国家教材委员会专家委员会审核通过
2019

首届全国教材建设奖

全国优秀教材特等奖

普通高中教科书

数学

必修

第一册



人民教育出版社

A版

普 通 高 中 教 科 书

数学

必 修

第一册

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著

人教版®

人民教育出版社
·北京·

A版

主　　编：章建跃　李增沪
副 主 编：李　勇　李海东　李龙才
本册主编：李海东　郭玉峰

编写人员：王　嵘　白　涛　刘长明　刘春艳　李柏青　宋莉莉　张劲松
　　周远方　赵　昕　胡永建　俞求是　郭玉峰　郭慧清　黄炳锋
　　章建跃　薛红霞

责任编辑：王　嵘
美术编辑：王俊宏

普通高中教科书　数学　必修　第一册
人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

出　　版　人民教育出版社
　　（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn

版权所有・未经许可不得采用任何方式擅自复制或使用本产品任何部分・违者必究
如发现内容质量问题，请登录中小学教材意见反馈平台：jcyjfk.pep.com.cn
如发现印、装质量问题，影响阅读，请与 ××× 联系调换。电话：×××–××××××××

主编寄语

亲爱的同学，欢迎使用这套教科书，希望它能成为你学习数学的好帮手. 在开始学习前，我们想就数学学习中的一些问题与你做点交流.

首先，你想过为什么要学那么多数学吗？高中生应该认真思考这个问题了. 其实道理很明显，就是因为**数学有用**. 数学不仅对社会发展和科技进步作用巨大，而且对你个人的发展也很重要. 努力学好数学对你的人生幸福意义重大，这个道理在你今后学习、工作和生活中会逐步体会到.

第二，**要采用多样化学习方式**. 高中数学内容的抽象程度提高了，要以更加积极主动的态度、刻苦钻研的精神，采取阅读自学、独立思考、实践探究、合作交流等多种学习方式，才能更好地掌握它. 内容越抽象，就越需要静下心来，持之以恒地思考，然后才能有所领悟、有所收获.

第三，**注重基础，拾阶而上**. 数学的特点是逻辑严谨，从概念到性质再到应用环环相扣，前面知识未理解，后续学习就必然会遇上实质性困难. 学数学，既没有捷径，也没有灵丹妙药，唯有按数学的方式，按部就班地学，循序渐进地想，在基础知识上下足功夫，才能取得好成效.

第四，**按学习规律办事**. 理解概念、熟练技能和准确表达是数学学习的“三要素”，做好这些的要诀是遵循学习规律，掌握学习节奏. 概念是数学的精要所在，必须深刻理解、牢固掌握，因此概念学习要“慢慢来”. 例如，函数是贯穿高中数学的一条主线，是重中之重的内容，因为其抽象程度高而成为许多同学的学习难点. 在起始阶段囫囵吞枣、贪多求快，就会给后续学习埋下隐患. 学好它的秘诀在于慢，慢下来，仔细阅读教科书，用心揣摩每句话，搞懂每个例题，在探究、质疑、反思中逐渐领悟函数的概念及其蕴含的数学思想和方法，并用简明扼要的语言概括出来，从而实现认识的升华. 这个过程，貌似慢而实为快，在反复推敲中悟出学习窍门，达到举一反三、触类旁通的效果，进而一通百通，由慢转快. 这样的快是真快，是无后顾之忧的快，是充满智慧的快.

第五，**重视严格的数学训练，独立完成作业**. 做作业的目的是：加深理解知识，熟练基本技能；学会思考，培养数学能力；查漏补缺，培养良好的学习习惯. 本套书中的习题是精心挑选的，看似不难但寓意深刻，要高度重视. 完成作业，独立思考最重要，遇到困难不能轻言放弃. 有含金量的数学题往往要绞尽脑汁，一时做不出很正常，如果浅尝辄止，急于“刷题”看答案，这是自欺欺人，受害的是你自己.

最后，**学习贵在创新**. 理解概念、学会证明、领会思想、掌握方法都是必备基础，还要善于发现和提出问题，“凡事问个为什么”，这样才能学会学习. 在这套教科书中，我们注重在提问方面做出示范，期望你能“看过问题三百个，不会解题也会问”.

学数学趁年轻. 高中阶段是接受数学训练、打好数学基础的最佳时期. 这个时期下功夫学数学，将使你终生受益. 期盼这套教科书能给你带来愉快，使你的数学素养得到大幅提升.

本册导引

本书根据《普通高中数学课程标准（2017 年版）》编写，包括“集合与常用逻辑用语”“一元二次函数、方程和不等式”“函数的概念与性质”“指数函数与对数函数”“三角函数”五章内容和“数学建模　建立函数模型解决实际问题”.

集合是刻画一类事物的语言和工具，是现代数学的基础；常用逻辑用语是数学语言的重要组成部分，是数学表达和交流的工具. 在**“集合与常用逻辑用语”**的学习中，同学们将学习集合的概念、基本关系和运算，学习用集合语言刻画一类事物的方法；并学习用逻辑用语表达数学对象、进行数学推理，为高中数学学习做准备.

相等关系和不等式关系是数学中最基本的数量关系. 在**“一元二次函数、方程和不等式”**的学习中，同学们将类比等式学习不等式. 通过梳理初中数学的相关内容，理解一元二次函数、一元二次方程和一元二次不等式之间的联系，从函数观点认识方程与不等式，感悟数学知识之间的关联，完成初高中数学学习的过渡.

函数是描述客观世界变化规律的重要数学模型，它的思想方法贯穿了高中数学课程的始终. 在**“函数的概念与性质”**中，同学们将在初中的基础上，进一步学习运用集合与对应的语言刻画函数概念，学习函数的基本性质，并通过幂函数的学习感受如何研究一个函数，如研究的内容、思路和方法，进一步感受函数的思想方法和广泛应用.

“指数爆炸”“对数增长”是生活中常见的变化现象. 在**“指数函数与对数函数”**中，同学们将类比幂函数的研究方法，学习指数函数与对数函数的概念、图象和性质. 通过对几类基本初等函数的变化差异的比较，体会如何根据变化差异选择合适的函数类型构建数学模型，刻画现实问题的变化规律，解决简单的实际问题.

三角函数也是一类基本的、重要的函数，它是刻画现实世界中具有周期性变化现象的数学模型. 在**“三角函数”**的学习中，同学们将学习借助单位圆建立一般三角函数的概念，学习三角函数的图象和性质，探索和研究三角函数之间的一些恒等关系. 通过建立三角函数模型刻画周期变化现象，进一步体会函数的广泛应用.

祝愿同学们通过本册书的学习，不但学到更多的数学知识，而且在数学能力、数学核心素养等方面都有较大的提高，并培养起更高的数学学习兴趣，形成对数学的更加全面的认识.

目 录

第一章　集合与常用逻辑用语 …… 1

1.1　集合的概念 …… 2

1.2　集合间的基本关系 …… 7

1.3　集合的基本运算 …… 10

阅读与思考　集合中元素的个数 …… 15

1.4　充分条件与必要条件 …… 17

阅读与思考　几何命题与充分条件、必要条件 … 24

1.5　全称量词与存在量词 …… 26

小结 …… 33

复习参考题 1 …… 34



第二章　一元二次函数、方程和不等式 …… 36

2.1　等式性质与不等式性质 …… 37

2.2　基本不等式 …… 44

2.3　二次函数与一元二次方程、不等式 …… 50

小结 …… 56

复习参考题 2 …… 57



第三章　函数的概念与性质 …… 59

3.1　函数的概念及其表示 …… 60

阅读与思考　函数概念的发展历程 …… 75

3.2　函数的基本性质 …… 76

信息技术应用　用计算机绘制函数图象 …… 87

3.3　幂函数 …… 89

探究与发现　探究函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的图象与性质 …… 92

3.4　函数的应用（一） …… 93

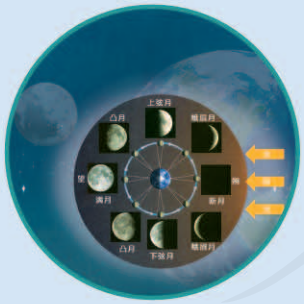
文献阅读与数学写作*　函数的形成与发展 …… 97

小结 …… 99

复习参考题 3 …… 100







第四章　指数函数与对数函数 …… 103

4.1　指数 …… 104

4.2　指数函数 …… 111

阅读与思考　放射性物质的衰减 …… 115

信息技术应用　探究指数函数的性质 …… 120

4.3　对数 …… 122

阅读与思考　对数的发明 …… 128

4.4　对数函数 …… 130

探究与发现　互为反函数的两个函数图象间的关系 … 135

4.5　函数的应用（二） …… 142

阅读与思考　中外历史上的方程求解 …… 147

文献阅读与数学写作*　对数概念的形成与发展 …… 157

小结 …… 158

复习参考题 4 …… 159

数学建模　建立函数模型解决实际问题 …… 162

第五章　三角函数 …… 167

5.1　任意角和弧度制 …… 168

5.2　三角函数的概念 …… 177

阅读与思考　三角学与天文学 …… 186

5.3　诱导公式 …… 188

5.4　三角函数的图象与性质 …… 196

探究与发现　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 及
函数 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的周期 …… 203

探究与发现　利用单位圆的性质研究正弦函数、
余弦函数的性质 …… 208

5.5　三角恒等变换 …… 215

信息技术应用　利用信息技术制作三角函数表 …… 224

5.6　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ …… 231

5.7　三角函数的应用 …… 242

阅读与思考　振幅、周期、频率、相位 …… 250

小结 …… 251

复习参考题 5 …… 253

部分中英文词汇索引 …… 258

第一章
集合与常用逻辑用语

我们知道，方程 $x^2=2$ 在有理数范围内无解，但在实数范围内有解. 在平面内，所有到定点的距离等于定长的点组成一个圆；而在空间中，所有到定点的距离等于定长的点组成一个球面. 因此，明确研究对象、确定研究范围是研究数学问题的基础. 为了简洁、准确地表述数学对象及研究范围，我们需要使用集合的语言和工具. 事实上，集合的知识是现代数学的基础，也是高中数学的基础，在后面各章的学习中将越来越多地应用它. 在本章，我们将学习集合的概念、基本关系和运算，学习用集合语言刻画一类事物的方法.

逻辑用语是数学语言的重要组成部分，是数学表达和交流的工具. 学习一些常用逻辑用语，可以使我们正确理解数学概念、合理论证数学结论、准确表达数学内容. 逻辑用语也是日常交往、学习和工作中必不可少的工具，正确使用逻辑用语是每一位公民应具备的基本素养. 本章我们将通过常用逻辑用语的学习，理解使用逻辑用语表达数学对象、进行数学推理的方法，体会逻辑用语在表述数学内容和论证数学结论中的作用，学会使用集合和逻辑语言表达和交流数学问题，提升交流的逻辑性和准确性.



1.1 集合的概念

在小学和初中，我们已经接触过一些集合. 例如，自然数的集合，同一平面内到一个定点的距离等于定长的点的集合（即圆）等. 为了更有效地使用集合语言，我们需要进一步了解集合的有关知识. 下面先从集合的含义开始.

看下面的例子：

（1）1～10 之间的所有偶数；

（2）立德中学今年入学的全体高一学生；

（3）所有的正方形；

（4）到直线 l 的距离等于定长 d 的所有点；

（5）方程 $x^2-3x+2=0$ 的所有实数根；

（6）地球上的四大洋.

例（1）中，我们把 1～10 之间的每一个偶数作为元素，这些元素的全体就是一个集合；同样地，例（2）中，把立德中学今年入学的每一位高一学生作为元素，这些元素的全体也是一个集合.

思考

上面的例（3）到例（6）也都能组成集合吗？它们的元素分别是什么？

一般地，我们把研究对象统称为**元素**（element），把一些元素组成的总体叫做**集合**（set）（简称为**集**）.

给定的集合，它的元素必须是确定的. 也就是说，给定一个集合，那么一个元素在或不在这个集合中就确定了. 例如，“1～10 之间的所有偶数”构成一个集合，2，4，6，8，10 是这个集合的元素，1，3，5，7，9，…不是它的元素；“较小的数”不能构成集合，因为组成它的元素是不确定的.

一个给定集合中的元素是互不相同的. 也就是说，集合中的元素是不重复出现的.

只要构成两个集合的元素是一样的，我们就称这两个集合是**相等**的.

我们通常用大写拉丁字母 A，B，C，…表示集合，用小写拉丁字母 a，b，c，…表示集合中的元素.

如果 a 是集合 A 的元素，就说 a **属于**（belong to）集合 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是

集合 A 中的元素，就说 a **不属于**集合 A，记作 $a \notin A$.

例如，若用 A 表示前面例（1）中“1～10 之间的所有偶数”组成的集合，则有 $4 \in A$，$3 \notin A$，等等.

数学中一些常用的数集及其记法
全体非负整数组成的集合称为非负整数集（或自然数集），记作 **N**；
全体正整数组成的集合称为正整数集，记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$；
全体整数组成的集合称为整数集，记作 **Z**；
全体有理数组成的集合称为有理数集，记作 **Q**；
全体实数组成的集合称为实数集，记作 **R**.

从上面的例子看到，我们可以用自然语言描述一个集合. 除此之外，还可以用什么方式表示集合呢？

列举法

“地球上的四大洋”组成的集合可以表示为｛太平洋，大西洋，印度洋，北冰洋｝；“方程 $x^2-3x+2=0$ 的所有实数根”组成的集合可以表示为 $\{1, 2\}$.

像这样把集合的所有元素一一列举出来，并用花括号“｛　｝”括起来表示集合的方法叫做**列举法**.

例 1　用列举法表示下列集合：

（1）小于 10 的所有自然数组成的集合；

（2）方程 $x^2=x$ 的所有实数根组成的集合.

解：（1）设小于 10 的所有自然数组成的集合为 A，那么

$$A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

（2）设方程 $x^2=x$ 的所有实数根组成的集合为 B，那么

$$B=\{0, 1\}.$$

由于元素完全相同的两个集合相等，而与列举的顺序无关，因此一个集合可以有不同的列举方法. 例如，例 1（1）的集合还可以写成

$$A=\{9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0\}$$

等.

思考

（1）你能用自然语言描述集合 $\{0, 3, 6, 9\}$ 吗？

（2）你能用列举法表示不等式 $x-7<3$ 的解集吗？

描述法

不等式 $x-7<3$ 的解是 $x<10$，因为满足 $x<10$ 的实数有无数个，所以 $x-7<3$ 的解集无法用列举法表示. 但是，我们可以利用解集中元素的共同特征，即：x 是实数，且 $x<10$，把解集表示为

$$\{x\in\mathbf{R}\mid x<10\}.$$

又如，整数集 $\mathbf{Z}$ 可以分为奇数集和偶数集. 对于每一个 $x\in\mathbf{Z}$，如果它能表示为 $x=2k+1(k\in\mathbf{Z})$的形式，那么它是一个奇数；反之，如果 x 是一个奇数，那么它能表示为$x=2k+1(k\in\mathbf{Z})$的形式. 所以，$x=2k+1(k\in\mathbf{Z})$是所有奇数的一个共同特征，于是奇数集可以表示为

$$\{x\in\mathbf{Z}\mid x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}.$$

?

你能用这样的方法表示偶数集吗?

一般地，设 A 是一个集合，我们把集合 A 中所有具有共同特征 $P(x)$的元素 x 所组成的集合表示为

$$\{x\in A\mid P(x)\},$$

这种表示集合的方法称为**描述法**.

有时也用冒号或分号代替竖线，写成

$$\{x\in A:P(x)\}$$

或

$$\{x\in A;P(x)\}.$$

例如，实数集 $\mathbf{R}$ 中，有限小数和无限循环小数都具有$\frac{q}{p}$（p，$q\in\mathbf{Z}$，$p\neq0$）的形式，这些数组成有理数集，我们将它表示为

$$\mathbf{Q}=\{x\in\mathbf{R}\mid x=\frac{q}{p},\ p,q\in\mathbf{Z},p\neq0\}.$$

其中，$x=\frac{q}{p}$（p，$q\in\mathbf{Z}$，$p\neq0$）就是所有有理数具有的共同特征.

显然，对于任何 $y\in\{x\in A\mid P(x)\}$，都有 $y\in A$，且 $P(y)$成立.

例 2 试分别用描述法和列举法表示下列集合：

(1) 方程 $x^2-2=0$ 的所有实数根组成的集合 A；

(2) 由大于 10 且小于 20 的所有整数组成的集合 B.

解：(1) 设 $x\in A$，则 x 是一个实数，且 $x^2-2=0$. 因此，用描述法表示为

$$A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-2=0\}.$$

方程 $x^2-2=0$ 有两个实数根$\sqrt{2}$，$-\sqrt{2}$，因此，用列举法表示为

$$A=\{\sqrt{2},-\sqrt{2}\}.$$

(2) 设 $x\in B$，则 x 是一个整数，即 $x\in\mathbf{Z}$，且 $10<x<20$. 因此，用描述法表示为

$$B=\{x\in\mathbf{Z}\mid 10<x<20\}.$$

大于 10 且小于 20 的整数有 11，12，13，14，15，16，17，18，19，因此，用列举法表示为

$B=\{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$.

我们约定，如果从上下文的关系看，$x\in\mathbf{R}$，$x\in\mathbf{Z}$ 是明确的，那么 $x\in\mathbf{R}$，$x\in\mathbf{Z}$ 可以省略，只写其元素 x. 例如，集合 $D=\{x\in\mathbf{R}\mid x<10\}$ 也可表示为 $D=\{x\mid x<10\}$；集合 $E=\{x\in\mathbf{Z}\mid x=2k+1, k\in\mathbf{Z}\}$ 也可表示为 $E=\{x\mid x=2k+1, k\in\mathbf{Z}\}$.

思考

举例说明，用自然语言、列举法和描述法表示集合时各自的特点.

练习

1. 判断下列元素的全体是否组成集合，并说明理由：

   (1) A，B 是平面 α 内的定点，在平面 α 内与 A，B 等距离的点；

   (2) 高中学生中的游泳能手.

2. 用符号“$\in$”或“$\notin$”填空：

   0____$\mathbf{N}$；-3____$\mathbf{N}$；0.5____$\mathbf{Z}$；$\sqrt{2}$____$\mathbf{Z}$；$\frac{1}{3}$____$\mathbf{Q}$；π____$\mathbf{R}$.

3. 用适当的方法表示下列集合：

   (1) 由方程 $x^2-9=0$ 的所有实数根组成的集合；

   (2) 一次函数 $y=x+3$ 与 $y=-2x+6$ 图象的交点组成的集合；

   (3) 不等式 $4x-5<3$ 的解集.

习题 1.1

复习巩固

1. 用符号“$\in$”或“$\notin$”填空：

   (1) 设 A 为所有亚洲国家组成的集合，则

   中国_____A，美国_____A，印度_____A，英国_____A；

   (2) 若 $A=\{x\mid x^2=x\}$，则 -1_____A；

   (3) 若 $B=\{x\mid x^2+x-6=0\}$，则 3_____B；

   (4) 若 $C=\{x\in\mathbf{N}\mid 1\leqslant x\leqslant 10\}$，则 8_____C，9.1_____C.

2. 用列举法表示下列集合：

   (1) 大于 1 且小于 6 的整数；

   (2) $A=\{x\mid (x-1)(x+2)=0\}$；

   (3) $B=\{x\in\mathbf{Z}\mid -3<2x-1<3\}$.

综合运用

3. 把下列集合用另一种方法表示出来：

（1）$\{2，4，6，8，10\}$；

（2）由 1，2，3 这三个数字抽出一部分或全部数字（没有重复）所组成的一切自然数；

（3）$\{x\in\mathbf{N}|3<x<7\}$；

（4）中国古代四大发明.

4. 用适当的方法表示下列集合：

（1）二次函数 $y=x^2-4$ 的函数值组成的集合；

（2）反比例函数 $y=\dfrac{2}{x}$ 的自变量的取值组成的集合；

（3）不等式 $3x\geqslant 4-2x$ 的解集.

拓广探索

5. 集合论是德国数学家康托尔于 19 世纪末创立的. 当时，康托尔在解决涉及无限量研究的数学问题时，越过“数集”限制，提出了一般性的“集合”概念. 关于集合论，希尔伯特赞誉其为“数学思想的惊人的产物，在纯粹理性的范畴中人类活动的最美的表现之一”，罗素描述其为“可能是这个时代所能夸耀的最伟大的工作”. 请你查阅相关资料，用简短的报告阐述你对这些评价的认识.



康托尔（Georg Cantor，1845—1918）

人教版®

1.2 集合间的基本关系

我们知道，两个实数之间有相等关系、大小关系，如 $5=5$，$5<7$，$5>3$，等等. 两个集合之间是否也有类似的关系呢?

观察

观察下面几个例子，类比实数之间的相等关系、大小关系，你能发现下面两个集合之间的关系吗?

(1) $A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$;

(2) C 为立德中学高一 (2) 班全体女生组成的集合，D 为这个班全体学生组成的集合;

(3) $E=\{x \mid x$ 是有两条边相等的三角形$\}$，$F=\{x \mid x$ 是等腰三角形$\}$.

可以发现，在 (1) 中，集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素. 这时我们说集合 A 包含于集合 B，或集合 B 包含集合 A. (2) 中的集合 C 与集合 D 也有这种关系.

一般地，对于两个集合 A，B，如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 中的元素，就称集合 A 为集合 B 的**子集** (subset)，记作

$$A \subseteq B \text{ (或 } B \supseteq A\text{)},$$

读作“A 包含于 B”(或“B 包含 A”).

在数学中，我们经常用平面上封闭曲线的内部代表集合，这种图称为 **Venn 图**. 这样，上述集合 A 与集合 B 的包含关系，可以用图 1.2-1 表示.

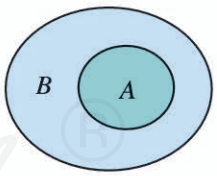


图 1.2-1

在 (3) 中，由于“两条边相等的三角形”是等腰三角形，因此，集合 E，F 都是由所有等腰三角形组成的集合. 即集合 E 中任何一个元素都是集合 F 中的元素，同时，集合 F 中任何一个元素也都是集合 E 中的元素. 这样，集合 E 的元素与集合 F 的元素是一样的.

一般地，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素，那么集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$.

请你举出几个具有包含关系、相等关系的集合实例.

也就是说，若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则 $A=B$.

如果集合 $A\subseteq B$，但存在元素 $x\in B$，且 $x\notin A$，就称集合 A 是集合 B 的**真子集**（proper subset），记作

$$A\subsetneq B\ (\text{或 } B\supsetneq A),$$

读作“A 真包含于 B”（或“B 真包含 A”）.

例如，在（1）中，$A\subseteq B$，但 $4\in B$，且 $4\notin A$，所以集合 A 是集合 B 的真子集.

我们知道，方程 $x^2+1=0$ 没有实数根，所以方程 $x^2+1=0$ 的实数根组成的集合中没有元素.

一般地，我们把不含任何元素的集合叫做**空集**（empty set），记为 $\varnothing$，并规定：空集是任何集合的子集.

与实数中的结论“若 $a\geqslant b$，且 $b\geqslant a$，则 $a=b$”相类比，你有什么体会？

你能举出几个空集的例子吗？

思考

包含关系 $\{a\}\subseteq A$ 与属于关系 $a\in A$ 有什么区别？试结合实例作出解释.

由上述集合之间的基本关系，可以得到下列结论：

（1）任何一个集合是它本身的子集，即

$$A\subseteq A;$$

（2）对于集合 A，B，C，如果 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$.

例 1 写出集合 $\{a,b\}$ 的所有子集，并指出哪些是它的真子集.

解： 集合 $\{a,b\}$ 的所有子集为 $\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{a,b\}$. 真子集为 $\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$.

例 2 判断下列各题中集合 A 是否为集合 B 的子集，并说明理由：

（1）$A=\{1,2,3\}$，$B=\{x\mid x \text{ 是 } 8 \text{ 的约数}\}$；

（2）$A=\{x\mid x \text{ 是长方形}\}$，$B=\{x\mid x \text{ 是两条对角线相等的平行四边形}\}$.

解：（1）因为 3 不是 8 的约数，所以集合 A 不是集合 B 的子集.

（2）因为若 x 是长方形，则 x 一定是两条对角线相等的平行四边形，所以集合 A 是集合 B 的子集.

练习

1. 写出集合 $\{a,b,c\}$ 的所有子集.

2. 用适当的符号填空：

（1）a ____ $\{a,b,c\}$；　　（2）0 ____ $\{x\mid x^2=0\}$；

（3）$\varnothing$ ____ $\{x\in\mathbf{R}\mid x^2+1=0\}$；　　（4）$\{0,1\}$ ____ $\mathbf{N}$；

(5) $\{0\}$ ____ $\{x\mid x^2=x\}$；　　(6) $\{2,1\}$ ____ $\{x\mid x^2-3x+2=0\}$.

3. 判断下列两个集合之间的关系：

(1) $A=\{x\mid x<0\}$，$B=\{x\mid x<1\}$；

(2) $A=\{x\mid x=3k,\ k\in\mathbf{N}\}$，$B=\{x\mid x=6z,\ z\in\mathbf{N}\}$；

(3) $A=\{x\in\mathbf{N}_+\mid x$ 是 4 与 10 的公倍数$\}$，$B=\{x\mid x=20m,\ m\in\mathbf{N}_+\}$.

习题 1.2

复习巩固

1. 选用适当的符号填空：

(1) 若集合 $A=\{x\mid 2x-3<3x\}$，$B=\{x\mid x\geqslant 2\}$，则

-4 ____ B，-3 ____ A，$\{2\}$ ____ B，B ____ A；

(2) 若集合 $A=\{x\mid x^2-1=0\}$，则

1 ____ A，$\{-1\}$ ____ A，$\varnothing$ ____ A，$\{1,-1\}$ ____ A；

(3) $\{x\mid x$ 是菱形$\}$ ____ $\{x\mid x$ 是平行四边形$\}$；

$\{x\mid x$ 是等腰三角形$\}$ ____ $\{x\mid x$ 是等边三角形$\}$.

2. 指出下列各集合之间的关系，并用 Venn 图表示：

$A=\{x\mid x$ 是四边形$\}$，$B=\{x\mid x$ 是平行四边形$\}$，$C=\{x\mid x$ 是矩形$\}$，$D=\{x\mid x$ 是正方形$\}$.

综合运用

3. 举出下列各集合的一个子集：

(1) $A=\{x\mid x$ 是立德中学的学生$\}$；　　(2) $B=\{x\mid x$ 是三角形$\}$；

(3) $C=\{0\}$；　　(4) $D=\{x\in\mathbf{Z}\mid 3<x<30\}$.

4. 在平面直角坐标系中，集合 $C=\{(x,y)\mid y=x\}$ 表示直线 $y=x$，从这个角度看，集合 $D=\left\{(x,y)\ \middle|\ \begin{cases}2x-y=1\\ x+4y=5\end{cases}\right\}$ 表示什么？集合 C，D 之间有什么关系？

拓广探索

5. (1) 设 a，$b\in\mathbf{R}$，$P=\{1,a\}$，$Q=\{-1,-b\}$，若 $P=Q$，求 $a-b$ 的值；

(2) 已知集合 $A=\{x\mid 0<x<a\}$，$B=\{x\mid 1<x<2\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

1.3 集合的基本运算

我们知道，实数有加、减、乘、除等运算. 集合是否也有类似的运算呢?

并集

观察

观察下面的集合，类比实数的加法运算，你能说出集合 C 与集合 A，B 之间的关系吗?

(1) $A=\{1, 3, 5\}$，$B=\{2, 4, 6\}$，$C=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

(2) $A=\{x|x$ 是有理数$\}$，$B=\{x|x$ 是无理数$\}$，$C=\{x|x$ 是实数$\}$.

在上述两个问题中，集合 A，B 与集合 C 之间都具有这样一种关系：集合 C 是由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的.

一般地，由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的**并集** (union set)，记作 $A\cup B$ (读作“A 并 B”)，即

$$A\cup B=\{x|x\in A, \text{或 } x\in B\},$$

可用 Venn 图 (图 1.3-1) 表示.

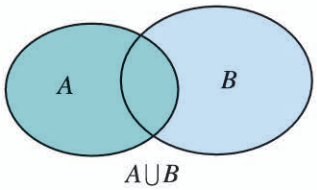


图 1.3-1

这样，在问题 (1) (2) 中，集合 A 与 B 的并集是 C，即

$$A\cup B=C.$$

例 1 设 $A=\{4, 5, 6, 8\}$，$B=\{3, 5, 7, 8\}$，求 $A\cup B$.

解：$A\cup B=\{4, 5, 6, 8\}\cup\{3, 5, 7, 8\}$

$=\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

在求两个集合的并集时，它们的公共元素在并集中只能出现一次. 如元素 5，8.

例 2 设集合 $A=\{x|-1<x<2\}$，集合 $B=\{x|1<x<3\}$，求 $A\cup B$.

解：$A\cup B=\{x\mid -1<x<2\}\cup\{x\mid 1<x<3\}$

$=\{x\mid -1<x<3\}$.

如图 1.3-2，还可以利用数轴直观表示例 2 中求并集$A\cup B$的过程.

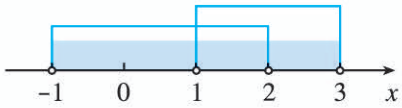


图 1.3-2

思考

下列关系式成立吗？

(1) $A\cup A=A$；(2) $A\cup\varnothing=A$.

交集

思考

观察下面的集合，集合 A，B 与集合 C 之间有什么关系？

(1) $A=\{2,4,6,8,10\}$，$B=\{3,5,8,12\}$，$C=\{8\}$；

(2) $A=\{x\mid x$ 是立德中学今年在校的女同学$\}$，$B=\{x\mid x$ 是立德中学今年在校的高一年级同学$\}$，$C=\{x\mid x$ 是立德中学今年在校的高一年级女同学$\}$.

在上述两个问题中，集合 C 是由所有既属于集合 A 又属于集合 B 的元素组成的.

一般地，由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与 B 的**交集**（intersection set），记作 $A\cap B$（读作“A 交 B”），即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A，且\ x\in B\},$$

可用 Venn 图（图 1.3-3）表示.

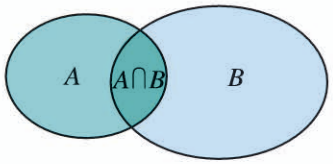


图 1.3-3

这样，在上述问题(1)(2)中，$A\cap B=C$.

例 3 立德中学开运动会，设

$A=\{x\mid x$ 是立德中学高一年级参加百米赛跑的同学$\}$，

$B=\{x\mid x$ 是立德中学高一年级参加跳高比赛的同学$\}$，

求 $A\cap B$.

解：$A\cap B$ 就是立德中学高一年级中那些既参加百米赛跑又参加跳高比赛的同学组成的集合. 所以，

$A\cap B=\{x\mid x$ 是立德中学高一年级既参加百米赛跑又参加跳高比赛的同学$\}$.

例 4 设平面内直线 l_1 上点的集合为 L_1，直线 l_2 上点的集合为 L_2，试用集合的运算表示 l_1，l_2 的位置关系.

解： 平面内直线 l_1，l_2 可能有三种位置关系，即相交于一点、平行或重合.

(1) 直线 l_1，l_2 相交于一点 P 可表示为

$$L_1 \cap L_2 = \{\text{点 } P\};$$

(2) 直线 l_1，l_2 平行可表示为

$$L_1 \cap L_2 = \varnothing;$$

(3) 直线 l_1，l_2 重合可表示为

$$L_1 \cap L_2 = L_1 = L_2.$$

思考

下列关系式成立吗？

(1) $A \cap A = A$；(2) $A \cap \varnothing = \varnothing$.

练习

1. 设 $A=\{3, 5, 6, 8\}$，$B=\{4, 5, 7, 8\}$，求 $A \cap B$，$A \cup B$.
2. 设 $A=\{x \mid x^2-4x-5=0\}$，$B=\{x \mid x^2=1\}$，求 $A \cup B$，$A \cap B$.
3. 设 $A=\{x \mid x \text{ 是等腰三角形}\}$，$B=\{x \mid x \text{ 是直角三角形}\}$，求 $A \cap B$，$A \cup B$.
4. 设 $A=\{x \mid x \text{ 是幸福农场的汽车}\}$，$B=\{x \mid x \text{ 是幸福农场的货车}\}$，求 $A \cup B$.

补集

在研究问题时，我们经常需要确定研究对象的范围.

例如，从小学到初中，数的研究范围逐步地由自然数到正分数，再到有理数，引进无理数后，数的研究范围扩充到实数. 在高中阶段，数的研究范围将进一步扩充.

在不同范围研究同一个问题，可能有不同的结果. 例如方程 $(x-2)(x^2-3)=0$ 的解集，在有理数范围内只有一个解 2，即

$$\{x \in \mathbf{Q} \mid (x-2)(x^2-3)=0\} = \{2\};$$

在实数范围内有三个解：2，$\sqrt{3}$，$-\sqrt{3}$，即

$$\{x \in \mathbf{R} \mid (x-2)(x^2-3)=0\} = \{2, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}.$$

一般地，如果一个集合含有所研究问题中涉及的所有元素，那么就称这个集合为**全集**（universal set），通常记作 U.

通常也把给定的集合作为全集.

对于一个集合 A，由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的**补集**（complementary set），简称为集合 A 的补集，记作 $\complement_U A$，即

$$\complement_U A=\{x\mid x\in U，且\ x\notin A\}，$$

可用 Venn 图（图 1.3-4）表示.

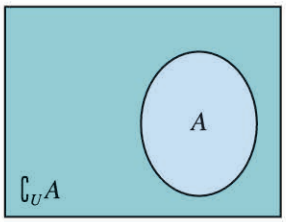


图 1.3-4

例 5 设 $U=\{x\mid x$ 是小于 9 的正整数$\}$，$A=\{1，2，3\}$，$B=\{3，4，5，6\}$，求 $\complement_U A$，$\complement_U B$.

解： 根据题意可知，$U=\{1，2，3，4，5，6，7，8\}$，所以

$$\complement_U A=\{4，5，6，7，8\}，$$
$$\complement_U B=\{1，2，7，8\}.$$

例 6 设全集 $U=\{x\mid x$ 是三角形$\}$，$A=\{x\mid x$ 是锐角三角形$\}$，$B=\{x\mid x$ 是钝角三角形$\}$，求 $A\cap B$，$\complement_U(A\cup B)$.

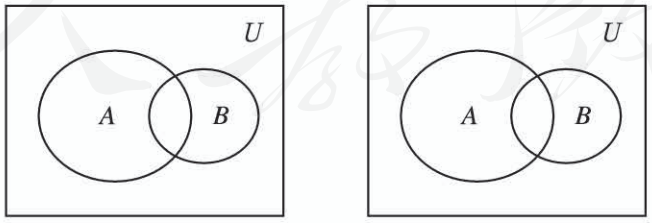
解： 根据三角形的分类可知

$$A\cap B=\varnothing，$$
$$A\cup B=\{x\mid x\text{ 是锐角三角形或钝角三角形}\}，$$
$$\complement_U(A\cup B)=\{x\mid x\text{ 是直角三角形}\}.$$

练习

1. 已知 $U=\{1，2，3，4，5，6，7\}$，$A=\{2，4，5\}$，$B=\{1，3，5，7\}$，求 $A\cap(\complement_U B)$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.
2. 设 $S=\{x\mid x$ 是平行四边形或梯形$\}$，$A=\{x\mid x$ 是平行四边形$\}$，$B=\{x\mid x$ 是菱形$\}$，$C=\{x\mid x$ 是矩形$\}$，求 $B\cap C$，$\complement_A B$，$\complement_S A$.
3. 图中 U 是全集，A，B 是 U 的两个子集，用阴影表示：

(1) $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$；　　(2) $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$.



(1)　　(2)

(第 3 题)

习题 1.3

复习巩固

1. 集合 $A=\{x\mid 2\leqslant x<4\}$，$B=\{x\mid 3x-7\geqslant 8-2x\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$.
2. 设 $A=\{x\mid x$ 是小于9的正整数$\}$，$B=\{1,2,3\}$，$C=\{3,4,5,6\}$. 求 $A\cap B$，$A\cap C$，$A\cap(B\cup C)$，$A\cup(B\cap C)$.
3. 学校开运动会，设 $A=\{x\mid x$ 是参加100 m 跑的同学$\}$，$B=\{x\mid x$ 是参加200 m 跑的同学$\}$，$C=\{x\mid x$ 是参加400 m 跑的同学$\}$，学校规定，每个参加上述比赛的同学最多只能参加两项比赛，请你用集合的运算说明这项规定，并解释以下集合运算的含义：

   (1) $A\cup B$；　　(2) $A\cap C$.

综合运用

4. 已知集合 $A=\{x\mid 3\leqslant x<7\}$，$B=\{x\mid 2<x<10\}$，求 $\complement_{\mathbf{R}}(A\cup B)$，$\complement_{\mathbf{R}}(A\cap B)$，$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B$，$A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)$.
5. 设集合 $A=\{x\mid (x-3)(x-a)=0,\ a\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid (x-4)(x-1)=0\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$.

拓广探索

6. 已知全集 $U=A\cup B=\{x\in\mathbf{N}\mid 0\leqslant x\leqslant 10\}$，$A\cap(\complement_U B)=\{1,3,5,7\}$，试求集合 B.

人教版®

阅读与思考

集合中元素的个数

在研究集合时，经常遇到有关集合中元素的个数问题. 我们把含有限个元素的集合 A 叫做有限集，用 $\mathrm{card}(A)$ 来表示有限集合 A 中元素的个数. 例如，$A=\{a, b, c\}$，则 $\mathrm{card}(A)=3$.

card 是英文 cardinal（基数）的缩写.

看一个问题. 某超市进了两次货，第一次进的货是圆珠笔、钢笔、橡皮、笔记本、方便面、汽水共 6 种，第二次进的货是圆珠笔、铅笔、火腿肠、方便面共 4 种，两次一共进了几种货？

回答两次一共进了10(=6+4)种，显然是不对的. 让我们试着从集合的角度考虑这个问题.

用集合 A 表示第一次进货的品种，用集合 B 表示第二次进货的品种，就有

$$A=\{\text{圆珠笔，钢笔，橡皮，笔记本，方便面，汽水}\},$$

$$B=\{\text{圆珠笔，铅笔，火腿肠，方便面}\}.$$

这里 $\mathrm{card}(A)=6$，$\mathrm{card}(B)=4$. 求两次一共进了几种货，这个问题指的是求 $\mathrm{card}(A\cup B)$. 这个例子中，两次进的货里有相同的品种，相同的品种数实际就是 $\mathrm{card}(A\cap B)$. $\mathrm{card}(A)$，$\mathrm{card}(B)$，$\mathrm{card}(A\cup B)$，$\mathrm{card}(A\cap B)$之间有什么关系呢？

可以算出

$$\mathrm{card}(A\cup B)=8,$$

$$\mathrm{card}(A\cap B)=2.$$

一般地，对任意两个有限集合 A，B，有

$$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B).$$

再来看一个问题. 学校先举办了一次田径运动会，某班有 8 名同学参赛，又举办了一次球类运动会，这个班有 12 名同学参赛，两次运动会都参赛的有 3 人. 两次运动会中，这个班共有多少名同学参赛？

用集合 A 表示田径运动会参赛的学生，用集合 B 表示球类运动会参赛的学生，就有

$$A=\{x\mid x\text{ 是田径运动会参赛的学生}\},$$

$$B=\{x\mid x\text{ 是球类运动会参赛的学生}\},$$

那么

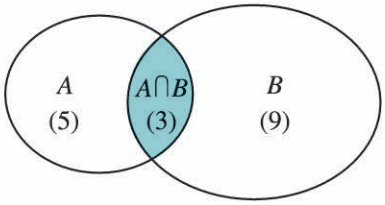
$$A\cap B=\{x\mid x\text{ 是两次运动会都参赛的学生}\},$$

$$A\cup B=\{x\mid x\text{ 是所有参赛的学生}\},$$

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(A\cup B)&=\operatorname{card}(A)+\operatorname{card}(B)-\operatorname{card}(A\cap B)\\&=8+12-3=17.\end{aligned}$$

所以，在两次运动会中，这个班共有 17 名同学参赛.

我们也可以用 Venn 图来求解.



在上图中相应于 $A\cap B$ 的区域里先填上 3[1] ($\operatorname{card}(A\cap B)=3$)，再在 A 中不包括 $A\cap B$ 的区域里填上 5($\operatorname{card}(A)-\operatorname{card}(A\cap B)=5$)，在 B 中不包括 $A\cap B$ 的区域里填上 9($\operatorname{card}(B)-\operatorname{card}(A\cap B)=9$). 最后把这三个数加起来得 17，这就是 $\operatorname{card}(A\cup B)$.

[1] 这里的 3 是表示元素的个数，而不是元素. 图中我们特别加上括号，另外两个数 5，9 也一样.

这种图解法对于解比较复杂的问题（例如涉及三个以上集合的并、交的问题）更能显示出它的优越性. 对于有限集合 A，B，C，你能发现 $\operatorname{card}(A\cup B\cup C)$，$\operatorname{card}(A)$，$\operatorname{card}(B)$，$\operatorname{card}(C)$，$\operatorname{card}(A\cap B)$，$\operatorname{card}(B\cap C)$，$\operatorname{card}(A\cap C)$，$\operatorname{card}(A\cap B\cap C)$之间的关系吗？通过一个具体的例子，算一算.

有限集合中元素的个数，我们可以一一数出来. 而对于元素个数无限的集合，如

$$A=\{1，2，3，4，\cdots，n，\cdots\},$$

$$B=\{2，4，6，8，\cdots，2n，\cdots\},$$

我们无法数出集合中元素的个数，但可以比较这两个集合中元素个数的多少. 你能设计一种比较这两个集合中元素个数多少的方法吗？

1.4 充分条件与必要条件

在初中，我们已经对命题有了初步的认识. 一般地，我们把用语言、符号或式子表达的，可以判断真假的陈述句叫做命题. 判断为真的语句是真命题，判断为假的语句是假命题. 中学数学中的许多命题可以写成“若 p，则 q”“如果 p，那么 q”等形式. 其中 p 称为命题的条件，q 称为命题的结论. 本节主要讨论这种形式的命题. 下面我们将进一步考察“若 p，则 q”形式的命题中 p 和 q 的关系，学习数学中的三个常用的逻辑用语——充分条件、必要条件和充要条件.

1.4.1 充分条件与必要条件

思考

下列“若 p，则 q”形式的命题中，哪些是真命题？哪些是假命题？

(1) 若平行四边形的对角线互相垂直，则这个平行四边形是菱形；

(2) 若两个三角形的周长相等，则这两个三角形全等；

(3) 若 $x^2-4x+3=0$，则 $x=1$；

(4) 若平面内两条直线 a 和 b 均垂直于直线 l，则 $a/\!/b$.

在命题 (1)(4) 中，由条件 p 通过推理可以得出结论 q，所以它们是真命题. 在命题 (2)(3) 中，由条件 p 不能得出结论 q，所以它们是假命题.

一般地，“若 p，则 q”为真命题，是指由 p 通过推理可以得出 q. 这时，我们就说，由 p 可以推出 q，记作

$$p \Rightarrow q,$$

并且说，p 是 q 的**充分条件** (sufficient condition)，q 是 p 的**必要条件**[1] (necessary condition).

如果“若 p，则 q”为假命题，那么由条件 p 不能推出结论 q，记作 $p \not\Rightarrow q$. 此时，我们就说 p 不是 q 的充分条件，q 不是 p 的必要条件.

上述命题 (1)(4) 中的 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必

[1] 此时，如果 q 不成立，则 p 一定不成立. 所以，q 对于 p 成立而言是必要的. 请举例说明.

要条件，而命题（2)(3）中的 p 不是 q 的充分条件，q 不是 p 的必要条件.

例 1 下列“若 p，则 q”形式的命题中，哪些命题中的 p 是 q 的充分条件?

（1）若四边形的两组对角分别相等，则这个四边形是平行四边形；

（2）若两个三角形的三边成比例，则这两个三角形相似；

（3）若四边形为菱形，则这个四边形的对角线互相垂直；

（4）若 $x^2=1$，则 $x=1$；

（5）若 $a=b$，则 $ac=bc$；

（6）若 x，y 为无理数，则 xy 为无理数.

解：（1）这是一条平行四边形的判定定理，$p\Rightarrow q$，所以 p 是 q 的充分条件.

（2）这是一条相似三角形的判定定理，$p\Rightarrow q$，所以 p 是 q 的充分条件.

（3）这是一条菱形的性质定理，$p\Rightarrow q$，所以 p 是 q 的充分条件.

（4）由于$(-1)^2=1$，但$-1\neq 1$，$p\not\Rightarrow q$，所以 p 不是 q 的充分条件.

（5）由等式的性质知，$p\Rightarrow q$，所以 p 是 q 的充分条件.

（6）$\sqrt{2}$为无理数，但$\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ 为有理数，$p\not\Rightarrow q$，所以 p 不是 q 的充分条件.

举反例是判断一个命题是假命题的重要方法.

思考

例 1 中命题（1）给出了“四边形是平行四边形”的一个充分条件，即“四边形的两组对角分别相等”. 这样的充分条件唯一吗？如果不唯一，那么你能再给出几个不同的充分条件吗？

我们说 p 是 q 的充分条件，是指由条件 p 可以推出结论 q，但这并不意味着只能由这个条件 p 才能推出结论 q. 一般来说，对给定结论 q，使得 q 成立的条件 p 是不唯一的. 例如，我们知道，下列命题均为真命题：

①若四边形的两组对边分别相等，则这个四边形是平行四边形；

②若四边形的一组对边平行且相等，则这个四边形是平行四边形；

③若四边形的两条对角线互相平分，则这个四边形是平行四边形.

所以，“四边形的两组对边分别相等”“四边形的一组对边平行且相等”“四边形的两条对角线互相平分”都是“四边形是平行四边形”的充分条件.

事实上，例 1 中命题（1）及上述命题①②③均是平行四边形的判定定理. 所以，平

行四边形的每一条判定定理都给出了“四边形是平行四边形”的一个充分条件，即这个条件能充分保证四边形是平行四边形. 类似地，平行线的每一条判定定理都给出了“两直线平行”的一个充分条件，例如“内错角相等”这个条件就充分保证了“两条直线平行”.

一般地，数学中的每一条判定定理都给出了相应数学结论成立的一个充分条件.

例 2 下列“若 p，则 q”形式的命题中，哪些命题中的 q 是 p 的必要条件?

(1) 若四边形为平行四边形，则这个四边形的两组对角分别相等；

(2) 若两个三角形相似，则这两个三角形的三边成比例；

(3) 若四边形的对角线互相垂直，则这个四边形是菱形；

(4) 若 $x=1$，则 $x^2=1$；

(5) 若 $ac=bc$，则 $a=b$；

(6) 若 xy 为无理数，则 x，y 为无理数.

解：(1) 这是平行四边形的一条性质定理，$p \Rightarrow q$，所以，q 是 p 的必要条件.

(2) 这是三角形相似的一条性质定理，$p \Rightarrow q$，所以，q 是 p 的必要条件.

(3) 如图 1.4-1，四边形 $ABCD$ 的对角线互相垂直，但它不是菱形，$p \nRightarrow q$，所以，q 不是 p 的必要条件.

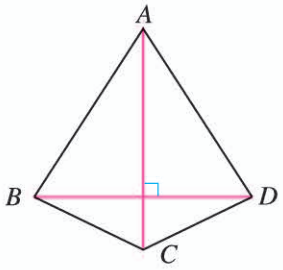


图 1.4-1

(4) 显然，$p \Rightarrow q$，所以，q 是 p 的必要条件.

(5) 由于 $(-1)\times 0=1\times 0$，但 $-1\neq 1$，$p \nRightarrow q$，所以，q 不是 p 的必要条件.

(6) 由于 $1\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$ 为无理数，但 1，$\sqrt{2}$ 不全是无理数，$p \nRightarrow q$，所以，q 不是 p 的必要条件.

一般地，要判断“若 p，则 q”形式的命题中 q 是否为 p 的必要条件，只需判断是否有“$p \Rightarrow q$”，即“若 p，则 q”是否为真命题.

思考

例 2 中命题 (1) 给出了“四边形是平行四边形”的一个必要条件，即“这个四边形的两组对角分别相等”. 这样的必要条件是唯一的吗? 如果不唯一，你能给出“四边形是平行四边形”的几个其他必要条件吗?

我们说 q 是 p 的必要条件，是指以 p 为条件可以推出结论 q，但这并不意味着由条件 p 只能推出结论 q. 一般来说，给定条件 p，由 p 可以推出的结论 q 是不唯一的. 例如，下列命题都是真命题：

①若四边形是平行四边形，则这个四边形的两组对边分别相等；

②若四边形是平行四边形，则这个四边形的一组对边平行且相等；

③若四边形是平行四边形，则这个四边形的两条对角线互相平分.

这表明，“四边形的两组对边分别相等”“四边形的一组对边平行且相等”“四边形的两条对角线互相平分”都是“四边形是平行四边形”的必要条件.

我们知道，例 2 中命题(1)及上述命题①②③均为平行四边形的性质定理. 所以，平行四边形的每条性质定理都给出了“四边形是平行四边形”的一个必要条件. 类似地，平行线的每条性质定理都给出了“两直线平行”的一个必要条件，例如“同位角相等”是“两直线平行”的必要条件，也就是说，如果同位角不相等，那么就不可能有“两直线平行”.

一般地，数学中的每一条性质定理都给出了相应数学结论成立的一个必要条件.

练习

1. 下列“若 p，则 q”形式的命题中，哪些命题中的 p 是 q 的充分条件？

   (1) 若平面内点 P 在线段 AB 的垂直平分线上，则 $PA=PB$；

   (2) 若两个三角形的两边及一边所对的角分别相等，则这两个三角形全等；

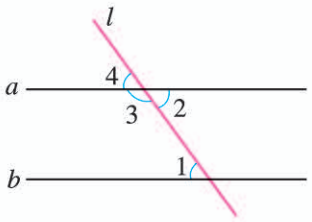
   (3) 若两个三角形相似，则这两个三角形的面积比等于周长比的平方.

2. 下列“若 p，则 q”形式的命题中，哪些命题中的 q 是 p 的必要条件？

   (1) 若直线 l 与⊙O 有且仅有一个交点，则 l 为⊙O 的一条切线；

   (2) 若 x 是无理数，则 x^2 也是无理数.

3. 如图，直线 a 与 b 被直线 l 所截，分别得到了∠1，∠2，∠3 和∠4. 请根据这些信息，写出几个“$a\parallel b$”的充分条件和必要条件.



(第 3 题)

1.4.2 充要条件

思考

下列“若 p，则 q”形式的命题中，哪些命题与它们的逆命题都是真命题？

(1) 若两个三角形的两角和其中一角所对的边分别相等，则这两个三角形全等；

(2) 若两个三角形全等，则这两个三角形的周长相等；

(3) 若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根，则 $ac<0$；

(4) 若 $A\cup B$ 是空集，则 A 与 B 均是空集.

不难发现，上述命题中的命题 (1)(4) 和它们的逆命题都是真命题；命题 (2) 是真命题，但它的逆命题是假命题；命题 (3) 是假命题，但它的逆命题是真命题.

如果“若 p，则 q”和它的逆命题“若 q，则 p”均是真命题，即既有 $p\Rightarrow q$，又有 $q\Rightarrow p$，就记作

将命题“若 p，则 q”中的条件 p 和结论 q 互换，就得到一个新的命题“若 q，则 p”，称这个命题为原命题的逆命题.

$$p \Leftrightarrow q.$$

此时，p 既是 q 的充分条件，也是 q 的必要条件，我们说 p 是 q 的**充分必要条件**，简称为**充要条件**（necessary and sufficient condition）. 显然，如果 p 是 q 的充要条件，那么 q 也是 p 的充要条件.

概括地说，如果 $p \Leftrightarrow q$，那么 p 与 q 互为充要条件. 上述命题（1）(4) 中的 p 与 q 互为充要条件.

例 3 下列各题中，哪些 p 是 q 的充要条件?

（1）p：四边形是正方形，q：四边形的对角线互相垂直且平分；

（2）p：两个三角形相似，q：两个三角形三边成比例；

（3）p：$xy>0$，q：$x>0$，$y>0$；

（4）p：$x=1$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根，q：$a+b+c=0$（$a\neq 0$）.

解：（1）因为对角线互相垂直且平分的四边形不一定是正方形（为什么），所以 $q \nRightarrow p$，所以 p 不是 q 的充要条件.

（2）因为“若 p，则 q”是相似三角形的性质定理，“若 q，则 p”是相似三角形的判定定理，所以它们均为真命题，即 $p \Leftrightarrow q$，所以 p 是 q 的充要条件.

（3）因为 $xy>0$ 时，$x>0$，$y>0$ 不一定成立（为什么），所以 $p \nRightarrow q$，所以 p 不是 q 的充要条件.

（4）因为“若 p，则 q”与“若 q，则 p”均为真命题，即 $p \Leftrightarrow q$，所以 p 是 q 的充要条件.

探究

通过上面的学习，你能给出“四边形是平行四边形”的充要条件吗?

可以发现，“四边形的两组对角分别相等”“四边形的两组对边分别相等”“四边形的一组对边平行且相等”和“四边形的对角线互相平分”既是“四边形是平行四边形”的充分条件，又是必要条件，所以它们都是“四边形是平行四边形”的充要条件.

另外，我们再看平行四边形的定义：

两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形，

它表明“四边形的两组对边分别平行”也是“四边形是平行四边形”的一个充要条件.

上面的这些充要条件从不同角度刻画了“平行四边形”这个概念，据此我们可以给出平行四边形的其他定义形式. 例如：

两组对边分别相等的四边形叫做平行四边形；

对角线互相平分的四边形叫做平行四边形.

类似地，利用“两个三角形全等”的充要条件，可以给出“三角形全等”的其他定义

形式，而且这些定义是相互等价的；同样，利用“两个三角形相似”的充要条件，可以给出“相似三角形”其他定义形式，这些定义也是相互等价的；等等.

例 4 已知：⊙O 的半径为 r，圆心 O 到直线 l 的距离为 d. 求证：$d=r$ 是直线 l 与⊙O 相切的充要条件.

分析： 设 p：$d=r$，q：直线 l 与⊙O 相切. 要证 p 是 q 的充要条件，只需分别证明充分性（$p\Rightarrow q$）和必要性（$q\Rightarrow p$）即可.

证明： 设 p：$d=r$，q：直线 l 与⊙O 相切.

（1）充分性（$p\Rightarrow q$）：如图 1.4-2，作 $OP\perp l$ 于点 P，则 $OP=d$. 若 $d=r$，则点 P 在⊙O 上. 在直线 l 上任取一点 Q（异于点 P），连接 OQ. 在 Rt△OPQ 中，$OQ>OP=r$. 所以，除点 P 外直线 l 上的点都在⊙O 的外部，即直线 l 与⊙O 仅有一个公共点 P. 所以直线 l 与⊙O 相切.

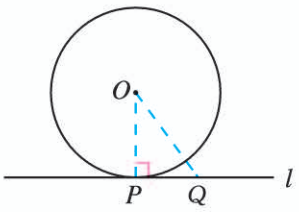


图 1.4-2

（2）必要性（$q\Rightarrow p$）：若直线 l 与⊙O 相切，不妨设切点为 P，则 $OP\perp l$. 因此，$d=OP=r$.

由（1）(2) 可得，$d=r$ 是直线 l 与⊙O 相切的充要条件.

练习

1. 下列各题中，哪些 p 是 q 的充要条件？

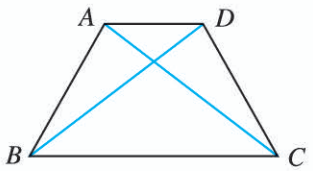
（1）p：三角形为等腰三角形，q：三角形存在两角相等；

（2）p：⊙O 内两条弦相等，q：⊙O 内两条弦所对的圆周角相等；

（3）p：$A\cap B$ 为空集，q：A 与 B 之一为空集.

2. 分别写出“两个三角形全等”和“两个三角形相似”的几个充要条件.

3. 证明：如图，梯形 $ABCD$ 为等腰梯形的充要条件为 $AC=BD$.



（第 3 题）

习题 1.4

复习巩固

1. 举例说明：

（1）p 是 q 的充分不必要条件；

（2）p 是 q 的必要不充分条件；

（3）p 是 q 的充要条件.

2. 在下列各题中，判断 p 是 q 的什么条件（请用“充分不必要条件”“必要不充分条件”“充要条件”“既不充分也不必要条件”回答）：

(1) p：三角形是等腰三角形，q：三角形是等边三角形；

(2) p：一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实数根，q：$b^2-4ac\geqslant 0$（$a\neq 0$）；

(3) p：$a\in P\cap Q$，q：$a\in P$；

(4) p：$a\in P\cup Q$，q：$a\in P$；

(5) p：$x>y$，q：$x^2>y^2$.

3. 判断下列命题的真假：

(1) 点 P 到圆心 O 的距离大于圆的半径是点 P 在⊙O 外的充要条件；

(2) 两个三角形的面积相等是这两个三角形全等的充分不必要条件；

(3) $A\cup B=A$ 是 $B\subseteq A$ 的必要不充分条件；

(4) x 或 y 为有理数是 xy 为有理数的既不充分也不必要条件.

综合运用

4. 已知 $A=\{x\mid x$ 满足条件 $p\}$，$B=\{x\mid x$ 满足条件 $q\}$，

(1) 如果 $A\subseteq B$，那么 p 是 q 的什么条件？

(2) 如果 $B\subseteq A$，那么 p 是 q 的什么条件？

(3) 如果 $A=B$，那么 p 是 q 的什么条件？

5. 设 a，b，$c\in\mathbf{R}$. 证明：$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$ 的充要条件是 $a=b=c$.

拓广探索

6. 设 a，b，c 分别是△ABC 的三条边，且 $a\leqslant b\leqslant c$. 我们知道，如果△ABC 为直角三角形，那么 $a^2+b^2=c^2$（勾股定理）. 反过来，如果 $a^2+b^2=c^2$，那么△ABC 为直角三角形（勾股定理的逆定理）. 由此可知，△ABC 为直角三角形的充要条件是 $a^2+b^2=c^2$.

请利用边长 a，b，c 分别给出△ABC 为锐角三角形和钝角三角形的一个充要条件，并证明.

人教版®

阅读与思考

几何命题与充分条件、必要条件

通过前面的学习我们发现，对于一种几何图形或几何图形之间的关系，可以通过充要条件给出它的等价定义，通过充分条件给出它的判定定理，通过必要条件给出它的性质定理. 利用充分条件、必要条件梳理已学的几何命题，可以促进我们更深入地理解几何图形及其关系. 下面以相似三角形为例进行说明.

为了方便，我们记 q：两个三角形相似.

1. 相似三角形的定义

三角形的相似是三角形之间的一种关系，它的定义是：三个角分别相等、三条边成比例的两个三角形叫做相似三角形.

记 p：三个角分别相等且三条边成比例. 因为 $p \Rightarrow q$，$q \Rightarrow p$，所以 p 是 q 的充要条件.

三条边、三个内角是三角形的六个要素，相似三角形的定义从两个三角形各要素间的相互关系给出了两个三角形相似的充要条件.

2. 相似三角形的判定

相似三角形的判定指出了“满足什么条件的两个三角形相似”. 初中学过如下判定定理：

(1) 三边成比例的两个三角形相似；

(2) 两边成比例且夹角相等的两个三角形相似；

(3) 两角分别相等的两个三角形相似.

记 p_1：三边成比例，p_2：两边成比例且夹角相等，p_3：两角分别相等，我们有 $p_1 \Rightarrow q$，$p_2 \Rightarrow q$，$p_3 \Rightarrow q$，即 p_1，p_2，p_3 分别给出了 q 的一个充分条件.

上述判定定理分别从两个三角形的边、边角、角等要素之间的相互关系给出了相似三角形的充分条件. 事实上，我们还可以给出相似三角形的其他充分条件，例如“相似于同一个三角形的两个三角形相似”(这表明，“相似”具有传递性).

利用判定定理我们可以判定两个三角形**是**相似三角形.

想一想：(1) 你能给出相似三角形的其他充分条件吗？(2) 利用判定定理可以判定两个三角形**不是**相似三角形吗？为什么？

3. 相似三角形的性质

相似三角形的性质给出了两个三角形相似所必须满足的条件. 换言之，如果不满足这个条件，那么这两个三角形就一定不相似. 在初中，我们学过的相似三角形性质定理有：

（1）相似三角形对应线段的比都相等（等于相似比），特别地，相似三角形的对应边之比、对应高之比、对应中线之比、对应角平分线之比都相等（等于相似比）；

（2）相似三角形的对应角相等；

（3）相似三角形周长的比等于对应边之比（相似比）；

（4）相似三角形面积的比等于对应边之比的平方（相似比的平方）.

记r_1：对应线段的比等于相似比，r_2：对应角相等，r_3：周长的比等于对应边之比，r_4：面积的比等于对应边之比的平方，我们有$q \Rightarrow r_1$，$q \Rightarrow r_2$，$q \Rightarrow r_3$，$q \Rightarrow r_4$，即r_1，r_2，r_3，r_4分别给出了q的一个必要条件. 例如，如果r_1不成立，即对应线段的比不全相等，那么这两个三角形就一定不相似. 因此，利用性质定理可以判定两个三角形**不是**相似三角形.

想一想：利用性质定理可以判定两个三角形**是**相似三角形吗？为什么？

以上性质定理分别从三角形的要素、三角形中的重要线段及重要几何量等方面给出了相似三角形的必要条件. 你能给出相似三角形的其他必要条件吗？

分析上述命题，可以发现，有些条件是q的充要条件，例如$p_1(r_1)$，p_2，$p_3(r_2)$，据此可以构造出相似三角形的等价定义：

（1）三边成比例的两个三角形叫做相似三角形；

（2）两边成比例且夹角相等的两个三角形叫做相似三角形；

（3）两角分别相等的两个三角形叫做相似三角形.

由上述任意一个定义出发，我们也可以推出相似三角形的其他性质，你能试一试吗？

请你仿照上述思路，对等腰三角形、直角三角形、平行四边形（矩形、菱形、正方形）等图形的知识进行梳理.

1.5 全称量词与存在量词

我们知道，命题是可以判断真假的陈述句. 在数学中，有时会遇到一些含有变量的陈述句，由于不知道变量代表什么数，无法判断真假，因此它们不是命题. 但是，如果在原语句的基础上，用一个短语对变量的取值范围进行限定，就可以使它们成为一个命题，我们把这样的短语称为量词. 本节将学习全称量词和存在量词，以及如何正确地对含有一个量词的命题进行否定.

1.5.1 全称量词与存在量词

思考

下列语句是命题吗？比较（1）和（3），（2）和（4），它们之间有什么关系？

（1）$x>3$；

（2）$2x+1$ 是整数；

（3）对所有的 $x\in\mathbf{R}$，$x>3$；

（4）对任意一个 $x\in\mathbf{Z}$，$2x+1$ 是整数.

语句（1）(2) 中含有变量 x，由于不知道变量 x 代表什么数，无法判断它们的真假，所以它们不是命题. 语句（3）在（1）的基础上，用短语“所有的”对变量 x 进行限定；语句（4）在（2）的基础上，用短语“任意一个”对变量 x 进行限定，从而使（3）(4) 成为可以判断真假的语句，因此语句（3）(4) 是命题.

短语“所有的”“任意一个”在逻辑中通常叫做**全称量词**（universal quantifier），并用符号“$\forall$”表示. 含有全称量词的命题，叫做**全称量词命题**. 例如，命题“对任意的 $n\in\mathbf{Z}$，$2n+1$ 是奇数”“所有的正方形都是矩形”都是全称量词命题.

常见的全称量词还有“一切”“每一个”“任给”等.

通常，将含有变量 x 的语句用 $p(x)$，$q(x)$，$r(x)$，… 表示，变量 x 的取值范围用 M 表示. 那么，全称量词命题“对 M 中任意一个 x，$p(x)$ 成立”可用符号简记为

$$\forall x\in M,\ p(x).$$

例 1 判断下列全称量词命题的真假：

(1) 所有的素数[1]都是奇数；

(2) $\forall x\in\mathbf{R}$，$|x|+1\geqslant 1$；

(3) 对任意一个无理数 x，x^2 也是无理数.

分析： 要判定全称量词命题“$\forall x\in M$，$p(x)$”是真命题，需要对集合 M 中每个元素 x，证明 $p(x)$ 成立；如果在集合 M 中找到一个元素 x_0，使 $p(x_0)$ 不成立，那么这个全称量词命题就是假命题.[2]

解： (1) 2 是素数，但 2 不是奇数. 所以，全称量词命题“所有的素数是奇数”是假命题.

(2) $\forall x\in\mathbf{R}$，总有 $|x|\geqslant 0$，因而 $|x|+1\geqslant 1$. 所以，全称量词命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，$|x|+1\geqslant 1$”是真命题.

(3) $\sqrt{2}$ 是无理数，但 $(\sqrt{2})^2=2$ 是有理数. 所以，全称量词命题“对每一个无理数 x，x^2 也是无理数”是假命题.

[1] 如果一个大于 1 的整数，除 1 和自身外无其他正因数，则称这个正整数为素数.

[2] 这个方法就是“举反例”.

思考

下列语句是命题吗？比较 (1) 和 (3)，(2) 和 (4)，它们之间有什么关系？

(1) $2x+1=3$；

(2) x 能被 2 和 3 整除；

(3) 存在一个 $x\in\mathbf{R}$，使 $2x+1=3$；

(4) 至少有一个 $x\in\mathbf{Z}$，x 能被 2 和 3 整除.

容易判断，(1)(2) 不是命题. 语句 (3) 在 (1) 的基础上，用短语“存在一个”对变量 x 的取值进行限定；语句 (4) 在 (2) 的基础上，用“至少有一个”对变量 x 的取值进行限定，从而使 (3)(4) 变成了可以判断真假的陈述句，因此 (3)(4) 是命题.

短语“存在一个”“至少有一个”在逻辑中通常叫做**存在量词**(existential quantifier)，并用符号“$\exists$”表示. 含有存在量词的命题，叫做**存在量词命题**.

例如，命题“有的平行四边形是菱形”“有一个素数不是奇数”都是存在量词命题.

存在量词命题“存在 M 中的元素 x，$p(x)$ 成立”可用符号简记为

$$\exists x\in M,\ p(x).$$

常见的存在量词还有“有些”“有一个”“对某些”“有的”等.

例 2 判断下列存在量词命题的真假：

（1）有一个实数 x，使 $x^2+2x+3=0$；

（2）平面内存在两条相交直线垂直于同一条直线；

（3）有些平行四边形是菱形.

分析： 要判定存在量词命题“$\exists x\in M$，$p(x)$”是真命题，只需在集合 M 中找到一个元素 x，使 $p(x)$成立即可；如果在集合 M 中，使 $p(x)$成立的元素 x 不存在，那么这个存在量词命题是假命题.

解：（1）由于 $\Delta=2^2-4\times3=-8<0$，因此一元二次方程 $x^2+2x+3=0$ 无实根. 所以，存在量词命题“有一个实数 x，使 $x^2+2x+3=0$”是假命题.

（2）由于平面内垂直于同一条直线的两条直线互相平行，因此平面内不可能存在两条相交直线垂直于同一条直线. 所以，存在量词命题“平面内存在两条相交直线垂直于同一条直线”是假命题.

（3）由于正方形既是平行四边形又是菱形，所以存在量词命题“有些平行四边形是菱形”是真命题.

练习

1. 判断下列全称量词命题的真假：

（1）每个四边形的内角和都是 $360°$；

（2）任何实数都有算术平方根；

（3）$\forall x\in\{y\mid y$ 是无理数$\}$，x^3 是无理数.

2. 判断下列存在量词命题的真假：

（1）存在一个四边形，它的两条对角线互相垂直；

（2）至少有一个整数 n，使得 n^2+n 为奇数；

（3）$\exists x\in\{y\mid y$ 是无理数$\}$，x^2 是无理数.

1.5.2 全称量词命题和存在量词命题的否定

一般地，对一个命题进行否定，就可以得到一个新的命题，这一新命题称为原命题的否定. 例如，“56 是 7 的倍数”的否定为“56 不是 7 的倍数”，“空集是集合 $A=\{1,2,3\}$ 的真子集”的否定为“空集不是集合 $A=\{1,2,3\}$ 的真子集”. 下面，我们学习利用存在量词对全称量词命题进行否定，以及利用全称量词对存在量词命题进行否定.

一个命题和它的否定不能同时为真命题，也不能同时为假命题，只能一真一假.

探究

写出下列命题的否定：

(1) 所有的矩形都是平行四边形；

(2) 每一个素数都是奇数；

(3) $\forall x\in\mathbf{R}$，$x+|x|\geqslant 0$.

它们与原命题在形式上有什么变化？

上面三个命题都是全称量词命题，即具有“$\forall x\in M$，$p(x)$”的形式. 其中命题 (1) 的否定是“并非所有的矩形都是平行四边形”，也就是说，

存在一个矩形不是平行四边形；

命题 (2) 的否定是“并非每一个素数都是奇数”，也就是说，

存在一个素数不是奇数；

命题 (3) 的否定是“并非所有的 $x\in\mathbf{R}$，$x+|x|\geqslant 0$”，也就是说，

$$\exists x\in\mathbf{R},\ x+|x|<0.$$

从命题形式看，这三个全称量词命题的否定都变成了存在量词命题.

一般来说，对含有一个量词的全称量词命题进行否定，我们只需把“所有的”“任意一个”等全称量词，变成“并非所有的”“并非任意一个”等短语即可. 也就是说，假定全称量词命题为“$\forall x\in M$，$p(x)$”，则它的否定为“并非 $\forall x\in M$，$p(x)$”，也就是“$\exists x\in M$，$p(x)$不成立”. 通常，用符号“$\neg p(x)$”表示“$p(x)$不成立”.

对于含有一个量词的全称量词命题的否定，有下面的结论：

全称量词命题：

$$\forall x\in M,\ p(x),$$

它的否定：

$$\exists x\in M,\ \neg p(x).$$

也就是说，全称量词命题的否定是存在量词命题.

例 3 写出下列全称量词命题的否定：

(1) 所有能被 3 整除的整数都是奇数；

(2) 每一个四边形的四个顶点在同一个圆上；

(3) 对任意 $x\in\mathbf{Z}$，x^2的个位数字不等于 3.

解：(1) 该命题的否定：存在一个能被 3 整除的整数不是奇数.

(2) 该命题的否定：存在一个四边形，它的四个顶点不在同一个圆上.

(3) 该命题的否定：$\exists x\in\mathbf{Z}$，x^2的个位数字等于 3.

探究

写出下列命题的否定：

(1) 存在一个实数的绝对值是正数；

(2) 有些平行四边形是菱形；

(3) $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-2x+3=0$.

它们与原命题在形式上有什么变化？

这三个命题都是存在量词命题，即具有“$\exists x\in M$，$p(x)$”的形式. 其中命题 (1) 的否定是“不存在一个实数，它的绝对值是正数”，也就是说，

所有实数的绝对值都不是正数；

命题 (2) 的否定是“没有一个平行四边形是菱形”，也就是说，

每一个平行四边形都不是菱形；

命题 (3) 的否定是“不存在 $x\in\mathbf{R}$，$x^2-2x+3=0$”，也就是说，

$$\forall x\in\mathbf{R},\ x^2-2x+3\neq 0.$$

从命题形式看，这三个存在量词命题的否定都变成了全称量词命题.

一般来说，对含有一个量词的存在量词命题进行否定，我们只需把“存在一个”“至少有一个”“有些”等存在量词，变成“不存在一个”“没有一个”等短语即可. 也就是说，假定存在量词命题为“$\exists x\in M$，$p(x)$”，则它的否定为“不存在 $x\in M$，使 $p(x)$ 成立”，也就是“$\forall x\in M$，$p(x)$ 不成立”.

对含有一个量词的存在量词命题的否定，有下面的结论：

存在量词命题：

$$\exists x\in M,\ p(x),$$

它的否定：

$$\forall x\in M,\ \neg p(x).$$

也就是说，存在量词命题的否定是全称量词命题.

例 4 写出下列存在量词命题的否定：

(1) $\exists x\in\mathbf{R}$，$x+2\leqslant 0$；

(2) 有的三角形是等边三角形；

(3) 有一个偶数是素数.

解： (1) 该命题的否定：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x+2>0$.

(2) 该命题的否定：所有的三角形都不是等边三角形.

(3) 该命题的否定：任意一个偶数都不是素数.

例 5 写出下列命题的否定，并判断真假：

（1）任意两个等边三角形都相似；

（2）$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+1=0$.

解：（1）该命题的否定：存在两个等边三角形，它们不相似. 因为任意两个等边三角形的三边成比例，所以任意两个等边三角形都相似. 因此这是一个假命题.

（2）该命题的否定：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+1\neq 0$. 因为对任意 $x\in\mathbf{R}$，

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,$$

所以这是一个真命题.

练习

1. 写出下列命题的否定：

（1）$\forall n\in\mathbf{Z}$，$n\in\mathbf{Q}$；

（2）任意奇数的平方还是奇数；

（3）每个平行四边形都是中心对称图形.

2. 写出下列命题的否定：

（1）有些三角形是直角三角形；

（2）有些梯形是等腰梯形；

（3）存在一个实数，它的绝对值不是正数.

习题 1.5

复习巩固

1. 判断下列全称量词命题的真假：

（1）每一个末位是 0 的整数都是 5 的倍数；

（2）线段垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等；

（3）对任意负数 x，x 的平方是正数；

（4）梯形的对角线相等.

2. 判断下列存在量词命题的真假：

（1）有些实数是无限不循环小数；

（2）存在一个三角形不是等腰三角形；

（3）有些菱形是正方形；

（4）至少有一个整数 n，n^2+1 是 4 的倍数.

3. 写出下列命题的否定：

（1）$\forall x\in\mathbf{Z}$，$|x|\in\mathbf{N}$；

(2) 所有可以被 5 整除的整数，末位数字都是 0；

(3) $\exists x \in \mathbf{R}$，$x+1 \geqslant 0$；

(4) 存在一个四边形，它的对角线互相垂直.

综合运用

4. 判断下列命题的真假，并写出这些命题的否定：

(1) 平面直角坐标系下每条直线都与 x 轴相交；

(2) 每个二次函数的图象都是轴对称图形；

(3) 存在一个三角形，它的内角和小于 180°；

(4) 存在一个四边形，它的四个顶点不在同一个圆上.

5. 将下列命题改写成含有一个量词的全称量词命题或存在量词命题的形式，并写出它们的否定：

(1) 平行四边形的对角线互相平分；

(2) 三个连续整数的乘积是 6 的倍数；

(3) 三角形不都是中心对称图形；

(4) 一元二次方程不总有实数根.

拓广探索

6. 在本节，我们介绍了命题的否定的概念，知道一个命题的否定仍是一个命题，它和原先的命题只能一真一假，不能同真或同假.

在数学中，有很多“若 p，则 q”形式的命题，有的是真命题，有的是假命题. 例如：

① 若 $x>1$，则 $2x+1>5$；(假命题)

② 若四边形为等腰梯形，则这个四边形的对角线相等.(真命题)

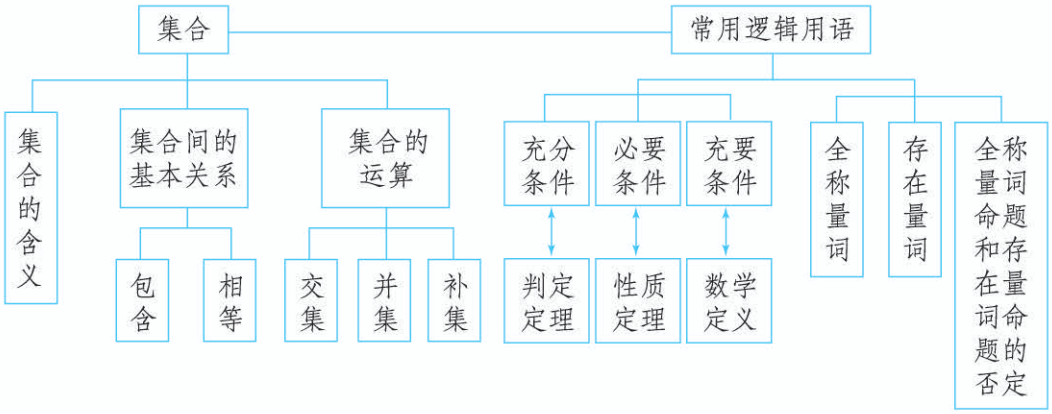
这里，命题①②都是省略了量词的全称量词命题.

(1) 有人认为，①的否定是“若 $x>1$，则 $2x+1 \leqslant 5$”，②的否定是“若四边形为等腰梯形，则这个四边形的对角线不相等”. 你认为对吗？如果不对，请你正确地写出命题①②的否定.

(2) 请你列举几个“若 p，则 q”形式的省略了量词的全称量词命题，分别写出它们的否定，并判断真假.

小结

一、 本章知识结构



二、 回顾与思考

本章我们学习了集合的有关概念、关系和运算，还学习了充分条件、必要条件、充要条件，全称量词、存在量词、全称量词命题与存在量词命题的否定. 这些知识在后续学习中会得到大量应用，是进一步学习的重要基础.

为了有效使用集合语言表述数学的研究对象，首先应掌握集合语言的表述方式. 为此，我们先学习了集合的含义，明确了集合中元素的确定性、无序性和互异性等特征；再学习了列举法、描述法等集合的表示法，其中描述法利用了研究对象的某种特征，需要先理解研究对象的性质；类比数与数的关系，我们研究了集合之间的包含关系与相等关系，这些关系是由元素与集合的关系决定的，其中集合的相等关系很重要；类比数的运算，我们学习了集合的交、并、补运算，通过这些运算可以得到与原有集合紧密关联的集合，由此可以表示研究对象的某些关系，从中我们可以体会到，数学中的运算并不局限于数的运算，这对提升我们的数学运算素养是很有意义的. 在学习中，要注意“集合的含义与表示—集合的关系—集合的运算”这个研究路径.

常用逻辑用语是数学语言的重要组成部分，是逻辑思维的基本语言，也是数学表达和交流的工具. 结合初中学过的平面几何和代数知识，我们学习了常用逻辑用语，发现初中学过的数学定义、定理、命题都可以用常用逻辑用语表达，利用常用逻辑用语表述数学内容、进行推理论证，可以大大提升表述的逻辑性和准确性，从而提升我们的逻辑推理素养.

本章的学习不仅要为后续学习做好知识技能的准备，更重要的是要为整个高中数学学习做好心理准备，初步形成适合高中数学学习的方式方法，使我们

能更好地适应高中数学学习.

请你带着下面的问题，复习一下全章的内容吧！

1. 集合中的元素具有确定性、互异性和无序性，你能结合例子说明这些特性吗？

2. 你能用集合表示平面内线段 AB 的垂直平分线吗？结合集合的描述法谈谈你的体会.

3. 用联系的观点看问题，可以使我们更深刻地理解数学知识. 本章中，我们类比数与数的关系和运算研究了集合与集合的关系和运算. 你认为这样的类比对发现和提出集合的问题有什么意义？你能类比数的减法运算给出集合的减法运算吗？

4. 对给定的 p 和 q，如何判定 p 是 q 的充分不必要条件、必要不充分条件、充要条件、既不充分也不必要条件？你能举例说明吗？

5. 如何否定含有一个量词的全称量词命题和存在量词命题？你能举例说明吗？

复习参考题 1

复习巩固

1. 用列举法表示下列集合：

   (1) $A=\{x\mid x^2=9\}$；　　(2) $B=\{x\in\mathbf{N}\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$；

   (3) $C=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$.

2. 设 P 表示平面内的动点，属于下列集合的点组成什么图形？

   (1) $\{P\mid PA=PB\}$（A，B 是两个不同定点）；

   (2) $\{P\mid PO=3\text{ cm}\}$（O 是定点）.

3. 设平面内有$\triangle ABC$，且 P 表示这个平面内的动点，指出属于集合$\{P\mid PA=PB\}\cap\{P\mid PA=PC\}$的点是什么.

4. 请用“充分不必要条件”“必要不充分条件”“充要条件”“既不充分也不必要条件”填空：

   (1) 三角形两边上的高相等是这个三角形为等腰三角形的_____；

   (2) $x\in A$ 是 $x\in A\cup B$ 的_____；

   (3) $x\in A$ 是 $x\in A\cap B$ 的_____；

   (4) x，y 为无理数是 $x+y$ 为无理数的_____.

5. 已知 a，b，c 是实数，判断下列命题的真假：

   (1) “$a>b$” 是 “$a^2>b^2$” 的充分条件；（　　）

   (2) “$a>b$” 是 “$a^2>b^2$” 的必要条件；（　　）

(3) “$a>b$”是“$ac^2>bc^2$”的充分条件；（　　）

(4) “$a>b$”是“$ac^2>bc^2$”的必要条件.（　　）

6. 用符号“$\forall$”与“$\exists$”表示下列含有量词的命题，并判断真假：

(1) 任意实数的平方大于或等于 0；

(2) 对任意实数 a，二次函数 $y=x^2+a$ 的图象关于 y 轴对称；

(3) 存在整数 x，y，使得 $2x+4y=3$；

(4) 存在一个无理数，它的立方是有理数.

7. 写出下列命题的否定，并判断它们的真假：

(1) $\forall a\in\mathbf{R}$，一元二次方程 $x^2-ax-1=0$ 有实根；

(2) 每个正方形都是平行四边形；

(3) $\exists m\in\mathbf{N}$，$\sqrt{m^2+1}\in\mathbf{N}$；

(4) 存在一个四边形 $ABCD$，其内角和不等于 360°.

综合运用

8. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid 2x-y=0\}$，$B=\{(x,y)\mid 3x+y=0\}$，$C=\{(x,y)\mid 2x-y=3\}$，求 $A\cap B$，$A\cap C$，并解释它们的几何意义.

9. 已知集合 $A=\{1,3,a^2\}$，$B=\{1,a+2\}$，是否存在实数 a，使得 $A\cup B=A$？若存在，试求出实数 a 的值；若不存在，请说明理由.

10. 把下列定理表示的命题写成含有量词的命题：

(1) 勾股定理；

(2) 三角形内角和定理.

拓广探索

11. 学校举办运动会时，高一（1）班共有 28 名同学参加比赛，有 15 人参加游泳比赛，有 8 人参加田径比赛，有 14 人参加球类比赛，同时参加游泳比赛和田径比赛的有 3 人，同时参加游泳比赛和球类比赛的有 3 人，没有人同时参加三项比赛. 同时参加田径和球类比赛的有多少人？只参加游泳一项比赛的有多少人？

12. 根据下述事实，分别写出含有量词的全称量词命题或存在量词命题：

(1) $1=1^2$，

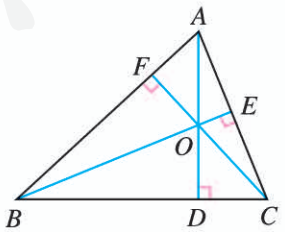
$1+3=2^2$，

$1+3+5=3^2$，

$1+3+5+7=4^2$，

$1+3+5+7+9=5^2$，

……



（第 12（2）题）

(2) 如图，在$\triangle ABC$ 中，AD，BE 与 CF 分别为 BC，AC 与 AB 边上的高，则 AD，BE 与 CF 所在的直线交于一点 O.

第二章
一元二次函数、方程和不等式

相等关系和不等关系是数学中最基本的数量关系. 我们可以利用相等关系、不等关系构建方程、不等式，再通过方程、不等式解决数学内外的各种问题. 在初中，我们已学过一次函数与方程、不等式，还学过二次函数与一元二次方程，知道方程（组）、不等式与函数之间具有内在联系，可以用函数的观点把它们统一起来，这是数学知识的联系性与整体性的体现.

本章将在初中学习的基础上，通过具体实例理解不等式，认识不等关系和不等式的意义与价值；在梳理等式性质的基础上，通过类比，研究不等式的性质，并利用这些性质研究一类重要的不等式——基本不等式；通过从实际情境中抽象一元二次不等式的过程，了解一元二次不等式的现实意义，理解一元二次不等式的概念，并像利用一次函数、方程和不等式的关系解决一元一次不等式的问题那样，利用二次函数、方程和不等式的关系解决一元二次不等式的有关问题，从而进一步体会用函数观点统一方程和不等式的数学思想方法.



2.1 等式性质与不等式性质

在现实世界和日常生活中，大量存在着相等关系和不等关系，例如多与少、大与小、长与短、高与矮、远与近、快与慢、涨与跌、轻与重、不超过或不少于等. 类似于这样的问题，反映在数量关系上，就是相等与不等. 相等用等式表示，不等用不等式表示.

问题 1 你能用不等式或不等式组表示下列问题中的不等关系吗?

(1) 某路段限速 40 km/h;

(2) 某品牌酸奶的质量检查规定，酸奶中脂肪的含量 f 应不少于 2.5%，蛋白质的含量 p 应不少于 2.3%;

(3) 三角形两边之和大于第三边、两边之差小于第三边;

(4) 连接直线外一点与直线上各点的所有线段中，垂线段最短.

对于 (1)，设在该路段行驶的汽车的速度为 v km/h，“限速 40 km/h”就是 v 的大小不能超过 40，于是 $0<v\leqslant 40$.

对于 (2)，由题意，得 $\begin{cases} f\geqslant 2.5\%, \\ p\geqslant 2.3\%. \end{cases}$

对于 (3)，设 $\triangle ABC$ 的三条边为 a，b，c，则 $a+b>c$，$a-b<c$.[1]

对于 (4)，如图 2.1-1，设 C 是直线 AB 外的任意一点，CD 垂直于 AB，垂足为 D，E 是直线 AB 上不同于 D 的任意一点，则 $CD<CE$.

[1] 你能写出其他的可能情况吗?

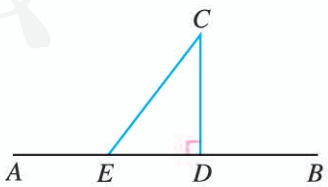


图 2.1-1

以上我们根据实际问题所蕴含的不等关系抽象出了不等式. 接着，就可以用不等式研究相应的问题了.

问题 2 某种杂志原以每本 2.5 元的价格销售，可以售出 8 万本. 据市场调查，杂志的单价每提高 0.1 元，销售量就可能减少 2 000 本. 如何定价才能使提价后的销售总收入

不低于 20 万元?

设提价后每本杂志的定价为 x 元，则销售总收入为$\left(8-\dfrac{x-2.5}{0.1}\times 0.2\right)x$ 万元. 于是，不等关系“销售总收入不低于 20 万元”可以用不等式表示为

$$\left(8-\frac{x-2.5}{0.1}\times 0.2\right)x\geqslant 20. \qquad ①$$

求出不等式①的解集，就能知道满足条件的杂志的定价范围.

如何解不等式①呢？与解方程要用等式的性质一样，解不等式要用不等式的性质. 为此，我们需要先研究不等式的性质.

实际上，在初中我们已经通过具体实例归纳出了一些不等式的性质. 那么，这些性质为什么是正确的？还有其他不等式的性质吗？回答这些问题要用到关于两个实数大小关系的基本事实.

由于数轴上的点与实数一一对应，所以可以利用数轴上点的位置关系来规定实数的大小关系：如图 2.1-2，设 a，b 是两个实数，它们在数轴上所对应的点分别是 A，B. 那么，当点 A 在点 B 的左边时，$a<b$；当点 A 在点 B 的右边时，$a>b$.

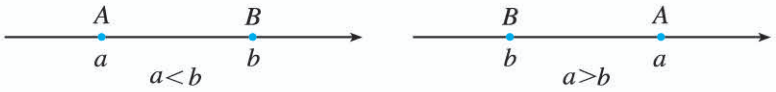


图 2.1-2

关于实数 a，b 大小的比较，有以下基本事实：

如果 $a-b$ 是正数，那么 $a>b$；如果 $a-b$ 等于 0，那么 $a=b$；如果 $a-b$ 是负数，那么 $a<b$. 反过来也对.

这个基本事实可以表示为

$$a>b\Leftrightarrow a-b>0;$$
$$a=b\Leftrightarrow a-b=0;$$
$$a<b\Leftrightarrow a-b<0.$$

从上述基本事实可知，要比较两个实数的大小，可以转化为比较它们的差与 0 的大小.

例 1 比较$(x+2)(x+3)$和$(x+1)(x+4)$的大小.

分析： 通过考察这两个多项式的差与 0 的大小关系，可以得出它们的大小关系.

解： 因为

$$\begin{aligned}&(x+2)(x+3)-(x+1)(x+4)\\=&(x^2+5x+6)-(x^2+5x+4)\\=&2>0,\end{aligned}$$

0 是正数与负数的分界点，它为实数比较大小提供了“标杆”.

所以

$$(x+2)(x+3)>(x+1)(x+4).$$

这里，我们借助多项式减法运算，得出了一个明显大于 0 的数（式）. 这是解决不等式问题的常用方法.

探究

图 2.1-3 是在北京召开的第 24 届国际数学家大会的会标，会标是根据中国古代数学家赵爽的弦图设计的，颜色的明暗使它看上去像一个风车，代表中国人民热情好客. 你能在这个图中找出一些相等关系和不等关系吗？



图 2.1-3

将图 2.1-3 中的“风车”抽象成图 2.1-4. 在正方形 $ABCD$ 中有 4 个全等的直角三角形. 设直角三角形的两条直角边的长为 a，b（$a\neq b$），那么正方形的边长为 $\sqrt{a^2+b^2}$. 这样，4 个直角三角形的面积和为 $2ab$，正方形的面积为 a^2+b^2. 由于正方形 $ABCD$ 的面积大于 4 个直角三角形的面积和，我们就得到了一个不等式

$$a^2+b^2>2ab.$$

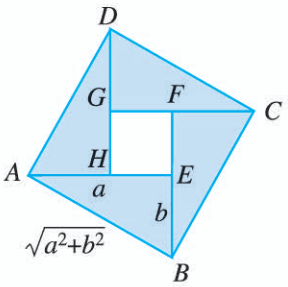


图 2.1-4

当直角三角形变为等腰直角三角形，即 $a=b$ 时，正方形 $EFGH$ 缩为一个点，这时有

$$a^2+b^2=2ab.$$

于是就有 $a^2+b^2\geqslant 2ab$.

一般地，$\forall a, b\in\mathbf{R}$，有

$$a^2+b^2\geqslant 2ab,$$

当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

事实上，利用完全平方公式，得

$$a^2+b^2-2ab=(a-b)^2.$$

因为 $\forall a, b\in\mathbf{R}$，$(a-b)^2\geqslant 0$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立，所以 $a^2+b^2-2ab\geqslant 0$. 因此，由两个实数大小关系的基本事实，得 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

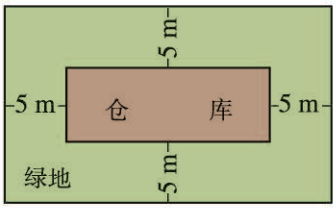
练习

1. 用不等式或不等式组表示下面的不等关系：

（1）某高速公路规定通过车辆的车货总高度 h（单位：m）从地面算起不能超过 4 m；

（2）a 与 b 的和是非负实数；

（3）如图，在一个面积小于 350 m^2 的矩形地基的中心位置上建造一个仓库，仓库的四周建成绿地，仓库的长 L（单位：m）大于宽 W（单位：m）的 4 倍.



（第 1（3）题）

2. 比较 $(x+3)(x+7)$ 和 $(x+4)(x+6)$ 的大小.

3. 已知 $a>b$，证明 $a>\dfrac{a+b}{2}>b$.

关于两个实数大小关系的基本事实为研究不等式的性质奠定了基础. 那么，不等式到底有哪些性质呢？

因为不等式与等式一样，都是对大小关系的刻画，所以我们可以从等式的性质及其研究方法中获得启发.

思考

请你先梳理等式的基本性质，再观察它们的共性. 你能归纳一下发现等式基本性质的方法吗？

等式有下面的基本性质：

性质 1　如果 $a=b$，那么 $b=a$；

性质 2　如果 $a=b$，$b=c$，那么 $a=c$；

性质 3　如果 $a=b$，那么 $a\pm c=b\pm c$；

性质 4　如果 $a=b$，那么 $ac=bc$；

性质 5　如果 $a=b$，$c\neq 0$，那么 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{c}$.

可以发现，性质 1，2 反映了相等关系自身的特性，性质 3，4，5 是从运算的角度提出的，反映了等式在运算中保持的不变性.

运算中的不变性就是性质.

探究

类比等式的基本性质，你能猜想不等式的基本性质，并加以证明吗？

类比等式的性质 1，2，可以猜想不等式有如下性质：

性质 1 如果 $a>b$，那么 $b<a$；如果 $b<a$，那么 $a>b$. 即

$$a>b \Leftrightarrow b<a.$$

性质 2 如果 $a>b$，$b>c$，那么 $a>c$. 即

$$a>b,\ b>c \Rightarrow a>c.$$

我们来证明性质 2：

由两个实数大小关系的基本事实知

$$\left.\begin{array}{l} a>b \Rightarrow a-b>0 \\ b>c \Rightarrow b-c>0 \end{array}\right\} \Rightarrow (a-b)+(b-c)>0$$

$$\Rightarrow a-c>0 \Rightarrow a>c.$$

类比等式的性质 3～5，可以猜想不等式还有如下性质：

性质 3 如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$.

这就是说，不等式的两边都加上同一个实数，所得不等式与原不等式同向.

如图 2.1-5，把数轴上的两个点 A 与 B 同时沿相同方向移动相等的距离，得到另两个点 A_1 与 B_1，A 与 B 和 A_1 与 B_1 的左右位置关系不会改变. 用不等式的语言表示，就是上述性质 3.

从不同角度表述不等式的性质，可以加深理解. 对其他不等式的性质，你能用文字语言表述吗？

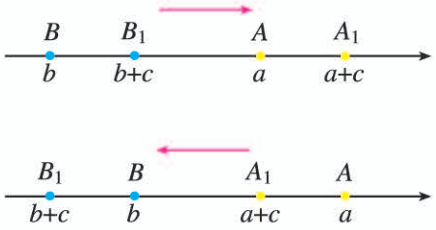


图 2.1-5

由性质 3 可得，

$$a+b>c \Rightarrow a+b+(-b)>c+(-b)$$

$$\Rightarrow a>c-b.$$

这表明，不等式中任何一项可以改变符号后移到不等号的另一边.

性质 4 如果 $a>b$，$c>0$，那么 $ac>bc$；如果 $a>b$，$c<0$，那么 $ac<bc$.

这就是说，不等式两边同乘一个正数，所得不等式与原不等式同向；不等式两边同乘一个负数，所得不等式与原不等式反向.

利用这些基本性质，我们还可以推导出其他一些常用的不等式的性质. 例如，利用性质 2，3 可以推出：

性质 5 如果 $a>b$，$c>d$，那么 $a+c>b+d$.

事实上，由 $a>b$ 和性质 3，得 $a+c>b+c$；由 $c>d$ 和性质 3，得 $b+c>b+d$. 再

根据性质 2，即得 $a+c>b+d$.

利用性质 4 和性质 2 可以推出：

性质 6 如果 $a>b>0$，$c>d>0$，那么 $ac>bd$.

性质 7 如果 $a>b>0$，那么 $a^n>b^n$（$n\in\mathbf{N}$，$n\geqslant 2$）.

实数大小关系的基本事实和不等式的性质是解决不等式问题的基本依据.

例 2 已知 $a>b>0$，$c<0$，求证 $\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$.

分析： 要证明 $\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$，因为 $c<0$，所以可以先证明 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$. 利用已知 $a>b>0$ 和性质 4，即可证明 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

证明： 因为 $a>b>0$，所以 $ab>0$，$\frac{1}{ab}>0$.

于是 $$a\cdot\frac{1}{ab}>b\cdot\frac{1}{ab},$$

即 $$\frac{1}{b}>\frac{1}{a}.$$

由 $c<0$，得 $\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$.

练习

1. 证明不等式性质 1，3，4，6.
2. 用不等号“$>$”或“$<$”填空：
   （1）如果 $a>b$，$c<d$，那么 $a-c$ _____ $b-d$；
   （2）如果 $a>b>0$，$c<d<0$，那么 ac _____ bd；
   （3）如果 $a>b>0$，那么 $\frac{1}{a^2}$ _____ $\frac{1}{b^2}$；
   （4）如果 $a>b>c>0$，那么 $\frac{c}{a}$ _____ $\frac{c}{b}$.

习题 2.1

复习巩固

1. 举出几个现实生活中与不等式有关的例子.
2. 某市环保局为增加城市的绿地面积，提出两个投资方案：方案 A 为一次性投资 500 万元；方

案 B 为第一年投资 100 万元，以后每年投资 10 万元. 列出不等式表示“经过 n 年之后，方案 B 的投入不少于方案 A 的投入”.

3. 比较下列各组中两个代数式的大小：

（1）x^2+5x+6 与 $2x^2+5x+9$；　　（2）$(x-3)^2$ 与 $(x-2)(x-4)$；

（3）当 $x>1$ 时，x^2 与 x^2-x+1；　　（4）x^2+y^2+1 与 $2(x+y-1)$.

4. 一个大于 50 且小于 60 的两位数，其个位数字比十位数字大 2. 试用不等式表示上述关系，并求出这个两位数（用 a 和 b 分别表示这个两位数的十位数字和个位数字）.

5. 已知 $2<a<3$，$-2<b<-1$，求 $2a+b$ 的取值范围.

6. 证明：$c<b$，$b<a \Rightarrow c<a$.

综合运用

7. 已知 $a>b>0$，$c<d<0$，$e<0$，求证 $\dfrac{e}{a-c}>\dfrac{e}{b-d}$.

8. 下列命题为真命题的是（　　）.

（A）若 $a>b>0$，则 $ac^2>bc^2$　　（B）若 $a>b>0$，则 $a^2>b^2$

（C）若 $a<b<0$，则 $a^2<ab<b^2$　　（D）若 $a<b<0$，则 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$

9. 证明：圆的面积大于与它具有相同周长的正方形的面积. 并据此说明，人们通常把自来水管的横截面制成圆形，而不是正方形的原因.

10. 已知 b 克糖水中含有 a 克糖（$b>a>0$），再添加 m 克糖（$m>0$）（假设全部溶解），糖水变甜了. 请将这一事实表示为一个不等式，并证明这个不等式成立.

拓广探索

11. 已知 $a>b>0$，求证 $\sqrt{a}>\sqrt{b}$.

12. 火车站有某公司待运的甲种货物 1 530 t，乙种货物 1 150 t. 现计划用 A，B 两种型号的货厢共 50 节运送这批货物. 已知 35 t 甲种货物和 15 t 乙种货物可装满一节 A 型货厢，25 t 甲种货物和 35 t 乙种货物可装满一节 B 型货厢，据此安排 A，B 两种货厢的节数，共有几种方案？若每节 A 型货厢的运费是 0.5 万元，每节 B 型货厢的运费是 0.8 万元，哪种方案的运费较少？

2.2 基本不等式

我们知道，乘法公式在代数式的运算中有重要作用. 那么，是否也有一些不等式，它们在解决不等式问题时有着与乘法公式类似的重要作用呢？下面就来研究这个问题.

前面我们利用完全平方公式得出了一类重要不等式：

$\forall a, b \in \mathbf{R}$，有

$$a^2+b^2 \geqslant 2ab,$$

当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

特别地，如果 $a>0$，$b>0$，我们用 $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$ 分别代替上式中的 a，b，可得

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}, \tag{1}$$

当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

通常称不等式（1）为**基本不等式**（basic inequality）. 其中，$\dfrac{a+b}{2}$ 叫做正数 a，b 的算术平均数，$\sqrt{ab}$ 叫做正数 a，b 的几何平均数.

基本不等式表明：两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.

上面通过考察 $a^2+b^2 \geqslant 2ab$ 的特殊情形获得了基本不等式. 能否直接利用不等式的性质推导出基本不等式呢？下面我们来分析一下.

要证

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}, \tag{①}$$

只要证

$$2\sqrt{ab} \leqslant a+b. \tag{②}$$

要证②，只要证

$$2\sqrt{ab}-a-b \leqslant 0. \tag{③}$$

要证③，只要证

$$-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \leqslant 0. \tag{④}$$

要证④，只要证

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0. \tag{⑤}$$

显然，⑤成立，当且仅当 $a=b$ 时，⑤中的等号成立.

只要把上述过程倒过来，就能直接推出基本不等式了.

探究

在图 2.2-1 中，AB 是圆的直径，点 C 是 AB 上一点，$AC=a$，$BC=b$. 过点 C 作垂直于 AB 的弦 DE，连接 AD，BD. 你能利用这个图形，得出基本不等式的几何解释吗？

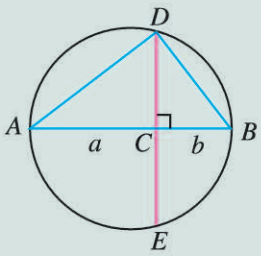


图 2.2-1

如图 2.2-1，可证$\triangle ACD \backsim \triangle DCB$，因而 $CD=\sqrt{ab}$. 由于 CD 小于或等于圆的半径，用不等式表示为

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}.$$

显然，当且仅当点 C 与圆心重合，即当 $a=b$ 时，上述不等式的等号成立.

例 1 已知 $x>0$，求 $x+\frac{1}{x}$的最小值.

分析： 求 $x+\frac{1}{x}$ 的最小值，就是要求一个 $y_0\left(=x_0+\frac{1}{x_0}\right)$，使 $\forall x>0$，都有 $x+\frac{1}{x}\geqslant y_0$. 观察 $x+\frac{1}{x}$，发现 $x\cdot\frac{1}{x}=1$. 联系基本不等式，可以利用正数 x 和$\frac{1}{x}$的算术平均数与几何平均数的关系得到 $y_0=2$.

解： 因为 $x>0$，所以

$$x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2,$$

当且仅当 $x=\frac{1}{x}$，即 $x^2=1$，$x=1$ 时，等号成立，因此所求的最小值为 2.

在本题的解答中，我们不仅明确了 $\forall x>0$，有 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$，而且给出了“当且仅当 $x=\frac{1}{x}$，即 $x^2=1$，$x=1$ 时，等号成立”，这是为了说明 2 是 $x+\frac{1}{x}(x>0)$的一个取值. 想一想，当 $y_0<2$ 时，$x+\frac{1}{x}\geqslant y_0$ 成立吗？这时能说 y_0 是 $x+\frac{1}{x}(x>0)$的最小值吗？

例 2 已知 x，y 都是正数，求证：

(1) 如果积 xy 等于定值 P，那么当 $x=y$ 时，和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{P}$；

(2) 如果和 $x+y$ 等于定值 S，那么当 $x=y$ 时，积 xy 有最大值 $\frac{1}{4}S^2$.

证明： 因为 x，y 都是正数，所以

$$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}.$$

(1) 当积 xy 等于定值 P 时，

$$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{P},$$

所以

$$x+y\geqslant 2\sqrt{P},$$

当且仅当 $x=y$ 时，上式等号成立. 于是，当 $x=y$ 时，和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{P}$.

(2) 当和 $x+y$ 等于定值 S 时，

$$\sqrt{xy}\leqslant\frac{S}{2},$$

所以

$$xy\leqslant\frac{1}{4}S^2,$$

当且仅当 $x=y$ 时，上式等号成立. 于是，当 $x=y$ 时，积 xy 有最大值 $\frac{1}{4}S^2$.

练习

1. 已知 a，$b\in\mathbf{R}$，求证 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.
2. 已知 x，y 都是正数，且 $x\neq y$，求证：

   (1) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}>2$；　　(2) $\frac{2xy}{x+y}<\sqrt{xy}$.
3. 当 x 取什么值时，$x^2+\frac{1}{x^2}$ 取得最小值？最小值是多少？
4. 已知 $-1\leqslant x\leqslant 1$，求 $1-x^2$ 的最大值.
5. 已知直角三角形的面积等于 50 cm^2，当两条直角边的长度各为多少时，两条直角边的和最小？最小值是多少？

基本不等式在解决实际问题中有广泛的应用，是解决最大（小）值问题的有力工具.

例 3 (1) 用篱笆围一个面积为 100 m^2 的矩形菜园，当这个矩形的边长为多少时，所用篱笆最短？最短篱笆的长度是多少？

(2) 用一段长为 36 m 的篱笆围成一个矩形菜园，当这个矩形的边长为多少时，菜园

的面积最大？最大面积是多少？

分析：（1）矩形菜园的面积是矩形的两邻边之积，于是问题转化为：矩形的邻边之积为定值，边长多大时周长最短.

（2）矩形菜园的周长是矩形两邻边之和的 2 倍，于是问题转化为：矩形的邻边之和为定值，边长多大时面积最大.

解：设矩形菜园的相邻两条边的长分别为 x m，y m，篱笆的长度为$2(x+y)$m.

（1）由已知得 $xy=100$.

由

$$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy},$$

可得

$$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}=20,$$

所以

$$2(x+y)\geqslant 40,$$

当且仅当 $x=y=10$ 时，上式等号成立.

因此，当这个矩形菜园是边长为 10 m 的正方形时，所用篱笆最短，最短篱笆的长度为 40 m.

（2）由已知得$2(x+y)=36$，矩形菜园的面积为 xy m^2.

由

$$\sqrt{xy}\leqslant\frac{x+y}{2}=\frac{18}{2}=9,$$

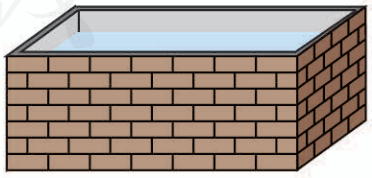
可得

$$xy\leqslant 81,$$

当且仅当 $x=y=9$ 时，上式等号成立.

因此，当这个矩形菜园是边长为 9 m 的正方形时，菜园的面积最大，最大面积是 81 m^2.

例 4 某工厂要建造一个长方体形无盖贮水池，其容积为 4 800 m^3，深为 3 m. 如果池底每平方米的造价为 150 元，池壁每平方米的造价为 120 元，那么怎样设计水池能使总造价最低？最低总造价是多少？



分析：贮水池呈长方体形，它的高是 3 m，池底的边长没有确定. 如果池底的边长确定了，那么水池的总造价也就确定了. 因此，应当考察池底的边长取什么值时，水池的总造价最低.

解：设贮水池池底的相邻两条边的边长分别为 x m，y m，水池的总造价为 z 元. 根据题意，有

$$z=150\times\frac{4\ 800}{3}+120(2\times 3x+2\times 3y)$$

$$=240\ 000+720(x+y).$$

由容积为 4 800 m^3，可得

$$3xy=4\ 800,$$

因此

$$xy=1\ 600.$$

所以

$$z\geqslant 240\ 000+720\times 2\sqrt{xy},$$

当 $x=y=40$ 时，上式等号成立，此时 $z=297\ 600$.

所以，将贮水池的池底设计成边长为 40 m 的正方形时总造价最低，最低总造价是 297 600 元.

练习

1. 用 20 cm 长的铁丝折成一个面积最大的矩形，应当怎样折？
2. 用一段长为 30 m 的篱笆围成一个一边靠墙的矩形菜园，墙长 18 m. 当这个矩形的边长为多少时，菜园的面积最大？最大面积是多少？
3. 做一个体积为 32 m^3，高为 2 m 的长方体纸盒，当底面的边长取什么值时，用纸最少？
4. 已知一个矩形的周长为 36 cm，矩形绕它的一条边旋转形成一个圆柱. 当矩形的边长为多少时，旋转形成的圆柱的侧面积最大？

习题 2.2

复习巩固

1. （1）已知 $x>1$，求 $x+\frac{1}{x-1}$ 的最小值；

   （2）求 $\sqrt{x(10-x)}$ 的最大值.
2. （1）把 36 写成两个正数的积，当这两个正数取什么值时，它们的和最小？

   （2）把 18 写成两个正数的和，当这两个正数取什么值时，它们的积最大？
3. 某公司建造一间背面靠墙的房屋，地面面积为 48 m^2，房屋正面每平方米的造价为 1 200 元，房屋侧面每平方米的造价为 800 元，屋顶的造价为 5 800 元. 如果墙高为 3 m，且不计房屋背面和地面的费用，那么怎样设计房屋能使总造价最低？最低总造价是多少？

综合运用

4. 已知 x，y，z 都是正数，求证：$(x+y)(y+z)(z+x)\geqslant 8xyz$.

5. 已知 $x>0$，求证：$2-3x-\dfrac{4}{x}$ 的最大值是 $2-4\sqrt{3}$.

6. 一家货物公司计划租地建造仓库储存货物，经过市场调查了解到下列信息：每月土地占地费 y_1（单位：万元）与仓库到车站的距离 x（单位：km）成反比，每月库存货物费 y_2（单位：万元）与 x 成正比；若在距离车站 10 km 处建仓库，则 y_1 和 y_2 分别为 2 万元和 8 万元. 这家公司应该把仓库建在距离车站多少千米处，才能使两项费用之和最小？

拓广探索

7. 一家商店使用一架两臂不等长的天平称黄金. 一位顾客到店里购买 10 g 黄金，售货员先将 5 g 的砝码放在天平左盘中，取出一些黄金放在天平右盘中使天平平衡；再将 5 g 的砝码放在天平右盘中，再取出一些黄金放在天平左盘中使天平平衡；最后将两次称得的黄金交给顾客. 你认为顾客购得的黄金是小于 10 g，等于 10 g，还是大于 10 g？为什么？

8. 设矩形 $ABCD$（$AB>AD$）的周长为 24 cm，把 $\triangle ABC$ 沿 AC 向 $\triangle ADC$ 折叠，AB 折过去后交 DC 于点 P. 设 $AB=x$ cm，求 $\triangle ADP$ 的最大面积及相应 x 的值.

人教版®

2.3 二次函数与一元二次方程、不等式

在初中，我们从一次函数的角度看一元一次方程、一元一次不等式，发现了三者之间的内在联系，利用这种联系可以更好地解决相关问题. 对于二次函数、一元二次方程和一元二次不等式，是否也有这样的联系呢？先来看一个问题.



问题 园艺师打算在绿地上用栅栏围一个矩形区域种植花卉. 若栅栏的长度是 24 m，围成的矩形区域的面积要大于20 m^2，则这个矩形的边长为多少米？

设这个矩形的一条边长为 x m，则另一条边长为 $(12-x)$m. 由题意，得

$$(12-x)x>20,$$

其中 $x\in\{x\mid 0<x<12\}$. 整理得

$$x^2-12x+20<0,\ x\in\{x\mid 0<x<12\}. \qquad ①$$

求得不等式①的解集，就得到了问题的答案.

一般地，我们把只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的不等式，称为**一元二次不等式**（quadratic inequality with one unknown）. 一元二次不等式的一般形式是

$$ax^2+bx+c>0 \text{ 或 } ax^2+bx+c<0,$$

其中 a，b，c 均为常数，$a\neq 0$.

思考

在初中，我们学习了从一次函数的观点看一元一次方程、一元一次不等式的思想方法. 类似地，能否从二次函数的观点看一元二次不等式，进而得到一元二次不等式的求解方法呢？

下面，我们先考察一元二次不等式 $x^2-12x+20<0$ 与二次函数 $y=x^2-12x+20$ 之间的关系.

如图 2.3-1，在平面直角坐标系中画出二次函数 $y=x^2-12x+20$ 的图象，图象与 x 轴有两个交点. 这两个交点的横坐标就是方程 $x^2-12x+20=0$ 的两个实数根 $x_1=2$，$x_2=10$，因此二次函数 $y=x^2-12x+20$ 的图象与 x 轴的两个交点是(2，0) 和 (10，0).

一般地，对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$，我们把使 $ax^2+bx+c=0$ 的实数 x 叫做二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的零点. 于是，二次函数 $y=x^2-12x+20$ 的两个零点是 $x_1=2$，$x_2=10$.

从图 2.3-1 可以看出，二次函数 $y=x^2-12x+20$ 的两个零点 $x_1=2$，$x_2=10$ 将 x 轴分成三段. 相应地，当 $x<2$ 或 $x>10$ 时，函数图象位于 x 轴上方，此时 $y>0$，即 $x^2-12x+20>0$；当 $2<x<10$ 时，函数图象位于 x 轴下方，此时 $y<0$，即 $x^2-12x+20<0$. 所以，一元二次不等式 $x^2-12x+20<0$ 的解集是

$$\{x\mid 2<x<10\}.$$

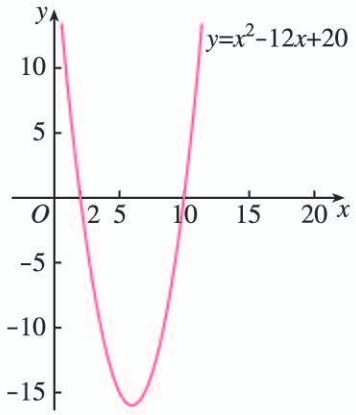


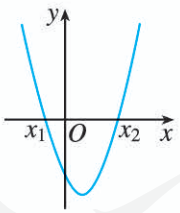
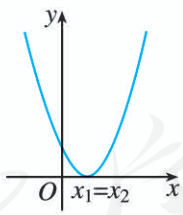
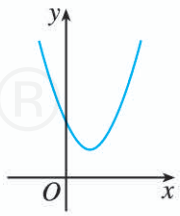
图 2.3-1

因为 $\{x\mid 2<x<10\}\subseteq\{x\mid 0<x<12\}$，因此当围成的矩形的一条边长 x 满足 $2<x<10$ 时，围成的矩形区域的面积大于 20 m^2.

上述方法可以推广到求一般的一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 和 $ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集. 因为一元二次方程的根是相应一元二次函数的零点，所以先求出一元二次方程的根，再根据二次函数图象与 x 轴的相关位置确定一元二次不等式的解集.

我们知道，对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$，设 $\Delta=b^2-4ac$，它的根按照 $\Delta>0$，$\Delta=0$，$\Delta<0$ 可分为三种情况. 相应地，二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象与 x 轴的位置关系也分为三种情况. 因此，我们分三种情况来讨论对应的一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 和 $ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集（表 2.3-1）.

表 2.3-1　二次函数与一元二次方程、不等式的解的对应关系

	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ 的图象			
$ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$ 的根	有两个不相等的实数根 x_1，x_2 $(x_1<x_2)$	有两个相等的实数根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x<x_1$，或 $x>x_2\}$	$\{x\mid x\neq-\frac{b}{2a}\}$	$\mathbf{R}$
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

例 1 求不等式 $x^2-5x+6>0$ 的解集.

分析： 因为方程$x^2-5x+6=0$的根是函数 $y=x^2-5x+6$ 的零点，所以先求出 $x^2-5x+6=0$ 的根，再根据函数图象得到 $x^2-5x+6>0$ 的解集.

解： 对于方程 $x^2-5x+6=0$，因为 $\Delta>0$，所以它有两个实数根. 解得 $x_1=2$，$x_2=3$.

画出二次函数 $y=x^2-5x+6$ 的图象（图 2.3-2），结合图象得不等式 $x^2-5x+6>0$ 的解集为$\{x\mid x<2$，或 $x>3\}$.

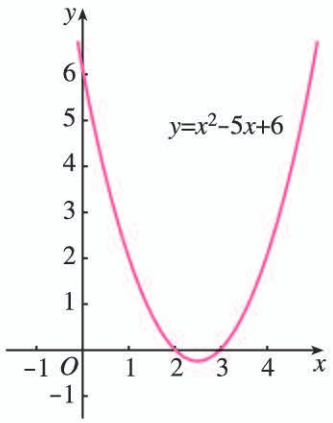


图 2.3-2

例 2 求不等式 $9x^2-6x+1>0$ 的解集.

解： 对于方程 $9x^2-6x+1=0$，因为 $\Delta=0$，所以它有两个相等的实数根，解得 $x_1=x_2=\dfrac{1}{3}$.

画出二次函数 $y=9x^2-6x+1$ 的图象（图 2.3-3），结合图象得不等式 $9x^2-6x+1>0$ 的解集为$\{x\mid x\neq\dfrac{1}{3}\}$.

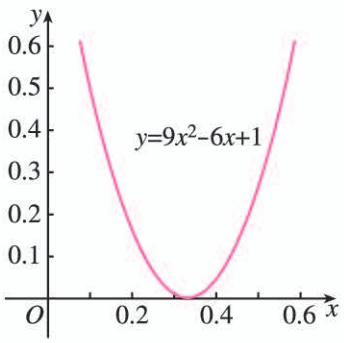


图 2.3-3

例 3 求不等式$-x^2+2x-3>0$ 的解集.

解： 不等式可化为 $x^2-2x+3<0$.

因为 $\Delta=-8<0$，所以方程 $x^2-2x+3=0$ 无实数根.

画出二次函数 $y=x^2-2x+3$ 的图象（图 2.3-4）.

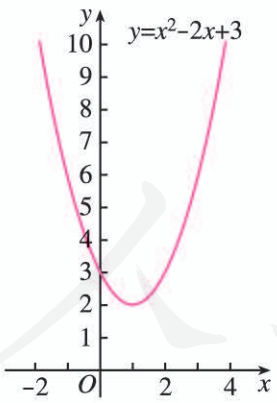


图 2.3-4

结合图象得不等式 $x^2-2x+3<0$ 的解集为$\varnothing$.

因此，原不等式的解集为$\varnothing$.

对于二次项系数是负数（即 $a<0$）的不等式，可以先把二次项系数化成正数，再求解.

现在，你能解决第 2.1 节的“问题 2”了吗?

利用框图可以清晰地表示求解一元二次不等式的过程. 这里，我们以求解可化成 $ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$形式的不等式为例，用框图表示其求解过程（图 2.3-5）.

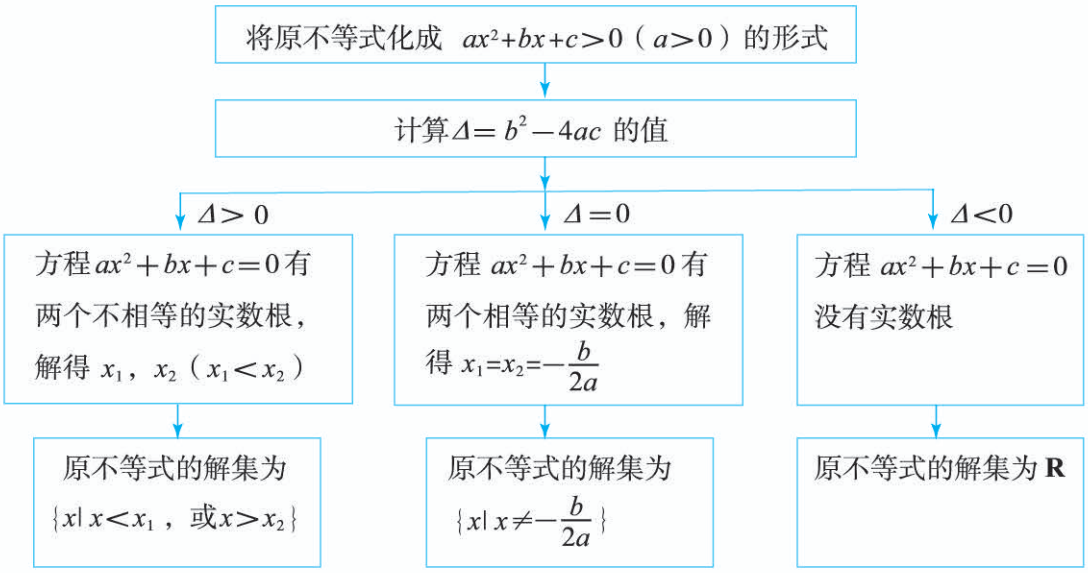


图 2.3-5

练习

1. 求下列不等式的解集：

（1）$(x+2)(x-3)>0$；　　（2）$3x^2-7x\leqslant10$；

（3）$-x^2+4x-4<0$；　　（4）$x^2-x+\frac{1}{4}<0$；

（5）$-2x^2+x\leqslant-3$；　　（6）$x^2-3x+4>0$.

2. 当自变量 x 在什么范围取值时，下列函数的值等于 0？大于 0？小于 0？

（1）$y=3x^2-6x+2$；　　（2）$y=25-x^2$；

（3）$y=x^2+6x+10$；　　（4）$y=-3x^2+12x-12$.

利用一元二次不等式可以解决一些实际问题，下面看两个例子.

例 4　一家车辆制造厂引进了一条摩托车整车装配流水线，这条流水线生产的摩托车数量 x（单位：辆）与创造的价值 y（单位：元）之间有如下的关系：

$$y=-20x^2+2\ 200x.$$

若这家工厂希望在一个星期内利用这条流水线创收60 000元以上，则在一个星期内大约应该生产多少辆摩托车？

解：设这家工厂在一个星期内大约应该利用这条流水线生产 x 辆摩托车，根据题意，得

$$-20x^2+2\ 200x>60\ 000.$$

移项整理，得

$$x^2-110x+3\ 000<0.$$

对于方程 $x^2-110x+3\ 000=0$，$\Delta=100>0$，方程有两个实数根 $x_1=50$，$x_2=60$.

画出二次函数 $y=x^2-110x+3\,000$ 的图象(图 2.3-6)，结合图象得不等式 $x^2-110x+3\,000<0$ 的解集为$\{x\mid 50<x<60\}$，从而原不等式的解集为

$$\{x\mid 50<x<60\}.$$

因为 x 只能取整数值，所以当这条流水线在一周内生产的摩托车数量在 51～59 辆时，这家工厂能够获得 60 000 元以上的收益.

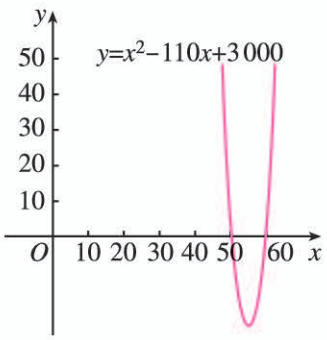


图 2.3-6

例 5 某种汽车在水泥路面上的刹车距离 s（单位：m）和汽车刹车前的车速 v（单位：km/h）之间有如下关系：

$$s=\frac{1}{20}v+\frac{1}{180}v^2.$$

在一次交通事故中，测得这种车的刹车距离大于 39.5 m，那么这辆汽车刹车前的车速至少为多少（精确到 1 km/h)?

刹车距离是指汽车刹车后由于惯性往前滑行的距离.

解：根据题意，得

$$\frac{1}{20}v+\frac{1}{180}v^2>39.5.$$

移项整理，得

$$v^2+9v-7\,110>0.$$

对于方程 $v^2+9v-7\,110=0$，$\Delta>0$，方程有两个实数根

$$v_1=\frac{-9-\sqrt{28\,521}}{2},\quad v_2=\frac{-9+\sqrt{28\,521}}{2}.$$

画出二次函数 $s=v^2+9v-7\,110$ 的图象（图 2.3-7)，结合图象得不等式的解集为$\{v\mid v<v_1$，或 $v>v_2\}$，从而原不等式的解集为

$$\{v\mid v<v_1，或\ v>v_2\}.$$

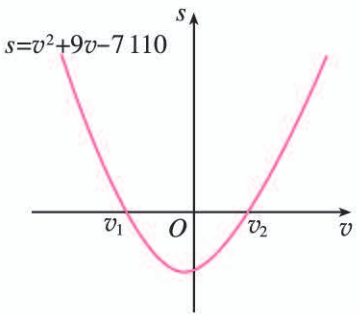


图 2.3-7

因为车速 $v>0$，所以 $v>v_2$. 而 $79.9<v_2<80$，所以这辆汽车刹车前的车速至少为80 km/h.

类似地，第 2.1 节的不等式①经移项整理，得 $2x^2-13x+20\leqslant 0$. 用上述方法解这个不等式，得 $\{x\mid 2.5\leqslant x\leqslant 4\}$. 所以，当每本杂志的定价不低于 2.5 元且不超过 4 元时，提价后的销售总收入不低于 20 万元.

练习

1. x 是什么实数时，$\sqrt{x^2+x-12}$ 有意义?

2. 如图，在长为 8 m，宽为 6 m 的矩形地面的四周种植花卉，中间种植草坪. 如果要求花卉带的宽度相同，且草坪的面积不超过总面积的一半，那么花卉带的宽度应为多少米？



（第 2 题）

3. 某网店销售一批新款削笔器，每个削笔器的最低售价为 15 元. 若按最低售价销售，每天能卖出 30 个；若一个削笔器的售价每提高 1 元，日销售量将减少 2 个. 为了使这批削笔器每天获得 400 元以上的销售收入，应怎样制定这批削笔器的销售价格？

习题 2.3

复习巩固

1. 求下列不等式的解集：

（1）$13-4x^2>0$；　　（2）$(x-3)(x-7)<0$；

（3）$x^2-3x-10>0$；　　（4）$-3x^2+5x-4>0$.

2. x 是什么实数时，下列各式有意义？

（1）$\sqrt{x^2-4x+9}$；　　（2）$\sqrt{-2x^2+12x-18}$.

综合运用

3. 已知 $M=\{x\mid 4x^2-4x-15>0\}$，$N=\{x\mid x^2-5x-6>0\}$，求 $M\cap N$，$M\cup N$.

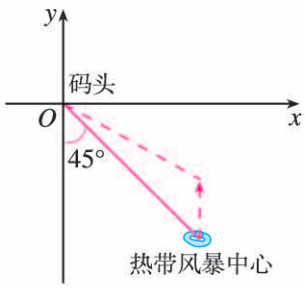
4. 一名同学以初速度 $v_0=12$ m/s 竖直上抛一排球，排球能够在抛出点 2 m 以上的位置最多停留多长时间（精确到 0.01 s）？

5. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-16<0\}$，$B=\{x\mid x^2-4x+3>0\}$，求 $A\cup B$.

若不计空气阻力，则竖直上抛的物体距离抛出点的高度 h 与时间 t 满足关系 $h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$，其中 $g\approx 10$ m/s^2.

拓广探索

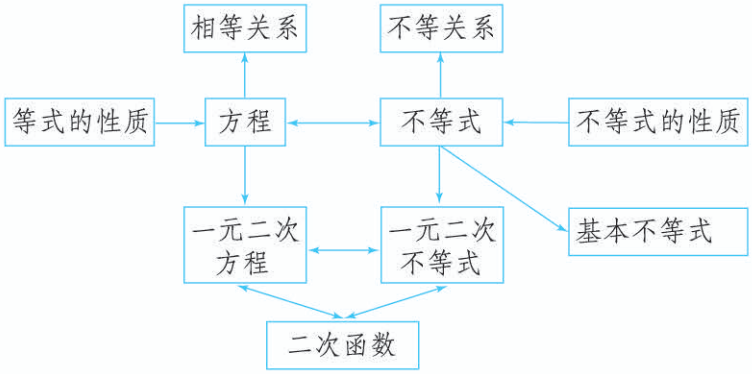
6. 如图，据气象部门预报，在距离某码头南偏东 45°方向 600 km 处的热带风暴中心正以 20 km/h 的速度向正北方向移动，距风暴中心 450 km 以内的地区都将受到影响. 据以上预报估计，从现在起多长时间后，该码头将受到热带风暴的影响，影响时间大约为多长（精确到0.1 h）？



（第 6 题）

小结

一、 本章知识结构



二、 回顾与思考

本章我们类比初中学过的等式与方程学习了不等式的一些知识. 与用方程刻画相等关系类似，我们用不等式刻画不等关系. 解决不等式问题需要利用不等式的性质，为此，在学习关于实数大小关系的基本事实的基础上，类比等式的性质，先研究了不等式的一些性质；接着，利用不等式的性质研究了基本不等式，并用基本不等式解决了一些最值问题；最后，学习了一元二次不等式，并利用它与二次函数、一元二次方程的联系获得了求解它的一种方法.

关于实数大小关系的基本事实是解决等式、不等式问题的逻辑基础. 不等式与等式之间既有共性又有差异，所以可以通过类比等式的内容和研究方法，获得关于不等式的内容和研究方法的启发. 其中，“运算中的不变性就是性质”指引我们发现了一些不等式的性质；等号没有方向性而不等号具有方向性，这使我们注意到，在不等式两边同乘一个数（式）时，所乘数（式）的符号对不等号方向的影响；等等. 以实数大小关系的基本事实为基础，先通过类比，归纳猜想出不等式性质；再运用逻辑推理证明不等式性质. 这个过程不仅可以使我们学习发现数学关系、规律的方法，而且可以培养我们借助直观理解数学内容、通过逻辑推理证明数学结论的思维习惯.

同样地，类比用一次函数的观点看一元一次方程、一元一次不等式，我们得到了以二次函数为纽带，把一元二次方程、一元二次不等式联系起来的思想方法，并得到了一种利用函数的零点求一元二次不等式解集的简捷方法.

因此，类比是发现的引路人，在今后的学习中我们会经常用到它.

请你带着下面的问题，复习一下本章内容吧！

1. 举出一些蕴含不等关系的实际例子，并用不等式描述这些不等关系.

2. 你能说说用两个实数大小关系的基本事实解决问题时的基本思路吗？

3. 在类比等式的基本性质研究不等式的基本性质时，你认为应特别注意哪些问题？

4. 两个正数的大小关系是完全确定的，但通过运算就会产生非常奇妙的变化，基本不等式就是其中之一. 你还能通过运算（代数变形）得出基本不等式的一些变式吗？通过对变式的研究，你有什么体会？

5. 用基本不等式解决最大值、最小值问题时，你认为应注意哪些问题？

6. 用函数理解方程和不等式是数学的基本思想方法，其中函数的图象、零点、图象与 x 轴的关系等是关键要素. 你能以函数观点看一元二次方程、一元二次不等式为例，谈谈体会吗？

复习参考题 2

复习巩固

1. 某夏令营有 48 人，出发前要从 A，B 两种型号的帐篷中选择一种. A 型号的帐篷比 B 型号的少 5 顶. 若只选 A 型号的，每顶帐篷住 4 人，则帐篷不够；每顶帐篷住 5 人，则有一顶帐篷没有住满. 若只选 B 型号的，每顶帐篷住 3 人，则帐篷不够；每顶帐篷住 4 人，则有帐篷多余. 设 A 型号的帐篷有 x 顶，用不等式将题目中的不等关系表示出来.



（第 1 题）

2. 用不等号“$>$”或“$<$”填空：

（1）若 $a>b$，且 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，则 ab _____ 0；

（2）若 $c>a>b>0$，则 $\frac{a}{c-a}$ _____ $\frac{b}{c-b}$；

（3）若 $a>b>c>0$，则 $\frac{a}{b}$ _____ $\frac{a+c}{b+c}$.

3. （1）在面积为定值 S 的扇形中，半径是多少时扇形的周长最小？

（2）在周长为定值 P 的扇形中，半径是多少时扇形的面积最大？

4. 求下列不等式的解集：

（1）$14-4x^2\geqslant x$；　　（2）$x^2-14x+45\leqslant 0$；

（3）$x^2+6x+10>0$；　　（4）$x(x+2)>x(3-x)+1$.

综合运用

5. 若 a，$b>0$，且 $ab=a+b+3$，求 ab 的取值范围.

6. 当 k 取什么值时，一元二次不等式 $2kx^2+kx-\frac{3}{8}<0$ 对一切实数 x 都成立？

7. 一般认为，民用住宅的窗户面积必须小于地板面积，但窗户面积与地板面积的比应不小于 10%，而且这个比值越大，采光效果越好.

   （1）若一所公寓窗户面积与地板面积的总和为 220 m^2，则这所公寓的窗户面积至少为多少平方米？

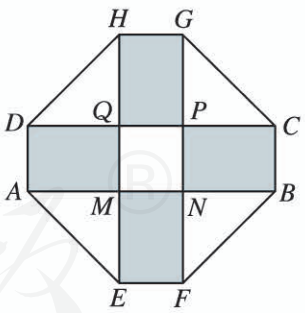
   （2）若同时增加相同的窗户面积和地板面积，公寓的采光效果是变好了还是变坏了？

8. 相等关系和不等关系之间具有对应关系：即只要将一个相等关系的命题中的等号改为不等号就可得到一个相应的不等关系的命题. 请你用类比的方法探索相等关系和不等关系的对应性质，仿照下表列出尽可能多的有关对应关系的命题；指出所列的对应不等关系的命题是否正确，并说明理由.

相等关系	不等关系	
相等关系的命题	不等关系的命题	判断正误
（1）若 $x=y$，则 $x^3=y^3$	（1）若 $x>y$，则 $x^3>y^3$	正确

拓广探索

9. 如图，居民小区要建一座八边形的休闲场所，它的主体造型平面图是由两个相同的矩形 $ABCD$ 和 $EFGH$ 构成的面积为 200 m^2 的十字形地域. 计划在正方形 $MNPQ$ 上建一座花坛，造价为 4 200 元/m^2；在四个相同的矩形（图中阴影部分）上铺花岗岩地坪，造价为 210 元/m^2；再在四个空角（图中四个三角形）上铺草坪，造价为 80 元/m^2. 设总造价为 S（单位：元），AD 长为 x（单位：m）. 当 x 为何值时，S 最小？并求出这个最小值.



（第 9 题）

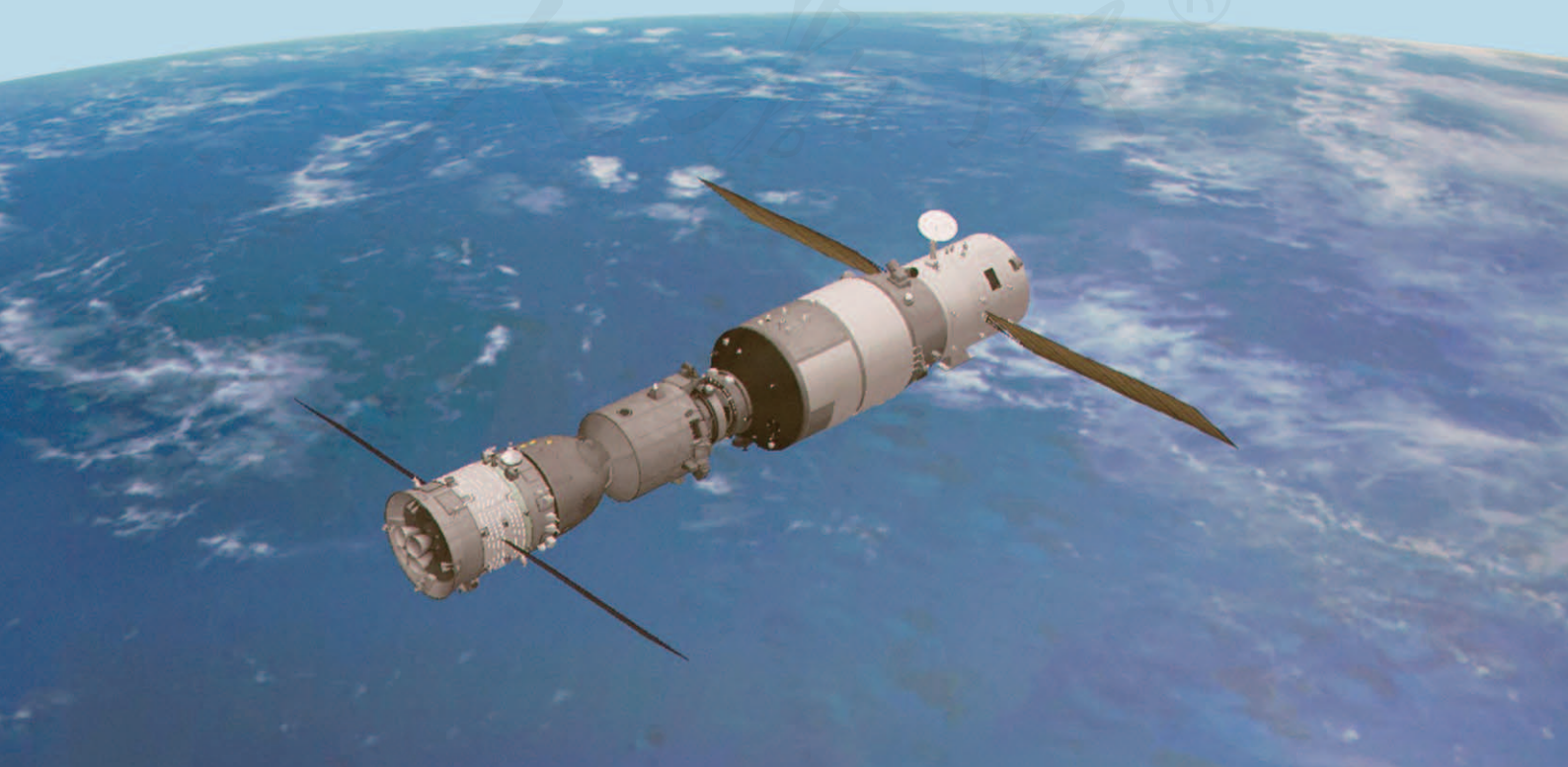
10. 购买同一种物品，可以用两种不同的策略，第一种是不考虑物品价格的升降，每次购买这种物品的数量一定；第二种是不考虑物品价格的升降，每次购买这种物品所花的钱数一定. 哪种购物方式比较经济？你能把所得结论作一些推广吗？

第三章
函数的概念与性质

客观世界中有各种各样的运动变化现象. 例如，天宫二号在发射过程中，离发射点的距离随时间的变化而变化；一个装满水的蓄水池在使用过程中，水面高度随时间的变化而不断降低；我国高速铁路营业里程逐年增加……所有这些都表现为变量间的对应关系，这种关系常常可用函数模型来描述，并且通过研究函数模型就可以把握相应的运动变化规律.

随着学习的深入你会发现，函数是贯穿高中数学的一条主线，是解决数学问题的基本工具；函数概念及其反映的数学思想方法已渗透到数学的各个领域，是进一步学习数学的重要基础. 同时，函数知识有广泛的实际应用，并且是学习其他学科的重要基础.

本章我们将在初中的基础上，通过具体实例学习用集合语言和对应关系刻画函数概念，通过函数的不同表示法加深对函数概念的认识，学习用精确的符号语言刻画函数性质的方法，并通过幂函数的学习感受研究函数的基本内容、过程和方法. 在此基础上，学习运用函数理解和处理问题的方法.



3.1 函数的概念及其表示

在初中我们已经接触过函数的概念，知道函数是刻画变量之间对应关系的数学模型和工具. 例如，正方形的周长 l 与边长 x 的对应关系是 $l=4x$，而且对于每一个确定的 x 都有唯一的 l 与之对应，所以 l 是 x 的函数. 这个函数与正比例函数 $y=4x$ 相同吗？又如，你能用已有的函数知识判断 $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 是否相同吗？要解决这些问题，就需要进一步学习函数概念.

3.1.1 函数的概念

先分析以下问题.

问题 1 某“复兴号”高速列车加速到 350 km/h 后保持匀速运行半小时. 这段时间内，列车行进的路程 S（单位：km）与运行时间 t（单位：h）的关系可以表示为

$$S=350t.$$



这里，t 和 S 是两个变量，而且对于 t 的每一个确定的值，S 都有唯一确定的值与之对应，所以 S 是 t 的函数.

思考

有人说：“根据对应关系 $S=350t$，这趟列车加速到 350 km/h 后，运行 1 h 就前进了 350 km.”你认为这个说法正确吗？

根据问题 1 的条件，我们不能判断列车以 350 km/h 运行半小时后的情况，所以上述说法不正确. 显然，其原因是没有关注到 t 的变化范围.

下面用更精确的语言表示问题 1 中 S 与 t 的对应关系.

列车行进的路程 S 与运行时间 t 的对应关系是

$$S=350t. \qquad ①$$

其中，t 的变化范围是数集 $A_1=\{t\mid 0\leqslant t\leqslant 0.5\}$，$S$ 的变化范围是数集 $B_1=\{S\mid 0\leqslant S\leqslant 175\}$. 对于数集 A_1 中的任一时刻 t，按照对应关系①，在数集 B_1 中都有唯一确定的路程 S 和它对应.

问题 2 某电气维修公司要求工人每周工作至少 1 天，至多 6 天. 如果公司确定的工资标准是每人每天 350 元，而且每周付一次工资，那么你认为该怎样确定一个工人每周的工资？一个工人的工资 w(单位：元)是他工作天数 d 的函数吗？

显然，工资 w 是一周工作天数 d 的函数，其对应关系是

$$w=350d. \qquad ②$$

其中，d 的变化范围是数集 $A_2=\{1,2,3,4,5,6\}$，w 的变化范围是数集 $B_2=\{350,700,1\,050,1\,400,1\,750,2\,100\}$. 对于数集 A_2 中的任一个工作天数 d，按照对应关系②，在数集 B_2 中都有唯一确定的工资 w 与它对应.

问题 1 和问题 2 中的函数有相同的对应关系，你认为它们是同一个函数吗？为什么？

问题 3 图 3.1-1 是北京市 2016 年 11 月 23 日的空气质量指数（Air Quality Index，简称 AQI）变化图. 如何根据该图确定这一天内任一时刻 t h 的空气质量指数（AQI）的值 I？你认为这里的 I 是 t 的函数吗？

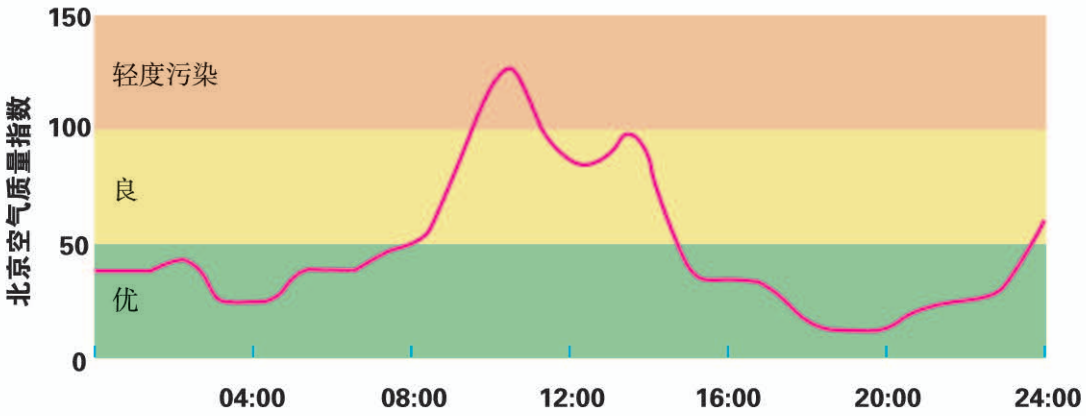


图 3.1-1

从图 3.1-1 中的曲线可知，t 的变化范围是数集 $A_3=\{t\mid 0\leqslant t\leqslant 24\}$，AQI 的值 I 都在数集 $B_3=\{I\mid 0<I<150\}$ 中. 对于数集 A_3 中的任一时刻 t，按照图 3.1-1 中曲线所给定的对应关系，在数集 B_3 中都有唯一确定的 AQI 的值 I 与之对应. 因此，这里的 I 是 t 的函数.

你能根据图 3.1-1 找到中午 12 时的 AQI 的值吗？

问题 4 国际上常用恩格尔系数 $r\left(r=\dfrac{\text{食物支出金额}}{\text{总支出金额}}\times 100\%\right)$ 反映一个地区人民生活质量的高低，恩格尔系数越低，生活质量越高. 表 3.1-1 是我国某省城镇居民恩格尔系数变化情况，从中可以看出，该省城镇居民的生活质量越来越高.

表 3.1-1　我国某省城镇居民恩格尔系数变化情况

年份 y	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
恩格尔系数 r（%）	36.69	36.81	38.17	35.69	35.15	33.53	33.87	29.89	29.35	28.57

你认为按表 3.1-1 给出的对应关系，恩格尔系数 r 是年份 y 的函数吗？如果是，你会用怎样的语言来刻画这个函数？

这里，y 的取值范围是数集 $A_4=\{2006,2007,2008,2009,2010,2011,2012,2013,2014,2015\}$；根据恩格尔系数的定义可知，$r$ 的取值范围是数集 $B_4=\{r\mid 0<r\leqslant 1\}$. 对于数集 A_4 中的任意一个年份 y，根据表 3.1-1 所给定的对应关系，在数集 B_4 中都有唯一确定的恩格尔系数 r 与之对应. 所以，r 是 y 的函数.

归纳

上述问题 1～问题 4 中的函数有哪些共同特征？由此你能概括出函数概念的本质特征吗？

上述问题的共同特征有：

（1）都包含两个非空数集，用 A，B 来表示；

（2）都有一个对应关系；

（3）尽管对应关系的表示方法不同，但它们都有如下特性：对于数集 A 中的任意一个数 x，按照对应关系，在数集 B 中都有唯一确定的数 y 和它对应.

事实上，除解析式、图象、表格外，还有其他表示对应关系的方法. 为了表示方便，我们引进符号 f 统一表示对应关系.

一般地，设 A，B 是非空的实数集，如果对于集合 A 中的任意一个数 x，按照某种确定的对应关系 f，在集合 B 中都有唯一确定的数 y 和它对应，那么就称 $f:A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个**函数**（function），记作

$$y=f(x),\ x\in A.$$

其中，x 叫做自变量，x 的取值范围 A 叫做函数的**定义域**（domain）；与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值，函数值的集合 $\{f(x)\mid x\in A\}$ 叫做函数的**值域**（range）.

显然，值域是集合 B 的子集. 在问题 1 与问题 2 中，值域就是 B_1 和 B_2；在问题 3 中，值域是数集 B_3 的真子集；在问题 4 中，值域 $C_4=\{0.366\,9,0.368\,1,0.381\,7,0.356\,9,0.351\,5,0.335\,3,0.338\,7,0.298\,9,0.293\,5,0.285\,7\}$，是数集 $B_4=\{r\mid 0<r\leqslant 1\}$ 的真子集.

17 世纪后期，德国数学家莱布尼茨第一次将“function”一词作为专门的数学术语；19 世纪，李善兰首次将 function 翻译成“函数”.

我们所熟悉的一次函数 $y=ax+b(a\neq0)$ 的定义域是 **R**，值域也是 **R**. 对应关系 f 把 **R** 中的任意一个数 x，对应到 **R** 中唯一确定的数 $ax+b(a\neq0)$.

二次函数 $y=ax^2+bx+c\,(a\neq0)$ 的定义域是 **R**，值域是 B. 当 $a>0$ 时，$B=\left\{y\,\middle|\,y\geqslant\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right\}$；当 $a<0$ 时，$B=\left\{y\,\middle|\,y\leqslant\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right\}$. 对应关系 f 把 **R** 中的任意一个数 x，对应到 B 中唯一确定的数 $ax^2+bx+c(a\neq0)$.

思考

反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq0)$ 的定义域、对应关系和值域各是什么？请用函数定义描述这个函数.

例 1 函数的解析式是舍弃问题的实际背景而抽象出来的，它所反映的两个量之间的对应关系，可以广泛地用于刻画一类事物中的变量关系和规律. 例如，正比例函数 $y=kx$ $(k\neq0)$ 可以用来刻画匀速运动中路程与时间的关系、一定密度的物体的质量与体积的关系、圆的周长与半径的关系等.

试构建一个问题情境，使其中的变量关系可以用解析式 $y=x(10-x)$ 来描述.

解： 把 $y=x(10-x)$ 看成二次函数，那么它的定义域是 **R**，值域是 $B=\{y\mid y\leqslant25\}$. 对应关系 f 把 **R** 中的任意一个数 x，对应到 B 中唯一确定的数 $x\,(10-x)$.

如果对 x 的取值范围作出限制，例如 $x\in\{x\,|\,0<x<10\}$，那么可以构建如下情境：

长方形的周长为 20，设一边长为 x，面积为 y，那么 $y=x(10-x)$.

其中，x 的取值范围是 $A=\{x\,|\,0<x<10\}$，y 的取值范围是 $B=\{y\,|\,0<y\leqslant25\}$. 对应关系 f 把每一个长方形的边长 x，对应到唯一确定的面积 $x(10-x)$.

探究

构建其他可用解析式 $y=x(10-x)$ 描述其中变量关系的问题情境.

练习

1. 一枚炮弹发射后，经过 26 s 落到地面击中目标. 炮弹的射高为845 m，且炮弹距地面的高度 h（单位：m）与时间 t（单位：s）的关系为

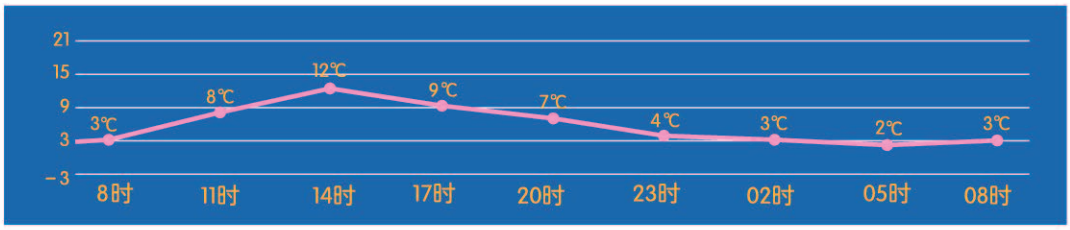
$$h=130t-5t^2. \qquad ①$$

求①所表示的函数的定义域与值域，并用函数的定义描述这个函数.

2. 2016 年 11 月 2 日 8 时至次日 8 时（次日的时间前加 0 表示）北京的温度走势如图所示.

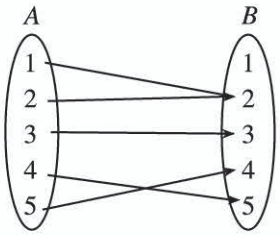
（1）求对应关系为图中曲线的函数的定义域与值域；

（2）根据图象，求这一天 12 时所对应的温度.



（第 2 题）

3. 集合 A，B 与对应关系 f 如下图所示：



（第 3 题）

f：$A\to B$ 是否为从集合 A 到集合 B 的函数？如果是，那么定义域、值域与对应关系各是什么？

4. 构建一个问题情境，使其中的变量关系能用解析式 $y=\sqrt{x}$ 来描述.

研究函数时常会用到区间的概念.

设 a，b 是两个实数，而且 $a<b$. 我们规定：

（1）满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合叫做**闭区间**，表示为 $[a,\ b]$；

（2）满足不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的集合叫做**开区间**，表示为 $(a,\ b)$；

（3）满足不等式 $a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的实数 x 的集合叫做**半开半闭区间**，分别表示为 $[a,\ b)$，$(a,\ b]$.

这里的实数 a 与 b 都叫做相应区间的**端点**.

这些区间的几何表示如表 3.1-2 所示. 在数轴表示时，用实心点表示包括在区间内的端点，用空心点表示不包括在区间内的端点.

表 3.1-2

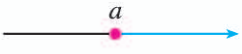
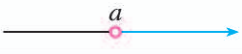
区间	数轴表示
$[a,\ b]$	
$(a,\ b)$	
$[a,\ b)$	
$(a,\ b]$	

实数集 **R** 可以用区间表示为$(-\infty,\ +\infty)$，“∞”读作“无穷大”，“$-\infty$”读作“负

无穷大”，“$+\infty$”读作“正无穷大”.

满足 $x \geqslant a$，$x > a$，$x \leqslant b$，$x < b$ 的实数 x 的集合，可以用区间分别表示为 $[a, +\infty)$，$(a, +\infty)$，$(-\infty, b]$，$(-\infty, b)$. 这些区间的几何表示如表 3.1-3 所示.

表 3.1-3

区间	数轴表示
$[a, +\infty)$	
$(a, +\infty)$	
$(-\infty, b]$	
$(-\infty, b)$	

例 2 已知函数 $f(x)=\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{x+2}$，

(1) 求函数的定义域；

(2) 求 $f(-3)$，$f\left(\dfrac{2}{3}\right)$ 的值；

(3) 当 $a>0$ 时，求 $f(a)$，$f(a-1)$ 的值.

在函数定义中，我们用符号 $y=f(x)$ 表示函数，其中 $f(x)$ 表示 x 对应的函数值，而不是 f 乘 x.

分析： 函数的定义域通常由问题的实际背景确定. 如果只给出解析式 $y=f(x)$，而没有指明它的定义域，那么函数的定义域就是指能使这个式子有意义的实数的集合.

解： (1) 使根式 $\sqrt{x+3}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\{x \mid x \geqslant -3\}$，使分式 $\dfrac{1}{x+2}$ 有意义的实数 x 的集合是 $\{x \mid x \neq -2\}$. 所以，这个函数的定义域是

$$\{x|x\geqslant -3\}\cap\{x|x\neq -2\}=\{x|x\geqslant -3,\text{且 } x\neq -2\},$$

即 $[-3,-2)\cup(-2,+\infty)$.

(2) 将 -3 与 $\dfrac{2}{3}$ 代入解析式，有

$$f(-3)=\sqrt{-3+3}+\frac{1}{-3+2}=-1;$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=\sqrt{\frac{2}{3}+3}+\frac{1}{\frac{2}{3}+2}=\sqrt{\frac{11}{3}}+\frac{3}{8}=\frac{3}{8}+\frac{\sqrt{33}}{3}.$$

(3) 因为 $a>0$，所以 $f(a)$，$f(a-1)$ 有意义.

$$f(a)=\sqrt{a+3}+\frac{1}{a+2};$$

$$f(a-1)=\sqrt{a-1+3}+\frac{1}{a-1+2}=\sqrt{a+2}+\frac{1}{a+1}.$$

由函数的定义可知，一个函数的构成要素为：定义域、对应关系和值域. 因为值域是由定义域和对应关系决定的，所以，如果两个函数的定义域相同，并且对应关系完全一致，即相同的自变量对应的函数值也相同，那么这两个函数是同一个函数.

两个函数如果仅有对应关系相同，但定义域不相同，那么它们不是同一个函数. 例如，前面的问题 1 和问题 2 中，尽管两个函数的对应关系都是 $y=350x$，但它们的定义域不相同，因此它们不是同一个函数；同时，它们的定义域都不是 $\mathbf{R}$，而是 $\mathbf{R}$ 的真子集，因此它们与正比例函数 $y=350x(x\in\mathbf{R})$也不是同一个函数.

此外，函数 $u=t^2$，$t\in(-\infty,+\infty)$，$x=y^2$，$y\in(-\infty,+\infty)$ 与 $y=x^2$，$x\in(-\infty,+\infty)$，虽然表示它们的字母不同，但因为它们的对应关系和定义域相同，所以它们是同一个函数.

例 3 下列函数中哪个与函数 $y=x$ 是同一个函数？

(1) $y=(\sqrt{x})^2$；　　(2) $u=\sqrt[3]{v^3}$；

(3) $y=\sqrt{x^2}$；　　(4) $m=\dfrac{n^2}{n}$.

解： (1) $y=(\sqrt{x})^2=x(x\in\{x\mid x\geqslant 0\})$，它与函数$y=x(x\in\mathbf{R})$虽然对应关系相同，但是定义域不相同，所以这个函数与函数 $y=x(x\in\mathbf{R})$不是同一个函数.

(2) $u=\sqrt[3]{v^3}=v(v\in\mathbf{R})$，它与函数 $y=x$ $(x\in\mathbf{R})$不仅对应关系相同，而且定义域也相同，所以这个函数与函数 $y=x(x\in\mathbf{R})$ 是同一个函数.

(3) $y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 它与函数$y=x(x\in\mathbf{R})$的定义域都是实数集 $\mathbf{R}$，但是当 $x<0$ 时，它的对应关系与函数 $y=x(x\in\mathbf{R})$不相同. 所以这个函数与函数 $y=x$ $(x\in\mathbf{R})$不是同一个函数.

(4) $m=\dfrac{n^2}{n}=n(n\in\{n\mid n\neq 0\})$，它与函数$y=x(x\in\mathbf{R})$的对应关系相同但定义域不相同. 所以这个函数与函数$y=x(x\in\mathbf{R})$不是同一个函数.

也可以利用信息技术画出例 3 中四个函数的图象，根据图象进行判断.

思考

至此，我们在初中学习的基础上，运用集合语言和对应关系刻画了函数，并引进了符号 $y=f(x)$，明确了函数的构成要素. 比较函数的这两种定义，你对函数有什么新的认识？

练习

1. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{4x+7}$；　　(2) $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}-1$.

2. 已知函数 $f(x)=3x^3+2x$，

(1) 求 $f(2)$，$f(-2)$，$f(2)+f(-2)$ 的值；

(2) 求 $f(a)$，$f(-a)$，$f(a)+f(-a)$ 的值.

3. 判断下列各组中的函数是否为同一个函数，并说明理由：

(1) 表示炮弹飞行高度 h 与时间 t 关系的函数 $h=130t-5t^2$ 和二次函数 $y=130x-5x^2$；

(2) $f(x)=1$ 和 $g(x)=x^0$.

3.1.2　函数的表示法

我们在初中已经接触过函数的三种表示法：解析法、列表法和图象法.

解析法，就是用解析式表示两个变量之间的对应关系，如 3.1.1 的问题 1、2.

列表法，就是列出表格来表示两个变量之间的对应关系，如 3.1.1 的问题 4.

图象法，就是用图象表示两个变量之间的对应关系，如 3.1.1 的问题 3.

这三种方法是常用的函数表示法.

例 4　某种笔记本的单价是 5 元，买 $x(x\in\{1,2,3,4,5\})$ 个笔记本需要 y 元. 试用函数的三种表示法表示函数 $y=f(x)$.

解： 这个函数的定义域是数集 $\{1,2,3,4,5\}$.

用解析法可将函数 $y=f(x)$ 表示为

$$y=5x,\ x\in\{1,2,3,4,5\}.$$

用列表法可将函数 $y=f(x)$ 表示为

笔记本数 x	1	2	3	4	5
钱数 y	5	10	15	20	25

用图象法可将函数 $y=f(x)$ 表示为图 3.1-2.

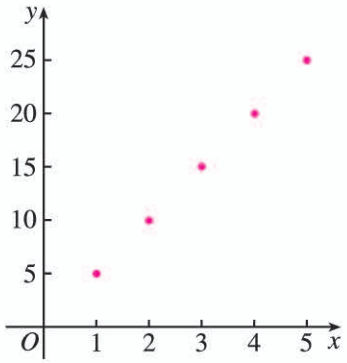


图 3.1-2

函数图象既可以是连续的曲线，也可以是直线、折线、离散的点等. 那么判断一个图形是不是函数图象的依据是什么？

思考

（1）比较函数的三种表示法，它们各自的特点是什么？

（2）所有函数都能用解析法表示吗？请你举出实例加以说明.

例 5 画出函数 $y=|x|$ 的图象.

解：由绝对值的概念，我们有

$$y=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

所以，函数 $y=|x|$ 的图象如图 3.1-3 所示.

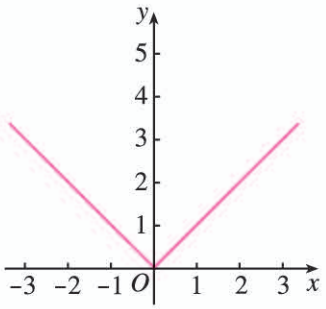


图 3.1-3

像例 5 中 $y=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 这样的函数称为**分段函数**. 生活中，有很多可以用分段函数描述的实际问题，如出租车的计费、个人所得税纳税额等.

例 6 给定函数 $f(x)=x+1$，$g(x)=(x+1)^2$，$x\in\mathbf{R}$，

（1）在同一直角坐标系中画出函数 $f(x)$，$g(x)$ 的图象；

（2）$\forall x\in\mathbf{R}$，用 $M(x)$ 表示 $f(x)$，$g(x)$ 中的最大者，记为

$$M(x)=\max\{f(x),\ g(x)\}.$$

例如，当 $x=2$ 时，$M(2)=\max\{f(2),\ g(2)\}=\max\{3,\ 9\}=9$.

请分别用图象法和解析法表示函数 $M(x)$.

解：（1）在同一直角坐标系中画出函数 $f(x)$，$g(x)$ 的图象（图 3.1-4）.

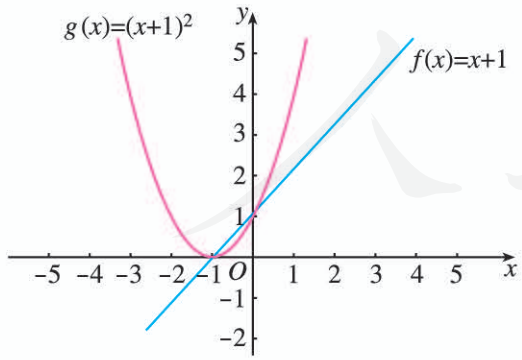


图 3.1-4

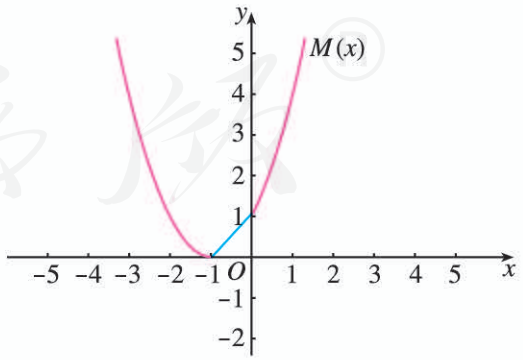


图 3.1-5

（2）由图 3.1-4 中函数取值的情况，结合函数 $M(x)$ 的定义，可得函数 $M(x)$ 的图象（图 3.1-5）.

由 $(x+1)^2=x+1$，得 $x(x+1)=0$.

解得 $x=-1$，或 $x=0$.

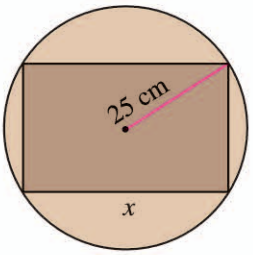
结合图 3.1-5，得出函数 $M(x)$的解析式为

$$M(x)=\begin{cases}(x+1)^2, & x\leqslant -1,\\ x+1, & -1<x\leqslant 0,\\ (x+1)^2, & x>0.\end{cases}$$

你能用其他方法求出 $M(x)$ 的解析式吗？

练习

1. 如图，把直截面半径为 25 cm 的圆柱形木头锯成直截面为矩形的木料，如果矩形的一边长为 x（单位：cm），面积为 y（单位：cm^2），把 y 表示为 x 的函数.



（第 1 题）

2. 画出函数 $y=|x-2|$的图象.
3. 给定函数 $f(x)=-x+1$，$g(x)=(x-1)^2$，$x\in\mathbf{R}$，
   （1）画出函数 $f(x)$，$g(x)$的图象；
   （2）$\forall x\in\mathbf{R}$，用 $m(x)$表示 $f(x)$，$g(x)$中的最小者，记为 $m(x)=\min\{f(x),g(x)\}$，请分别用图象法和解析法表示函数 $m(x)$.

对于一个具体的问题，如果涉及函数，那么应当学会选择恰当的方法表示问题中的函数关系.

例 7 表 3.1-4 是某校高一（1）班三名同学在高一学年度六次数学测试的成绩及班级平均分表.

表 3.1-4

姓　名	测试序号					
	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次	第 6 次
王　伟	98	87	91	92	88	95
张　城	90	76	88	75	86	80
赵　磊	68	65	73	72	75	82
班级平均分	88.2	78.3	85.4	80.3	75.7	82.6

请你对这三位同学在高一学年的数学学习情况做一个分析.

解：从表 3.1-4 中可以知道每位同学在每次测试中的成绩，但不太容易分析每位同学的成绩变化情况. 如果将每位同学的“成绩”与“测试序号”之间的函数关系分别用图象（均为 6 个离散的点）表示出来，如图 3.1-6，那么就能直观地看到每位同学成绩变化的情况，这对我们的分析很有帮助.

从图 3.1-6 可以看到，王伟同学的数学学习成绩始终高于班级平均水平，学习情况比较稳定而且成绩优秀. 张城同学的数学学习成绩不稳定，总是在班级平均水平上下波动，

而且波动幅度较大. 赵磊同学的数学学习成绩低于班级平均水平，但表示他成绩变化的图象呈上升趋势，表明他的数学成绩在稳步提高.

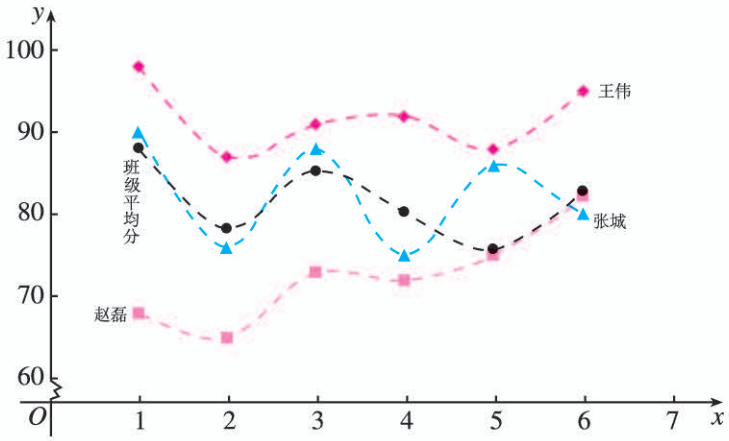


图 3.1-6

为了更容易看出一个同学的学习情况，我们将表示每位同学成绩的函数图象（离散的点）用虚线连接.

例 8 依法纳税是每个公民应尽的义务，个人取得的所得应依照《中华人民共和国个人所得税法》向国家缴纳个人所得税（简称个税）. 2019 年 1 月 1 日起，个税税额根据应纳税所得额、税率和速算扣除数确定，计算公式为

个税税额＝应纳税所得额×税率－速算扣除数. ①

应纳税所得额的计算公式为

应纳税所得额＝综合所得收入额－基本减除费用－专项扣除

－专项附加扣除－依法确定的其他扣除. ②

其中，“基本减除费用”（免征额）为每年 60 000 元. 税率与速算扣除数见表 3.1-5.

“综合所得”包括工资、薪金，劳务报酬，稿酬，特许权使用费；“专项扣除”包括居民个人按照国家规定的范围和标准缴纳的基本养老保险、基本医疗保险、失业保险等社会保险费和住房公积金等；“专项附加扣除”包括子女教育、继续教育、大病医疗、住房贷款利息或者住房租金、赡养老人等支出；“其他扣除”是指除上述基本减除费用、专项扣除、专项附加扣除之外，由国务院决定以扣除方式减少纳税的优惠政策规定的费用.

表 3.1-5

级数	全年应纳税所得额所在区间	税率（%）	速算扣除数
1	[0，36 000]	3	0
2	(36 000，144 000]	10	2 520
3	(144 000，300 000]	20	16 920
4	(300 000，420 000]	25	31 920
5	(420 000，660 000]	30	52 920
6	(660 000，960 000]	35	85 920
7	(960 000，+∞)	45	181 920

（1）设全年应纳税所得额为 t，应缴纳个税税额为 y，求 $y=f(t)$，并画出图象；

（2）小王全年综合所得收入额为 117 600 元，假定缴纳的基本养老保险、基本医疗保险、失业保险等社会保险费和住房公积金占综合所得收入额的比例分别是 8%，2%，

1%，9%，专项附加扣除是 9 600 元，依法确定其他扣除是 560 元，那么他全年应缴纳多少综合所得个税？

分析： 根据个税产生办法，可按下列步骤计算应缴纳个税税额：

第一步，根据②计算出应纳税所得额 t；

第二步，由 t 的值并根据表 3.1-5 得出相应的税率与速算扣除数；

第三步，根据①计算出个税税额 y 的值.

由于不同应纳税所得额 t 对应不同的税率与速算扣除数，所以 y 是 t 的分段函数.

解：（1）根据表 3.1-5，可得函数 $y=f(t)$ 的解析式为

$$y=\begin{cases}0.03t, & 0\leqslant t\leqslant 36\ 000,\\ 0.1t-2\ 520, & 36\ 000<t\leqslant 144\ 000,\\ 0.2t-16\ 920, & 144\ 000<t\leqslant 300\ 000,\\ 0.25t-31\ 920, & 300\ 000<t\leqslant 420\ 000,\\ 0.3t-52\ 920, & 420\ 000<t\leqslant 660\ 000,\\ 0.35t-85\ 920, & 660\ 000<t\leqslant 960\ 000,\\ 0.45t-181\ 920, & t>960\ 000.\end{cases} \quad ③$$

函数图象如图 3.1-7 所示.

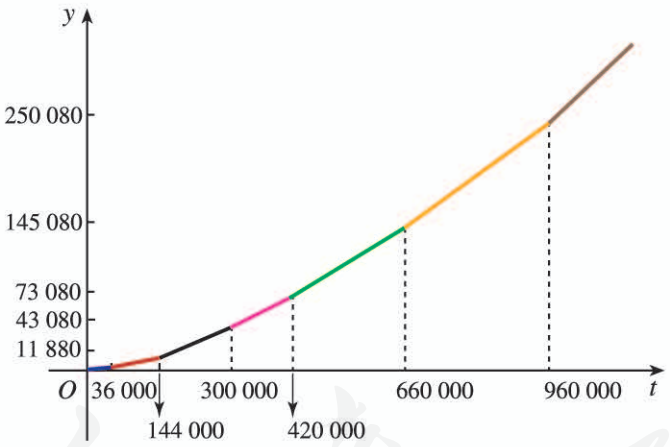


图 3.1-7

（2）根据②，小王全年应纳税所得额为

$$\begin{aligned}t&=117\ 600-60\ 000-117\ 600\times(8\%+2\%+1\%+9\%)-9\ 600-560\\&=0.8\times 117\ 600-70\ 160\\&=23\ 920.\end{aligned}$$

将 t 的值代入③，得

$$y=0.03\times 23\ 920=717.6.$$

所以，小王应缴纳的综合所得个税税额为 717.6 元.

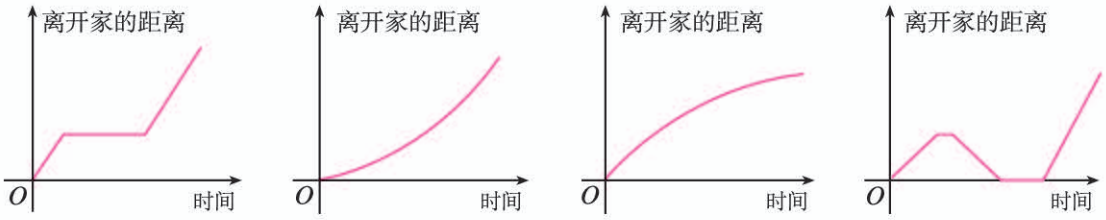
练习

1. 下图中哪几个图象与下述三件事分别吻合得最好？请你为剩下的那个图象写出一件事.

（1）我离开家不久，发现自己把作业本忘在家里了，于是返回家里找到了作业本再上学；

（2）我骑着车离开家后一路匀速行驶，只是在途中遇到一次交通堵塞，耽搁了一些时间；

（3）我从家出发后，心情轻松，一路缓缓加速行进.



（第 1 题）

2. 某市“招手即停”公共汽车的票价按下列规则制定：

（1）5 km 以内（含 5 km），票价 2 元；

（2）5 km 以上，每增加 5 km，票价增加 1 元（不足 5 km 的按 5 km 计算）.

如果某条线路的总里程为 20 km，请根据题意，写出票价与里程之间的函数解析式，并画出函数的图象.

习题 3.1

复习巩固

1. 求下列函数的定义域：

（1）$f(x)=\dfrac{3x}{x-4}$；　　（2）$f(x)=\sqrt{x^2}$；

（3）$f(x)=\dfrac{6}{x^2-3x+2}$；　　（4）$f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x}}{x-1}$.

2. 下列哪一组中的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同一个函数？

（1）$f(x)=x-1$，$g(x)=\dfrac{x^2}{x}-1$；

（2）$f(x)=x^2$，$g(x)=(\sqrt{x})^4$；

（3）$f(x)=x^2$，$g(x)=\sqrt[3]{x^6}$.

3. 画出下列函数的图象，并说出函数的定义域、值域：

（1）$y=3x$；　　（2）$y=\dfrac{8}{x}$；

（3）$y=-4x+5$；　　（4）$y=x^2-6x+7$.

4. 已知函数 $f(x)=3x^2-5x+2$，求 $f(-\sqrt{2})$，$f(-a)$，$f(a+3)$，$f(a)+f(3)$ 的值.

5. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x+2}{x-6}$，

(1) 点 (3，14) 在 $f(x)$ 的图象上吗?

(2) 当 $x=4$ 时，求 $f(x)$ 的值.

(3) 当 $f(x)=2$ 时，求 x 的值.

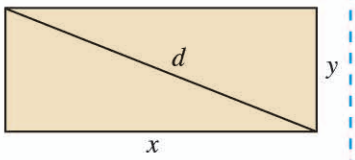
6. 若 $f(x)=x^2+bx+c$，且 $f(1)=0$，$f(3)=0$，求 $f(-1)$ 的值.

7. 画出下列函数的图象：

(1) $f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ 1, & x>0;\end{cases}$　　(2) $G(n)=3n+1$，$n\in\{1,2,3\}$.

综合运用

8. 如图，矩形的面积为 10. 如果矩形的长为 x，宽为 y，对角线为 d，周长为 l，那么你能获得关于这些量的哪些函数?



(第 8 题)

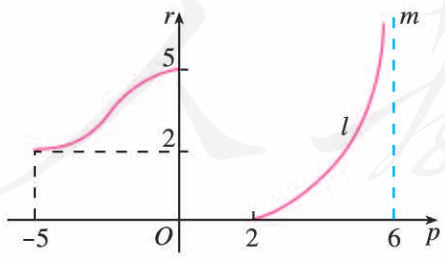
9. 一个圆柱形容器的底部直径是 d cm，高是 h cm. 现在向容器内每秒注入某种溶液 v cm^3. 求容器内溶液的高度 x (单位：cm) 关于注入溶液的时间 t (单位：s) 的函数解析式，并写出函数的定义域和值域.

10. 一个老师用 5 分制对数学作业评分. 一次作业中，第一小组同学按座位序号 1，2，3，4，5，6 的次序，得分依次是 5，3，4，2，4，5. 你会怎样表示这次作业的得分情况? 用 x，y 分别表示序号和对应的得分，y 是 x 的函数吗? 如果是，那么它的定义域、值域和对应关系各是什么?

11. 函数 $r=f(p)$ 的图象如图所示，

(1) 函数 $r=f(p)$ 的定义域、值域各是什么?

(2) r 取何值时，只有唯一的 p 值与之对应?



(第 11 题)

图中，曲线 l 与直线 m 无限接近，但永不相交.

12. 画出定义域为 $\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 8, \text{且 } x\neq 5\}$，值域为 $\{y\mid -1\leqslant y\leqslant 2, y\neq 0\}$ 的一个函数的图象.

(1) 将你的图象和其他同学的相比较，有什么差别吗?

(2) 如果平面直角坐标系中点 $P(x，y)$ 的坐标满足 $-3\leqslant x\leqslant 8$，$-1\leqslant y\leqslant 2$，那么其中哪些点不能在图象上?