,广义二项式系数可以用通常的二项式系数的项表示。为此只需注意到

$$\begin{aligned} \binom{-n}{r} &= \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-r+1)}{r!} && \text{由广义二项式系数定义} \\ &= \frac{(-1)^r n(n+1)\cdots(n+r-1)}{r!} && \text{从分子的每一项中提取因子 } -1 \\ &= \frac{(-1)^r (n+r-1)(n+r-2)\cdots n}{r!} && \text{由乘法的交换律} \\ &= \frac{(-1)^r (n+r-1)!}{r!(n-1)!} && \text{分子和分母同时乘以 } (n-1)! \\ &= (-1)^r \binom{n+r-1}{r} && \text{由二项式系数的定义} \\ &= (-1)^r C(n+r-1, r) && \text{使用另外一种二项式系数符号表示} \end{aligned}$$

我们现在叙述广义二项式定理。

定理2 广义二项式定理 设 x 是实数, $|x| < 1$, u 是实数, 那么

$$(1+x)^u = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{u}{k} x^k$$

可以使用麦克劳林级数的理论证明定理2, 我们将这个证明留给熟悉这部分微积分的读者完成。

注意 当 u 是正整数时, 广义二项式定理就归约到 3.4 节提出的二项式定理, 因为如果 $k > u$, 在这种情况下 $\binom{u}{k} = 0$ 。

例9说明了当指数是负整数时定理2的应用。

例9 当 n 是正整数时, 使用广义二项式定理求 $(1+x)^{-n}$ 和 $(1-x)^{-n}$ 的生成函数。

解 由广义二项式定理得

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^k$$

使用例8所提供的关于 $\binom{-n}{k}$ 的简单公式得到

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C(n+k-1, k) x^k$$

用 $-x$ 代替 x 得到

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1, k) x^k$$

表4-1归纳了一些经常出现的有用的生成函数。

表4-1 有用的生成函数

$G(x)$	a_k
$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C(n, k) x^k$ $= 1 + C(n, 1)x + C(n, 2)x^2 + \cdots + x^n$	$C(n, k)$
$(1+ax)^n = \sum_{k=0}^n C(n, k) a^k x^k$ $= 1 + C(n, 1)ax + C(n, 2)a^2x^2 + \cdots + a^n x^n$	$C(n, k) a^k$
$(1+x^r)^n = \sum_{k=0}^n C(n, k) x^{rk}$ $= 1 + C(n, 1)x^r + C(n, 2)x^{2r} + \cdots + x^{rn}$	当 r/k 时为 $C(n, k/r)$, 否则为 0
$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$	当 $k \leq n$ 时为 1, 否则为 0
$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots$	1
$\frac{1}{1-ax} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k = 1 + ax + a^2 x^2 + \cdots$	a^k
$\frac{1}{1-x^r} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{rk} = 1 + x^r + x^{2r} + \cdots$	当 r/k 时为 1, 否则为 0
$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$	$k+1$
$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1, k) x^k$ $= 1 + C(n, 1)x + C(n+1, 2)x^2 + \cdots$	$C(n+k-1, k) = C(n+k-1, n-1)$
$\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1, k) (-1)^k x^k$ $= 1 - C(n, 1)x + C(n+1, 2)x^2 - \cdots$	$(-1)^k C(n+k-1, k) = (-1)^k C(n+k-1, n-1)$

(续)

$G(x)$	a_k
$\frac{1}{(1-ax)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1, k) a^k x^k$ $= 1 + C(n, 1)ax + C(n+1, 2)a^2x^2 + \cdots$	$C(n+k-1, k)a^k = C(n+k-1, n-1)a^k$
$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$	$1/k!$
$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$	$(-1)^{k+1}/k$

注：在大多数微积分的书讨论幂级数的部分可以找到关于最后两个生成函数的级数。

4.4.3 计数问题与生成函数

生成函数可以用于求解各种计数问题。特别地，它们可以用于计数各种类型的组合数。在第3章，我们开发了一些技术计数 n 元素集合的允许重复的 r 组合数，在这些组合中可能存在某些附加的约束。这种问题与计数形如

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_n = C$$

方程的解是等价的，其中 C 是常数，每个 e_i 是可能具有某些约束的非负整数。也可以用生成函数求解这种类型的计数问题，正如例 10~例 12 所示。

例 10 求

$$e_1 + e_2 + e_3 = 17$$

的解的个数，其中 e_1, e_2, e_3 是非负整数，满足 $2 \leq e_1 \leq 5, 3 \leq e_2 \leq 6, 4 \leq e_3 \leq 7$ 。

解 具有上述限制的解的个数是

$$(x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^3 + x^4 + x^5 + x^6)(x^4 + x^5 + x^6 + x^7)$$

的展开式中 x^{17} 的系数。这是因为我们在乘积中得到等于 x^{17} 的项是通过在第一个和中取项 x^4 ，在第二个和中取项 x^6 ，在第三个和中取项 x^7 ，其中幂指数 e_1, e_2 和 e_3 满足方程 $e_1 + e_2 + e_3 = 17$ 和给定的限制。

不难看出在这个乘积中的 x^{17} 的系数是 3。因此，存在 3 个解。（注意，计算这个系数与枚举方程的具有给定约束的所有解几乎要做同样多的工作。但是，正如我们将看到的，这里说明的方法常常可以用于求解各种各样的具有特殊规则的计数问题。此外，可以用计算机代数系统做这种计算。）

例 11 把 8 块相同的饼干分给 3 个不同的孩子，如果每个孩子至少接受 2 块饼干并且不超过 4 块饼干，那么有多少种不同的分配方式？

解 因为每个孩子至少接受 2 块饼干且不超过 4 块饼干，在关于序列 $\{C_n\}$ 的生成函数中对每个孩子存在一个等于

$$(x^2 + x^3 + x^4)$$

的因式，其中 c_n 是分配 n 块饼干的方式数。因为存在 3 个孩子，这个生成函数是

$$(x^2 + x^3 + x^4)^3$$

我们要求这个乘积中的 x^8 的系数。理由就是在展开式中 x^8 的项对应于选 3 项的方式数，其中每个因式选 1 项且指数加起来等于 8。此外，来自第一、第二和第三个因式的项的指数分别是第一、第二和第三个孩子接受的饼干数。通过计算说明这个系数等于 6。于是存在 6 种方式分配饼干使得每个孩子至少接受 2 块，但是不超过 4 块饼干。

例 12 把价值 1 美元、2 美元和 5 美元的代币插入售货机为价值 r 美元的某种物品付款，使用生成函数确定在代币插入是有序的和无序的两种情况下付款的方式数。（例如为一种价值 3 美元的物品付款，当不考虑代币插入的次序时存在 2 种方式：插入 3 个 1 美元的代币或 1 个 1 美元和 1 个 2 美元的代币。当考虑代币插入的次序时有 3 种方式：插入 3 个 1 美元的代币，插入 1 个 1 美元代

币然后1个2美元的代币,插入1个2美元代币然后1个1美元代币。)

解 在不考虑代币插入次序的情况下,我们所关心的就是为产生 r 美元的总数所使用的每种代币的数目。因为可以使用任意多个1美元的代币、任意多个2美元的代币和任意多个5美元的代币,答案就是在生成函数

$$(1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\cdots)$$

中的 x^r 的系数。(这个乘积中的第一个因式表示所使用的1美元代币,第二个表示所使用的2美元代币,第三个表示所使用的5美元代币。)例如,用1美元、2美元和5美元为一个价值7美元的物品付款的方式数由展开式中 x^7 的系数给出,结果等于6。

当考虑代币插入的次序时,插入恰好 n 个代币产生 r 美元总数的方式数是在

$$(x+x^2+x^5)^n$$

中的 x^r 的系数,因为这 n 个代币中的每一个可能是1美元代币、2美元代币或5美元代币。又由于可以插入的代币不限数量,因此当考虑代币插入的次序时,使用1美元、2美元或5美元代币产生 r 美元的方式数是在

$$\begin{aligned} 1+(x+x^2+x^5)+(x+x^2+x^5)^2+\cdots &= \frac{1}{1-(x+x^2+x^5)} \\ &= \frac{1}{1-x-x^2-x^5} \end{aligned}$$

中 x^r 的系数。这里我们把插入0个代币、1个代币、2个代币、3个代币等方式数加起来,同时我们使用了恒等式 $1/(1-x)=1+x+x^2+\cdots$ 且用 $x+x^2+x^5$ 代替了 x 。例如,用1美元、2美元和5美元的代币为一个价值7美元的物品付款,当考虑使用代币的次序时,方式数是这个展开式中 x^7 的系数,等于26。[为看到这个系数等于26,要把 $(x+x^2+x^5)^k$ 的展开式中 x^7 的系数加起来,其中 $2 \leq k \leq 7$ 。这项工作可以用大量的手工计算完成,也可以使用一个计算机代数系统来完成。] ■

例13说明了当求解带不同假设的问题时生成函数具有的多功能性。

例13 假设已经建立了二项式定理,使用生成函数找出 n 元素集合的 k 组合数。

解 集合的 n 个元素中的每一个元素都对生成函数 $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ 贡献了项 $(1+x)$ 。因此 $f(x)$ 是关于 $\{a_k\}$ 的生成函数,其中 a_k 表示 n 元素集合的 k 组合数。于是,

$$f(x) = (1+x)^n$$

但是由二项式定理,我们有

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

其中

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

于是, $C(n, k)$, n 元素集合的 k 组合数是

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

注意 在3.4节我们使用了关于 n 元素集合的 r 组合数的公式证明了二项式定理。这些例子说明也可以用数学归纳法证明二项式定理,再用二项式定理推导关于 n 元素集合的 r 组合数的公式。

例14 使用生成函数找出当元素允许重复时 n 元素集合的 r 组合数公式。

解 设 $G(x)$ 是关于序列 $\{a_r\}$ 的生成函数,其中 a_r 等于 n 元素集合的允许重复的 r 组合数,

$G(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$, 即当我们构成允许重复的 r 组合时,对 n 元素集合的元素的选择不受限制,这 n 个元素中的每一个元素都对 $G(x)$ 的乘积展开式贡献了 $(1+x+x^2+x^3+\cdots)$ 这个因式。这是由于当

一个 r 组合被构成时(要选总共 r 个元素), 每个元素都可以被选择 0 次、1 次、2 次、3 次, 等等。因为集合中存在 n 个元素, 且每一个都对 $G(x)$ 贡献了相同的因式, 从而有

$$G(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)^n$$

只要 $|x| < 1$, 我们就有 $1 + x + x^2 + \cdots = 1/(1-x)$, 所以

$$G(x) = 1/(1-x)^n = (1-x)^{-n}$$

使用广义二项式定理(定理 2), 得到

$$(1-x)^{-n} = (1+(-x))^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} (-x)^r$$

当 r 是正整数时, n 元素集合的允许重复的 r 组合数就是这个和式中的 x^r 的系数。因此, 使用例 8 我们求出 a_r 等于

$$\begin{aligned} \binom{-n}{r} (-1)^r &= (-1)^r C(n+r-1, r) \cdot (-1)^r \\ &= C(n+r-1, r) \end{aligned}$$

注意, 例 14 的结果与我们在 3.5 节定理 2 所叙述的结果一样。

例 15 使用生成函数求出从 n 类不同的物体中选择 r 个物体并且每类物体至少选 1 个的方式数。

解 因为我们需要每类物体至少选 1 个, 这 n 个类中的每类物体都对序列 $\{a_r\}$ 的生成函数 $G(x)$ 贡献了因式 $(x+x^2+x^3+\cdots)$ 其中 a_r 是从 n 类不同的物体中选择 r 个物体并且每类物体至少选 1 个的方式数。因此,

$$G(x) = (x + x^2 + x^3 + \cdots)^n = x^n (1 + x + x^2 + \cdots)^n = x^n / (1-x)^n$$

使用广义二项式定理和例 8, 有

$$\begin{aligned} G(x) &= x^n / (1-x)^n \\ &= x^n \cdot (1-x)^{-n} \\ &= x^n \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} (-x)^r \\ &= x^n \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r C(n+r-1, r) (-1)^r x^r \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} C(n+r-1, r) x^{n+r} \\ &= \sum_{t=n}^{\infty} C(t-1, t-n) x^t \\ &= \sum_{r=n}^{\infty} C(r-1, r-n) x^r \end{aligned}$$

在倒数第二个等式我们令 $t=n+r$ 以使得当 $r=0$ 时 $t=n$ 且 $n+r-1=t-1$, 从而对求和进行了移位, 然后在最后的等式中用 r 替换 t 作为和的下标而回到了初始的记号。因此, 从 n 类不同的物体中选择 r 个物体, 如果每类物体必须至少选 1 个时存在 $C(r-1, r-n)$ 种方式。

4.4.4 使用生成函数求解递推关系

我们可以通过找相关的生成函数的显式公式来求解关于递推关系和初始条件的解。这可以用例 16 和例 17 来说明。

例 16 求解递推关系 $a_k = 3a_{k-1}$, $k=1, 2, 3, \cdots$ 且初始条件 $a_0=2$ 。

解 设 $G(x)$ 是序列 $\{a_k\}$ 的生成函数, 即 $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 。首先注意到

$$xG(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k$$

使用递推关系有

$$\begin{aligned} G(x) - 3xG(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k - 3 \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} x^k \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - 3a_{k-1}) x^k \\ &= 2 \end{aligned}$$

因为 $a_0 = 2$ 且 $a_k = 3a_{k-1}$, 于是

$$G(x) - 3xG(x) = (1 - 3x)G(x) = 2$$

求解 $G(x)$ 得 $G(x) = 2/(1 - 3x)$ 。使用表 6-1 的恒等式 $1/(1 - ax) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k$, 我们有

$$G(x) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} 3^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2 \cdot 3^k x^k$$

于是, $a_k = 2 \cdot 3^k$ 。

例 17 设一个有效的编码字是一个包含偶数个 0 的十进制数字串。令 a_n 表示 n 位有效编码字的个数。在 4.1 节的例 7 中我们证明了序列 $\{a_n\}$ 满足递推关系

$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$$

且初始条件 $a_1 = 9$ 。使用生成函数找出关于 a_n 的显式公式。

解 为了简化关于生成函数的推导, 我们通过置 $a_0 = 1$ 将序列扩充, 当把这个值赋给 a_0 并且使用递推关系就得到 $a_1 = 8a_0 + 10^0 = 8 + 1 = 9$, 这与初始条件一致。(由于存在一个长为 0 的编码字——空串, 这也是有意义的。)

用 x^n 乘递推关系的两边得

$$a_n x^n = 8a_{n-1} x^n + 10^{n-1} x^n$$

设 $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 是序列 $a_0, a_1, a_2, \dots$ 的生成函数, 从 $n=1$ 开始对上面的等式两边求和, 得到

$$\begin{aligned} G(x) - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (8a_{n-1} x^n + 10^{n-1} x^n) \\ &= 8 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 10^{n-1} x^n \\ &= 8x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} 10^{n-1} x^{n-1} \\ &= 8x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x \sum_{n=0}^{\infty} 10^n x^n \\ &= 8xG(x) + x/(1 - 10x) \end{aligned}$$

其中我们已经使用了例 5 对第二个和进行求值。因此有

$$G(x) - 1 = 8xG(x) + x/(1 - 10x)$$

求解 $G(x)$ 得

$$G(x) = \frac{1 - 9x}{(1 - 8x)(1 - 10x)}$$

把等式的右边展开成部分分式(正如在微积分中研究有理函数的积分时所做的)得到

$$G(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - 8x} + \frac{1}{1 - 10x} \right)$$

两次使用例 5(一次设 $a=8$, 一次设 $a=10$)得

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} 8^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 10^n x^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} (8^n + 10^n) x^n \end{aligned}$$

于是,证明了

$$a_n = \frac{1}{2}(8^n + 10^n)$$

4.4.5 使用生成函数证明恒等式

在第3章我们已经看到怎样使用组合证明方法来建立组合恒等式。这里将显示这种恒等式,还有关于广义二项式系数的恒等式,都可以使用生成函数来证明。有时候生成函数的方法比其他方法更简单,特别是用生成函数的封闭形式比使用序列本身更能简化证明过程。我们用例18说明怎样用生成函数证明恒等式。

例18 使用生成函数证明

$$\sum_{k=0}^n C(n, k)^2 = C(2n, n)$$

其中 n 是正整数。

解 首先注意到根据二项式定理 $C(2n, n)$ 是 $(1+x)^{2n}$ 中 x^n 的系数。而我們也有

$$\begin{aligned}(1+x)^{2n} &= [(1+x)^n]^2 \\ &= [C(n, 0) + C(n, 1)x + C(n, 2)x^2 + \cdots + C(n, n)x^n]^2\end{aligned}$$

在这个展开式中 x^n 的系数是 $C(n, 0)C(n, n) + C(n, 1)C(n, n-1) + C(n, 2)C(n, n-2) + \cdots + C(n, n)C(n, 0)$ 。因为 $C(n, n-k) = C(n, k)$, 它等于 $\sum_{k=0}^n C(n, k)^2$ 。由于 $C(2n, n)$ 和 $\sum_{k=0}^n C(n, k)^2$ 都表示 $(1+x)^{2n}$ 中 x^n 的系数, 它们一定是相等的。

本节末的练习22要求用生成函数来证明帕斯卡恒等式和范德蒙德恒等式。

练习

1. 求关于有穷序列 2, 2, 2, 2, 2, 2 的生成函数。

在练习2~4中, 封闭形式意味着代数表达式不仅包括所列数值的和, 还包括省略部分。

2. 求关于下面每个序列生成函数的封闭形式。(用最明显的选择设定每个序列的通项形式。)

a) 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, ...

b) 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...

c) 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, ...

d) 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ...

e) $\binom{7}{0}, \binom{7}{1}, \binom{7}{2}, \dots, \binom{7}{7}, 0, 0, 0, 0, 0, \dots$

f) 2, -2, 2, -2, 2, -2, 2, -2, ...

g) 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...

h) 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, ...

3. 求关于序列 $\{a_n\}$ 的生成函数的封闭形式, 其中

a) $a_n = 5$, 对所有的 $n = 0, 1, 2, \dots$

b) $a_n = 3^n$, 对所有的 $n = 0, 1, 2, \dots$

c) $a_n = 2$, 对 $n = 3, 4, 5, \dots$ 且 $a_0 = a_1 = a_2 = 0$

d) $a_n = 2n + 3$, 对所有的 $n = 0, 1, 2, \dots$

e) $a_n = \binom{8}{n}$, 对所有的 $n = 0, 1, 2, \dots$

f) $a_n = \binom{n+4}{n}$, 对所有的 $n = 0, 1, 2, \dots$

4. 对于下面每一个生成函数给出关于它所确定序列的封闭公式。

a) $(3x-4)^3$

b) $(x^3+1)^3$

c) $1/(1-5x)$

d) $x^3/(1+3x)$

e) $x^2 + 3x + 7 + 1/(1-x^2)$

f) $(x^4/(1-x^4)) - x^3 - x^2 - x - 1$

g) $x^2/(1-x)^2$

h) $2e^{2x}$

5. 求出下面每个函数的幂级数中 x^{10} 的系数。

a) $(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\dots)^3$

b) $(x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+\dots)^3$

c) $(x^4+x^5+x^6)(x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)(1+x+x^2+x^3+x^4+\dots)$

d) $(x^2+x^4+x^6+x^8+\dots)(x^3+x^6+x^9+\dots)(x^4+x^8+x^{12}+\dots)$

e) $(1+x^2+x^4+x^6+x^8+\dots)(1+x^4+x^8+x^{12}+\dots)(1+x^6+x^{12}+x^{18}+\dots)$

6. 求出下面每个函数的幂级数中 x^{10} 的系数。
 a) $1/(1-2x)$ b) $1/(1+x)^2$ c) $1/(1-x)^3$ d) $1/(1+2x)^4$ e) $x^4/(1-3x)^3$
7. 把 10 个相同的球分给 4 个孩子, 如果每个孩子至少得到 2 个球, 使用生成函数确定不同的分法数。
8. 把 15 个相同的动物玩具分给 6 个孩子使得每个孩子至少得到 1 个但不超过 3 个, 使用生成函数确定不同的分法数。
9. 把 25 个相同的多纳圈分给 4 个警官使得每个警官至少得到 3 个但不超过 7 个, 有多少种方式?
10. 求序列 $\{c_k\}$ 的生成函数, 其中 c_k 是使用 1 美元、2 美元、5 美元和 10 美元纸币换 k 美元的方法数。
11. 对 $(1+x+x^2+x^3+\cdots)^3$ 展开式中 x^4 的系数给出组合解释。使用这个解释求出这个数。
12. a) 什么是关于 $\{a_k\}$ 的生成函数? 这里的 a_k 是 $x_1+x_2+x_3=k$ 的解的个数, 其中 x_1, x_2 和 x_3 是满足 $x_1 \geq 2, 0 \leq x_2 \leq 3, 2 \leq x_3 \leq 5$ 的整数。
 b) 使用(a)的答案求 a_6 。
13. 解释怎样使用生成函数找到用 3 分、4 分和 20 分的邮票在信封上贴满 r 分邮费的方式数。
 a) 假设不考虑贴邮票的次序。
 b) 假设邮票贴成一行并且考虑贴的次序。
 c) 当不考虑贴邮票的次序时, 使用(a)的答案确定用 3 分、4 分和 20 分的邮票在信封上贴满 46 分邮费的方式数。(建议使用计算机代数程序。)
 d) 当考虑贴邮票的次序时, 使用(b)的答案确定用 3 分、4 分和 20 分的邮票在信封上贴满一行 46 分邮费的方式数。(建议使用计算机代数程序。)
14. 使用生成函数(如果需要的话, 也使用计算机代数程序)求出换 1 美元的方式数。
 a) 用 10 美分和 25 美分。 b) 用 5 美分、10 美分和 25 美分。
 c) 用 1 美分、10 美分和 25 美分。 d) 用 1 美分、5 美分、10 美分和 25 美分。
15. 使用生成函数求出换 100 美元的方式数。
 a) 用 10 美元、20 美元和 50 美元纸币。
 b) 用 5 美元、10 美元、20 美元和 50 美元纸币。
 c) 用 5 美元、10 美元、20 美元和 50 美元纸币, 并且每种纸币至少使用 1 张。
 d) 用 5 美元、10 美元和 20 美元纸币, 并且每种纸币至少使用 1 张但不超过 4 张。
16. 如果 $G(x)$ 是关于序列 $\{a_k\}$ 的生成函数, 那么关于下述每个序列的生成函数是什么?
 a) $0, 0, 0, a_3, a_4, a_5, \dots$ b) $a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, \dots$
 c) $0, 0, 0, 0, a_0, a_1, a_2, \dots$ d) $a_0, 2a_1, 4a_2, 8a_3, 16a_4, \dots$
 e) $a_0, a_1/2, a_2/3, a_3/4, \dots$ [提示: 这里需要微积分。]
 f) $a_0, a_0+a_1, a_0+a_1+a_2, a_0+a_1+a_2+a_3, \dots$
17. 使用生成函数求解递推关系 $a_k = 3a_{k-1} + 2$, 初始条件 $a_0 = 1$ 。
18. 使用生成函数求解递推关系 $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$, 初始条件 $a_0 = 6$ 和 $a_1 = 30$ 。
19. 使用生成函数求解递推关系 $a_k = 4a_{k-1} - 4a_{k-2} + k^2$, 初始条件 $a_0 = 2$ 和 $a_1 = 5$ 。
20. 使用生成函数找出关于斐波那契数的显式公式。
- *21. (需要微积分) 设 $\{C_n\}$ 是卡特朗数的序列, 即具有初值 $C_0 = C_1 = 1$ 的递推关系 $C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$ 的解(见 4.1 节例 8)。
 证明: 如果 $G(x)$ 是关于卡特朗数的序列的生成函数, 那么 $xG(x)^2 - G(x) + 1 = 0$ 。(使用初始条件) 断定 $G(x) = (1 - \sqrt{1-4x})/(2x)$ 。
22. 使用生成函数证明范德蒙恒等式: $C(m+n, r) = \sum_{k=0}^r C(m, r-k)C(n, k)$, 其中 m, n 和 r 是非负整数, 且 r 不超过 m 或 n 。[提示: 看 $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$ 两边的 x^r 的系数。]
 关于序列 $\{a_n\}$ 的指数生成函数是级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

例如, 关于序列 $1, 1, 1, \dots$ 的指数生成函数是 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! = e^x$ 。(你将发现这个级数在下面的练习中很有

用。)注意, e^x 是关于序列 $1, 1, 1/2!, 1/3!, 1/4!, \dots$ 的普通生成函数。

23. 求一个关于序列 $\{a_n\}$ 的指数生成函数的封闭形式, 其中

$$a) a_n = 2$$

$$b) a_n = (-1)^n$$

$$c) a_n = 3^n$$

$$d) a_n = n+1$$

$$e) a_n = 1/(n+1)$$

24. 求以下述函数为指数生成函数的序列。

$$a) f(x) = e^{-x}$$

$$b) f(x) = 3x^{2x}$$

$$c) f(x) = e^{3x} - 3e^{2x}$$

$$d) f(x) = (1-x) + e^{-2x}$$

$$e) f(x) = e^{-2x} - (1/(1-x))$$

$$f) f(x) = e^{-3x} - (1+x) + (1/(1-2x))$$

$$g) f(x) = e^{x^2}$$

25. 一个编码系统用八进制(基为8)数字串对信息编码。一个编码字是有效的, 当且仅当它包含偶数个7。

a) 求一个关于 n 位长有效编码字个数的线性非齐次递推关系。初始条件是什么?

b) 使用4.2节的定理6解这个递推关系。

c) 用生成函数解这个递推关系。

在研究整数 n 的不同类型的剖分数时生成函数是很有用的。一个正整数的剖分是把这个整数写成正整数之和, 和中的整数允许重复并且不考虑次序。例如, 5的剖分(不加限制)是 $1+1+1+1+1, 1+1+1+2, 1+1+3, 1+2+2, 1+4, 2+3$ 和5。练习26~28说明了这种应用。

26. 证明: 在 $1/((1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots)$ 的形式幂级数展开式中 x^n 的系数 $p(n)$ 等于 n 的剖分数。

27. 证明: 在 $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots$ 的形式幂级数展开式中 x^n 的系数 $p_d(n)$ 等于 n 剖分成不相等的整数(即把 n 写成正整数之和)的方式数, 其中不管这些整数的次序但不允许重复。

28. 证明: 如果 n 是正整数, 那么 n 剖分成不相等的整数的方式数等于 n 剖分成允许重复的奇整数的方式数; 即 $p_o(n) = p_d(n)$ 。[提示: 证明关于 $p_o(n)$ 和 $p_d(n)$ 的生成函数相等。]

29. (需要微积分)证明如果 G_X 是随机变量 X 的概率生成函数, 使得 $X(s)$ 对于所有的 $s \in S$ 是非负整数, 那么

$$a) G_X(1) = 1$$

$$b) E(X) = G'_X(1)$$

$$c) V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$$

4.5 容斥

4.5.1 引言

一个离散数学班包含30个女生和50个二年级学生。在这个班里有多少个女生或二年级学生? 如果没有更多的信息, 这个问题是没法求解的。把女生数和二年级学生数加起来不一定能得出正确的结果, 因为二年级的女生可能被计数了两次。这个事实说明, 在班里的女生或二年级学生数是班里的女生数与二年级学生数之和减去二年级的女生数。在3.1节曾经介绍过求解这种计数问题的技术。这里我们将把在那一节引入的思想加以推广, 以求解更为广泛的计数问题。

4.5.2 容斥原理

两个有穷集的并集中存在多少个元素? 在2.2节中证明了两个集合 A 和 B 的并集中的元素数是这些集合的元素数之和减去其交集的元素数, 即

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

正如我们在3.1节证明的, 这个关于两个集合并集中元素数的公式在计数问题中是很有用的。例1~例3进一步说明了这个公式的用处。

例1 一个离散数学班包含25个计算机科学专业的学生、13个数学专业的学生和8个同时主修数学和计算机科学两个专业的学生。如果每个学生主修数学专业、计算机科学专业或者同时主修这两个专业, 那么班里有多少个学生?

解 设 A 是这个班里计算机科学专业的学生的集合, B 是这个班里数学专业的学生的集合, 那么 $A \cap B$ 是班里主修数学和计算机科学两个专业的学生的集合。因为这个班的每个学生或者主修计算机科学, 或者主修数学(或者同时主修两个专业), 从而得到这个班里的学生数是 $|A \cup B|$ 。于是

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= 25 + 13 - 8 \\ &= 30 \end{aligned}$$

因此, 这个班有 30 个学生。这个计算在图 4-7 中说明。

例 2 有多少个不超过 1000 的正整数可以被 7 或 11 整除?

解 设 A 是不超过 1000 且可被 7 整除的正整数的集合, B 是不超过 1000 且可被 11 整除的正整数的集合, 那么 $A \cup B$ 是不超过 1000 且可被 7 或 11 整除的正整数的集合, $A \cap B$ 是不超过 1000 且可被 7 和 11 同时整除的正整数的集合。我们知道在不超过 1000 的正整数中有 $\lfloor 1000/7 \rfloor$ 个整数可被 7 整除, 并且有 $\lfloor 1000/11 \rfloor$ 个整数可被 11 整除。由于 7 和 11 是互素的, 被 7 和 11 同时整除的整数就是被 $7 \cdot 11$ 整除的整数。因此, 有 $\lfloor 1000/(11 \cdot 7) \rfloor$ 个不超过 1000 的正整数可被 7 和 11 同时整除。于是存在

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{7 \cdot 11} \right\rfloor \\ &= 142 + 90 - 12 \\ &= 220 \end{aligned}$$

个正整数不超过 1000 且可被 7 或 11 整除。这个计算在图 4-8 中说明。

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 25 + 13 - 8 = 30$$

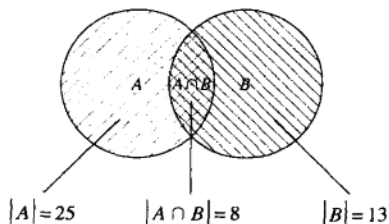


图 4-7 离散数学班的学生的集合

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 142 + 90 - 12 = 220$$

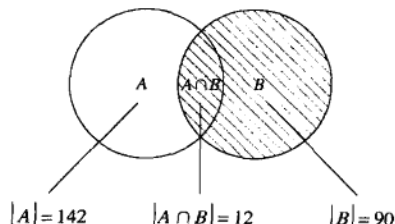


图 4-8 不超过 1000 的可被 7 或 11 整除的正整数的集合

例 3 说明怎样求有穷全集中在两个集合的并集之外的元素数。

例 3 假设你们学校有 1807 个新生。其中 453 人选了一门计算机科学课, 567 人选了一门数学课, 299 人同时选了计算机科学课和数学课。有多少学生既没有选计算机科学课也没有选数学课?

解 为找出既没有选数学课也没有选计算机科学课的新生数, 就要从新生总数中减去选了其中一门课的学生数。设 A 是选了一门计算机课的所有新生的集合, 且 B 是选了一门数学课的所有新生的集合。于是 $|A| = 453$, $|B| = 567$, 且 $|A \cap B| = 299$ 。选了一门计算机科学或数学课的学生数是

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= 453 + 567 - 299 \\ &= 721 \end{aligned}$$

因此, 存在 $1807 - 721 = 1086$ 个新生既没有选计算机科学课也没有选数学课。

在本节的后面将说明怎样求有限个集合的并集中的元素数。这个结果叫做容斥原理。设 n 是任意正整数, 在考虑 n 个集合的并集之前, 先推导与 3 个集合 A , B 和 C 的并集中的元素数有关的公式。为推导这个公式, 首先注意到以下事实: $|A| + |B| + |C|$ 对 3 个集合中那些恰好在其中 1 个集合的元素只计数了 1 次, 恰好在其中 2 个集合的元素计数了 2 次, 恰好在其中 3 个集合的元素计数了 3 次。这个结果在图 4-9a 中说明。

为了去掉在多个集合中元素的重复计数, 减去这 3 个集合中的每 2 个集合的交集的元素数, 得到

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$$

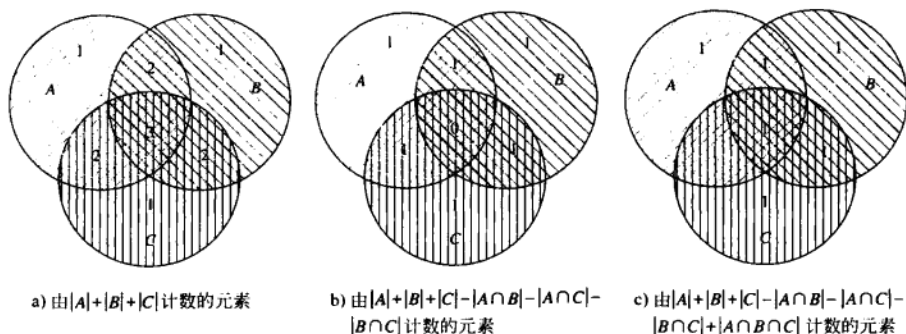


图 4-9 求关于 3 个集合的并集中元素数的公式

这个表达式对恰好出现在其中 1 个集合的元素仍旧计数 1 次。对恰好出现在其中 2 个集合的元素也计数 1 次，因为 2 个集合的交集有 3 个，而这种元素只出现在其中之一。但是，那些出现在 3 个集合的元素将被这个表达式计数 0 次，因为它们将会出现在所有的两两相交的 3 个交集中。这个结果显示在图 4-9b 中。

为了纠正这个漏计，还要加上 3 个集合交集的元素数。这个最后的表达式对每个元素计数了 1 次，不管它是在 1 个、2 个还是在 3 个集合里。于是

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

这个公式显示在图 4-9c 中。

例 4 说明了怎样使用这个公式。

例 4 1232 个学生选了西班牙语课，879 个学生选了法语课，114 个学生选了俄语课。103 个学生选了西班牙语和法语课，23 个学生选了西班牙语和俄语课，14 个学生选了法语和俄语课。如果 2092 个学生至少在西班牙语、法语和俄语课中选 1 门，有多少个学生选了所有这 3 门语言课？

解 设 S 是选西班牙语课的学生集合， F 是选法语课的学生集合， R 是选俄语课的学生集合。那么

$$\begin{aligned} |S| &= 1232, & |F| &= 879, & |R| &= 114 \\ |S \cap F| &= 103, & |S \cap R| &= 23, & |F \cap R| &= 14 \end{aligned}$$

且

$$|S \cup F \cup R| = 2092$$

把这些等式代入下面的等式

$$|S \cup F \cup R| = |S| + |F| + |R| - |S \cap F| - |S \cap R| - |F \cap R| + |S \cap F \cap R|$$

得

$$2092 = 1232 + 879 + 114 - 103 - 23 - 14 + |S \cap F \cap R|$$

求解上式得出 $|S \cap F \cap R| = 7$ 。因此有 7 个学生同时选了西班牙语、法语和俄语课。这个结果在图 4-10 中说明。 ■

我们将叙述和证明容斥原理，它将告诉我们在有限个有穷集的并集中有多少个元素。

定理 1 容斥原理 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是有穷集。那么

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

证 我们将通过证明并集中的每个元素在等式右边恰好被计数 1 次来证明这个公式。假设 a 恰好是 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中 r 个集合的成员，其中 $1 \leq r \leq n$ 。这个元素被 $\sum |A_i|$ 计数了 $C(r, 1)$

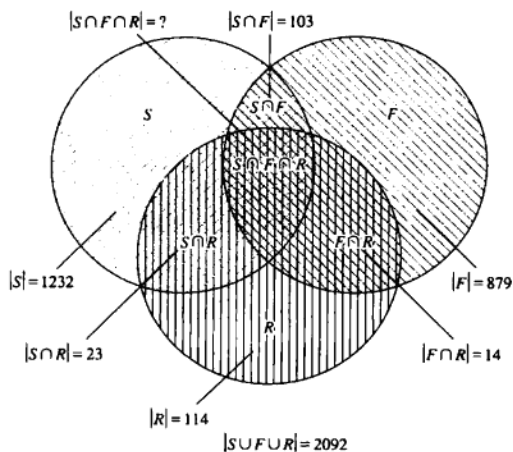


图 4-10 选了西班牙语、法语和俄语课程的学生集合

次，被 $\sum |A_i \cap A_j|$ 计数了 $C(r, 2)$ 次。一般说来，它被涉及 m 个 A_i 集合的求和计数了 $C(r, m)$ 次。于是，这个元素恰好被等式右边的表达式计数了

$$C(r, 1) - C(r, 2) + C(r, 3) - \cdots + (-1)^{r+1} C(r, r)$$

次。我们的目标是求出这个值。由 3.4 节的推论 2，我们有

$$C(r, 0) - C(r, 1) + C(r, 2) - \cdots + (-1)^r C(r, r) = 0$$

于是

$$1 = C(r, 0) = C(r, 1) - C(r, 2) + \cdots + (-1)^{r+1} C(r, r)$$

因此，并集中的每个元素在等式右边的表达式中恰好被计数 1 次。这就证明了容斥原理。□

对于每个正整数 n ，容斥原理对于 n 个集合并集的元素数给出了一个公式。对于 n 个集合的集合族的每一个非空子集的交，在这个公式中都存在一项计数了它的元素。因此在这个公式中有 $2^n - 1$ 项。

例 5 对于 4 个集合的并集中的元素数给出一个公式。

解 容斥原理显示

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \end{aligned}$$

注意，这个公式包含 15 个不同的项，对于 $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ 的每个非空子集有一项。 ■

练习

- 在 $A_1 \cup A_2$ 中存在多少个元素？如果在 A_1 中存在 12 个元素，在 A_2 中存在 18 个元素，并且
 - $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
 - $|A_1 \cap A_2| = 1$
 - $|A_1 \cap A_2| = 6$
 - $A_1 \subseteq A_2$
- 一个调查显示在美国 96% 的家庭至少有 1 台电视机，98% 的家庭有电话，95% 的家庭有电话且至少有 1 台电视机。在美国有百分之几的家庭既没有电话也没有电视机？
- 求 $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ 中的元素数，如果每个集合有 100 个元素并且
 - 这些集合是两两不交的。
 - 每对集合中存在 50 个公共元素并且没有元素在所有这 3 个集合里。
 - 每对集合中存在 50 个公共元素并且有 25 个元素在所有这 3 个集合里。
 - 这些集合是相等的。

4. 一个学校有 2504 个计算机科学专业的学生, 其中 1876 人选修了 Pascal, 999 人选修了 Fortran, 345 人选修了 C, 876 人选修了 Pascal 和 Fortran, 231 人选修了 Fortran 和 C, 290 人选修了 Pascal 和 C。如果 189 个学生选了 Fortran, Pascal 和 C, 那么 2504 个学生中有多少学生没选这 3 门程序设计语言课的任何一门?
5. 一个学校有 507, 292, 312 和 344 个学生分别选了微积分、离散数学、数据结构或程序设计语言课, 且有 14 人选了微积分和数据结构课, 213 人选了微积分和程序设计语言课, 211 人选了离散数学和数据结构课, 43 人选了离散数学和程序设计语言课, 没有学生同时选微积分和离散数学课, 也没有学生同时选数据结构和程序设计语言课。问有多少学生在微积分、离散数学、数据结构或程序设计语言中选了课?
6. 求不超过 100 且是奇数或平方数的正整数个数。
7. 有多少 8 位二进制串不包含 6 个连续的 0?
8. 在 10 个十进制数字的排列中有多少个以 3 个数字 987 开始, 在第 5 和第 6 位包含数字 45, 且最后 3 位是 123?
9. 有 4 个集合, 如果这些集合分别有 50, 60, 70 和 80 个元素, 每一对集合有 5 个公共元素, 每 3 个集合有 1 个公共元素, 并且没有元素在所有的 4 个集合里。问在这 4 个集合的并集中有多少个元素?
10. 根据容斥原理写出关于 5 个集合并集元素数的显式公式。
11. 有 6 个集合, 如果知道其中任 3 个集合都是不相交的, 根据容斥原理写出关于这 6 个集合并集元素数的显式公式。
12. 设 E_1, E_2 和 E_3 是样本空间 S 的 3 个事件。求一个关于 $E_1 \cup E_2 \cup E_3$ 的概率的公式。
13. 从 1 到 100(含 1 和 100 在内)不允许重复地随机取 4 个数, 求所有的都是奇数、所有的都被 3 整除或所有的都被 5 整除的概率。
14. 一个样本空间有 5 个事件, 如果其中没有 4 个事件同时出现, 求关于这 5 个事件的并的概率公式。
15. 求一个样本空间中 n 个事件的并的概率公式。

4.6 容斥原理的应用

4.6.1 引言

可以使用容斥原理求解许多计数问题。例如, 我们可以使用这个原理找出小于某个正整数的素数个数。通过计数从一个有穷集到另一个有穷集的映上函数的个数, 能够求解许多问题, 而容斥原理就可以用来求出这种函数的个数。也可以使用容斥原理求解著名的帽子认领问题。帽子认领问题是: 一个招待随机地将帽子发还存放帽子的人, 求没有人取回自己的帽子的概率。

4.6.2 容斥原理的另一种形式

容斥原理有另一种表述形式, 它在计数问题中是很有用的。特别地, 这种形式可以用于求解在一个集合中的元素数, 使得这些元素不具有 n 个性质 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 中的任何一条性质。

设 A_i 是具有性质 P_i 的元素的子集。具有所有这些性质 $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_k}$ 的元素数将记作 $N(P_{i_1} P_{i_2} \dots P_{i_k})$ 。用集合的术语写这些等式, 有

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| = N(P_{i_1} P_{i_2} \dots P_{i_k})$$

如果不具有 n 个性质 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 中的任何一条的元素数记作 $N(P'_1 P'_2 \dots P'_n)$ 并且集合中的元素数记作 N , 那么有

$$N(P'_1 P'_2 \dots P'_n) = N - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$$

由容斥原理, 有

$$\begin{aligned} N(P'_1 P'_2 \dots P'_n) = & N - \sum_{1 \leq i \leq n} N(P_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} N(P_i P_j) - \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} N(P_i P_j P_k) \\ & + \dots + (-1)^n N(P_1 P_2 \dots P_n) \end{aligned}$$

例 1 说明怎样使用容斥原理确定具有约束条件的方程的整数解的个数。

例 1 $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ 有多少个整数解? 其中 x_1, x_2 和 x_3 是非负整数, 且 $x_1 \leq 3, x_2 \leq 4, x_3 \leq 6$ 。

解 为使用容斥原理, 令解的性质 P_1 为 $x_1 > 3$, 性质 P_2 为 $x_2 > 4$, 性质 P_3 为 $x_3 > 6$ 。满足不

等式 $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 4$ 以及 $x_3 \leq 6$ 的解的个数是

$$N(P_1' P_2' P_3') = N - N(P_1) - N(P_2) - N(P_3) + N(P_1 P_2) \\ + N(P_1 P_3) + N(P_2 P_3) - N(P_1 P_2 P_3)$$

使用与 3.5 节的例 5 相同的技术, 得

$$N = \text{解的总数} = C(3 + 11 - 1, 11) = 78$$

$$N(P_1) = (\text{具有 } x_1 \geq 4 \text{ 的解数}) = C(3 + 7 - 1, 7) = C(9, 7) = 36$$

$$N(P_2) = (\text{具有 } x_2 \geq 5 \text{ 的解数}) = C(3 + 6 - 1, 6) = C(8, 6) = 28$$

$$N(P_3) = (\text{具有 } x_3 \geq 7 \text{ 的解数}) = C(3 + 4 - 1, 4) = C(6, 4) = 15$$

$$N(P_1 P_2) = (\text{具有 } x_1 \geq 4 \text{ 且 } x_2 \geq 5 \text{ 的解数}) = C(3 + 2 - 1, 2) = C(4, 2) = 6$$

$$N(P_1 P_3) = (\text{具有 } x_1 \geq 4 \text{ 且 } x_3 \geq 7 \text{ 的解数}) = C(3 + 0 - 1, 0) = 1$$

$$N(P_2 P_3) = (\text{具有 } x_2 \geq 5 \text{ 且 } x_3 \geq 7 \text{ 的解数}) = 0$$

$$N(P_1 P_2 P_3) = (\text{具有 } x_1 \geq 4, x_2 \geq 5 \text{ 且 } x_3 \geq 7 \text{ 的解数}) = 0$$

把这些等式代入关于 $N(P_1' P_2' P_3')$ 的公式, 证明满足 $x_1 \leq 3$, $x_2 \leq 4$ 以及 $x_3 \leq 6$ 的解的个数等于

$$N(P_1' P_2' P_3') = 78 - 36 - 28 - 15 + 6 + 1 + 0 - 0 = 6$$

4.6.3 埃拉托色尼筛

可以用容斥原理找出不超过一个给定正整数的素数个数。一个合数可以被一个不超过它的平方根的素数整除。因此, 为找出不超过 100 的素数个数, 首先注意到不超过 100 的合数一定有一个不超过 10 的素因子。由于小于 10 的素数只有 2, 3, 5 和 7, 因此不超过 100 的素数就是这 4 个素数以及那些大于 1 和不超过 100 且不被 2, 3, 5 或 7 整除的正整数。为应用容斥原理, 令 P_1 是一个整数被 2 整除的性质, P_2 是一个整数被 3 整除的性质, P_3 是一个整数被 5 整除的性质, P_4 是一个整数被 7 整除的性质。于是, 不超过 100 的素数个数是

$$4 + N(P_1' P_2' P_3' P_4')$$

由于存在 99 个比 1 大且不超过 100 的正整数, 容斥原理显示

$$N(P_1' P_2' P_3' P_4') = 99 - N(P_1) - N(P_2) - N(P_3) - N(P_4) \\ + N(P_1 P_2) + N(P_1 P_3) + N(P_1 P_4) + N(P_2 P_3) + N(P_2 P_4) + N(P_3 P_4) \\ - N(P_1 P_2 P_3) - N(P_1 P_2 P_4) - N(P_1 P_3 P_4) - N(P_2 P_3 P_4) \\ + N(P_1 P_2 P_3 P_4)$$

不超过 100 (且大于 1) 并被 $\{2, 3, 5, 7\}$ 的子集中的所有素数整除的正整数个数是 $\lfloor 100/N \rfloor$, 其中 N 是这个子集中的素数之积。(这是由于任意两个素数都没有公因子。)因此

$$N(P_1' P_2' P_3' P_4') = 99 - \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 7} \right\rfloor \\ + \left\lfloor \frac{100}{3 \cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5 \cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 3 \cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor \\ - \left\lfloor \frac{100}{3 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor \\ = 99 - 50 - 33 - 20 - 14 + 16 + 10 + 7 + 6 + 4 + 2 - 3 - 2 - 1 - 0 + 0 \\ = 21$$

于是存在 $4 + 21 = 25$ 个不超过 100 的素数。

可以用埃拉托色尼筛求不超过一个给定正整数的所有的素数。例如, 可用下面的过程找不超过 100 的所有素数。首先, 保留 2 而将其余那些被 2 整除的整数删除。因为 3 是保留下来的第一个大于 2 的整数, 除 3 之外, 删除其余那些被 3 整除的整数。因为 5 是在 3 后面下一个留下来的整数, 除 5 之外删除其余那些被 5 整除的整数。下一个留下的整数是 7, 因此留下 7, 删除其余那些被 7 整除的整数。由于所有不超过 100 的合数被 2, 3, 5 或 7 整除, 那么所有留下来的大于 1 的数是素数。在表 4-2 中, 4 个子表显示了每一步删除的整数, 在第一个表中得到下划线的是除 2 之外其余被 2 整除的整数, 在第二个表中得到下划线的是除 3 之外其余被 3 整除的整数。

在第三个表中得到下划线的是除5之外其余被5整除的整数,在第四个表中得到下划线的是除7之外其余被7整除的整数。没划线的整数是不超过100的素数。

表 4-2 埃拉托色尼筛

除 2 之外其余被 2 整除的整数得到下划线

1	2	3	<u>4</u>	5	<u>6</u>	7	<u>8</u>	9	<u>10</u>
11	<u>12</u>	13	<u>14</u>	15	<u>16</u>	17	<u>18</u>	19	<u>20</u>
21	<u>22</u>	23	<u>24</u>	25	<u>26</u>	27	<u>28</u>	29	<u>30</u>
31	<u>32</u>	33	<u>34</u>	35	<u>36</u>	37	<u>38</u>	39	<u>40</u>
41	<u>42</u>	43	<u>44</u>	45	<u>46</u>	47	<u>48</u>	49	<u>50</u>
51	<u>52</u>	53	<u>54</u>	55	<u>56</u>	57	<u>58</u>	59	<u>60</u>
61	<u>62</u>	63	64	65	<u>66</u>	67	<u>68</u>	69	<u>70</u>
71	<u>72</u>	73	74	75	<u>76</u>	77	<u>78</u>	79	<u>80</u>
81	<u>82</u>	83	<u>84</u>	85	<u>86</u>	87	<u>88</u>	89	<u>90</u>
91	<u>92</u>	93	94	95	<u>96</u>	97	<u>98</u>	99	<u>100</u>

除 3 之外其余被 3 整除的整数得到下划线

1	2	3	<u>4</u>	5	<u>6</u>	7	8	<u>9</u>	<u>10</u>
11	<u>12</u>	13	<u>14</u>	<u>15</u>	<u>16</u>	17	<u>18</u>	19	<u>20</u>
<u>21</u>	<u>22</u>	23	<u>24</u>	25	<u>26</u>	<u>27</u>	<u>28</u>	29	<u>30</u>
31	<u>32</u>	<u>33</u>	34	35	<u>36</u>	37	<u>38</u>	39	<u>40</u>
41	<u>42</u>	43	<u>44</u>	<u>45</u>	<u>46</u>	47	<u>48</u>	49	<u>50</u>
51	<u>52</u>	53	<u>54</u>	55	<u>56</u>	<u>57</u>	<u>58</u>	59	<u>60</u>
61	<u>62</u>	63	64	65	<u>66</u>	<u>67</u>	<u>68</u>	69	<u>70</u>
71	<u>72</u>	73	74	<u>75</u>	<u>76</u>	77	<u>78</u>	79	<u>80</u>
<u>81</u>	<u>82</u>	83	<u>84</u>	85	<u>86</u>	<u>87</u>	<u>88</u>	89	<u>90</u>
91	<u>92</u>	<u>93</u>	94	95	<u>96</u>	97	<u>98</u>	<u>99</u>	<u>100</u>

除 5 之外其余被 5 整除的整数得到下划线

1	2	3	<u>4</u>	5	<u>6</u>	7	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>10</u>
11	<u>12</u>	13	<u>14</u>	<u>15</u>	<u>16</u>	17	<u>18</u>	19	<u>20</u>
<u>21</u>	<u>22</u>	23	<u>24</u>	<u>25</u>	<u>26</u>	<u>27</u>	<u>28</u>	29	<u>30</u>
31	<u>32</u>	<u>33</u>	<u>34</u>	<u>35</u>	<u>36</u>	37	<u>38</u>	<u>39</u>	<u>40</u>
41	<u>42</u>	43	<u>44</u>	<u>45</u>	<u>46</u>	47	<u>48</u>	49	<u>50</u>
<u>51</u>	<u>52</u>	53	<u>54</u>	<u>55</u>	<u>56</u>	<u>57</u>	<u>58</u>	59	<u>60</u>
61	<u>62</u>	<u>63</u>	<u>64</u>	<u>65</u>	<u>66</u>	67	<u>68</u>	69	<u>70</u>
71	<u>72</u>	73	74	<u>75</u>	<u>76</u>	77	<u>78</u>	79	<u>80</u>
<u>81</u>	<u>82</u>	83	<u>84</u>	<u>85</u>	<u>86</u>	87	<u>88</u>	89	<u>90</u>
91	<u>92</u>	<u>93</u>	<u>94</u>	<u>95</u>	<u>96</u>	97	<u>98</u>	<u>99</u>	<u>100</u>

除 7 之外其余被 7 整除的整数得到下划线

1	2	3	<u>4</u>	5	<u>6</u>	7	8	<u>9</u>	<u>10</u>
11	<u>12</u>	13	<u>14</u>	<u>15</u>	<u>16</u>	17	<u>18</u>	19	<u>20</u>
<u>21</u>	<u>22</u>	23	<u>24</u>	<u>25</u>	<u>26</u>	<u>27</u>	<u>28</u>	29	<u>30</u>
31	<u>32</u>	<u>33</u>	<u>34</u>	<u>35</u>	<u>36</u>	37	<u>38</u>	<u>39</u>	<u>40</u>
41	<u>42</u>	43	<u>44</u>	<u>45</u>	<u>46</u>	47	<u>48</u>	<u>49</u>	<u>50</u>
51	<u>52</u>	53	<u>54</u>	<u>55</u>	<u>56</u>	<u>57</u>	<u>58</u>	59	<u>60</u>
61	<u>62</u>	<u>63</u>	<u>64</u>	<u>65</u>	<u>66</u>	67	<u>68</u>	<u>69</u>	<u>70</u>
71	<u>72</u>	73	74	<u>75</u>	<u>76</u>	77	<u>78</u>	79	<u>80</u>
<u>81</u>	<u>82</u>	83	<u>84</u>	<u>85</u>	<u>86</u>	<u>87</u>	<u>88</u>	89	<u>90</u>
91	<u>92</u>	<u>93</u>	<u>94</u>	<u>95</u>	<u>96</u>	97	<u>98</u>	<u>99</u>	<u>100</u>

4.6.4 映上函数的个数

也可以用容斥原理确定从 m 元素集到 n 元素集的映上函数的个数。首先考虑例2。

例2 从6元素集到3元素集有多少个映上函数?

解 假定在陪域中的元素是 b_1, b_2, b_3 。设 P_1, P_2, P_3 分别是 b_1, b_2, b_3 不在函数值域中的性质。注意到一个函数是映上的当且仅当没有性质 P_1, P_2 和 P_3 。根据容斥原理得到6元素集到3元素集的映上函数个数是

$$N(P_1'P_2'P_3') = N - [N(P_1) + N(P_2) + N(P_3)] \\ + [N(P_1P_2) + N(P_1P_3) + N(P_2P_3)] - N(P_1P_2P_3)$$

其中 N 是从6元素集到3元素集的函数总数。我们将对等式右边的每一项求值。

由3.1节的例5得出 $N = 3^6$ 。注意到 $N(P_i)$ 是值域中不含 b_i 的函数个数。所以,对于定义域中的每个元素的函数值有2种选择,从而得到 $N(P_i) = 2^6$ 。此外,这种项有 $C(3, 1)$ 个。注意到 $N(P_iP_j)$ 是值域中不含 b_i 和 b_j 的函数个数。所以,对于定义域中的每个元素的函数值只有1种选择。从而得到 $N(P_iP_j) = 1^6 = 1$ 。此外,这种项有 $C(3, 2)$ 个。还有,注意到 $N(P_1P_2P_3) = 0$, 因为这个项是值域中不含 b_1, b_2 和 b_3 的函数个数。很显然,没有这样的函数。于是,从6元素集到3元素集的映上函数个数是

$$3^6 - C(3, 1)2^6 + C(3, 2)1^6 = 729 - 192 + 3 = 540$$

现在叙述从 m 元素集到 n 元素集的映上函数个数的一般性结果。这个结果的证明留给读者作为练习。