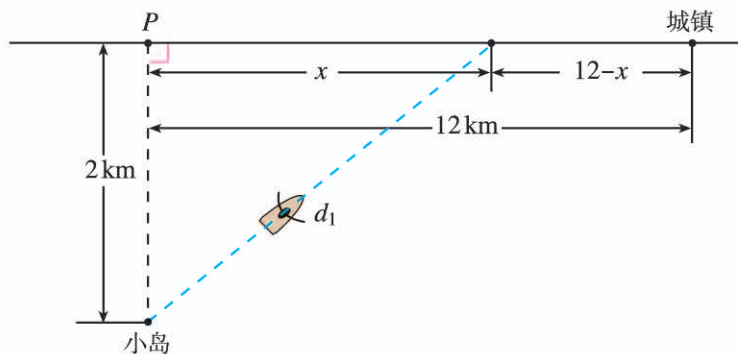


13. 函数 $f(x)=[x]$ 的函数值表示不超过 x 的最大整数, 例如, $[-3.5]=-4$, $[2.1]=2$. 当 $x \in (-2.5, 3]$ 时, 写出函数 $f(x)$ 的解析式, 并画出函数的图象.
14. 构建一个问题情境, 使其中的变量关系能用解析式 $y=\frac{1}{2}ax^2 (a>0)$ 来描述.

拓广探索

15. 如图所示, 一座小岛距离海岸线上最近的点 P 的距离是 2 km, 从点 P 沿海岸正东 12 km 处有一个城镇.
- (1) 假设一个人驾驶的小船的平均速度为 3 km/h, 步行的速度是 5 km/h, t (单位: h) 表示他从小岛到城镇的时间, x (单位: km) 表示此人将船停在海岸处距点 P 的距离. 请将 t 表示为 x 的函数.
- (2) 如果将船停在距点 P 4 km 处, 那么从小岛到城镇要多长时间 (精确到 0.1 h)?



(第 15 题)

16. 给定数集 $A=\mathbf{R}$, $B=(-\infty, 0]$, 方程

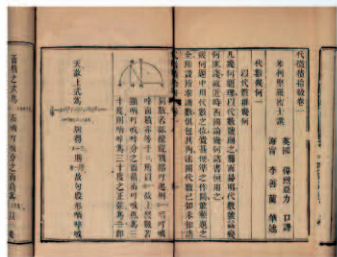
$$u^2+2v=0, \quad \text{①}$$

- (1) 任给 $u \in A$, 对应关系 f 使方程①的解 v 与 u 对应, 判断 $v=f(u)$ 是否为函数;
- (2) 任给 $v \in B$, 对应关系 g 使方程①的解 u 与 v 对应, 判断 $u=g(v)$ 是否为函数.
17. 探究是否存在函数 $f(x)$, $g(x)$ 满足条件:
- (1) 定义域相同, 值域相同, 但对应关系不同;
- (2) 值域相同, 对应关系相同, 但定义域不同.
18. 在一个展现人脑智力的综艺节目中, 一位参加节目的少年能将圆周率 π 准确地记忆到小数点后面 200 位, 更神奇的是, 当主持人说出小数点后面的位数时, 这位少年都能准确地说出该数位上的数字. 如果记圆周率 π 小数点后第 n 位上的数字为 y , 那么你认为 y 是 n 的函数吗? 如果是, 请写出函数的定义域、值域与对应关系; 如果不是, 请说明理由.

函数概念的发展历程

17 世纪, 科学家们致力于运动的研究, 如计算天体的位置, 远距离航海中对经度和纬度的测量, 炮弹的速度对于高度和射程的影响等. 诸如此类的问题都需要探究两个变量之间的关系, 并根据这种关系对事物的变化规律作出判断, 如根据炮弹的发射角和初速度推测它能达到的高度和射程. 这正是函数概念产生和发展的背景.

“function” 一词最初由德国数学家莱布尼茨 (G. W. Leibniz, 1646—1716) 使用. 在中国, 清代数学家李善兰 (1811—1882) 在 1859 年和英国传教士伟烈亚力合译的《代微积拾级》中首次将 “function” 译作 “函数”.



《代微积拾级》

莱布尼茨用 “函数” 表示随曲线的变化而改变的几何量, 如坐标、切线等. 1718 年, 他的学生、瑞士数学家约翰·伯努利 (J. Bernoulli, 1667—1748) 强调函数要用式子表示. 后来, 数学家认为这不是判断函数的标准. 只要一些变量变化, 另一些变量随之变化就可以了. 所以, 1755 年, 瑞士数学家欧拉 (L. Euler, 1707—1783) 将函数定义为 “如果某些变量, 以一种方式依赖于另一些变量, 我们将前面的变量称为后面变量的函数”.

当时很多数学家对于不用式子表示函数很不习惯, 甚至抱怀疑态度. 函数的概念仍然是比较模糊的.

随着对微积分研究的深入, 18 世纪末 19 世纪初, 人们对函数的认识向前推进了. 德国数学家狄利克雷 (P. G. L. Dirichlet, 1805—1859) 在 1837 年时提出: “如果对于 x 的每一个值, y 总有一个完全确定的值与之对应, 那么 y 是 x 的函数.” 这个定义较清楚地说明了函数的内涵. 只要有一个法则, 使得取值范围中的每一个 x , 有一个确定的 y 和它对应就行了, 不管这个法则是用解析式还是用图象、表格等形式表示. 例如, 狄利克雷函数, 即: 当自变量取有理数时, 函数值为 1; 当自变量取无理数时, 函数值为 0. 它只能用对应的语言予以表达. 19 世纪 70 年代以后, 随着集合概念的出现, 函数概念又进而用更加严谨的集合和对应语言表述, 这就是本节学习的函数概念.

综上所述可知, 函数概念的发展与生产、生活以及科学技术的实际需要紧密相关, 而且随着研究的深入, 函数概念不断得到严谨化、精确化的表达, 这与我们学习函数的过程是一样的.

你能以函数概念的发展为背景, 谈谈从初中到高中学习函数概念的体会吗?

3.2 函数的基本性质

变化中的不变性就是性质，变化中的规律性也是性质。

前面学习了函数的定义和表示法，知道函数 $y=f(x)$ ($x \in A$) 描述了客观世界中变量之间的一种对应关系。这样，我们就可以通过研究函数的变化规律来把握客观世界中事物的变化规律。因此，研究函数的性质，如随着自变量的增大函数值是增大还是减小，有没有最大值或最小值，函数图象有什么特征等，是认识客观规律的重要方法。

我们知道，先画出函数图象，通过观察和分析图象的特征，可以得到函数的一些性质。观察图 3.2-1 中的各个函数图象，你能说说它们分别反映了相应函数的哪些性质吗？

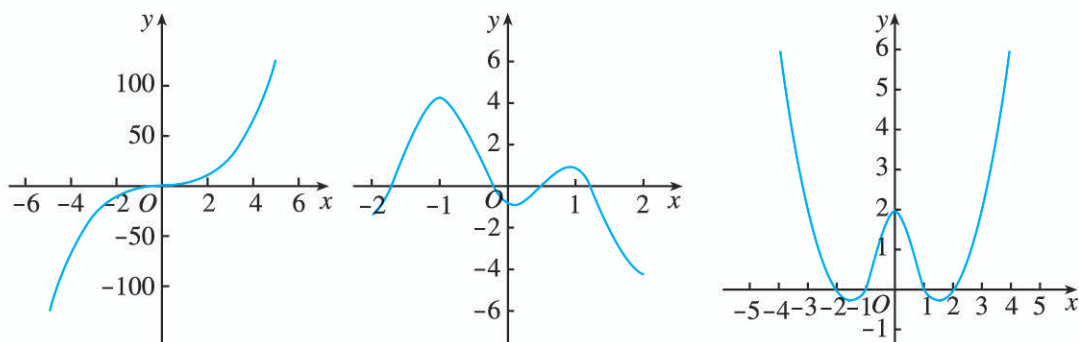


图 3.2-1

3.2.1 单调性与最大（小）值

在初中，我们利用函数图象研究过函数值随自变量的增大而增大（或减小）的性质，这一性质叫做函数的单调性。下面进一步用符号语言刻画这种性质。

先研究二次函数 $f(x)=x^2$ 的单调性。

画出它的图象（如图 3.2-2），可以看到：

图象在 y 轴左侧部分从左到右是下降的，也就是说，当 $x \leq 0$ 时， y 随 x 的增大而减小。用符号语言描述，就是任意取 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ ，得到 $f(x_1)=x_1^2$ ， $f(x_2)=x_2^2$ ，那么当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) > f(x_2)$ 。这时我们就说函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上是单调递减的。

图象在 y 轴右侧部分从左到右是上升的，也就是说，当

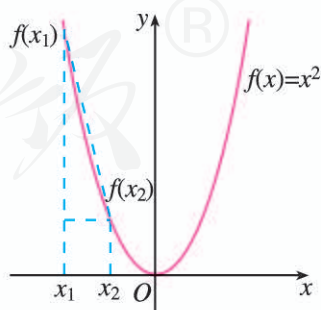


图 3.2-2

你能说明为什么 $f(x_1) > f(x_2)$ 吗？

$x \geq 0$ 时, y 随 x 的增大而增大. 用符号语言表达, 就是任意取 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, 得到 $f(x_1) = x_1^2, f(x_2) = x_2^2$, 那么当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) < f(x_2)$. 这时我们就说函数 $f(x) = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上是单调递增的.

你能说明为什么 $f(x_1) < f(x_2)$ 吗?

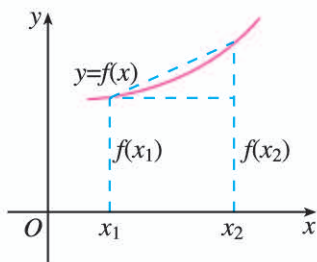
思考

函数 $f(x) = |x|$, $f(x) = -x^2$ 各有怎样的单调性?

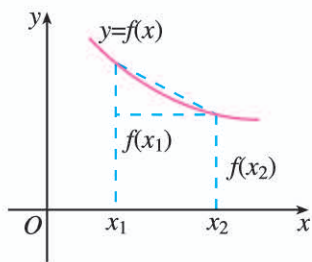
一般地, 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subseteq D$:

如果 $\forall x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 那么就称函数 $f(x)$ 在区间 I 上 **单调递增** (图 3.2-3 (1)).

特别地, 当函数 $f(x)$ 在它的定义域上单调递增时, 我们就称它是 **增函数** (increasing function).



(1)



(2)

图 3.2-3

如果 $\forall x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 那么就称函数 $f(x)$ 在区间 I 上 **单调递减** (图 3.2-3 (2)).

特别地, 当函数 $f(x)$ 在它的定义域上单调递减时, 我们就称它是 **减函数** (decreasing function).

如果函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上单调递增或单调递减, 那么就说函数 $y = f(x)$ 在这一区间具有 (严格的) 单调性, 区间 I 叫做 $y = f(x)$ 的单调区间.

思考

(1) 设 A 是区间 I 上某些自变量的值组成的集合, 而且 $\forall x_1, x_2 \in A$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 我们能说函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增吗? 你能举例说明吗?

(2) 函数的单调性是对定义域内某个区间而言的, 你能举出在整个定义域内是单调递增的函数例子吗? 你能举出在定义域内的某些区间上单调递增但在另一些区间上单调递减的函数例子吗?

例 1 根据定义, 研究函数 $f(x)=kx+b(k \neq 0)$ 的单调性.

分析: 根据函数单调性的定义, 需要考察当 $x_1 < x_2$ 时, $f(x_1) < f(x_2)$ 还是 $f(x_1) > f(x_2)$. 根据实数大小关系的基本事实, 只要考察 $f(x_1)-f(x_2)$ 与 0 的大小关系.

解: 函数 $f(x)=kx+b(k \neq 0)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$. $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 且 $x_1 < x_2$, 则

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2) &= (kx_1+b)-(kx_2+b) \\&= k(x_1-x_2).\end{aligned}$$

由 $x_1 < x_2$, 得 $x_1-x_2 < 0$. 所以

① 当 $k > 0$ 时, $k(x_1-x_2) < 0$. 于是

$$f(x_1)-f(x_2) < 0,$$

即

$$f(x_1) < f(x_2).$$

这时, $f(x)=kx+b$ 是增函数.

② 当 $k < 0$ 时, $k(x_1-x_2) > 0$. 于是

$$f(x_1)-f(x_2) > 0,$$

即

$$f(x_1) > f(x_2).$$

这时, $f(x)=kx+b$ 是减函数.

在初中, 我们利用函数图象得到了上述结论, 这里用严格的推理运算得到了函数 $f(x)=kx+b$ 的单调性.

例 2 物理学中的玻意耳定律 $p=\frac{k}{V}$ (k 为正常数) 告诉我们, 对于一定量的气体, 当其体积 V 减小时, 压强 p 将增大. 试对此用函数的单调性证明.

分析: 根据题意, 只要证明函数 $p=\frac{k}{V}$ ($V \in (0, +\infty)$) 是减函数即可.

证明: $\forall V_1, V_2 \in (0, +\infty)$, 且 $V_1 < V_2$, 则

$$p_1-p_2=\frac{k}{V_1}-\frac{k}{V_2}=k \frac{V_2-V_1}{V_1V_2}.$$

由 $V_1, V_2 \in (0, +\infty)$, 得 $V_1V_2 > 0$;

由 $V_1 < V_2$, 得 $V_2-V_1 > 0$.

又 $k > 0$, 于是

$$p_1-p_2 > 0,$$

即

$$p_1 > p_2.$$

所以, 根据函数单调性的定义, 函数 $p=\frac{k}{V}$, $V \in (0, +\infty)$ 是减函数. 也就是说, 当体积 V 减小时, 压强 p 将增大.

例 3 根据定义证明函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

证明: $\forall x_1, x_2 \in (1, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 有

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) - \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) = (x_1 - x_2) + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) \\ &= (x_1 - x_2) + \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} (x_1 x_2 - 1). \end{aligned}$$

由 $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$, 得 $x_1 > 1, x_2 > 1$.

所以 $x_1 x_2 > 1, x_1 x_2 - 1 > 0$.

又由 $x_1 < x_2$, 得 $x_1 - x_2 < 0$.

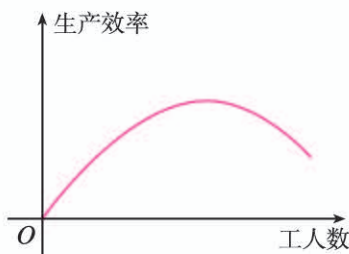
于是 $\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} (x_1 x_2 - 1) < 0$,

即 $y_1 < y_2$.

所以, 函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

练习

1. 请根据下图描述某装配线的生产效率与生产线上工人数量间的关系.



(第 1 题)

2. 根据定义证明函数 $f(x)=3x+2$ 是增函数.
 3. 证明函数 $f(x)=-\frac{2}{x}$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增.
 4. 画出反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象.

(1) 这个函数的定义域 D 是什么?

(2) 它在定义域 D 上的单调性是怎样的? 证明你的结论.

通过观察图象, 先对函数是否具有某种性质做出猜想, 然后通过逻辑推理, 证明这种猜想的正确性, 是研究函数性质的一种常用方法.

再来观察本节的图 3.2-2, 可以发现, 二次函数 $f(x)=x^2$ 的图象上有一个最低点 $(0, 0)$, 即 $\forall x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x) \geq f(0)$. 当一个函数 $f(x)$ 的图象有最低点时, 我们就说函数 $f(x)$ 有最小值.

思考

你能以函数 $f(x) = -x^2$ 为例说明函数 $f(x)$ 的最大值的含义吗?

一般地, 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在实数 M 满足:

- (1) $\forall x \in D$, 都有 $f(x) \leq M$;
- (2) $\exists x_0 \in D$, 使得 $f(x_0) = M$.

那么, 我们称 M 是函数 $y = f(x)$ 的**最大值** (maximum value).

思考

你能仿照函数最大值的定义, 给出函数 $y = f(x)$ 的**最小值** (minimum value) 的定义吗?

例 4 “菊花”烟花是最壮观的烟花之一. 制造时一般是期望在它达到最高点时爆裂. 如果烟花距地面的高度 h (单位: m) 与时间 t (单位: s) 之间的关系为 $h(t) = -4.9t^2 + 14.7t + 18$, 那么烟花冲出后什么时候是它爆裂的最佳时刻? 这时距地面的高度是多少 (精确到 1 m)?

解: 画出函数 $h(t) = -4.9t^2 + 14.7t + 18$ 的图象 (图 3.2-4). 显然, 函数图象的顶点就是烟花上升的最高点, 顶点的横坐标就是烟花爆裂的最佳时刻, 纵坐标就是这时距地面的高度.

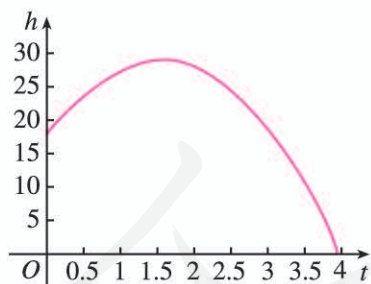


图 3.2-4

烟花设计者就是按照这些数据设定引信的 length, 以达到施放烟花的最佳效果.

由二次函数的知识, 对于函数 $h(t) = -4.9t^2 + 14.7t + 18$, 我们有:

当 $t = -\frac{14.7}{2 \times (-4.9)} = 1.5$ 时, 函数有最大值

$$h = \frac{4 \times (-4.9) \times 18 - 14.7^2}{4 \times (-4.9)} \approx 29.$$

于是, 烟花冲出后 1.5 s 是它爆裂的最佳时刻, 这时距地面的高度约为 29 m.

例 5 已知函数 $f(x) = \frac{2}{x-1}$ ($x \in [2, 6]$), 求函数的最大值和最小值.

分析: 由函数 $f(x) = \frac{2}{x-1}$ ($x \in [2, 6]$) 的图象 (图 3.2-5) 可知, 函数 $f(x) = \frac{2}{x-1}$ 在区间 $[2, 6]$ 上单调递减. 所以, 函数 $f(x) = \frac{2}{x-1}$ 在区间 $[2, 6]$ 的两个端点上分别取得最大值和最小值.

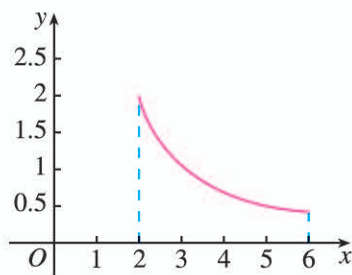


图 3.2-5

解: $\forall x_1, x_2 \in [2, 6]$, 且 $x_1 < x_2$, 则

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{2}{x_1-1} - \frac{2}{x_2-1} \\ &= \frac{2[(x_2-1) - (x_1-1)]}{(x_1-1)(x_2-1)} \\ &= \frac{2(x_2-x_1)}{(x_1-1)(x_2-1)}. \end{aligned}$$

由 $2 \leq x_1 < x_2 \leq 6$, 得 $x_2 - x_1 > 0$, $(x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0$, 于是

$$f(x_1) - f(x_2) > 0,$$

即

$$f(x_1) > f(x_2).$$

所以, 函数 $f(x) = \frac{2}{x-1}$ 在区间 $[2, 6]$ 上单调递减.

因此, 函数 $f(x) = \frac{2}{x-1}$ 在区间 $[2, 6]$ 的两个端点上分别取得最大值与最小值. 在 $x=2$ 时取得最大值, 最大值是 2; 在 $x=6$ 时取得最小值, 最小值是 0.4.

练习

- 整个上午 (8:00~12:00) 天气越来越暖, 中午时分 (12:00~13:00) 一场暴风雨使天气骤然凉爽了许多. 暴风雨过后, 天气转暖, 直到太阳落山 (18:00) 才又开始转凉. 画出这一天 8:00~20:00 期间气温作为时间函数的一个可能的图象 (示意图), 并说出所画函数的单调区间.
- 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-6, 11]$. 如果 $f(x)$ 在区间 $[-6, -2]$ 上单调递减, 在区间 $[-2, 11]$ 上单调递增, 画出 $f(x)$ 的一个大致的图象, 从图象上可以发现 $f(-2)$ 是函数 $f(x)$ 的一个 _____.
- 已知函数 $f(x) = \frac{1}{x}$, 求函数在区间 $[2, 6]$ 上的最大值和最小值.

3.2.2 奇偶性

前面我们用符号语言精确地描述了函数图象在定义域的某个区间上“上升”（或“下降”）的性质. 下面继续研究函数的其他性质.

画出并观察函数 $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=2-|x|$ 的图象（图 3.2-6），你能发现这两个函数图象有什么共同特征吗？

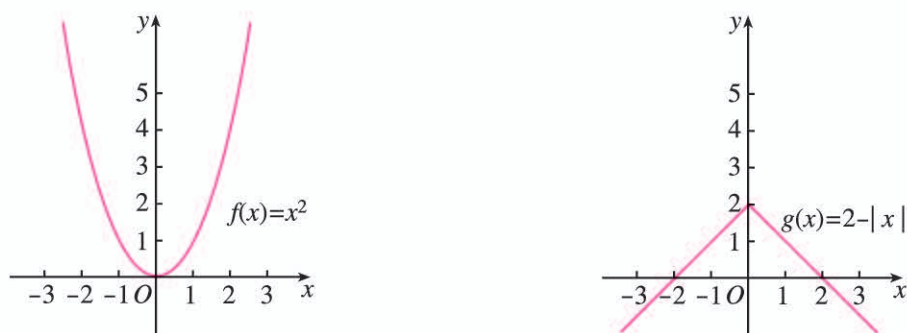


图 3.2-6

可以发现，这两个函数的图象都关于 y 轴对称.

探究

类比函数单调性，你能用符号语言精确地描述“函数图象关于 y 轴对称”这一特征吗？

不妨取自变量的一些特殊值，观察相应函数值的情况，如表 3.2-1.

表 3.2-1

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$f(x)=x^2$	...	9	4	1	0	1	4	9	...
$g(x)=2- x $	...	-1	0	1	2	1	0	-1	...

可以发现，当自变量取一对相反数时，相应的两个函数值相等.

例如，对于函数 $f(x)=x^2$ ，有

$$f(-3)=9=f(3);$$

$$f(-2)=4=f(2);$$

$$f(-1)=1=f(1).$$

实际上， $\forall x \in \mathbf{R}$ ，都有 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$ ，

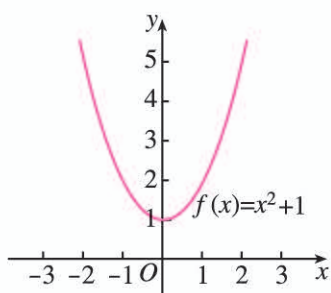
这时称函数 $f(x)=x^2$ 为偶函数.

请你仿照这个过程，
说明函数 $g(x)=2-|x|$
也是偶函数.

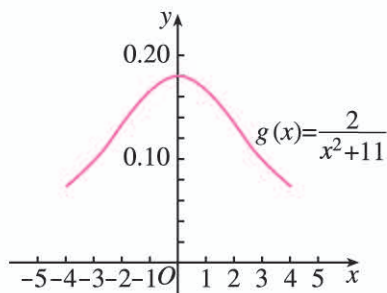
一般地, 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果 $\forall x \in D$, 都有 $-x \in D$, 且 $f(-x) = f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 就叫做**偶函数** (even function).

例如, 函数 $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \frac{2}{x^2 + 11}$ 都是偶函数, 它们的图象分别如图 3.2-7

(1)(2) 所示.



(1)



(2)

图 3.2-7

探究

观察函数 $f(x) = x$ 和 $g(x) = \frac{1}{x}$ 的图象 (图 3.2-8), 你能发现这两个函数图象有什么共同特征吗? 你能用符号语言精确地描述这一特征吗?

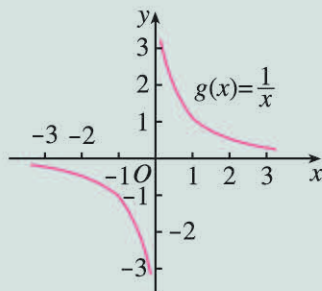
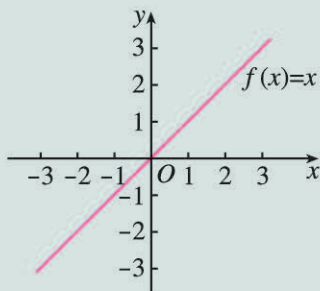


图 3.2-8

可以发现, 两个函数的图象都关于原点成中心对称图形. 为了用符号语言描述这一特征, 不妨取自变量的一些特殊值, 看相应函数值的情况, 请完成表 3.2-2.

表 3.2-2

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$f(x) = x$	...								...
$g(x) = \frac{1}{x}$	...								...

可以发现, 当自变量 x 取一对相反数时, 相应的函数值 $f(x)$ 也是一对相反数.

例如, 对于函数 $f(x)=x$, 有

$$f(-3)=-3=-f(3);$$

$$f(-2)=-2=-f(2);$$

$$f(-1)=-1=-f(1).$$

实际上, $\forall x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(-x)=-x=-f(x)$. 这时称函数 $f(x)=x$ 为奇函数.

一般地, 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果 $\forall x \in D$, 都有一 $x \in D$, 且 $f(-x)=-f(x)$, 那么函数 $f(x)$ 就叫做**奇函数** (odd function).

请你仿照这个过程,

说明函数 $g(x)=\frac{1}{x}$ 也是奇函数.

例 6 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=x^4$; (2) $f(x)=x^5$;

(3) $f(x)=x+\frac{1}{x}$; (4) $f(x)=\frac{1}{x^2}$.

解: (1) 函数 $f(x)=x^4$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

因为 $\forall x \in \mathbf{R}$, 都有一 $x \in \mathbf{R}$, 且

$$f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x),$$

所以, 函数 $f(x)=x^4$ 为偶函数.

(2) 函数 $f(x)=x^5$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

因为 $\forall x \in \mathbf{R}$, 都有一 $x \in \mathbf{R}$, 且

$$f(-x)=(-x)^5=-x^5=-f(x),$$

所以, 函数 $f(x)=x^5$ 为奇函数.

(3) 函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$.

因为 $\forall x \in \{x|x \neq 0\}$, 都有一 $x \in \{x|x \neq 0\}$, 且

$$f(-x)=-x+\frac{1}{-x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-f(x),$$

所以, 函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 为奇函数.

(4) 函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$.

因为 $\forall x \in \{x|x \neq 0\}$, 都有一 $x \in \{x|x \neq 0\}$, 且

$$f(-x)=\frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2}=f(x),$$

所以, 函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 为偶函数.

奇偶性是函数在它的定义域上的整体性质, 所以判断函数的奇偶性应先明确它的定义域.

思考

- (1) 判断函数 $f(x)=x^3+x$ 的奇偶性.
- (2) 图 3.2-9 是函数 $f(x)=x^3+x$ 图象的一部分, 你能根据 $f(x)$ 的奇偶性画出它在 y 轴左边的图象吗?
- (3) 一般地, 如果知道 $y=f(x)$ 为偶 (奇) 函数, 那么我们可以怎样简化对它的研究?

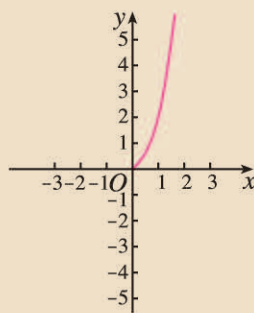
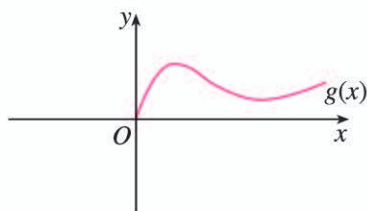
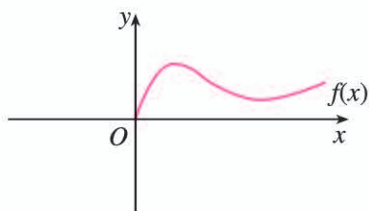


图 3.2-9

练习

1. 已知 $f(x)$ 是偶函数, $g(x)$ 是奇函数, 试将下图补充完整.



(第 1 题)

2. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=2x^4+3x^2$;

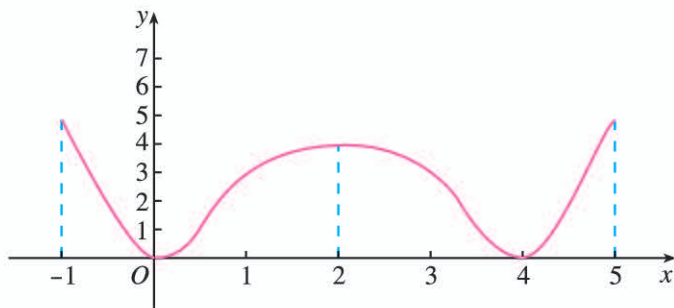
(2) $f(x)=x^3-2x$.

3. (1) 从偶函数的定义出发, 证明函数 $y=f(x)$ 是偶函数的充要条件是它的图象关于 y 轴对称;
- (2) 从奇函数的定义出发, 证明函数 $y=f(x)$ 是奇函数的充要条件是它的图象关于原点对称.

习题 3.2

复习巩固

1. 根据下图说出函数的单调区间及在每一单调区间上的单调性.



(第 1 题)

2. 画出下列函数的图象, 并根据图象说出函数 $y=f(x)$ 的单调区间及在每一单调区间上的单调性.

(1) $y=x^2-5x-6$; (2) $y=9-x^2$.

3. 证明:

(1) 函数 $f(x)=-2x+1$ 是减函数;

(2) 函数 $f(x)=x^2+1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

(3) 函数 $f(x)=1-\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增.

4. 某汽车租赁公司的月收益 y (单位: 元) 与每辆车的月租金 x (单位: 元) 间的关系为 $y=-\frac{x^2}{50}+162x-21\,000$, 那么, 每辆车的月租金为多少元时, 租赁公司的月收益最大? 最大月收益是多少?

5. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=x^2+1$; (2) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.



综合运用

6. 一名心率过速患者服用某种药物后心率立刻明显减慢, 之后随着药力的减退, 心率再次慢慢升高. 画出自服药那一刻起, 心率关于时间的一个可能的图象 (示意图).

7. 已知函数 $f(x)=x^2-2x$, $g(x)=x^2-2x (x \in [2, 4])$,

(1) 求 $f(x)$, $g(x)$ 的单调区间;

(2) 求 $f(x)$, $g(x)$ 的最小值.

8. (1) 根据函数单调性的定义证明函数 $y=x+\frac{9}{x}$ 在区间 $[3, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 讨论函数 $y=x+\frac{9}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的单调性.

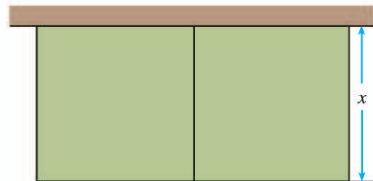
(3) 讨论函数 $y=x+\frac{k}{x} (k>0)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的单调性.

9. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subseteq D$, 记 $\Delta x=x_1-x_2$, $\Delta y=f(x_1)-f(x_2)$. 证明:

(1) 函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调递增的充要条件是: $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$;

(2) 函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调递减的充要条件是: $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$.

10. 如图所示, 动物园要建造一面靠墙的两间面积相同的矩形熊猫居室, 如果可供建造围墙的材料总长是 30 m, 那么宽 x (单位: m) 为多少时才能使所建造的每间熊猫居室面积最大? 每间熊猫居室的最大面积是多少?



(第 10 题)

11. 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x)=x(1+x)$. 画出函数 $f(x)$ 的图象, 并求出函数的解析式.

拓展探索

12. 已知函数 $f(x)$ 是偶函数, 而且在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 判断 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增还是单调递减, 并证明你的判断.
13. 我们知道, 函数 $y=f(x)$ 的图象关于坐标原点成中心对称图形的充要条件是函数 $y=f(x)$ 为奇函数, 有同学发现可以将其推广为: 函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $P(a, b)$ 成中心对称图形的充要条件是函数 $y=f(x+a)-b$ 为奇函数.
- (1) 求函数 $f(x)=x^3-3x^2$ 图象的对称中心;
- (2) 类比上述推广结论, 写出“函数 $y=f(x)$ 的图象关于 y 轴成轴对称图形的充要条件是函数 $y=f(x)$ 为偶函数”的一个推广结论.

信息技术应用

用计算机绘制函数图象

利用计算机软件可以便捷、迅速地绘制各种函数图象. 不同的计算机软件绘制函数图象的具体操作不尽相同, 但都是基于我们熟悉的描点作图, 即给自变量赋值, 用计算法则算出相应的函数值, 再由这些对应值生成一系列的点, 最后连接这些点描绘出函数图象. 下面以软件《GeoGebra》为例, 介绍用计算机软件绘制函数图象的方法.

一、直接输入函数绘制函数 $y=x^3$ 的图象

打开软件《GeoGebra》, 在下方的输入框内直接输入“ $y=x^3$ ”, 回车, 在代数区就会显示该函数的解析式“ $f(x)=x^3$ ”, 而在绘图区就会自动显示相应函数 $y=x^3$ 的图象 (如图 1).

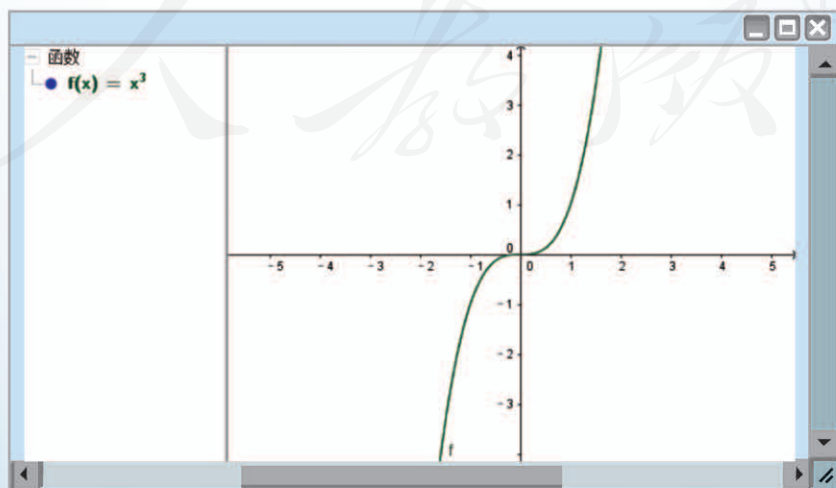


图 1

二、绘制含参数 b 的函数 $y=bx^2 (b \neq 0)$ 的图象

(1) 打开软件《GeoGebra》，在输入框内输入参数“ b ”，回车，创建滑动条 b ，选择 b 的“属性”，依图 2 提示可自由设置其最小值、最大值、增量等后关闭。

(2) 在输入框内直接输入函数“ $y=b*x^2$ ”，回车，在绘图区直接显示出当时参数 b 的值对应的函数 $y=bx^2$ 的图象（图 2）。

当你左右移动滑动条中点 b 的位置时，函数 $y=bx^2$ 的图象就会“动”起来，如图 2。

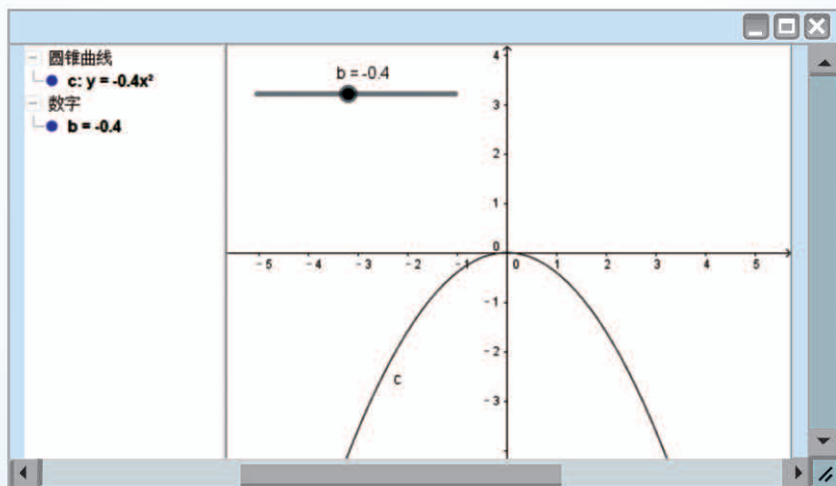


图 2

如果有条件，请你绘制函数 $y=ax^2+bx+c (a \neq 0)$ 的图象，并探究系数 a ， b ， c 对函数图象的影响。

人教版®

3.3 幂函数

前面学习了函数的概念,利用函数概念和对图象的观察,研究了函数的一些性质.本节我们利用这些知识研究一类新的函数.先看几个实例.

(1) 如果张红以 1 元/kg 的价格购买了某种蔬菜 w kg,那么她需要支付 $p=w$ 元,这里 p 是 w 的函数;

(2) 如果正方形的边长为 a ,那么正方形的面积 $S=a^2$,这里 S 是 a 的函数;

(3) 如果立方体的棱长为 b ,那么立方体的体积 $V=b^3$,这里 V 是 b 的函数;

(4) 如果一个正方形场地的面积为 S ,那么这个正方形的边长 $c=\sqrt{S}$,这里 c 是 S 的函数;

(5) 如果某人 t s 内骑车行进了 1 km,那么他骑车的平均速度 $v=\frac{1}{t}$ km/s,即 $v=t^{-1}$,这里 v 是 t 的函数.

$\sqrt{S}$ 也可以表示为 $S^{\frac{1}{2}}$.

观察

观察 (1) ~ (5) 中的函数解析式,它们有什么共同特征?

实际上,这些函数的解析式都具有幂的形式,而且都是以幂的底数为自变量;幂的指数都是常数,分别是 1, 2, 3, $\frac{1}{2}$, -1; 它们都是形如 $y=x^\alpha$ 的函数.

一般地,函数 $y=x^\alpha$ 叫做**幂函数** (power function),其中 x 是自变量, α 是常数.

幂的指数除了可以取整数之外,还可以取其他实数,当它们取其他实数时幂也具有各自的含义,这些会在后面学习.

对于幂函数,我们只研究 $\alpha=1, 2, 3, \frac{1}{2}, -1$ 时的图象与性质.

思考

结合以往学习函数的经验,你认为应该如何研究这些函数?

通常可以先根据函数解析式求出函数的定义域，画出函数的图象；再利用图象和解析式，讨论函数的值域、单调性、奇偶性等问题。

在同一坐标系中画出函数 $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=x^{\frac{1}{2}}$ 和 $y=x^{-1}$ 的图象 (图 3.3-1)。

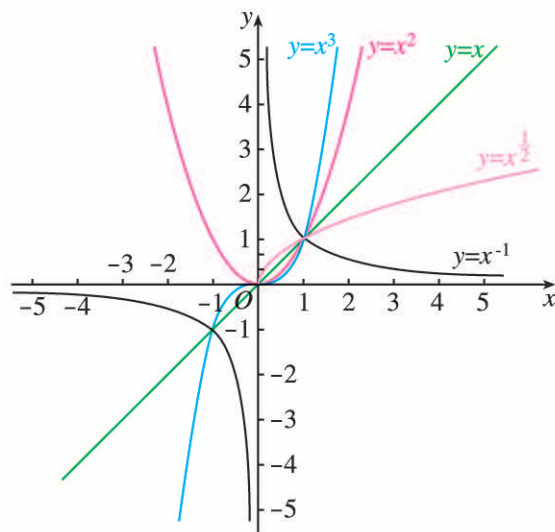


图 3.3-1

探究

观察函数图象并结合函数解析式，将你发现的结论写在表 3.3-1 内。

表 3.3-1

	$y=x$	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$y=x^{-1}$
定义域					
值 域					
奇偶性					
单调性					

这些函数图象有公共点吗？

通过图 3.3-1 与表 3.3-1，我们得到：

- (1) 函数 $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=x^{\frac{1}{2}}$ 和 $y=x^{-1}$ 的图象都通过点 $(1, 1)$ ；
- (2) 函数 $y=x$, $y=x^3$, $y=x^{-1}$ 是奇函数，函数 $y=x^2$ 是偶函数；
- (3) 在区间 $(0, +\infty)$ 上，函数 $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=x^{\frac{1}{2}}$ 单调递增，函数 $y=x^{-1}$ 单调递减；
- (4) 在第一象限内，函数 $y=x^{-1}$ 的图象向上与 y 轴无限接近，向右与 x 轴无限接近。

例 证明幂函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 是增函数。

证明：函数的定义域是 $[0, +\infty)$ 。

$\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, 有

$$\begin{aligned}
 f(x_1) - f(x_2) &= \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \\
 &= \frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \\
 &= \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}.
 \end{aligned}$$

因为 $x_1 - x_2 < 0$, $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > 0$,

所以 $f(x_1) < f(x_2)$, 即幂函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 是增函数.

练习

1. 已知幂函数 $y = f(x)$ 的图象过点 $(2, \sqrt{2})$, 求这个函数的解析式.

2. 利用幂函数的性质, 比较下列各题中两个值的大小:

(1) $(-1.5)^3, (-1.4)^3$; (2) $\frac{1}{-1.5}, \frac{1}{-1.4}$.

3. 根据单调性和奇偶性的定义, 讨论函数 $f(x) = x^3$ 的单调性, 并判断其奇偶性.

习题 3.3



复习巩固

1. 画出函数 $y = \sqrt{|x|}$ 的图象, 并判断函数的奇偶性, 讨论函数的单调性.



综合运用

2. 在固定压力差 (压力差为常数) 下, 当气体通过圆形管道时, 其流量 v (单位: cm^3/s) 与管道半径 r (单位: cm) 的四次方成正比.

(1) 写出气体流量 v 关于管道半径 r 的函数解析式;

(2) 若气体在半径为 3 cm 的管道中, 流量为 $400 \text{ cm}^3/\text{s}$, 求该气体通过半径为 r 的管道时, 其流量 v 的表达式;

(3) 已知 (2) 中的气体通过的管道半径为 5 cm , 计算该气体的流量 (精确到 $1 \text{ cm}^3/\text{s}$).

3. 试用描点法画出函数 $f(x) = x^{-2}$ 的图象, 求函数的定义域、值域; 讨论函数的单调性、奇偶性, 并证明.

探究函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的图象与性质

在初中,我们知道 $y = x$ 是正比例函数, $y = \frac{1}{x}$ 是反比例函数.学习了幂函数以后,我们知道它们都是幂函数.不同的函数通过加、减、乘、除等运算可以构成新的函数.那么,将这两个函数相加构成的函数有哪些性质?这些性质与这两个函数的性质有联系吗?

下面请同学们带着问题探究一下函数 $y = x + \frac{1}{x}$.

1. 你认为可以从哪些方面研究这个函数?

2. 你认为可以按照怎样的路径研究这个函数?

3. 按照你构建的路径研究你想到的问题.

4. 证明:当 $x > 0$ 时, $x + \frac{1}{x} \geq 2$, 当且仅当 $x = \frac{1}{x}$, 即 $x = 1$ 时取得等号; 当 $x < 0$ 时, $x + \frac{1}{x} \leq -2$, 当且仅当 $x = \frac{1}{x}$, 即 $x = -1$ 时取得等号.

5. 你画出的函数图象与图 1 类似吗?

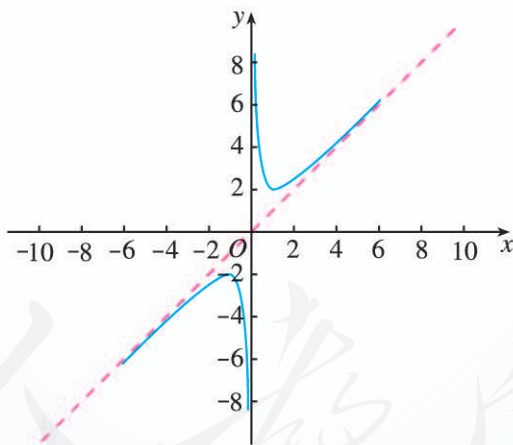


图 1

6. 函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的图象有什么变化趋势? 你能利用函数 $y = x$ 和 $y = \frac{1}{x}$ 的图象变化趋势说明函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的图象变化趋势吗?

7. 通过对函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 图象与性质的探究, 你有哪些体会?

3.4 函数的应用 (一)

我们学习过的一次函数、二次函数、幂函数等都与现实世界有紧密联系. 下面通过一些实例感受它们的广泛应用, 体会利用函数模型解决实际问题的过程与方法.

例 1 设小王的专项扣除比例、专项附加扣除金额、依法确定的其他扣除金额与 3.1.2 例 8 相同, 全年综合所得收入额为 x (单位: 元), 应缴纳综合所得税税额为 y (单位: 元).

(1) 求 y 关于 x 的函数解析式;

(2) 如果小王全年的综合所得由 117 600 元增加到 153 600 元, 那么他全年应缴纳多少综合所得税?

分析: 根据 3.1.2 例 8 中公式②, 可得应纳税所得额 t 关于综合所得收入额 x 的解析式 $t=g(x)$, 再结合 $y=f(t)$ 的解析式③, 即可得出 y 关于 x 的函数解析式.

解: (1) 由个人应纳税所得额计算公式, 可得

$$\begin{aligned} t &= x - 60\,000 - x(8\% + 2\% + 1\% + 9\%) - 9\,600 - 560 \\ &= 0.8x - 70\,160. \end{aligned}$$

令 $t=0$, 得 $x=87\,700$.

根据个人应纳税所得额的规定可知, 当 $0 \leq x \leq 87\,700$ 时, $t=0$. 所以, 个人应纳税所得额 t 关于综合所得收入额 x 的函数解析式为

$$t = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 87\,700, \\ 0.8x - 70\,160, & x > 87\,700. \end{cases}$$

结合 3.1.2 例 8 的解析式③, 可得:

当 $0 \leq x \leq 87\,700$ 时, $t=0$, 所以 $y=0$;

当 $87\,700 < x \leq 132\,700$ 时, $0 < t \leq 36\,000$, 所以

$$y = t \times 3\% = 0.024x - 2\,104.8;$$

当 $132\,700 < x \leq 267\,700$ 时, $36\,000 < t \leq 144\,000$, 所以

$$y = t \times 10\% - 2\,520 = 0.08x - 9\,536;$$

当 $267\,700 < x \leq 462\,700$ 时, $144\,000 < t \leq 300\,000$, 所以

$$y = t \times 20\% - 16\,920 = 0.16x - 30\,952;$$

当 $462\,700 < x \leq 612\,700$ 时, $300\,000 < t \leq 420\,000$, 所以

$$y = t \times 25\% - 31\,920 = 0.2x - 49\,460;$$

当 $612\,700 < x \leq 912\,700$ 时, $420\,000 < t \leq 660\,000$, 所以

$$y = t \times 30\% - 52\,920 = 0.24x - 73\,968;$$

当 $912\,700 < x \leq 1\,287\,700$ 时, $660\,000 < t \leq 960\,000$, 所以

$$y = t \times 35\% - 85\,920 = 0.28x - 110\,476;$$

当 $x > 1\,287\,700$ 时, $t > 960\,000$, 所以

$$y = t \times 45\% - 181\,920 = 0.36x - 213\,492.$$

所以, 函数解析式为

$$y = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 87\,700, \\ 0.024x - 2\,104.8, & 87\,700 < x \leq 132\,700, \\ 0.08x - 9\,536, & 132\,700 < x \leq 267\,700, \\ 0.16x - 30\,952, & 267\,700 < x \leq 462\,700, \\ 0.2x - 49\,460, & 462\,700 < x \leq 612\,700, \\ 0.24x - 73\,968, & 612\,700 < x \leq 912\,700, \\ 0.28x - 110\,476, & 912\,700 < x \leq 1\,287\,700, \\ 0.36x - 213\,492, & x > 1\,287\,700. \end{cases} \quad (4)$$

(2) 根据④, 当 $x = 153\,600$ 时,

$$y = 0.08 \times 153\,600 - 9\,536 = 2\,752.$$

所以, 小王全年需要缴纳的综合所得个税税额为 2 752 元.

根据个人收入情况, 利用上面获得的个税和综合所得收入关系的函数解析式, 就可以直接求得应缴纳的个税.

例 2 一辆汽车在某段路程中行驶的平均速率 v (单位: km/h) 与时间 t (单位: h) 的关系如图 3.4-1 所示,

(1) 求图 3.4-1 中阴影部分的面积, 并说明所求面积的实际含义;

(2) 假设这辆汽车的里程表在汽车行驶这段路程前的读数为 2 004 km, 试建立行驶这段路程时汽车里程表读数 s (单位: km) 与时间 t 的函数解析式, 并画出相应的图象.

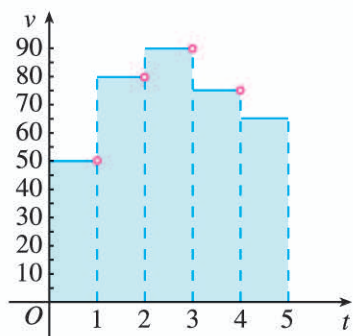


图 3.4-1

你能根据图 3.4-1 画出汽车行驶路程关于时间变化的图象吗?

分析：当时间 t 在 $[0, 5]$ 内变化时，对于任意的时刻 t 都有唯一确定的行驶路程与之相对应. 根据图 3.4-1，在时间段 $[0, 1)$, $[1, 2)$, $[2, 3)$, $[3, 4)$, $[4, 5]$ 内行驶的平均速率分别为 50 km/h, 80 km/h, 90 km/h, 75 km/h, 65 km/h，因此在每个时间段内，行驶路程与时间的关系也不一样，需要分段表述.

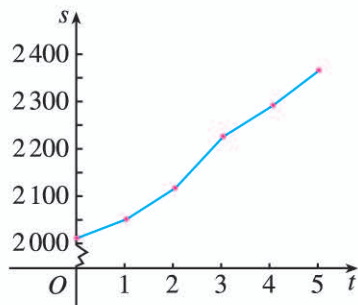
解：(1) 阴影部分的面积为

$$50 \times 1 + 80 \times 1 + 90 \times 1 + 75 \times 1 + 65 \times 1 = 360.$$

阴影部分的面积表示汽车在这 5 h 内行驶的路程为 360 km.

(2) 根据图 3.4-1，有

$$s = \begin{cases} 50t + 2\ 004, & 0 \leq t < 1, \\ 80(t-1) + 2\ 054, & 1 \leq t < 2, \\ 90(t-2) + 2\ 134, & 2 \leq t < 3, \\ 75(t-3) + 2\ 224, & 3 \leq t < 4, \\ 65(t-4) + 2\ 299, & 4 \leq t \leq 5. \end{cases}$$



这个函数的图象如图 3.4-2 所示.

图 3.4-2

本题的解答过程表明，函数图象对分析和理解题意很有帮助. 因此，我们要注意提高读图能力. 另外，本题用到了分段函数，解决现实问题时经常会用到这类函数.

练习

- 若用模型 $y = ax^2$ 描述汽车紧急刹车后滑行的距离 y (单位: m) 与刹车时的速率 x (单位: km/h) 的关系，而某种型号的汽车在速率为 60 km/h 时，紧急刹车后滑行的距离为 20 m. 在限速为 100 km/h 的高速公路上，一辆这种型号的车紧急刹车后滑行的距离为 50 m，那么这辆车是否超速行驶？
- 某广告公司要为客户设计一幅周长为 l (单位: m) 的矩形广告牌，如何设计这个广告牌可以使广告牌的面积最大？
- 某公司生产某种产品的固定成本为 150 万元，而每件产品的可变成本为 2 500 元，每件产品的售价为 3 500 元. 若该公司所生产的产品全部销售出去，则
 - 设总成本为 y_1 (单位: 万元)，单位成本为 y_2 (单位: 万元)，销售总收入为 y_3 (单位: 万元)，总利润为 y_4 (单位: 万元)，分别求出它们关于总产量 x (单位: 件) 的函数解析式；
 - 根据所求函数的图象，对这个公司的经济效益做出简单分析.

习题 3.4

综合运用

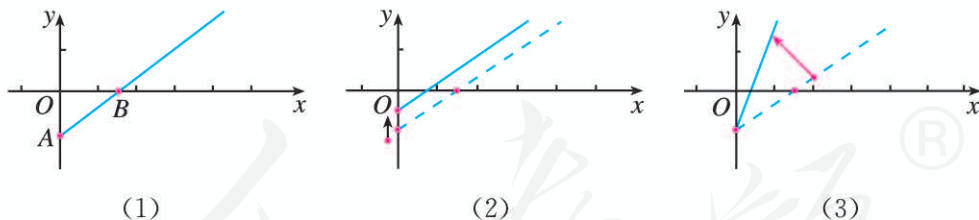
- 某人开汽车以 60 km/h 的速率从 A 地到 150 km 远处的 B 地, 在 B 地停留 1 h 后, 再以 50 km/h 的速率返回 A 地. 把汽车与 A 地的距离 x (单位: km) 表示为时间 t (单位: h) (从 A 地出发时开始) 的函数; 再把车速 v (单位: km/h) 表示为时间 t 的函数, 并分别画出这两个函数的图象.
- 要建造一个容积为 1200 m^3 , 深为 6 m 的长方体无盖蓄水池, 池壁的造价为 95 元/m^2 , 池底的造价为 135 元/m^2 , 如何设计水池的长与宽, 才能使水池的总造价控制在 7 万元以内 (精确到 0.1 m)?
- 为了保护水资源, 提倡节约用水, 某城市对居民生活用水实行“阶梯水价”. 计费方法如下表:

每户每月用水量	水价
不超过 12 m^3 的部分	3 元/m^3
超过 12 m^3 但不超过 18 m^3 的部分	6 元/m^3
超过 18 m^3 的部分	9 元/m^3

若某户居民本月交纳的水费为 48 元, 求此户居民本月用水量.

拓广探索

- 图 (1) 是某条公共汽车线路收支差额 y 关于乘客量 x 的图象.
 - 试说明图 (1) 上点 A, 点 B 以及射线 AB 上的点的实际意义;
 - 由于目前本条线路亏损, 公司有关人员提出了两种扭亏为赢的建议, 如图 (2)(3) 所示. 你能根据图象, 说明这两种建议是什么吗?



(第 4 题)

- 下表是拉力 F (单位: N) 与弹簧伸长长度 x (单位: cm) 的相关数据:

F	1	2	3	4	5
x	14.2	28.8	41.3	57.5	70.2

描点画出弹簧伸长长度随拉力变化的图象, 并写出一个能基本反映这一变化现象的函数解析式.

函数的形成与发展

自 17 世纪近代数学产生以来,函数一直处于数学的核心位置.数学和科学的绝大部分都与函数内容有关,在数学、物理和其他学科中,函数关系随处可见.例如,圆柱体的体积和表面积是其底面半径的函数,气体膨胀的体积是温度的函数,运动物体的路程是时间的函数,等等.

如果用心搜集、广泛阅读、仔细观察,那么就会在很多书籍、网页中发现有关函数的介绍,也能在生活中发现许多函数应用的实例.

请同学们根据下面的建议和参考选题,通过自主活动,了解函数的发展历程及其广泛应用.

一、目标

1. 了解函数形成、发展的历史.
2. 体验文献综述的写作过程与方法.

二、实施建议

1. 确定选题:根据个人兴趣初步确定选题范围,明确阅读方向,拟定写作题目.
2. 搜集资料:针对写作题目,通过查阅书籍、上网等方式搜集素材,包括文字、图片、数据以及音像资料等,并记录相关资料.
3. 素材整理:认真分析素材,按照一定的主题进行归纳概括,并用文献综述的方式形成读书报告.
4. 交流讨论:开展组内或全班交流、讨论和总结.

三、参考选题

1. 函数产生的社会背景.
2. 函数概念发展的历史过程.
3. 函数符号的故事.
4. 数学家与函数.

众多数学家对函数的完善作出了贡献,例如开普勒、伽利略、笛卡儿、牛顿、莱布尼茨和欧拉等.可以选取一位或多位数学家,说明他们对函数发展作出的贡献,感受数学家的精神.

可以从以上选题中选择一个,也可以采用自己的题目.

* 标有 * 的内容为选学内容,不作为考试要求.

四、文献综述的结构

1. 标题.

2. 提要或前言：简要介绍研究意义；介绍搜集的资料范围及资料来源，包括查阅了哪些主要著作、查询了哪些网络资料库（如中国学术期刊全文数据库、中国学位论文全文数据库等），搜索到的相关论文的篇目数量等.

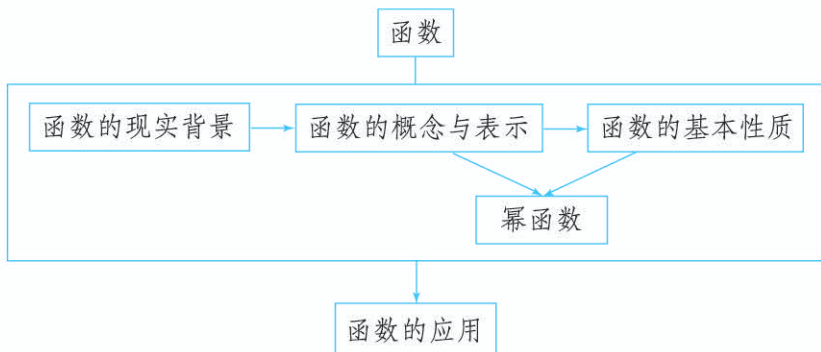
3. 正文：这是文献综述的核心部分. 应在归类整理的基础上，对自己搜集到的有用资料进行系统介绍.

4. 参考文献：列出所有参考文献，并按论文中的参考文献的格式将作者名、文献名、文献页码、文献出处、时间等信息全面标示出来.

人教版®

小结

一、本章知识结构



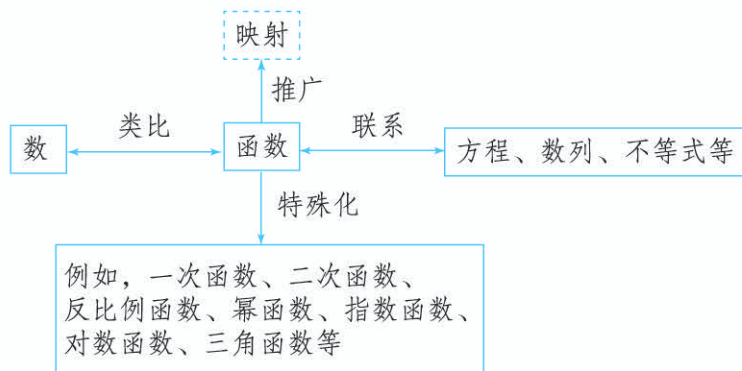
二、回顾与思考

本章我们用集合的语言与对应关系进一步描述了函数概念. 与初中的函数定义相比较, 突出了函数概念的本质: 两个数集之间的一种确定的对应关系; 明确了函数的三个构成要素: 定义域、对应关系和值域; 引入了函数符号: $y=f(x)$. 与初中基于变量关系的函数定义相比, 本章基于两个实数集之间对应关系的函数定义, 抽象层次显然提高了. 在今后的学习中我们会逐渐体会到这种函数定义的必要性, 例如, 在这种定义下, 不同的函数可以进行加、减、乘、除等运算, 从而使函数研究的内容和应用的范围得到扩展.

函数是描述变量之间依赖关系的重要数学模型. 函数的表示方法主要有解析法、图象法、列表法等. 在解决问题时, 面对不同的需要, 选择恰当的方法表示函数是很重要的.

研究函数的基本性质不仅是解决实际问题的需要, 也是数学本身的自然要求. 例如: 事物的变化趋势, 用料最省、利润最大、效率最高, 对称性等, 这些特性反映在函数上, 就是函数的基本性质, 如单调性、最大(小)值和奇偶性等. 在研究这些基本性质时, 一般是先从几何直观(观察图象)入手, 然后运用自然语言描述函数的图象特征, 最后抽象到用数学符号刻画相应的数量特征. 研究某个函数的性质, 则要利用单调性、奇偶性等定义, 通过推理、运算来实现. 这是一个渐进的过程, 也是数学学习和研究中经常使用的方法.

本章的学习对后面研究有关函数问题具有指导作用, 我们可以按照下面的“逻辑图”获得研究内容:



请你带着下面的问题，复习一下全章内容吧！

1. 通过本章学习，你对函数概念有什么新的认识？
2. 你能结合具体实例，分析、比较函数的各种表示方法的特点吗？
3. 函数的性质一般包括哪些方面？为什么要研究这些性质？你能总结一下研究函数性质的一般过程和方法吗？

复习参考题 3



复习巩固

1. 求下列函数的定义域：

$$(1) y = \sqrt{x-2}\sqrt{x+5};$$

$$(2) y = \frac{\sqrt{x-4}}{|x|-5}.$$

2. 已知函数 $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ ，求：

$$(1) f(a) + 1 (a \neq -1);$$

$$(2) f(a+1) (a \neq -2).$$

3. 设 $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ ，求证：

$$(1) f(-x) = f(x);$$

$$(2) f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x) (x \neq 0).$$

4. 已知函数 $f(x) = 4x^2 - kx - 8$ 在 $[5, 20]$ 上具有单调性，求实数 k 的取值范围.

5. 已知幂函数 $y = f(x)$ 的图象过点 $\left(2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ，试求出此函数的解析式，并画出图象，判断奇偶性、单调性.

6. 某公司生产某种电子仪器的固定成本为 20 000 元，每生产一台仪器需增加投入 100 元，已知总收入 R (单位：元) 关于月产量 x (单位：台) 满足函数：

$$R = \begin{cases} 400x - \frac{1}{2}x^2, & 0 \leq x \leq 400, \\ 80\,000, & x > 400. \end{cases}$$

(1) 将利润 P (单位: 元) 表示为月产量 x 的函数;

(2) 当月产量为何值时, 公司所获利润最大? 最大利润为多少元? (总收入 = 总成本 + 利润)

综合运用

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x(x+4), & x \geq 0, \\ x(x-4), & x < 0, \end{cases}$ 求 $f(1)$, $f(-3)$, $f(a+1)$ 的值.

8. 证明:

(1) 若 $f(x) = ax + b$, 则 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$;

(2) 若 $g(x) = x^2 + ax + b$, 则 $g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}$.

9. (1) 已知奇函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递减, 那么它在 $[-b, -a]$ 上单调递增还是单调递减?

(2) 已知偶函数 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递减, 那么它在 $[-b, -a]$ 上单调递增还是单调递减?

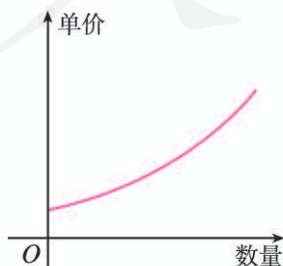
10. 某地区上年度电价为 0.8 元/(kW·h), 年用电量为 a kW·h, 本年度计划将电价下降到 0.55 元/(kW·h) 至 0.75 元/(kW·h) 之间, 而用户期望电价为 0.4 元/(kW·h). 经测算, 下调电价后新增用电量和实际电价与用户的期望电价的差成反比 (比例系数为 k). 该地区的电力成本价为 0.3 元/(kW·h).

(1) 写出本年度电价下调后电力部门的收益 y (单位: 元) 关于实际电价 x (单位: 元/(kW·h)) 的函数解析式; (收益 = 实际电量 $\times$ (实际电价 - 成本价))

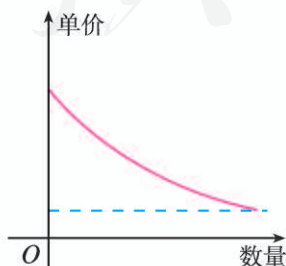
(2) 设 $k = 0.2a$, 当电价最低定为多少时, 仍可保证电力部门的收益比上年至少增长 20%?

拓广探索

11. 经济学家在研究供求关系时, 一般用纵轴表示产品价格 (自变量), 而用横轴来表示产品数量 (因变量). 下列供求曲线, 哪条表示厂商希望的供应曲线, 哪条表示客户希望的需求曲线? 为什么?



(1)



(2)

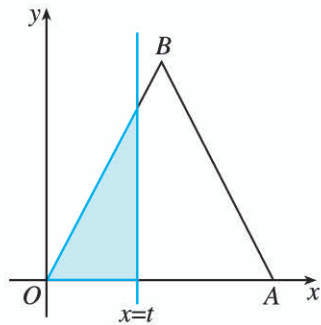
(第 11 题)

12. 试讨论函数 $y = x - \frac{1}{x}$ 的定义域、值域、单调性、奇偶性, 并画出函数图象.

13. 如图, $\triangle OAB$ 是边长为 2 的正三角形, 记 $\triangle OAB$ 位于直线 $x=t(t>0)$ 左侧的图形的面积为 $f(t)$. 试求函数 $y=f(t)$ 的解析式, 并画出函数 $y=f(t)$ 的图象.

14. 某商场经营一批进价为 30 元/件的商品, 在市场试销中发现, 此商品的销售单价 x (单位: 元) 与日销售量 y (单位: 件) 之间有如下表所示的关系.

x	...	30	40	45	50	...
y	...	60	30	15	0	...



(第 13 题)

- (1) 根据表中提供的数据描出实数对 (x, y) 的对应点, 根据画出的点猜想 y 与 x 之间的函数关系, 并写出一个函数解析式;
- (2) 设经营此商品的日销售利润为 P (单位: 元), 根据上述关系, 写出 P 关于 x 的函数解析式, 并求销售单价为多少元时, 才能获得最大日销售利润.

人教版®

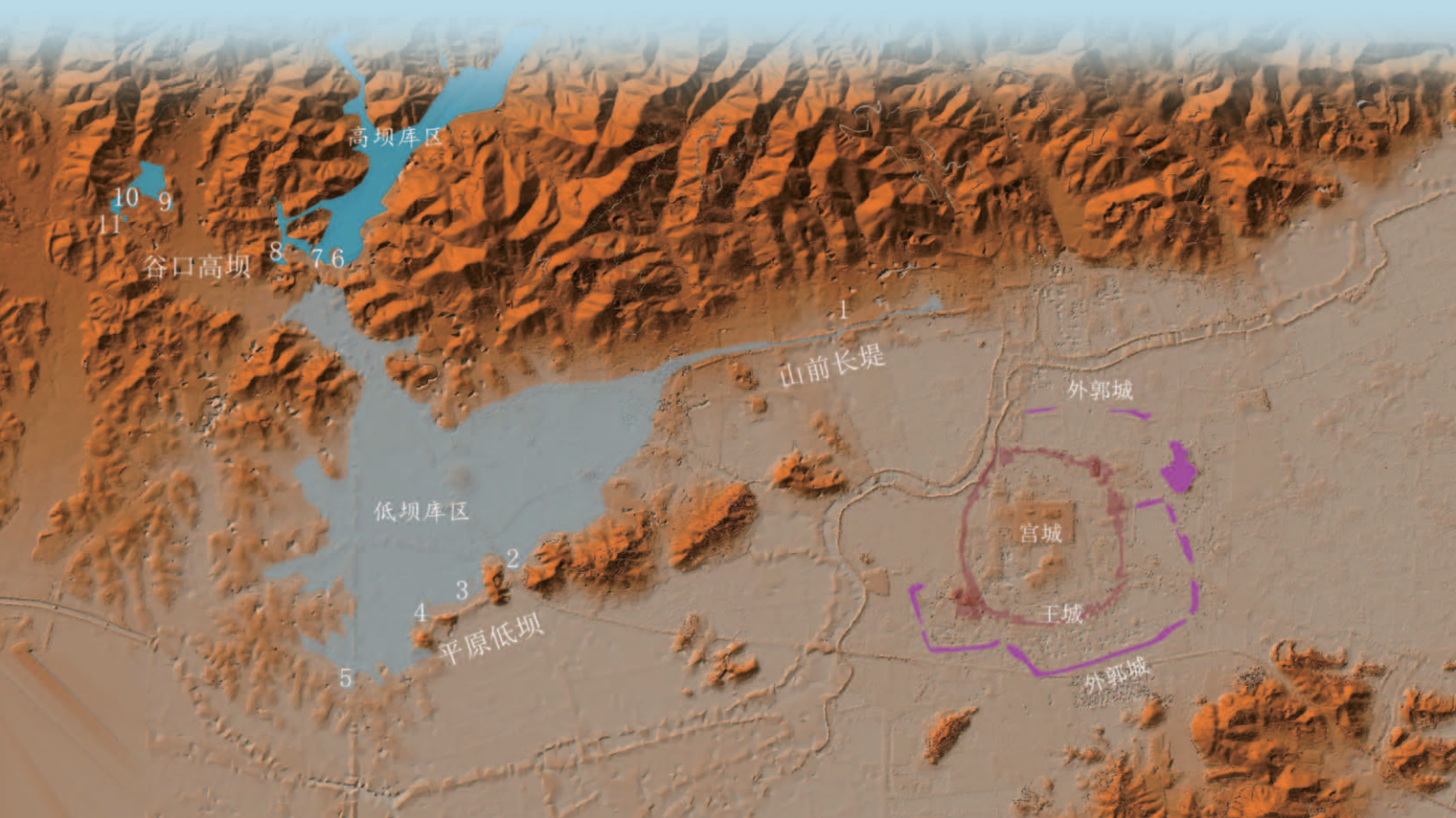
第四章

指数函数与对数函数

良渚遗址位于浙江省杭州市余杭区良渚和瓶窑镇，1936 年首次发现。这里的巨型城址，面积近 630 万平方米，包括古城、水坝和多处高等级建筑。考古学家利用遗址中遗存物碳 14 的残留量测定，古城存在时期为公元前 3300 年～前 2300 年。你知道考古学家在测定遗址年代时用了什么数学知识吗？

实际上，考古学家所用的数学知识就是本章即将学习的指数函数。指数函数在解决实际问题中有着广泛的应用。例如，在自然条件下，细胞的分裂、人口的增长、放射性物质的衰减等问题，都可以利用指数函数构建数学模型来刻画它们的变化规律。

通过幂函数的学习，我们已经体验了研究一类函数的过程和方法。在本章，我们将类比幂函数的研究方法，学习指数函数和对数函数的概念、图象和性质，并对这几类基本初等函数的变化差异进行比较。在此基础上，通过解决简单实际问题，体会如何根据变化差异，选择合适的函数类型构建数学模型，刻画现实问题的变化规律。



4.1 指数

为了研究指数函数，我们需要把指数的范围拓展到全体实数.

初中已经学过整数指数幂. 在学习幂函数时，我们把正方形场地的边长 c 关于面积 S 的函数 $c = \sqrt{S}$ 记作 $c = S^{\frac{1}{2}}$. 像 $S^{\frac{1}{2}}$ 这样以分数为指数的幂，其意义是什么呢？下面从已知的平方根、立方根的意义入手展开研究.

4.1.1 n 次方根与分数指数幂

我们知道：

如果 $x^2 = a$ ，那么 x 叫做 a 的平方根. 例如， ± 2 就是 4 的平方根.

如果 $x^3 = a$ ，那么 x 叫做 a 的立方根. 例如，2 就是 8 的立方根.

类似地，由于 $(\pm 2)^4 = 16$ ，我们把 ± 2 叫做 16 的 4 次方根；由于 $2^5 = 32$ ，2 叫做 32 的 5 次方根.

一般地，如果 $x^n = a$ ，那么 x 叫做 a 的 n 次方根，其中 $n > 1$ ，且 $n \in \mathbf{N}^*$.

当 n 是奇数时，正数的 n 次方根是一个正数，负数的 n 次方根是一个负数. 这时， a 的 n 次方根用符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示. 例如，

$$\sqrt[5]{32} = 2, \sqrt[5]{-32} = -2, \sqrt[3]{a^6} = a^2.$$

当 n 是偶数时，正数的 n 次方根有两个，这两个数互为相反数. 这时，正数 a 的正的 n 次方根用符号 $\sqrt[n]{a}$ 表示，负的 n 次方根用符号 $-\sqrt[n]{a}$ 表示. 正的 n 次方根与负的 n 次方根可以合并写成 $\pm \sqrt[n]{a}$ ($a > 0$). 例如，

$$\sqrt[4]{16} = 2, -\sqrt[4]{16} = -2, \pm \sqrt[4]{16} = \pm 2.$$

负数没有偶次方根.

0 的任何次方根都是 0，记作 $\sqrt[n]{0} = 0$.

式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做**根式** (radical)，这里 n 叫做**根指数**， a 叫做**被开方数**.

根据 n 次方根的意义，可得

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

例如， $(\sqrt{5})^2 = 5$ ， $(\sqrt[5]{-3})^5 = -3$.

?

为什么负数没有偶次方根？

探究

$\sqrt[n]{a^n}$ 表示 a^n 的 n 次方根, $\sqrt[n]{a^n}=a$ 一定成立吗? 如果不一定成立, 那么 $\sqrt[n]{a^n}$ 等于什么?

可以得到:

当 n 为奇数时, $\sqrt[n]{a^n}=a$;

当 n 为偶数时, $\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$

例 1 求下列各式的值:

(1) $\sqrt[3]{(-8)^3}$; (2) $\sqrt{(-10)^2}$;

(3) $\sqrt[4]{(3-\pi)^4}$; (4) $\sqrt{(a-b)^2}$.

解: (1) $\sqrt[3]{(-8)^3}=-8$;

(2) $\sqrt{(-10)^2}=|-10|=10$;

(3) $\sqrt[4]{(3-\pi)^4}=|3-\pi|=\pi-3$;

(4) $\sqrt{(a-b)^2}=|a-b|=\begin{cases} a-b, & a \geq b, \\ b-a, & a < b. \end{cases}$

根据 n 次方根的定义和数的运算, 我们知道

$$\sqrt[5]{a^{10}}=\sqrt[5]{(a^2)^5}=a^2=a^{\frac{10}{5}} \quad (a>0),$$

$$\sqrt[4]{a^{12}}=\sqrt[4]{(a^3)^4}=a^3=a^{\frac{12}{4}} \quad (a>0).$$

这就是说, 当根式的被开方数 (看成幂的形式) 的指数能被根指数整除时, 根式可以表示为分数指数幂的形式.

思考

当根式的被开方数的指数不能被根指数整除时, 根式是否也可以表示为分数指数幂的形式?

把根式表示为分数指数幂的形式时, 例如, 把 $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt[4]{c^5}$ 等写成下列形式:

$$\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}} \quad (a>0),$$

$$\sqrt{b}=b^{\frac{1}{2}} \quad (b>0),$$

$$\sqrt[4]{c^5}=c^{\frac{5}{4}} \quad (c>0),$$

我们希望整数指数幂的运算性质, 如 $(a^k)^n = a^{kn}$, 对分数指数幂仍然适用.

由此, 我们规定, 正数的正分数指数幂的意义是

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0, m, n \in \mathbf{N}^*, n > 1).$$

于是, 在条件 $a > 0, m, n \in \mathbf{N}^*, n > 1$ 下, 根式都可以写成分数指数幂的形式.

正数的负分数指数幂的意义与负整数指数幂的意义相仿, 我们规定,

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad (a > 0, m, n \in \mathbf{N}^*, n > 1).$$

例如, $5^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{5^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^4}}, a^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}.$

与 0 的整数指数幂的意义相仿, 我们规定,

0 的正分数指数幂等于 0, 0 的负分数指数幂没有意义.

规定了分数指数幂的意义以后, 幂 a^x 中指数 x 的取值范围就从整数拓展到了有理数.

整数指数幂的运算性质对于有理数指数幂也同样适用, 即对于任意有理数 r, s , 均有下面的运算性质.

- (1) $a^r a^s = a^{r+s} \quad (a > 0, r, s \in \mathbf{Q});$
- (2) $(a^r)^s = a^{rs} \quad (a > 0, r, s \in \mathbf{Q});$
- (3) $(ab)^r = a^r b^r \quad (a > 0, b > 0, r \in \mathbf{Q}).$

例 2 求值:

(1) $8^{\frac{2}{3}};$ (2) $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}.$

解: (1) $8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \times \frac{2}{3}} = 2^2 = 4;$

(2) $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{3}{4}} = \left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{3^4}{2^4}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{4 \times \frac{3}{4}} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}.$

例 3 用分数指数幂的形式表示并计算下列各式 (其中 $a > 0$):

(1) $a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2};$ (2) $\sqrt{a \sqrt[3]{a}}.$

解: (1) $a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^2 a^{\frac{2}{3}} = a^{2+\frac{2}{3}} = a^{\frac{8}{3}};$

(2) $\sqrt{a \sqrt[3]{a}} = (a a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = (a^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}}.$

数学中, 引进一个新的概念或法则时, 总希望它与已有的概念或法则相容.

这里, 略去了规定合理性的说明.

例 4 计算下列各式 (式中字母均是正数):

$$(1) \left(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)\left(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}\right)\div\left(-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}\right); \quad (2) \left(m^{\frac{1}{4}}n^{-\frac{3}{8}}\right)^8;$$

$$(3) (\sqrt[3]{a^2}-\sqrt{a^3})\div\sqrt[4]{a^2}.$$

解: (1) $\left(2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}\right)\left(-6a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}\right)\div\left(-3a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}\right)$
 $=[2\times(-6)\div(-3)]a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}$
 $=4ab^0$
 $=4a;$

$$(2) \left(m^{\frac{1}{4}}n^{-\frac{3}{8}}\right)^8=\left(m^{\frac{1}{4}}\right)^8\left(n^{-\frac{3}{8}}\right)^8$$

$$=m^2n^{-3}$$

$$=\frac{m^2}{n^3};$$

$$(3) (\sqrt[3]{a^2}-\sqrt{a^3})\div\sqrt[4]{a^2}=(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{3}{2}})\div a^{\frac{1}{2}}$$

$$=a^{\frac{2}{3}}\div a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{3}{2}}\div a^{\frac{1}{2}}$$

$$=a^{\frac{1}{6}}-a$$

$$=\sqrt[6]{a}-a.$$

练习

1. 用根式的形式表示下列各式 ($a>0$):

$$(1) a^{\frac{1}{2}}; \quad (2) a^{\frac{3}{4}}; \quad (3) a^{-\frac{3}{5}}; \quad (4) a^{-\frac{2}{3}}.$$

2. 用分数指数幂的形式表示并计算下列各式:

$$(1) \sqrt[3]{x^2} (x>0); \quad (2) \sqrt[5]{(m-n)^4} (m>n);$$

$$(3) \sqrt{p^6}\sqrt{p^5} (p>0); \quad (4) \frac{a^3}{\sqrt{a}} (a>0).$$

3. 计算下列各式:

$$(1) \left(\frac{36}{49}\right)^{\frac{3}{2}}; \quad (2) 2\sqrt{3}\times 3\sqrt[3]{1.5}\times\sqrt[6]{12};$$

$$(3) a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{4}}a^{-\frac{1}{8}} (a>0); \quad (4) 2x^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}}-2x^{-\frac{2}{3}}\right).$$

4.1.2 无理数指数幂及其运算性质

上面我们将 a^x ($a>0$) 中指数 x 的取值范围从整数拓展到了有理数. 那么, 当指数 x 是无理数时, a^x 的意义是什么? 它是一个确定的数吗? 如果是, 那么它有什么运算性质?

在初中的学习中, 我们通过有理数认识了一些无理数. 类似地, 也可以通过有理数指数幂来认识无理数指数幂.

探究

根据 $\sqrt{2}$ 的不足近似值 x 和过剩近似值 y (表 4.1-1), 利用计算工具计算相应的 5^x , 5^y 的近似值并填入表中, 观察它们的变化趋势, 你有什么发现?

表 4.1-1

$\sqrt{2}$ 的不足近似值 x	5^x 的近似值	$\sqrt{2}$ 的过剩近似值 y	5^y 的近似值
1.4		1.5	
1.41		1.42	
1.414		1.415	
1.414 2		1.414 3	
1.414 21		1.414 22	
1.414 213		1.414 214	
1.414 213 5		1.414 213 6	
1.414 213 56		1.414 213 57	
1.414 213 562		1.414 213 563	
...	...	...	...

可以发现, 当 $\sqrt{2}$ 的不足近似值 x 和过剩近似值 y 逐渐逼近 $\sqrt{2}$ 时, 5^x 和 5^y 都趋向于同一个数, 这个数就是 $5^{\sqrt{2}}$. 也就是说, $5^{\sqrt{2}}$ 是一串逐渐增大的有理数指数幂 $5^{1.4}$, $5^{1.41}$, $5^{1.414}$, $5^{1.414 2}$, ...和另一串逐渐减小的有理数指数幂 $5^{1.5}$, $5^{1.42}$, $5^{1.415}$, $5^{1.414 3}$, ...逐步逼近的结果, 它是一个确定的实数. 这个过程可以用图 4.1-1 表示.

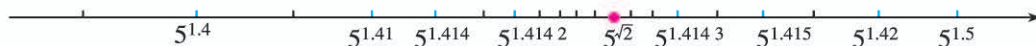


图 4.1-1

思考

参照以上过程, 你能再给出一个无理数指数幂, 如 $2^{\sqrt{3}}$, 说明它也是一个确定的实数吗?

一般地, 无理数指数幂 a^{α} ($a > 0$, α 为无理数) 是一个确定的实数. 这样, 我们就将指数幂 a^x ($a > 0$) 中指数 x 的取值范围从整数逐步拓展到了实数. 实数指数幂是一个确定的实数.

整数指数幂的运算性质也适用于实数指数幂, 即对于任意实数 r, s , 均有下面的运算性质.

- (1) $a^r a^s = a^{r+s}$ ($a > 0, r, s \in \mathbf{R}$);
- (2) $(a^r)^s = a^{rs}$ ($a > 0, r, s \in \mathbf{R}$);
- (3) $(a b)^r = a^r b^r$ ($a > 0, b > 0, r \in \mathbf{R}$).

练习

1. 计算下列各式:

$$(1) \left(2\sqrt[3]{m\sqrt[3]{m}}\right)^{2\sqrt[3]{3}}; \quad (2) a^{\frac{\pi}{3}} a^{\frac{2\pi}{3}} a^{-\pi}.$$

2. 利用计算工具, 探究下列实数指数幂的变化规律:

(1) x 取负实数, 使得 $|x|$ 的值逐渐增大并趋向于无穷大, 计算相应的 $2^x (x \in \mathbf{R})$ 的值, 观察变化趋势;

(2) x 取正实数, 使得 x 的值逐渐增大并趋向于无穷大, 计算相应的 $\left(\frac{1}{2}\right)^x (x \in \mathbf{R})$ 的值, 观察变化趋势.

习题 4.1



复习巩固

1. 求下列各式的值:

$$(1) \sqrt[4]{100^4}; \quad (2) \sqrt[5]{(-0.1)^5}; \quad (3) \sqrt{(\pi-4)^2}; \quad (4) \sqrt[6]{(x-y)^6}.$$

2. 选择题

(1) 设 $a > 0$, 则下列运算中正确的是 ().

$$(A) a^{\frac{4}{3}} a^{\frac{3}{4}} = a \quad (B) a \div a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{2}} \quad (C) a^{\frac{2}{3}} a^{-\frac{2}{3}} = 0 \quad (D) (a^{\frac{1}{4}})^4 = a$$

(2) 设 $a > 0$, m, n 是正整数, 且 $n > 1$, 则下列各式

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a^0 = 1, \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}},$$

正确的个数是 ().

$$(A) 3 \quad (B) 2 \quad (C) 1 \quad (D) 0$$

3. 填空题

(1) 在 $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $2^{-\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, 2^{-1} 中, 最大的数是 _____;

(2) 按从小到大的顺序, 可将 $2^{\sqrt{3}}$, $3^{\sqrt{2}}$, $\pi^{\sqrt{5}}$, 2^{π} 重新排列为 _____ (可用计算工具).

4. 用分数指数幂表示并计算下列各式 (式中字母均为正数):

$$(1) \sqrt{\frac{b^3}{a}} \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^6}}; \quad (2) \sqrt{a^{\frac{1}{2}}} \sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}}} \sqrt{a}; \quad (3) \frac{\sqrt{m} \sqrt[3]{m} \sqrt[4]{m}}{\left(\sqrt[6]{m}\right)^5 m^{\frac{1}{4}}}.$$

5. 计算下列各式 (式中字母均为正数):

$$(1) a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{3}{4}} a^{\frac{7}{12}}; \quad (2) a^{\frac{2}{3}} a^{\frac{3}{4}} \div a^{\frac{5}{6}};$$

$$(3) \left(x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{3}{4}}\right)^{12}; \quad (4) 4a^{\frac{2}{3}} b^{-\frac{1}{3}} \div \left(-\frac{2}{3} a^{-\frac{1}{3}} b^{-\frac{1}{3}}\right).$$



综合运用

6. 如果在某种细菌培养过程中, 细菌每 10 min 分裂 1 次 (1 个分裂成 2 个), 那么经过 1 h, 1 个这种细菌可以分裂成_____个.
7. (1) 已知 $10^m=2$, $10^n=3$, 求 $10^{\frac{3m-2n}{2}}$ 的值;
 (2) 已知 $a^{2x}=3$, 求 $\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}$ 的值.
8. 已知 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$, 求下列各式的值:
 (1) $a+a^{-1}$; (2) a^2+a^{-2} .



拓广探索

9. 从盛有 1 L 纯酒精的容器中倒出 $\frac{1}{3}$ L, 然后用水填满; 再倒出 $\frac{1}{3}$ L, 又用水填满……
 (1) 连续进行 5 次, 容器中的纯酒精还剩下多少?
 (2) 连续进行 n 次, 容器中的纯酒精还剩下多少?
10. (1) 当 $n=1, 2, 3, 10, 100, 1\ 000, 10\ 000, 100\ 000, \dots$ 时, 用计算工具计算 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 的值;
 (2) 当 n 越来越大时, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的底数越来越小, 而指数越来越大, 那么 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 是否也会越来越大? 有没有最大值?

人教版®

4.2 指数函数

对于幂 a^x ($a>0$), 我们已经把指数 x 的范围拓展到了实数. 上一章学习了函数的概念和基本性质, 通过对幂函数的研究, 进一步了解了研究一类函数的过程和方法. 下面继续研究其他类型的基本初等函数.

4.2.1 指数函数的概念

问题 1 随着中国经济高速增长, 人民生活水平不断提高, 旅游成了越来越多家庭的重要生活方式. 由于旅游人数不断增加, A, B 两地景区自 2001 年起采取了不同的应对措施, A 地提高了景区门票价格, 而 B 地则取消了景区门票. 表 4.2-1 给出了 A, B 两地景区 2001 年至 2015 年的游客人次以及逐年增加量.

表 4.2-1

时间/年	A 地景区		B 地景区	
	人次/万次	年增加量/万次	人次/万次	年增加量/万次
2001	600		278	
2002	609	9	309	31
2003	620	11	344	35
2004	631	11	383	39
2005	641	10	427	44
2006	650	9	475	48
2007	661	11	528	53
2008	671	10	588	60
2009	681	10	655	67
2010	691	10	729	74
2011	702	11	811	82
2012	711	9	903	92
2013	721	10	1 005	102
2014	732	11	1 118	113
2015	743	11	1 244	126

比较两地景区游客人次的变化情况，你发现了怎样的变化规律？

为了有利于观察规律，根据表 4.2-1，分别画出 A，B 两地景区采取不同措施后的 15 年游客人次的图象（图 4.2-1 和图 4.2-2）.

为了便于观察，可以先根据表格中的数据描点，然后用光滑的曲线将离散的点连起来.

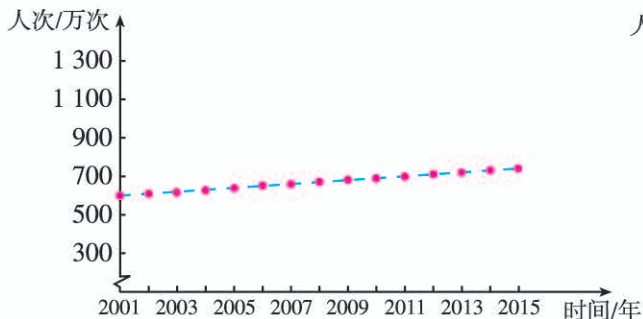


图 4.2-1

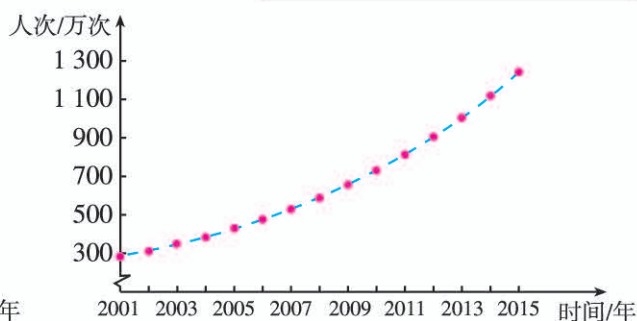


图 4.2-2

观察图象和表格，可以发现，A 地景区的游客人次近似于直线上升（线性增长），年增加量大致相等（约为 10 万次）；B 地景区的游客人次则是非线性增长，年增加量越来越大，但从图象和年增加量都难以看出变化规律.

探究

我们知道，年增加量是对相邻两年的游客人次做减法得到的. 能否通过对 B 地景区每年的游客人次做其他运算发现游客人次的变化规律呢？请你试一试.

从 2002 年起，将 B 地景区每年的游客人次除以上一年的游客人次，可以得到

$$\frac{2002 \text{ 年游客人次}}{2001 \text{ 年游客人次}} = \frac{309}{278} \approx 1.11,$$

$$\frac{2003 \text{ 年游客人次}}{2002 \text{ 年游客人次}} = \frac{344}{309} \approx 1.11,$$

.....

$$\frac{2015 \text{ 年游客人次}}{2014 \text{ 年游客人次}} = \frac{1\,244}{1\,118} \approx 1.11.$$

结果表明，B 地景区的游客人次的年增长率都约为 $1.11 - 1 = 0.11$ ，是一个常数.

像这样，增长率为常数的变化方式，我们称为指数增长. 因此，B 地景区的游客人次近似于指数增长.

显然，从 2001 年开始，B 地景区游客人次的变化规律可以近似描述为：

1 年后，游客人次是 2001 年的 1.11^1 倍；

做减法可以得到游客人次的年增加量，做除法可以得到游客人次的年增长率. 增加量、增长率是刻画事物变化规律的两个很重要的量.

2 年后, 游客人次是 2001 年的 1.11^2 倍;

3 年后, 游客人次是 2001 年的 1.11^3 倍;

.....

x 年后, 游客人次是 2001 年的 1.11^x 倍.

如果设经过 x 年后的游客人次为 2001 年的 y 倍, 那么

$$y=1.11^x (x \in [0, +\infty)). \quad ①$$

这是一个函数, 其中指数 x 是自变量.

问题 2 当生物死亡后, 它机体内原有的碳 14 含量会按确定的比率衰减 (称为衰减率), 大约每经过 5 730 年衰减为原来的一半, 这个时间称为“半衰期”. 按照上述变化规律, 生物体内碳 14 含量与死亡年数之间有怎样的关系?

设死亡生物体内碳 14 含量的年衰减率为 p , 如果把刚死亡的生物体内碳 14 含量看成 1 个单位, 那么

死亡 1 年后, 生物体内碳 14 含量为 $(1-p)^1$;

死亡 2 年后, 生物体内碳 14 含量为 $(1-p)^2$;

死亡 3 年后, 生物体内碳 14 含量为 $(1-p)^3$;

.....

死亡 5 730 年后, 生物体内碳 14 含量为 $(1-p)^{5\,730}$.

根据已知条件, $(1-p)^{5\,730} = \frac{1}{2}$, 从而 $1-p = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5\,730}}$, 所以 $p = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5\,730}}$.

设生物死亡年数为 x , 死亡生物体内碳 14 含量为 y , 那么 $y = (1-p)^x$, 即

$$y = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5\,730}}\right)^x \quad (x \in [0, +\infty)). \quad ②$$

这也是一个函数, 指数 x 是自变量. 死亡生物体内碳 14 含量每年都以 $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5\,730}}$ 的衰减率衰减. 像这样, 衰减率为常数的变化方式, 我们称为指数衰减. 因此, 死亡生物体内碳 14 含量呈指数衰减.

如果用字母 a 代替上述①②两式中的底数 1.11 和 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5\,730}}$, 那么函数 $y = 1.11^x$ 和 $y = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5\,730}}\right)^x$ 就可以表示为

$$y = a^x$$

的形式, 其中指数 x 是自变量, 底数 a 是一个大于 0 且不等于 1 的常量.

一般地, 函数 $y = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 叫做**指数函数** (exponential function), 其中指数 x 是自变量, 定义域是 $\mathbf{R}$.

例 1 已知指数函数 $f(x)=a^x$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$), 且 $f(3)=\pi$, 求 $f(0)$, $f(1)$, $f(-3)$ 的值.

分析: 要求 $f(0)$, $f(1)$, $f(-3)$ 的值, 应先求出 $f(x)=a^x$ 的解析式, 即先求 a 的值.

解: 因为 $f(x)=a^x$, 且 $f(3)=\pi$, 则 $a^3=\pi$, 解得 $a=\pi^{\frac{1}{3}}$, 于是

$$f(x)=\pi^{\frac{x}{3}}.$$

所以, $f(0)=\pi^0=1$, $f(1)=\pi^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\pi}$, $f(-3)=\pi^{-1}=\frac{1}{\pi}$.

例 2 (1) 在问题 1 中, 如果平均每位游客出游一次可给当地带来 1 000 元门票之外的收入, A 地景区的门票价格为 150 元, 比较这 15 年间 A, B 两地旅游收入变化情况.

(2) 在问题 2 中, 某生物死亡 10 000 年后, 它体内碳 14 的含量衰减为原来的百分之几?

解: (1) 设经过 x 年, 游客给 A, B 两地带来的收入分别为 $f(x)$ 和 $g(x)$, 则

$$f(x)=1\,150\times(10x+600),$$

$$g(x)=1\,000\times 278\times 1.11^x.$$

利用计算工具可得,

当 $x=0$ 时, $f(0)-g(0)=412\,000$.

当 $x\approx 10.22$ 时, $f(10.22)\approx g(10.22)$.

结合图 4.2-3 可知:

当 $x<10.22$ 时, $f(x)>g(x)$,

当 $x>10.22$ 时, $f(x)<g(x)$.

当 $x=14$ 时, $g(14)-f(14)\approx 347\,303$.

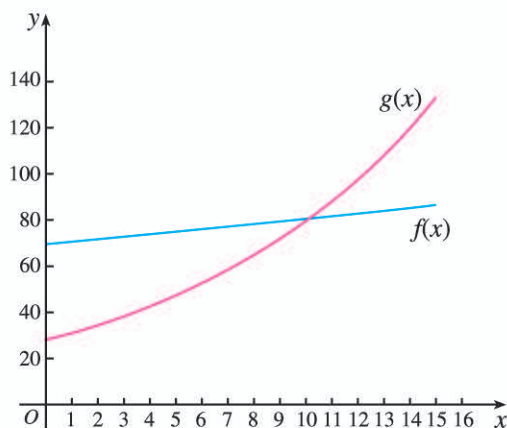


图 4.2-3

这说明, 在 2001 年, 游客给 A 地带来的收入比 B

地多 412 000 万元; 随后 10 年, 虽然 $f(x)>g(x)$, 但 $g(x)$ 的增长速度大于 $f(x)$; 根据上述数据, 并考虑到实际情况, 在 2011 年 3 月某个时刻就有 $f(x)=g(x)$, 这时游客给 A 地带来的收入和 B 地差不多; 此后, $f(x)<g(x)$, 游客给 B 地带来的收入超过了 A 地; 由于 $g(x)$ 增长得越来越快, 在 2015 年, B 地的收入已经比 A 地多 347 303 万元了.

(2) 设生物死亡 x 年后, 它体内碳 14 含量为 $h(x)$.

如果把刚死亡的生物体内碳 14 含量看成 1 个单位, 那么

$$h(x)=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5\,730}}\right)^x.$$

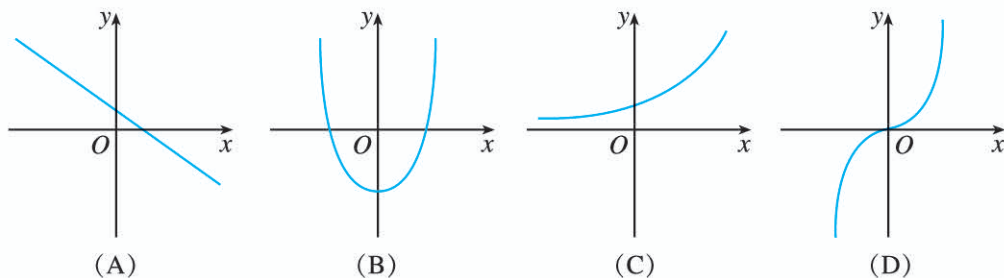
当 $x=10\,000$ 时, 利用计算工具求得 $h(10\,000)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10\,000}{5\,730}}\approx 0.30$.

所以, 生物死亡 10 000 年后, 它体内碳 14 含量衰减为原来的约 30%.

在实际问题中, 经常会遇到类似于例 2(1) 的指数增长模型: 设原有量为 N , 每次的增长率为 p , 经过 x 次增长, 该量增长到 y , 则 $y=N(1+p)^x$ ($x\in\mathbf{N}$). 形如 $y=ka^x$ ($k\in\mathbf{R}$, 且 $k\neq 0$; $a>0$, 且 $a\neq 1$) 的函数是刻画指数增长或指数衰减变化规律的非常有用的函数模型.

练习

1. 下列图象中, 有可能表示指数函数的是 ().



2. 已知函数 $y=f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, 且 $f(0)=3$, $\frac{f(0.5)}{f(0)}=2$, $\frac{f(1)}{f(0.5)}=2, \dots, \frac{f(0.5n)}{f(0.5(n-1))}=2, n \in \mathbf{N}^*$, 求函数 $y=f(x)$ 的一个解析式.
3. 在某个时期, 某湖泊中的蓝藻每天以 6.25% 的增长率呈指数增长, 那么经过 30 天, 该湖泊的蓝藻会变为原来的多少倍? (可以使用计算工具)



阅读与思考

放射性物质的衰减

本节问题 2 中的碳 14 是一种著名的放射性物质, 像铀 235、铯 90、碘 131、铯 137、镭 226 等也都是放射性物质. 放射性物质是指那些能自然地向外辐射能量, 发出射线的物质. 在一个给定的单位时间内, 放射性物质的质量会按某个衰减率衰减. 一般是用放射性物质质量衰减一半所用的时间来描述其衰减情况, 这个时间被称做半衰期. 那么连续两个半衰期是否就是一个“全衰期”(放射性物质质量衰减为 0 所用的时间)?

实际上, 在连续两个半衰期里, 放射性物质将衰减为原有质量的 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. 所以, 连续两个半衰期并非是一个全衰期.

在问题 2 中, 我们知道碳 14 的半衰期为 5 730 年, 如果 C_0 是碳 14 的初始质量, 那么经过 t 年后, 碳 14 所剩的质量 $C(t) = C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$.

一般地, 如果某物质的半衰期为 h , 那么经过时间 t 后, 该物质所剩的质量 $Q(t) = Q_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}}$, 其中 Q_0 是该物质的初始质量. 你能说明理由吗?

如果某函数呈指数增长, 那么称函数值增长为原来两倍所用的时间为“倍增期”. 你能通过上网查询, 给出一个倍增的指数函数模型实例吗?

4.2.2 指数函数的图象和性质

下面我们类比研究幂函数性质的过程和方法,进一步研究指数函数.首先画出指数函数的图象,然后借助图象研究指数函数的性质.

先从简单的函数 $y=2^x$ 开始.

请同学们完成 x, y 的对应值表 4.2-2,并用描点法画出函数 $y=2^x$ 的图象(图 4.2-4).

表 4.2-2

x	y
-2	
-1.5	0.35
-1	
-0.5	0.71
0	
0.5	1.41
1	
1.5	2.83
2	

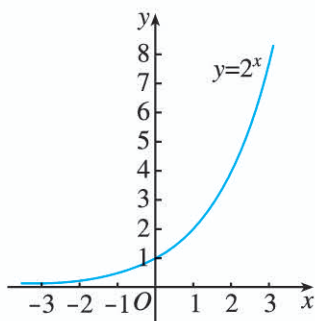


图 4.2-4

为了得到指数函数 $y=a^x$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$) 的性质,我们还需要画出更多的具体指数函数的图象进行观察.

探究

画出函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象,并与函数 $y=2^x$ 的图象进行比较,它们有什么关系?

能否利用函数 $y=2^x$ 的图象,画出函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象?

因为 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$, 点 (x, y) 与点 $(-x, y)$ 关于 y 轴对称,所以函数 $y=2^x$ 图象上任意一点 $P(x, y)$ 关于 y 轴的对称点 $P_1(-x, y)$ 都在函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象上,反之亦然.由此可知,底数互为倒数的两个指数函数的图象关于 y 轴对称.根据这种对称性,就可以利用一个函数的图象,画出另一个函数的图象,比如利用函数 $y=2^x$ 的图象,画出 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象(图 4.2-5).

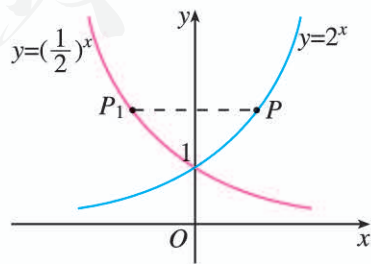


图 4.2-5

探究

选取底数 a ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的若干个不同的值, 在同一直角坐标系内画出相应的指数函数的图象. 观察这些图象的位置、公共点和变化趋势, 它们有哪些共性? 由此你能概括出指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的值域和性质吗?

如图 4.2-6, 选取底数 a 的若干值, 用信息技术画图, 发现指数函数 $y = a^x$ 的图象按底数 a 的取值, 可分为 $0 < a < 1$ 和 $a > 1$ 两种类型. 因此, 指数函数的性质也可以分 $0 < a < 1$ 和 $a > 1$ 两种情况进行研究.

一般地, 指数函数的图象和性质如表 4.2-3 所示.

表 4.2-3

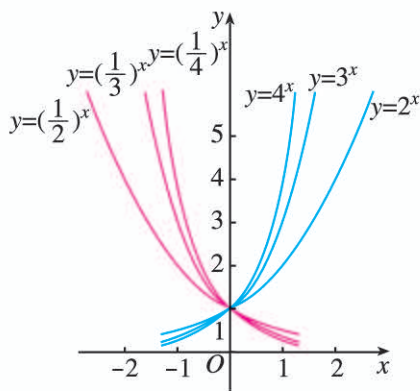


图 4.2-6

	$0 < a < 1$	$a > 1$
图象		
定义域	$\mathbf{R}$	
值域	$(0, +\infty)$	
性质	(1) 过定点 $(0, 1)$, 即 $x = 0$ 时, $y = 1$	
	(2) 减函数	(2) 增函数

例 3 比较下列各题中两个值的大小:

- (1) $1.7^{2.5}$, 1.7^3 ;
- (2) $0.8^{-\sqrt{2}}$, $0.8^{-\sqrt{3}}$;
- (3) $1.7^{0.3}$, $0.9^{3.1}$.

分析: 对于 (1)(2), 要比较的两个值可以看作一个指数函数的两个函数值, 因此可以直接利用指数函数的单调性进行比较; 对于 (3), $1.7^{0.3}$ 和 $0.9^{3.1}$ 不能看作某一个指数函数的两个函数值. 可以利用函数 $y = 1.7^x$ 和 $y = 0.9^x$ 的单调性, 以及 “ $x = 0$ 时, $y = 1$ ” 这条性质把它们联系起来.

解: (1) $1.7^{2.5}$ 和 1.7^3 可看作函数 $y = 1.7^x$ 当 x 分别取 2.5 和 3 时所对应的两个函数值. 因为底数 $1.7 > 1$, 所以指数函数 $y = 1.7^x$ 是增函数.

因为 $2.5 < 3$, 所以 $1.7^{2.5} < 1.7^3$.

(2) 同 (1) 理, 因为 $0 < 0.8 < 1$, 所以指数函数 $y = 0.8^x$ 是减函数.

因为 $-\sqrt{2} > -\sqrt{3}$, 所以 $0.8^{-\sqrt{2}} < 0.8^{-\sqrt{3}}$.

(3) 由指数函数的性质知

$$1.7^{0.3} > 1.7^0 = 1,$$

$$0.9^{3.1} < 0.9^0 = 1,$$

所以 $1.7^{0.3} > 0.9^{3.1}$.

由例 3 可以看到, 利用指数函数的单调性, 通过自变量的大小关系可以判断相应函数值的大小关系.

例 4 如图 4.2-7, 某城市人口呈指数增长.

(1) 根据图象, 估计该城市人口每翻一番所需的时间 (倍增期);

(2) 该城市人口从 80 万人开始, 经过 20 年会增长到多少万人?

分析: (1) 因为该城市人口呈指数增长, 而同一指数函数的倍增期是相同的, 所以可以从图象中选取适当的点计算倍增期.

(2) 要计算 20 年后的人口数, 关键是要找到 20 年与倍增期的数量关系.

解: (1) 观察图 4.2-7, 发现该城市人口经过 20 年约为 10 万人, 经过 40 年约为 20 万人, 即由 10 万人口增加到 20 万人口所用的时间约为 20 年, 所以该城市人口每翻一番所需的时间约为 20 年.

(2) 因为倍增期为 20 年, 所以每经过 20 年, 人口将翻一番. 因此, 从 80 万人开始, 经过 20 年, 该城市人口大约会增长到 160 万人.

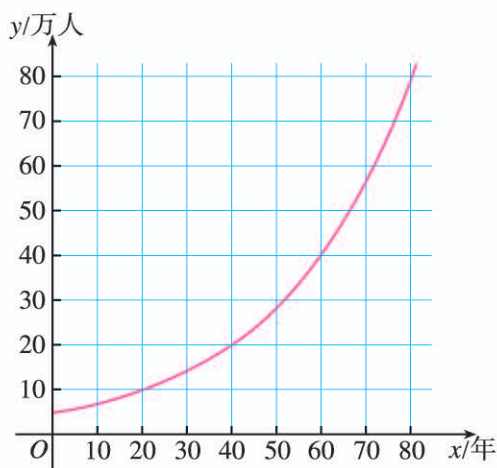


图 4.2-7

练习

- 在同一直角坐标系中画出函数 $y=3^x$ 和 $y=(\frac{1}{3})^x$ 的图象, 并说明它们的关系.
- 比较下列各题中两个值的大小:
 - $6^{\sqrt{2}}$, $7^{\sqrt{2}}$;
 - $0.3^{-3.5}$, $0.3^{-2.3}$;
 - $1.2^{0.5}$, $0.5^{1.2}$.
- 体内癌细胞初期增加得很缓慢, 但到了晚期就急剧增加, 画一幅能反映体内癌细胞数量随时间变化的示意图.

习题 4.2



复习巩固

- 求下列函数的定义域:

(1) $y=2^{3-x}$; (2) $y=3^{2x+1}$; (3) $y=(\frac{1}{2})^{5x}$; (4) $y=0.7^{\frac{1}{x}}$.

2. 一种产品原来的年产量是 a 件, 今后 m 年内, 计划使产量平均每年比上一年增加 $p\%$, 写出年产量 y (单位: 件) 关于经过的年数 x 的函数解析式.
3. 比较满足下列条件的 m, n 的大小:
- (1) $2^m < 2^n$; (2) $0.2^m < 0.2^n$;
 (3) $a^m < a^n$ ($0 < a < 1$); (4) $a^m > a^n$ ($a > 1$).
4. 设函数 $f(x) = Q_0(1+r)^x$, 且 $f(10) = 20.23$, $f(11) = 23.26$.
- (1) 求函数 $f(x)$ 的增长率 r ;
 (2) 求 $f(12)$ 的值.



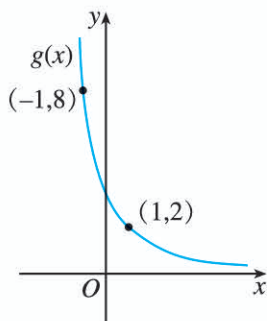
综合运用

5. 求下列函数可能的一个解析式:

(1) 函数 $f(x)$ 的数据如下表:

x	0	1	2
$f(x)$	3.50	4.20	5.04

(2) 函数 $g(x)$ 的图象如下:



(第 5 题)

6. 比较下列各题中两个值的大小:
- (1) $3^{0.8}$, $3^{0.7}$; (2) $0.75^{-0.1}$, $0.75^{0.1}$;
 (3) $1.01^{2.7}$, $1.01^{3.5}$; (4) $0.99^{3.3}$, $0.99^{4.5}$.
7. 当死亡生物组织内碳 14 的含量不足死亡前的千分之一时, 用一般的放射性探测器就测不到碳 14 了. 如果死亡生物组织内的碳 14 经过九个“半衰期”后, 那么用一般的放射性探测器能测到碳 14 吗?
8. 按复利计算利息的一种储蓄, 本金为 a (单位: 元), 每期利率为 r , 本利和为 y (单位: 元), 存期数为 x .
- (1) 写出本利和 y 关于存期数 x 的函数解析式;
 (2) 如果存入本金 1 000 元, 每期利率为 2.25%, 试计算 5 期后的本利和.

复利是一种计算利息的方法, 即把前一期的利息和本金加在一起算作本金, 再计算下一期的利息. 我国现行定期储蓄中的自动转存业务就是类似复利计算的储蓄.

9. 已知函数 $y=a\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}+b$ 的图象过原点, 且无限接近直线 $y=2$ 但又不与该直线相交.

(1) 求该函数的解析式, 并画出图象;

(2) 判断该函数的奇偶性和单调性.

10. 已知 $f(x)=a^x$, $g(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$),

(1) 讨论函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的单调性.

(2) 如果 $f(x)<g(x)$, 那么 x 的取值范围是多少?

信息技术应用

探究指数函数的性质

函数图象是研究函数性质和进一步理解其概念的重要载体. 利用信息技术强大的作图以及对图象和数据的分析功能, 例如函数图象的动态演示, 引起图象变化的关键因素分析, 图象的局部放大和缩小等, 有利于我们观察函数的整体变化情况, 并考察其中的细节, 从而获得大量关于函数特点的信息. 这将极大地方便我们归纳、概括函数的性质以及发现不同函数之间的区别与联系. 下面, 我们就利用信息技术来探究指数函数的性质.

1. 用信息技术绘制函数 $y=a^x$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$) 的图象. 由于底数 a 可取大于 0 且不等于 1 的所有实数, 所以不妨用一端固定于 y 轴的水平线段 PA 的长度来表示底数 a 的值, 即点 A 的横坐标 x_A 显示的就是 a 的取值.

2. 如图 1, 从左向右拖动点 A ($0<x_A<1$), 则 x_A 的值逐渐增大. 当 x_A 的值越来越接近于 1 时, 图象就越来越接近于直线 $y=1$; 当 $x_A=1$ 时, 图象就是直线 $y=1$; 继续向右拖动点 A ($x_A>1$), 如图 2, 图象发生了变化, 随着 x_A 的值逐渐

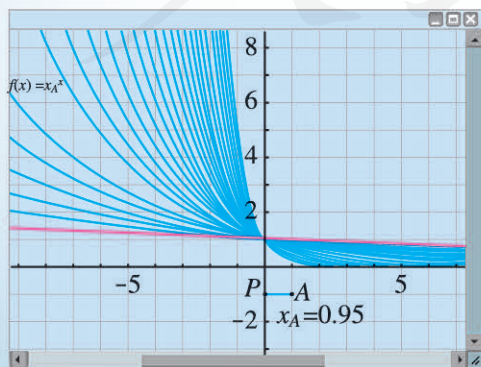


图 1

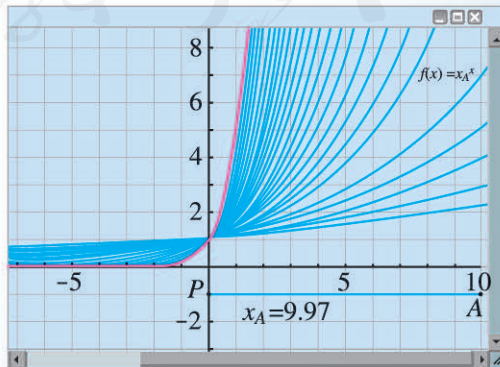


图 2

增大,在第一象限内,图象越来越接近于 y 轴,在第二象限内,图象越来越接近于 x 轴.

3. 根据图 1 和图 2,可以容易地发现指数函数的下列性质:

- (1) 所有函数的图象都过点 $(0, 1)$.
- (2) 所有函数的定义域都是 $(-\infty, +\infty)$, 值域都是 $(0, +\infty)$.
- (3) 在图 1 中,当 $0 < a < 1$ 时,函数图象均呈下降趋势,即函数为减函数;在图 2 中,当 $a > 1$ 时,函数图象均呈上升趋势,即函数为增函数.

接下来,请你思考和探究下列问题:

1. 继续观察图 1 和图 2,当自变量 x 取同一个数时,对应的函数值 y 的大小关系是什么,你从中发现了什么规律?
2. 类似地,你可以利用信息技术绘制幂函数 $y = x^a$ 的图象,通过改变 a 的大小,认识幂函数的变化规律.

人教版®

4.3 对数

在 4.2.1 的问题 1 中, 通过指数幂运算, 我们能从 $y = 1.11^x$ 中求出经过 x 年后 B 地景区的游客人次为 2001 年的倍数 y . 反之, 如果要求经过多少年游客人次是 2001 年的 2 倍, 3 倍, 4 倍, $\dots$, 那么该如何解决?

4.3.1 对数的概念

上述问题实际上就是从 $2 = 1.11^x$, $3 = 1.11^x$, $4 = 1.11^x$, $\dots$ 中分别求出 x , 即已知底数和幂的值, 求指数. 这是本节要学习的对数.

一般地, 如果 $a^x = N$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), 那么数 x 叫做以 a 为底 N 的**对数** (logarithm), 记作

$$x = \log_a N,$$

其中 a 叫做对数的**底数**, N 叫做**真数**.

例如, 由于 $2 = 1.11^x$, 所以 x 就是以 1.11 为底 2 的对数, 记作 $x = \log_{1.11} 2$; 再如, 由于 $4^2 = 16$, 所以以 4 为底 16 的对数是 2, 记作 $\log_4 16 = 2$.

通常, 我们将以 10 为底的对数叫做**常用对数** (common logarithm), 并把 $\log_{10} N$ 记为 $\lg N$. 另外, 在科技、经济以及社会生活中经常使用以无理数 $e = 2.718\ 28\dots$ 为底数的对数, 以 e 为底的对数称为**自然对数** (natural logarithm), 并把 $\log_e N$ 记为 $\ln N$.

根据对数的定义, 可以得到对数与指数间的关系:

当 $a > 0$, $a \neq 1$ 时, $a^x = N \Leftrightarrow x = \log_a N$.

由指数与对数的这个关系, 可以得到关于对数的如下结论:

负数和 0 没有对数;

$\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$.

请你利用对数与指数间的关系证明这两个结论.

例 1 把下列指数式化为对数式, 对数式化为指数式:

$$(1) 5^4 = 625; \quad (2) 2^{-6} = \frac{1}{64}; \quad (3) \left(\frac{1}{3}\right)^m = 5.73;$$

“log” 是 logarithm (对数) 的缩写.

通过查询互联网, 进一步了解无理数 e 、常用对数和自然对数.

$$(4) \log_{\frac{1}{2}} 16 = -4; \quad (5) \lg 0.01 = -2; \quad (6) \ln 10 = 2.303.$$

解: (1) $\log_5 625 = 4$; (2) $\log_2 \frac{1}{64} = -6$; (3) $\log_{\frac{1}{3}} 5.73 = m$;

$$(4) \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16; \quad (5) 10^{-2} = 0.01; \quad (6) e^{2.303} = 10.$$

例 2 求下列各式中 x 的值:

$$(1) \log_{64} x = -\frac{2}{3}; \quad (2) \log_x 8 = 6;$$

$$(3) \lg 100 = x; \quad (4) -\ln e^2 = x.$$

解: (1) 因为 $\log_{64} x = -\frac{2}{3}$, 所以

$$x = 64^{-\frac{2}{3}} = (4^3)^{-\frac{2}{3}} = 4^{-2} = \frac{1}{16}.$$

(2) 因为 $\log_x 8 = 6$, 所以 $x^6 = 8$. 又 $x > 0$, 所以

$$x = 8^{\frac{1}{6}} = (2^3)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

(3) 因为 $\lg 100 = x$, 所以

$$10^x = 100, \quad 10^x = 10^2,$$

于是

$$x = 2.$$

(4) 因为 $-\ln e^2 = x$, 所以

$$\ln e^2 = -x, \quad e^2 = e^{-x},$$

于是

$$x = -2.$$

练习

1. 把下列指数式写成对数式, 对数式写成指数式:

$$(1) 2^3 = 8;$$

$$(2) e^{\sqrt{3}} = m;$$

$$(3) 27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3};$$

$$(4) \log_3 9 = 2;$$

$$(5) \lg n = 2.3;$$

$$(6) \log_3 \frac{1}{81} = -4.$$

2. 求下列各式的值:

$$(1) \log_5 25;$$

$$(2) \log_{0.4} 1;$$

$$(3) \ln \frac{1}{e};$$

$$(4) \lg 0.001.$$

3. 求下列各式中 x 的值:

$$(1) \log_{\frac{1}{3}} x = -3;$$

$$(2) \log_x 49 = 4;$$

$$(3) \lg 0.000\ 01 = x;$$

$$(4) \ln \sqrt{e} = -x.$$

4.3.2 对数的运算

在引入对数之后，自然应研究对数的运算性质. 你认为可以怎样研究？

探究

我们知道了对数与指数间的关系，能否利用指数幂运算性质得出相应的对数运算性质呢？

设 $M=a^m, N=a^n$,
因为 $a^m a^n = a^{m+n}$,
所以 $MN = a^{m+n}$.

根据对数与指数间的关系可得

$$\log_a M = m, \log_a N = n,$$

$$\log_a (MN) = m + n.$$

这样，就得到了对数的一个运算性质：

$$\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N.$$

同样地，同学们可以仿照上述过程，由 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 和 $(a^m)^n = a^{mn}$ ，自己推出对数运算的其他性质.

于是，我们得到如下的对数运算性质.

如果 $a > 0$ ，且 $a \neq 1$ ， $M > 0$ ， $N > 0$ ，那么

$$(1) \log_a (MN) = \log_a M + \log_a N;$$

$$(2) \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N;$$

$$(3) \log_a M^n = n \log_a M \quad (n \in \mathbf{R}).$$

例 3 求下列各式的值：

$$(1) \lg \sqrt[5]{100}; \quad (2) \log_2 (4^7 \times 2^5).$$

解： (1) $\lg \sqrt[5]{100} = \lg 100^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \lg 100 = \frac{2}{5};$

$$\begin{aligned} (2) \log_2 (4^7 \times 2^5) &= \log_2 4^7 + \log_2 2^5 \\ &= 7 \log_2 4 + 5 \log_2 2 \\ &= 7 \times 2 + 5 \times 1 \\ &= 19. \end{aligned}$$

例 4 用 $\ln x$, $\ln y$, $\ln z$ 表示 $\ln \frac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}$.

解: $\ln \frac{x^2\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}} = \ln(x^2\sqrt{y}) - \ln \sqrt[3]{z}$

$$= \ln x^2 + \ln \sqrt{y} - \ln \sqrt[3]{z}$$
$$= 2\ln x + \frac{1}{2}\ln y - \frac{1}{3}\ln z.$$

数学史上,人们经过大量的努力,制作了常用对数表和自然对数表,只要通过查表就能求出任意正数的常用对数或自然对数.现在,利用计算工具,也可以直接求出任意正数的常用对数或自然对数.这样,如果能将其他底的对数转换为以 10 或 e 为底的对数,就能方便地求出这些对数.

探究

- (1) 利用计算工具求 $\ln 2$, $\ln 3$ 的近似值;
- (2) 根据对数的定义,你能利用 $\ln 2$, $\ln 3$ 的值求 $\log_2 3$ 的值吗?
- (3) 根据对数的定义,你能用 $\log_c a$, $\log_c b$ 表示 $\log_a b$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$; $b > 0$; $c > 0$, 且 $c \neq 1$) 吗?

设 $\log_a b = x$, 则 $a^x = b$, 于是

$$\log_c a^x = \log_c b.$$

根据性质 (3) 得 $x \log_c a = \log_c b$, 即

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1; b > 0; c > 0, \text{ 且 } c \neq 1).$$

我们把上式叫做**对数换底公式**.

在 4.2.1 的问题 1 中,求经过多少年 B 地景区的游客人次是 2001 年的 2 倍,就是计算 $x = \log_{1.11} 2$ 的值.由换底公式,可得

$$x = \log_{1.11} 2 = \frac{\lg 2}{\lg 1.11}.$$

利用计算工具,可得

$$x = \frac{\lg 2}{\lg 1.11} \approx 6.64 \approx 7.$$

由此可得,大约经过 7 年, B 地景区的游客人次就达到 2001 年的 2 倍.

类似地,可以求出游客人次是 2001 年的 3 倍, 4 倍, ... 所需要的年数.

例 5 尽管目前人类还无法准确预报地震，但科学家通过研究，已经对地震有所了解，例如，地震时释放出的能量 E (单位：焦耳) 与地震里氏震级 M 之间的关系为

$$\lg E = 4.8 + 1.5M.$$

2011 年 3 月 11 日，日本东北部海域发生里氏 9.0 级地震，它所释放出来的能量是 2008 年 5 月 12 日我国汶川发生里氏 8.0 级地震的多少倍 (精确到 1)？

解： 设里氏 9.0 级和 8.0 级地震的能量分别为 E_1 和 E_2 .

由 $\lg E = 4.8 + 1.5M$ ，可得

$$\lg E_1 = 4.8 + 1.5 \times 9.0,$$

$$\lg E_2 = 4.8 + 1.5 \times 8.0.$$

于是， $\lg \frac{E_1}{E_2} = \lg E_1 - \lg E_2$

$$= (4.8 + 1.5 \times 9.0) - (4.8 + 1.5 \times 8.0) = 1.5.$$

利用计算工具可得， $\frac{E_1}{E_2} = 10^{1.5} \approx 32$.

虽然里氏 9.0 级地震与里氏 8.0 级地震仅相差 1 级，但前者释放出来的能量却是后者的约 32 倍.

想一想，为什么两次地震的里氏震级仅差 1 级，而释放的能量却相差那么多呢？

练习

1. 求下列各式的值：

(1) $\log_3(27 \times 9^2)$; (2) $\lg 5 + \lg 2$; (3) $\ln 3 + \ln \frac{1}{3}$; (4) $\log_3 5 - \log_3 15$.

2. 用 $\lg x$, $\lg y$, $\lg z$ 表示下列各式：

(1) $\lg(xyz)$; (2) $\lg \frac{xy^2}{z}$; (3) $\lg \frac{xy^3}{\sqrt{z}}$; (4) $\lg \frac{\sqrt{x}}{y^2 z}$.

3. 化简下列各式：

(1) $\log_2 3 \times \log_3 4 \times \log_4 5 \times \log_5 2$; (2) $2(\log_4 3 + \log_8 3)(\log_3 2 + \log_9 2)$.

习题 4.3



复习巩固

1. 把下列指数式写成对数式，对数式写成指数式：

(1) $3^x = 1$; (2) $4^x = \frac{1}{6}$; (3) $10^x = 6$; (4) $e^x = 25$;

(5) $x = \log_5 27$; (6) $x = \log_7 \frac{1}{3}$; (7) $x = \lg 0.3$; (8) $x = \ln \sqrt{3}$.

2. 选择题

(1) 使式子 $\log_{(2x-1)}(2-x)$ 有意义的 x 的取值范围是 ().

- (A) $x > 2$ (B) $x < 2$ (C) $\frac{1}{2} < x < 2$ (D) $\frac{1}{2} < x < 2$, 且 $x \neq 1$

(2) 若 $\lg a (a > 0)$ 与 $\lg b (b > 0)$ 互为相反数, 则 ().

- (A) $a+b=0$ (B) $a-b=0$ (C) $ab=1$ (D) $\frac{a}{b}=1$

3. 求下列各式的值:

- (1) $\log_a 2 + \log_a \frac{1}{2}$; (2) $\log_3 18 - \log_3 2$; (3) $\lg \frac{1}{4} - \lg 25$;
(4) $2\log_5 25 - 3\log_2 64$; (5) $\log_2 (\log_2 16)$; (6) $\log_2 25 \times \log_3 4 \times \log_5 9$.

4. 求满足下列条件的 x 的值:

- (1) $\ln x = \ln a + \ln b$; (2) $\lg x = 3\lg n - \lg m$;
(3) $\log_a x = \frac{1}{2}\log_a b - \log_a c$; (4) $\log_2 [\log_3 (\log_4 x)] = 0$.



综合运用

5. 已知 $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$, 求下列各式的值:

- (1) $\lg 6$; (2) $\log_3 4$; (3) $\log_2 12$; (4) $\lg \frac{3}{2}$.

6. 求满足下列条件的各式的值:

- (1) 若 $x \log_3 4 = 1$, 求 $4^x + 4^{-x}$ 的值;
(2) 若 $f(x) = 3^x$, 求 $f(\log_3 2)$ 的值.

7. 证明:

- (1) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$; (2) $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$.

8. 某地 GDP 的年平均增长率为 6.5%, 按此增长率, 多少年后该地 GDP 会翻两番?



拓广探索

9. 我们可以把 $(1+1\%)^{365}$ 看作每天的“进步”率都是 1%, 一年后是 1.01^{365} ; 而把 $(1-1\%)^{365}$ 看作每天的“落后”率都是 1%, 一年后是 0.99^{365} . 利用计算工具计算并回答下列问题:

- (1) 一年后“进步”的是“落后”的多少倍?
(2) 大约经过多少天后“进步”的分别是“落后”的 10 倍、100 倍、1 000 倍?

10. 酒驾是严重危害交通安全的违法行为. 为了保障交通安全, 根据国家有关规定: 100 mL 血液中酒精含量达到 20~79 mg 的驾驶员即为酒后驾车, 80 mg 及以上认定为醉酒驾车. 假设某驾驶员喝了一定量的酒后, 其血液中的酒精含量上升到了 1 mg/mL. 如果在停止喝酒以后, 他血液中酒精含量会以每小时 30% 的速度减少, 那么他至少经过几个小时才能驾驶?



对数的发明

16、17 世纪之交，天文、航海、工程、贸易以及军事快速发展，对大数的运算提出了更高的要求，改进数字计算方法、提高计算速度和准确度成了当务之急。苏格兰数学家纳皮尔（J. Napier, 1550—1617）在研究天文学的过程中，经过对运算体系的多年研究，最终找到了简化大数运算的有效工具，于 1614 年出版了《奇妙的对数定律说明书》，标志着对数的诞生。在这本书中，纳皮尔借助运动学，用几何术语阐述了对数方法。

如图 1，假定两点 P ， Q 以相同的初速度运动。点 Q 沿直线 CD 作匀速运动， $CQ=x$ ；点 P 沿线段 AB （长度为 10^7 单位）运动，它在任何一点的速度值等于它尚未经过的距离（ $PB=y$ ）。令 P 与 Q 同时分别从 A ， C 出发，那么，定义 x 为 y 的对数。

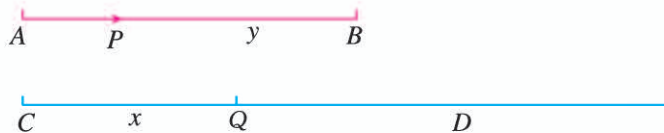


图 1

用现在的数学符号来叙述，纳皮尔的对数中， x 与 y 的对应关系就是

$$y = 10^7 \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{x}{10^7}}.$$

其中， e 为自然对数的底。利用对数，纳皮尔制作了 $0^\circ \sim 90^\circ$ 每隔 $1'$ 的八位三角函数表，但是这种方法不够方便和简捷。

把对数加以改造并使之广泛流传的是纳皮尔的朋友布里格斯（H. Briggs, 1561—1631）。他通过研究《奇妙的对数定律说明书》，感到其中的对数用起来很不方便，于是与纳皮尔商定，使 1 的对数为 0，10 的对数为 1，这样就得到了现在所用的以 10 为底的常用对数。由于我们的数系是十进制，因此它在数值计算上具有优越性。1624 年，布里格斯出版了《对数算术》，公布了以 10 为底包含 1~20 000 及 90 000~100 000 的 14 位常用对数表。

根据对数运算原理，人们还发明了对数计算尺。300 多年来，对数计算尺一直是科学工作者，特别是工程技术人员必备的计算工具，直到 20 世纪 70 年代才让位给电子计算器。尽管作为一种计算工具，对数计算尺、对数表现在都不再重要了，但是，对数的思想方法，即把乘方和乘法运算分别转化为乘法和加法，在今天仍然具有生命力。

从对数发明的过程可以发现，纳皮尔在讨论对数概念时，并没有使用指数与对数的互逆关系，主要是当时还没有明确的指数概念，就连指数符号也是在 20 多年后的 1637 年由法国数学家笛卡儿开始使用. 直到 18 世纪，瑞士数学家欧拉才发现指数与对数的互逆关系，并在 1770 年出版的一部著作中，首先使用 $y=a^x$ 来定义 $x=\log_a y$. 他指出，“对数源出于指数”. 然而对数的发明先于指数，这成为数学史上的珍闻.

从对数的发明过程可以看到，社会生产、科学技术的需要是数学发展的主要动力. 建立对数与指数之间联系的过程表明，使用较好的符号体系和运算规则不仅对数学的发展至关重要，而且可以大大减轻人们的思维负担.

人教版®

4.4 对数函数

在 4.2 节中, 我们用指数函数模型研究了呈指数增长或衰减变化规律的问题. 对这样的问题, 在引入对数后, 我们还可以从另外的角度, 对其蕴含的规律作进一步的研究.

4.4.1 对数函数的概念

思考

在 4.2.1 的问题 2 中, 我们已经研究了死亡生物体内碳 14 的含量 y 随死亡时间 x 的变化而衰减的规律. 反过来, 已知死亡生物体内碳 14 的含量, 如何得知它死亡了多长时间呢? 进一步地, 死亡时间 x 是碳 14 的含量 y 的函数吗?

根据指数与对数的关系, 由 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}} (x \geq 0)$ 得到 $x = \log_{\frac{1}{2}^{1/5730}} y (0 < y \leq 1)$. 如图 4.4-1, 过 y 轴正半轴上任意一点 $(0, y_0) (0 < y_0 \leq 1)$ 作 x 轴的平行线, 与 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}} (x \geq 0)$

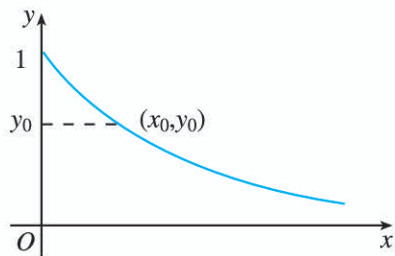


图 4.4-1

的图象有且只有一个交点 (x_0, y_0) . 这就说明, 对于任意一个 $y \in (0, 1]$, 通过对应关系 $x = \log_{\frac{1}{2}^{1/5730}} y$, 在 $[0, +\infty)$ 上都有唯一确定的数 x 和它对应, 所以 x 也是 y 的函数. 也就是说, 函数 $x = \log_{\frac{1}{2}^{1/5730}} y, y \in (0, 1]$ 刻画了时间 x 随碳 14 含量 y 的衰减而变化的规律.

同样地, 根据指数与对数的关系, 由 $y = a^x (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$ 可以得到 $x = \log_a y (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$, x 也是 y 的函数. 通常, 我们用 x 表示自变量, y 表示函数. 为此, 将 $x = \log_a y (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$ 中的字母 x 和 y 对调, 写成 $y = \log_a x (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$.

一般地, 函数 $y = \log_a x (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$ 叫做**对数函数** (logarithmic function), 其中 x 是自变量, 定义域是 $(0, +\infty)$.

例 1 求下列函数的定义域:

- (1) $y = \log_3 x^2$;
- (2) $y = \log_a (4-x) (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$.

解: (1) 因为 $x^2 > 0$, 即 $x \neq 0$, 所以函数 $y = \log_3 x^2$ 的定义域是

$$\{x \mid x \neq 0\}.$$

(2) 因为 $4-x > 0$, 即 $x < 4$, 所以函数 $y = \log_a(4-x)$ 的定义域是

$$\{x \mid x < 4\}.$$

例 2 假设某地初始物价为 1, 每年以 5% 的增长率递增, 经过 t 年后的物价为 w .

(1) 该地的物价经过几年后会翻一番?

(2) 填写下表, 并根据表中的数据, 说明该地物价的变化规律.

物价 w	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
年数 t	0									

解: (1) 由题意可知, 经过 t 年后物价 w 为

$$w = (1 + 5\%)^t, \text{ 即 } w = 1.05^t (t \in [0, +\infty)).$$

由对数与指数间的关系, 可得

$$t = \log_{1.05} w, w \in [1, +\infty).$$

由计算工具可得, 当 $w = 2$ 时, $t \approx 14$.

所以, 该地区的物价大约经过 14 年后会翻一番.

(2) 根据函数 $t = \log_{1.05} w, w \in [1, +\infty)$, 利用计算工具, 可得下表:

物价 w	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
年数 t	0	14	23	28	33	37	40	43	45	47

由表中的数据可以发现, 该地区的物价随时间的增长而增长, 但大约每增加 1 所需要的年数在逐渐缩小.

练习

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \ln(1-x);$

(2) $y = \frac{1}{\lg x};$

(3) $y = \log_7 \frac{1}{1-3x};$

(4) $y = \log_a |x| (a > 0, \text{ 且 } a \neq 1).$

2. 画出下列函数的图象:

(1) $y = \lg 10^x;$

(2) $y = 10^{\lg x}.$

3. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, 集合 $B = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$, 下列表达式能建立从集合 A 到集合 B 的函数关系的是_____.

① $y = 2^x;$

② $y = x^2;$

③ $y = \log_2 x;$

④ $y = 2x.$

4.4.2 对数函数的图象和性质

与研究指数函数一样,我们首先画出其图象,然后借助图象研究其性质.

不妨先画函数 $y=\log_2 x$ 的图象.

请同学们完成 x, y 的对应值表 4.4-1,并用描点法画出函数 $y=\log_2 x$ 的图象(图 4.4-2).

表 4.4-1

x	y
0.5	-1
1	0
2	1
4	
6	
8	
12	
16	

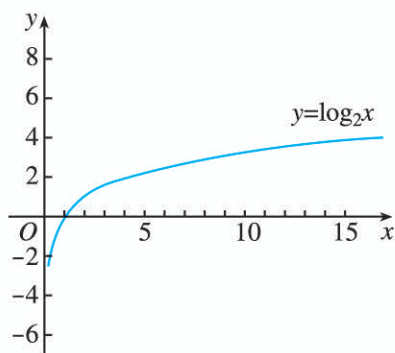


图 4.4-2

思考

我们知道,底数互为倒数的两个指数函数的图象关于 y 轴对称.对于底数互为倒数的两个对数函数,比如 $y=\log_2 x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$,它们的图象是否也有某种对称关系呢?可否利用其中一个函数的图象画出另一个函数的图象?

利用换底公式,可以得到 $y=\log_{\frac{1}{2}} x = -\log_2 x$. 因为点 (x, y) 与点 $(x, -y)$ 关于 x 轴对称,所以 $y=\log_2 x$ 图象上任意一点 $P(x, y)$ 关于 x 轴的对称点 $P_1(x, -y)$ 都在 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象上,反之亦然.由此可知,底数互为倒数的两个对数函数的图象关于 x 轴对称.根据这种对称性,就可以利用 $y=\log_2 x$ 的图象画出 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象(图 4.4-3).

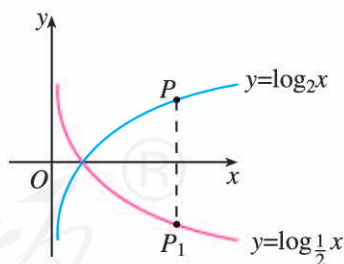


图 4.4-3

为了得到对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$) 的性质,我们还需要画出更多具体对数函数的图象进行观察.

探究

选取底数 a ($a>0$, 且 $a\neq 1$) 的若干个不同的值,在同一直角坐标系内画出相应的对数函数的图象.观察这些图象的位置、公共点和变化趋势,它们有哪些共性?由此你能概括出对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$) 的值域和性质吗?

如图 4.4-4, 选取底数 a 的若干值, 用计算工具画图, 发现对数函数 $y = \log_a x$ 的图象按底数 a 的取值, 可分为 $0 < a < 1$ 和 $a > 1$ 两种类型. 因此, 对数函数的性质也可以分 $0 < a < 1$ 和 $a > 1$ 两种情况进行研究.

一般地, 对数函数的图象和性质如表 4.4-2 所示.

表 4.4-2

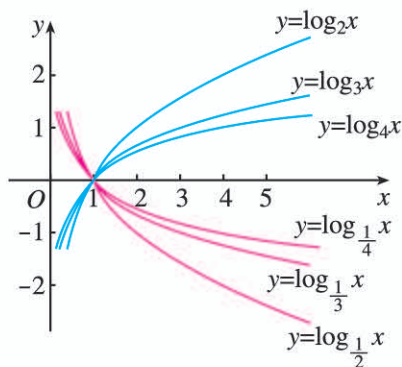


图 4.4-4

	$0 < a < 1$	$a > 1$
图象		
定义域	$(0, +\infty)$	
值域	$\mathbf{R}$	
性质	(1) 过定点 $(1, 0)$, 即 $x=1$ 时, $y=0$	
	(2) 减函数	(2) 增函数

例 3 比较下列各题中两个值的大小:

- (1) $\log_2 3.4$, $\log_2 8.5$;
- (2) $\log_{0.3} 1.8$, $\log_{0.3} 2.7$;
- (3) $\log_a 5.1$, $\log_a 5.9$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$).

解: (1) $\log_2 3.4$ 和 $\log_2 8.5$ 可看作函数 $y = \log_2 x$ 的两个函数值. 因为底数 $2 > 1$, 对数函数 $y = \log_2 x$ 是增函数, 且 $3.4 < 8.5$, 所以

$$\log_2 3.4 < \log_2 8.5.$$

(2) $\log_{0.3} 1.8$ 和 $\log_{0.3} 2.7$ 可看作函数 $y = \log_{0.3} x$ 的两个函数值. 因为底数 $0.3 < 1$, 对数函数 $y = \log_{0.3} x$ 是减函数, 且 $1.8 < 2.7$, 所以

$$\log_{0.3} 1.8 > \log_{0.3} 2.7.$$

(3) $\log_a 5.1$ 和 $\log_a 5.9$ 可看作函数 $y = \log_a x$ 的两个函数值. 对数函数的单调性取决于底数 a 是大于 1 还是小于 1, 因此需要对底数 a 进行讨论.

当 $a > 1$ 时, 因为函数 $y = \log_a x$ 是增函数, 且 $5.1 < 5.9$, 所以

$$\log_a 5.1 < \log_a 5.9;$$

当 $0 < a < 1$ 时, 因为函数 $y = \log_a x$ 是减函数, 且 $5.1 < 5.9$, 所以

$$\log_a 5.1 > \log_a 5.9.$$

例4 溶液酸碱度的测量.

溶液酸碱度是通过 pH 计量的. pH 的计算公式为 $\text{pH} = -\lg[\text{H}^+]$, 其中 $[\text{H}^+]$ 表示溶液中氢离子的浓度, 单位是摩尔/升.

(1) 根据对数函数性质及上述 pH 的计算公式, 说明溶液酸碱度与溶液中氢离子的浓度之间的变化关系;

(2) 已知纯净水中氢离子的浓度为 $[\text{H}^+] = 10^{-7}$ 摩尔/升, 计算纯净水的 pH.

解: (1) 根据对数的运算性质, 有

$$\text{pH} = -\lg[\text{H}^+] = \lg[\text{H}^+]^{-1} = \lg \frac{1}{[\text{H}^]}.$$

在 $(0, +\infty)$ 上, 随着 $[\text{H}^+]$ 的增大, $\frac{1}{[\text{H}^+]}$ 减小, 相应地, $\lg \frac{1}{[\text{H}^+]}$ 也减小, 即 pH 减小. 所以, 随着 $[\text{H}^+]$ 的增大, pH 减小, 即溶液中氢离子的浓度越大, 溶液的酸性就越强.

(2) 当 $[\text{H}^+] = 10^{-7}$ 时, $\text{pH} = -\lg 10^{-7} = 7$. 所以, 纯净水的 pH 是 7.

?

胃酸中氢离子的浓度是 2.5×10^{-2} 摩尔/升, 胃酸的 pH 是多少?

前面根据指数与对数间的关系, 由 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}$ ($x \geq 0$) 得 $x = \log_{\sqrt[5730]{\frac{1}{2}}} y$ ($0 < y \leq 1$). 由函数定义可知 $x = \log_{\sqrt[5730]{\frac{1}{2}}} y$, $y \in (0, 1]$ 是一个函数. 这样, 由指数函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}$, $x \in [0, +\infty)$ 可得到对数函数 $x = \log_{\sqrt[5730]{\frac{1}{2}}} y$, $y \in (0, 1]$, 这个对数函数的定义域 $(0, 1]$ 、值域 $[0, +\infty)$ 分别是指数函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}$, $x \in [0, +\infty)$ 的值域和定义域. 这时就说函数 $x = \log_{\sqrt[5730]{\frac{1}{2}}} y$, $y \in (0, 1]$ 是函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}$, $x \in [0, +\infty)$ 的**反函数** (inverse function).

通常, 我们用 x 表示自变量, y 表示函数. 为此, 把 $x = \log_{\sqrt[5730]{\frac{1}{2}}} y$ 写成 $y = \log_{\sqrt[5730]{\frac{1}{2}}} x$, 这样, 对数函数 $y = \log_{\sqrt[5730]{\frac{1}{2}}} x$, $x \in (0, 1]$ 是指数函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}$, $x \in [0, +\infty)$ 的反函数. 同时, 指数函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}$, $x \in [0, +\infty)$ 也是对数函数 $y = \log_{\sqrt[5730]{\frac{1}{2}}} x$, $x \in (0, 1]$ 的反函数. 因此, 指数函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}$, $x \in [0, +\infty)$ 与对数函数 $y = \log_{\sqrt[5730]{\frac{1}{2}}} x$, $x \in (0, 1]$ 互为反函数, 它们的定义域与值域正好互换.

探究

对于指数函数 $y=2^x$ ，你能利用指数与对数间的关系，得到与之对应的对数函数吗？它们的定义域、值域之间有什么关系？它们也互为反函数吗？

一般地，指数函数 $y=a^x$ ($a>0$ ，且 $a\neq 1$) 与对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$ ，且 $a\neq 1$) 互为反函数，它们的定义域与值域正好互换。

练习

1. 在同一直角坐标系中画出函数 $y=\log_3 x$ 和 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 的图象，并说明它们的关系。
2. 比较下列各题中两个值的大小：
(1) $\lg 0.6$, $\lg 0.8$; (2) $\log_{0.5} 6$, $\log_{0.5} 4$; (3) $\log_m 5$, $\log_m 7$.
3. 某地去年的 GDP (国内生产总值) 为 3 000 亿元人民币，预计未来 5 年的平均增长率为 6.8%.
(1) 设经过 x 年达到的年 GDP 为 y 亿元，试写出未来 5 年内， y 关于 x 的函数解析式；
(2) 经过几年该地 GDP 能达到 3 900 亿元人民币？

探究与发现

互为反函数的两个函数图象间的关系

我们知道，指数函数 $y=a^x$ ($a>0$ ，且 $a\neq 1$) 与对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$ ，且 $a\neq 1$) 互为反函数。它们的图象是否有关系？有什么关系呢？下面，请你运用所学的数学知识和计算工具，探索几个问题，亲自发现其中的奥秘吧！

1. 在同一直角坐标系中，画出指数函数 $y=2^x$ 及其反函数 $y=\log_2 x$ 的图象。你能发现这两个函数的图象有什么对称关系吗？

2. 取 $y=2^x$ 图象上的几个点，如 $P_1(-1, \frac{1}{2})$, $P_2(0, 1)$, $P_3(1, 2)$ 。 P_1 , P_2 , P_3 关于直线 $y=x$ 的对称点的坐标是什么？它们在 $y=\log_2 x$ 的图象上吗？为什么？

3. 如果点 $P_0(x_0, y_0)$ 在函数 $y=2^x$ 的图象上，那么 P_0 关于直线 $y=x$ 的对称点在函数 $y=\log_2 x$ 的图象上吗？为什么？

4. 根据上述探究过程，你可以得到什么结论？

5. 上述结论对于指数函数 $y=a^x$ ($a>0$ ，且 $a\neq 1$) 及其反函数 $y=\log_a x$ ($a>0$ ，且 $a\neq 1$) 也成立吗？为什么？

4.4.3 不同函数增长的差异

在前面的学习中我们看到，一次函数与指数函数的增长方式存在很大差异. 事实上，这种差异正是不同类型现实问题具有不同增长规律的反映. 因此，如果把握了不同函数增长方式的差异，那么就可以根据现实问题的增长情况，选择合适的函数模型刻画其变化规律. 下面就来研究一次函数、指数函数和对数函数增长方式的差异.

探究

选取适当的指数函数与一次函数，探索它们在区间 $[0, +\infty)$ 上的增长差异，你能描述一下指数函数增长的特点吗？

不妨以函数 $y=2^x$ 和 $y=2x$ 为例.

利用信息技术，列出上述两个函数的自变量与函数值的对应值表（表 4.4-3），并在同一直角坐标系中画出它们的图象（图 4.4-5）. 可以看到，函数 $y=2^x$ 和 $y=2x$ 的图象有两个交点 $(1, 2)$ ， $(2, 4)$. 在区间 $[0, 1)$ 上，函数 $y=2^x$ 的图象位于 $y=2x$ 的图象之上， $2^x > 2x$ ；在区间 $(1, 2)$ 上，函数 $y=2^x$ 的图象位于 $y=2x$ 的图象之下， $2^x < 2x$ ；在区间 $(2, 3)$ 上，函数 $y=2^x$ 的图象位于 $y=2x$ 的图象之上， $2^x > 2x$. 这表明，虽然这两个函数在 $[0, +\infty)$ 上都单调递增，但它们的增长速度不同，函数 $y=2x$ 的增长速度保持不变，而函数 $y=2^x$ 的增长速度在变化.

表 4.4-3

x	$y=2^x$	$y=2x$
0	1	0
0.5	1.414	1
1	2	2
1.5	2.828	3
2	4	4
2.5	5.657	5
3	8	6
...	...	...

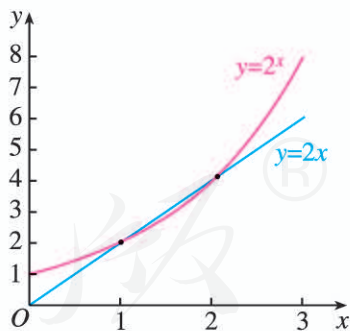


图 4.4-5

下面在更大的范围内，观察 $y=2^x$ 和 $y=2x$ 的增长情况.

从表 4.4-4 和图 4.4-6 可以看到，当自变量 x 越来越大时， $y=2^x$ 的图象就像与 x 轴垂直一样， 2^x 的值快速增长；而函数 $y=2x$ 的增长速度依然保持不变，与函数 $y=2^x$ 的增长速度相比几乎微不足道.

表 4.4-4

x	$y=2^x$	$y=2x$
0	1	0
2	4	4
4	16	8
6	64	12
8	256	16
10	1 024	20
12	4 096	24
...	...	...

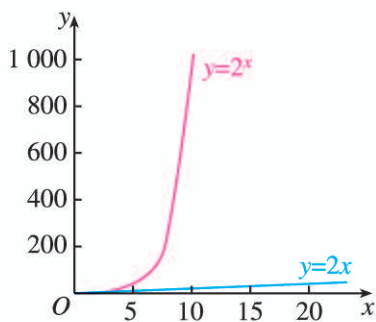


图 4.4-6

综上所述,虽然函数 $y=2^x$ 与 $y=2x$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上都单调递增,但它们的增长速度不同,而且不在同一个“档次”上.随着 x 的增大, $y=2^x$ 的增长速度越来越快,会超过并远远大于 $y=2x$ 的增长速度.尽管在 x 的一定变化范围内, 2^x 会小于 $2x$,但由于 $y=2^x$ 的增长最终会快于 $y=2x$ 的增长,因此,总会存在一个 x_0 ,当 $x > x_0$ 时,恒有 $2^x > 2x$.

一般地,指数函数 $y=a^x$ ($a > 1$) 与一次函数 $y=kx$ ($k > 0$) 的增长差异都与上述情况类似.即使 k 的值远远大于 a 的值, $y=a^x$ ($a > 1$) 的增长速度最终都会大大超过 $y=kx$ ($k > 0$) 的增长速度.

指数函数不像一次函数那样按同一速度增长,而是越来越快,呈爆炸性增长.

探究

选取适当的对数函数与一次函数,探索它们在区间 $(0, +\infty)$ 上的增长差异,你能描述一下对数函数增长的特点吗?

不妨以函数 $y=\lg x$ 和 $y=\frac{1}{10}x$ 为例.

利用信息技术,列出上述两个函数的自变量与函数值的对应值表(表 4.4-5),并在同一直角坐标系中画出它们的图象(图 4.4-7).可以看到,虽然它们在 $(0, +\infty)$ 上都单调递增,但增长速度存在着明显的差异.函数 $y=\frac{1}{10}x$ 的增长速度保持不变,而 $y=\lg x$ 的增长速度在变化.随着 x 的增大,函数 $y=\frac{1}{10}x$ 的图象离 x 轴越来越远,而函数 $y=\lg x$ 的图象越来越平缓,就像与 x 轴平行一样.例如 $\lg 10=1$, $\lg 100=2$, $\lg 1\,000=3$,

$\lg 10\,000=4$ ；而 $\frac{1}{10} \times 10=1$, $\frac{1}{10} \times 100=10$, $\frac{1}{10} \times 1\,000=100$, $\frac{1}{10} \times 10\,000=1\,000$. 这说明，当 $x>10$ ，即 $y=\lg x>1$ 时， $y=\lg x$ 与 $y=\frac{1}{10}x$ 相比增长得就很慢了.

表 4.4-5

x	$y=\lg x$	$y=\frac{1}{10}x$
0	不存在	0
10	1	1
20	1.301	2
30	1.477	3
40	1.602	4
50	1.699	5
60	1.778	6
...	...	...

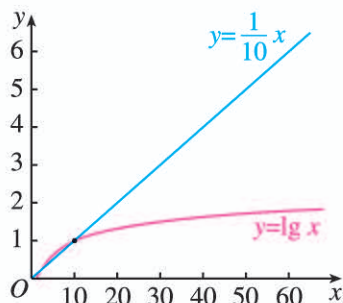


图 4.4-7

思考

如果将 $\lg x$ 放大 1 000 倍，再对函数 $y=1\,000\lg x$ 和 $y=\frac{1}{10}x$ 的增长情况进行比较，那么仍有上述规律吗？

一般地，虽然对数函数 $y=\log_a x (a>1)$ 与一次函数 $y=kx (k>0)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上都单调递增，但它们的增长速度不同. 随着 x 的增大，一次函数 $y=kx (k>0)$ 保持固定的增长速度，而对数函数 $y=\log_a x (a>1)$ 的增长速度越来越慢. 即使 k 的值很小，在一定范围内， $\log_a x$ 可能会大于 kx ，但由于 $\log_a x$ 的增长最终会慢于 kx 的增长，因此总会存在一个 x_0 ，当 $x>x_0$ 时，恒有 $\log_a x < kx$.

对数函数比较适合于描述增长速度平缓的变化规律.

探究

类比上述过程，

(1) 画出一一次函数 $y=2x$ ，对数函数 $y=\lg x$ 和指数函数 $y=2^x$ 的图象，并比较它们的增长差异；

(2) 试着概括一次函数 $y=kx (k>0)$ ，对数函数 $y=\log_a x (a>1)$ 和指数函数 $y=b^x (b>1)$ 的增长差异；

(3) 讨论交流“直线上升”“对数增长”“指数爆炸”的含义.

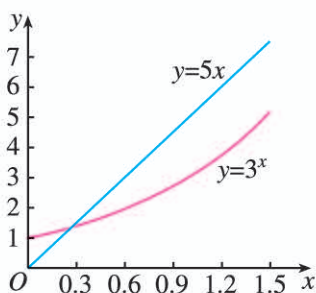
练习

1. 三个变量 y_1, y_2, y_3 随变量 x 变化的数据如下表:

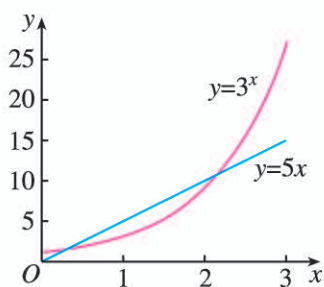
x	0	5	10	15	20	25	30
y_1	5	130	505	1 130	2 005	3 130	4 505
y_2	5	90	1 620	29 160	524 880	9 447 840	170 061 120
y_3	5	30	55	80	105	130	155

其中关于 x 呈指数增长的变量是_____.

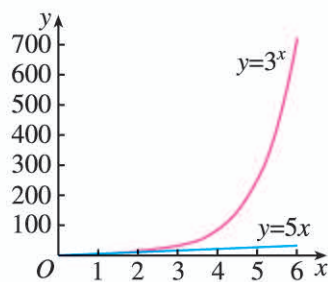
2. (1)(2)(3)分别是函数 $y=3^x$ 和 $y=5x$ 在不同范围的图象, 借助计算工具估算出使 $3^x > 5x$ 的 x 的取值范围 (精确到 0.01).



(1)



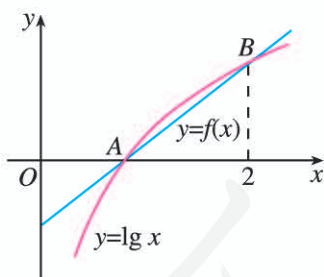
(2)



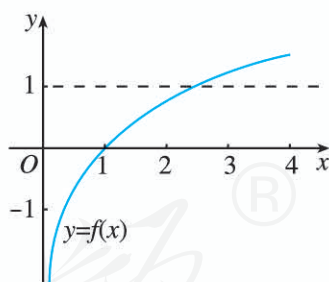
(3)

(第 2 题)

3. 如图, 对数函数 $y=\lg x$ 的图象与一次函数 $y=f(x)$ 的图象有 A, B 两个公共点. 求一次函数 $y=f(x)$ 的解析式.



(第 3 题)



(第 4 题)

4. 函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示, 则 $y=f(x)$ 可能是 ().

- (A) $y=1-x^{-1}, x \in (0, +\infty)$ (B) $y=\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^x, x \in (0, +\infty)$
 (C) $y=\ln x$ (D) $y=x-1, x \in (0, +\infty)$



复习巩固

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \sqrt[3]{\log_2 x}$;

(2) $y = \sqrt{\log_{0.5}(4x-3)}$.

2. 比较满足下列条件的两个正数 m, n 的大小:

(1) $\log_3 m < \log_3 n$;

(2) $\log_{0.3} m < \log_{0.3} n$;

(3) $\log_a m < \log_a n (0 < a < 1)$;

(4) $\log_a m > \log_a n (a > 1)$.

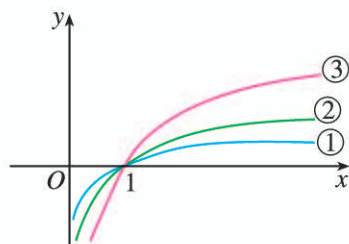
3. 在不考虑空气阻力的条件下, 火箭的最大速度 v (单位: km/s) 和燃料的质量 M (单位: kg)、火箭 (除燃料外) 的质量 m (单位: kg) 的函数关系是 $v = 2000 \ln \left(1 + \frac{M}{m} \right)$. 当燃料质量是火箭质量的百分之几时, 火箭的最大速度可达到 12 km/s?

4. 函数 $y = \log_2 x$, $y = \log_5 x$, $y = \lg x$ 的图象如图所示,

(1) 试说明哪个函数对应于哪个图象, 并解释为什么;

(2) 以已有图象为基础, 在同一直角坐标系中画出 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \log_{\frac{1}{5}} x$, $y = \log_{\frac{1}{10}} x$ 的图象;

(3) 从 (2) 的图中你发现了什么?



(第 4 题)

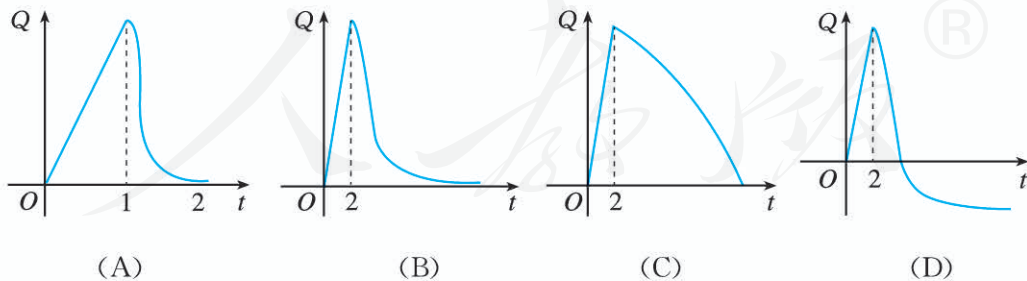
5. 大西洋鲑鱼每年都要逆流而上, 游回产地产卵. 研究鲑鱼的科学家发现鲑鱼的游速 v (单位: m/s) 可以表示为 $v = \frac{1}{2} \log_3 \frac{O}{100}$,

其中 O 表示鱼的耗氧量的单位数.

(1) 当一条鱼的耗氧量是 2 700 个单位时, 它的游速是多少?

(2) 计算一条鱼静止时耗氧量的单位数.

6. 在 2 h 内将某种药物注射进患者的血液中. 在注射期间, 血液中的药物含量呈线性增加; 停止注射后, 血液中的药物含量呈指数衰减. 能反映血液中药物含量 Q 随时间 t 变化的图象是 ().



综合运用

7. 判断下列各对函数是否互为反函数. 若是, 则求出它们的定义域和值域:

(1) $y = \ln x$, $y = e^x$;

(2) $y = -\log_a x$, $y = \left(\frac{1}{a} \right)^x$.

8. 设 $y=f(x)$ 表示摄氏温度为 x 时, 华氏温度为 y ,
- (1) 如果函数 $y=f(x)$ 的反函数是 $y=g(x)$, 那么 $y=g(x)$ 表示什么?
 - (2) 如果 $f(30)=86$, 那么求 $g(86)$, 并说明其实际意义.
9. 某地由于人们健康水平的不断提高, 某种疾病的患病率正以每年 15% 的比例降低. 要将当前的患病率降低一半, 需要多少年?
10. 声强级 L_I (单位: dB) 由公式

$$L_I = 10 \lg \left(\frac{I}{10^{-12}} \right)$$

给出, 其中 I 为声强 (单位: W/m^2).

- (1) 一般正常人听觉能忍受的最高声强为 $1 \text{ W}/\text{m}^2$, 能听到的最低声强为 $10^{-12} \text{ W}/\text{m}^2$. 求人听觉的声强级范围.
 - (2) 平时常人交谈时的声强约为 $10^{-6} \text{ W}/\text{m}^2$, 求其声强级.
11. 假设有一套住房的房价从 2002 年的 20 万元上涨到 2012 年的 40 万元. 下表给出了两种价格增长方式, 其中 P_1 是按直线上升的房价, P_2 是按指数增长的房价, t 是 2002 年以来经过的年数.

t	0	5	10	15	20
$P_1/\text{万元}$	20		40		
$P_2/\text{万元}$	20		40		

- (1) 求函数 $P_1=f(t)$ 的解析式;
- (2) 求函数 $P_2=g(t)$ 的解析式;
- (3) 完成上表空格中的数据, 并在同一直角坐标系中画出两个函数的图象, 然后比较两种价格增长方式的差异.



拓广探索

12. 已知 $\log_a \frac{1}{2} < 1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^a < 1$, $a^{\frac{1}{2}} < 1$, 求实数 a 的取值范围.
13. 比较下列各题中三个值的大小:
- (1) $\log_{0.2} 6$, $\log_{0.3} 6$, $\log_{0.4} 6$;
 - (2) $\log_2 3$, $\log_3 4$, $\log_4 5$.

4.5 函数的应用 (二)

在“函数的应用(一)”中,通过一些实例,我们初步了解了建立函数模型解决实际问题的过程,学习了用函数描述客观事物变化规律的方法.本节将先学习运用函数性质求方程近似解的基本方法(二分法),再结合实例,更深入地理解用函数构建数学模型的基本过程,学习运用模型思想发现和提出问题、分析和解决问题的方法.

4.5.1 函数的零点与方程的解

思考

我们已经学习了用二次函数的观点认识一元二次方程,知道一元二次方程的实数根就是相应二次函数的零点.像 $\ln x + 2x - 6 = 0$ 这样不能用公式求解的方程,是否也能采用类似的方法,用相应的函数研究它的解的情况呢?

与二次函数的零点一样,对于一般函数 $y=f(x)$,我们把使 $f(x)=0$ 的实数 x 叫做函数 $y=f(x)$ 的**零点** (zero).

这样,函数 $y=f(x)$ 的零点就是方程 $f(x)=0$ 的实数解,也就是函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴的公共点的横坐标.所以

方程 $f(x)=0$ 有实数解

$\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 有零点

$\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴有公共点.

由此可知,求方程 $f(x)=0$ 的实数解,就是确定函数 $y=f(x)$ 的零点.一般地,对于不能用公式求解的方程 $f(x)=0$,我们可以把它与相应的函数 $y=f(x)$ 联系起来,利用函数的图象和性质找出零点,从而得到方程的解.

下面从考察二次函数存在零点时函数图象的特征,以及零点附近函数值的变化规律入手.

探究

对于二次函数 $f(x)=x^2-2x-3$, 观察它的图象 (图 4.5-1), 发现它在区间 $[2, 4]$ 上有零点. 这时, 函数图象与 x 轴有什么关系? 在区间 $[-2, 0]$ 上是否也有这种关系? 你认为应如何利用函数 $f(x)$ 的取值规律来刻画这种关系?

再任意画几个函数的图象, 观察函数零点所在区间, 以及这一区间内函数图象与 x 轴的关系, 并探究用 $f(x)$ 的取值刻画这种关系的方法.

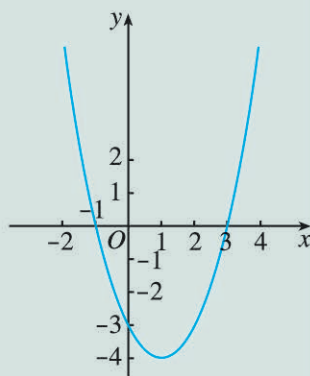


图 4.5-1

可以发现, 在零点附近, 函数图象是连续不断的, 并且“穿过” x 轴. 函数在端点 $x=2$ 和 $x=4$ 的取值异号, 即 $f(2)f(4)<0$, 函数 $f(x)=x^2-2x-3$ 在区间 $(2, 4)$ 内有零点 $x=3$, 它是方程 $x^2-2x-3=0$ 的一个根. 同样地, $f(-2)f(0)<0$, 函数 $f(x)=x^2-2x-3$ 在 $(-2, 0)$ 内有零点 $x=-1$, 它是方程 $x^2-2x-3=0$ 的另一个根.

一般地, 我们有:

函数零点存在定理 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象是一条连续不断的曲线, 且有 $f(a)f(b)<0$, 那么, 函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内至少有一个零点, 即存在 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c)=0$, 这个 c 也就是方程 $f(x)=0$ 的解.

例 1 求方程 $\ln x + 2x - 6 = 0$ 的实数解的个数.

分析: 可以先借助计算工具画出函数 $y = \ln x + 2x - 6$ 的图象或列出 x, y 的对应值表, 为观察、判断零点所在区间提供帮助.

解: 设函数 $f(x) = \ln x + 2x - 6$, 利用计算工具, 列出函数 $y = f(x)$ 的对应值表 (表 4.5-1), 并画出图象 (图 4.5-2).

表 4.5-1

x	y
1	-4
2	-1.306 9
3	1.098 6
4	3.386 3
5	5.609 4
6	7.791 8
7	9.945 9
8	12.079 4
9	14.197 2

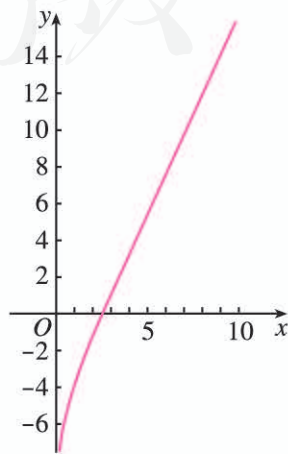


图 4.5-2

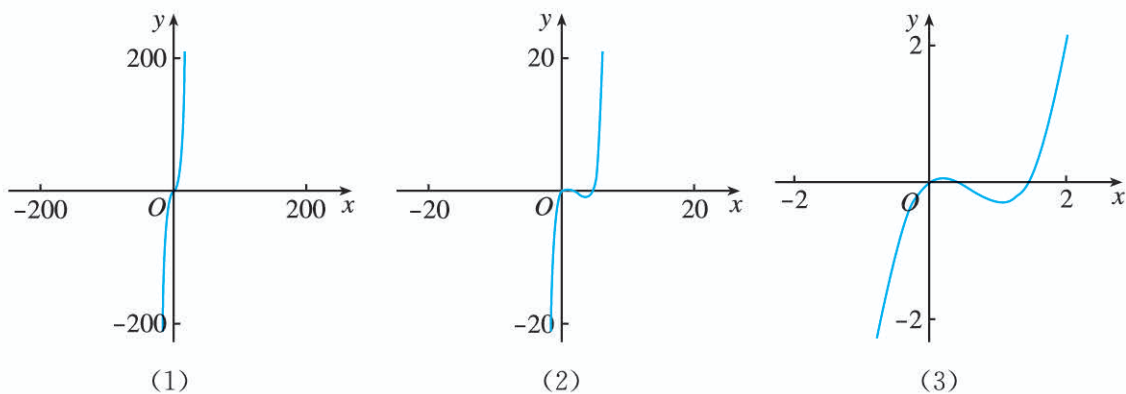
由表 4.5-1 和图 4.5-2 可知, $f(2) < 0$, $f(3) > 0$, 则 $f(2)f(3) < 0$. 由函数零点存在定理可知, 函数 $f(x) = \ln x + 2x - 6$ 在区间 $(2, 3)$ 内至少有一个零点.

容易证明, 函数 $f(x) = \ln x + 2x - 6$, $x \in (0, +\infty)$ 是增函数, 所以它只有一个零点, 即相应方程 $\ln x + 2x - 6 = 0$ 只有一个实数解.

为什么由图 4.5-2 和 $f(2)f(3) < 0$ 还不能说明函数 $f(x)$ 只有一个零点? 你能证明函数 $y = f(x)$ 是增函数吗?

练习

1. 图 (1)(2)(3) 分别为函数 $y = f(x)$ 在三个不同范围的图象. 能否仅根据其中一个图象, 得出函数 $y = f(x)$ 在某个区间只有一个零点的判断? 为什么?



(第 1 题)

2. 利用计算工具画出函数的图象, 并指出下列函数零点所在的大致区间:

(1) $f(x) = -x^3 - 3x + 5$; (2) $f(x) = 2x \ln(x-2) - 3$;
 (3) $f(x) = e^{x-1} + 4x - 4$; (4) $f(x) = 3(x+2)(x-3)(x+4) + x$.

4.5.2 用二分法求方程的近似解

我们已经知道, 函数 $f(x) = \ln x + 2x - 6$ 在区间 $(2, 3)$ 内存在一个零点. 进一步的问题是, 如何求出这个零点呢?

一个直观的想法是: 如果能够将零点所在的范围尽量缩小, 那么在一定精确度的要求下, 就可以得到符合要求的零点的近似值. 为了方便, 可以通过取区间中点的方法, 逐步缩小零点所在的范围.

取区间 $(2, 3)$ 的中点 2.5, 用计算工具算得 $f(2.5) \approx -0.084$. 因为 $f(2.5)f(3) < 0$, 所以零点在区间 $(2.5, 3)$ 内.

大多数方程都不能像一元二次方程那样用公式求出精确解. 在实际问题中, 往往只需求出满足一定精确度的近似解.

一般地, 称 $x = \frac{a+b}{2}$ 为区间 (a, b) 的中点.

再取区间 $(2.5, 3)$ 的中点 2.75 , 用计算工具算得 $f(2.75) \approx 0.512$. 因为 $f(2.5)f(2.75) < 0$, 所以零点在区间 $(2.5, 2.75)$ 内.

由于 $(2, 3) \supset (2.5, 3) \supset (2.5, 2.75)$, 所以零点所在的范围变小了. 如果重复上述步骤, 那么零点所在的范围会越来越小 (如表 4.5-2 和图 4.5-3). 这样, 我们就可以通过有限次重复相同的步骤, 将零点所在范围缩小到满足一定精确度的区间, 区间内的任意一点都可以作为函数零点的近似值. 为了方便, 我们把区间的一个端点作为零点的近似值.

表 4.5-2

零点所在区间	中点的值	中点函数近似值
$(2, 3)$	2.5	-0.084
$(2.5, 3)$	2.75	0.512
$(2.5, 2.75)$	2.625	0.215
$(2.5, 2.625)$	2.562 5	0.066
$(2.5, 2.562 5)$	2.531 25	-0.009
$(2.531 25, 2.562 5)$	2.546 875	0.029
$(2.531 25, 2.546 875)$	2.539 062 5	0.010
$(2.531 25, 2.539 062 5)$	2.535 156 25	0.001

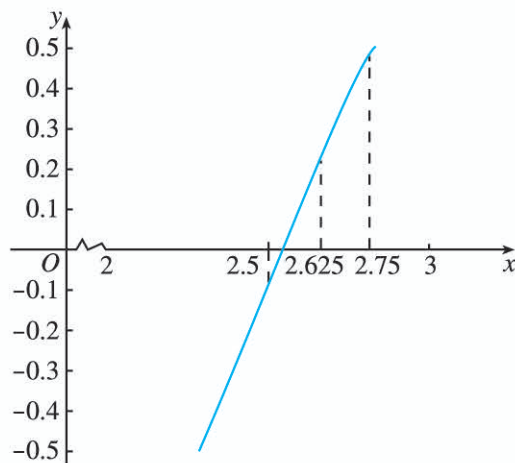


图 4.5-3

例如, 当精确度为 0.01 时, 因为 $|2.539 062 5 - 2.531 25| = 0.007 812 5 < 0.01$, 所以区间 $(2.531 25, 2.539 062 5)$ 内任意一点都可以作为零点的近似值, 也可以将 $x = 2.531 25$ 作为函数 $f(x) = \ln x + 2x - 6$ 零点的近似值, 也即方程 $\ln x + 2x - 6 = 0$ 的近似解.

对于在区间 $[a, b]$ 上图象连续不断且 $f(a)f(b) < 0$ 的函数 $y = f(x)$, 通过不断地把它的零点所在区间一分为二, 使所得区间的两个端点逐步逼近零点, 进而得到零点近似值的方法叫做**二分法** (bisection method).

给定精确度 ϵ , 用二分法求函数 $y = f(x)$ 零点 x_0 的近似值的一般步骤如下:

1. 确定零点 x_0 的初始区间 $[a, b]$, 验证 $f(a)f(b) < 0$.
2. 求区间 (a, b) 的中点 c .
3. 计算 $f(c)$, 并进一步确定零点所在的区间:
 - (1) 若 $f(c) = 0$ (此时 $x_0 = c$), 则 c 就是函数的零点;
 - (2) 若 $f(a)f(c) < 0$ (此时 $x_0 \in (a, c)$), 则令 $b = c$;
 - (3) 若 $f(c)f(b) < 0$ (此时 $x_0 \in (c, b)$), 则令 $a = c$.
4. 判断是否达到精确度 ϵ : 若 $|a - b| < \epsilon$, 则得到零点近似值 a (或 b); 否则重复步骤 2~4.

为了刻画与准确值的接近程度, 这里给出了精确度 ϵ , 由 $|a - b| < \epsilon$ 可知, 区间 $[a, b]$ 中任意一个值都是零点 x_0 满足精确度 ϵ 的近似值 (想一想, 为什么).

由函数零点与相应方程解的关系, 我们可用二分法来求方程的近似解.

例2 借助信息技术, 用二分法求方程 $2^x + 3x = 7$ 的近似解 (精确度为 0.1).

解: 原方程即 $2^x + 3x - 7 = 0$, 令 $f(x) = 2^x + 3x - 7$, 用信息技术画出函数 $y = f(x)$ 的图象 (图 4.5-4), 并列出它的对应值表 (表 4.5-3).

表 4.5-3

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	-6	-2	3	10	21	40	75	142	273

观察图 4.5-4 或表 4.5-3, 可知 $f(1)f(2) < 0$, 说明该函数在区间 $(1, 2)$ 内存在零点 x_0 .

取区间 $(1, 2)$ 的中点 $x_1 = 1.5$, 用信息技术算得 $f(1.5) \approx 0.33$. 因为 $f(1)f(1.5) < 0$, 所以 $x_0 \in (1, 1.5)$.

再取区间 $(1, 1.5)$ 的中点 $x_2 = 1.25$, 用信息技术算得 $f(1.25) \approx -0.87$. 因为 $f(1.25)f(1.5) < 0$, 所以 $x_0 \in (1.25, 1.5)$.

同理可得, $x_0 \in (1.375, 1.5)$, $x_0 \in (1.375, 1.4375)$.

由于

$$|1.375 - 1.4375| = 0.0625 < 0.1,$$

所以, 原方程的近似解可取为 1.375.

由例 2 可见, 用二分法求方程的近似解, 计算量较大, 而且是重复相同的步骤. 因此, 可以通过设计一定的计算程序, 借助信息技术完成计算. 图 4.5-5 就是表示二分法求方程近似解过程的程序框图. 有兴趣的同学, 可以在此基础上用有关算法语言编写程序, 利用信息技术求方程的近似解.

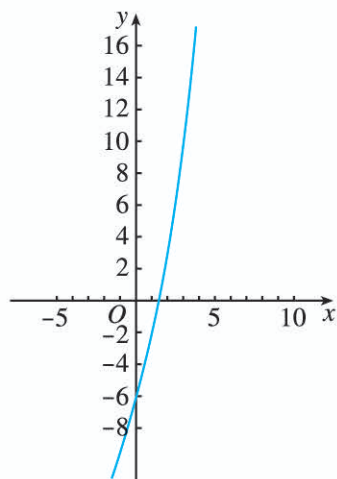


图 4.5-4

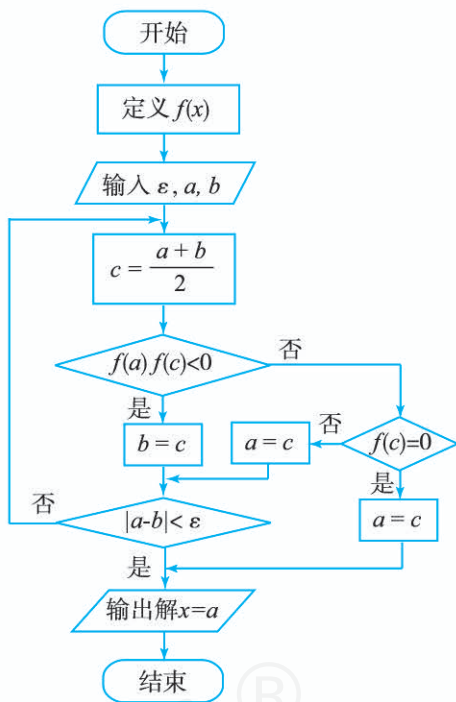


图 4.5-5

练习

- 借助信息技术, 用二分法求函数 $f(x) = x^3 + 1.1x^2 + 0.9x - 1.4$ 在区间 $(0, 1)$ 内零点的近似值 (精确度为 0.1).
- 借助信息技术, 用二分法求方程 $x = 3 - \lg x$ 在区间 $(2, 3)$ 内的近似解 (精确度为 0.1).

中外历史上的方程求解

在人类用智慧架设的无数座从已知通向未知的金桥中，方程的求解是其中璀璨的一座。虽然今天我们可以从教科书中了解各式各样方程的解法，但这一切却经历了相当漫长的岁月。

我国古代数学家已比较系统地解决了某些类型方程求解的问题。约公元 50~100 年编成的《九章算术》，已经记载有开平方、开立方的开方方法，这些开方问题与求解两项方程，如求解 $x^2=a$ ， $x^3=b$ 正根的方法是一致的；7 世纪，隋唐数学家王孝通找出了求三次方程正根的数值解法；11 世纪，北宋数学家贾宪在《黄帝九章算法细草》中提出的“开方作法本源图”，以“立成释锁法”来解三次或三次以上的高次方程。同时，他还提出了一种更简便的“增乘开方法”；13 世纪，南宋数学家秦九韶在《数书九章》中提出了“正负开方术”，提供了一种用算筹布列解任意数字方程的有效算法，此法可以求出任意次代数方程的正根。

国外数学家对方程求解也有很多研究。9 世纪，阿拉伯数学家花拉子米 (Al-Khowarizmi, 约 780—850) 给出了一次方程和二次方程的一般解法；1541 年，意大利数学家塔尔塔利亚 (N. Tartaglia, 约 1499—1557) 给出了三次方程的一般解法；1545 年，意大利数学家卡尔达诺 (G. Cardano, 1501—1576) 的名著《大术》一书中，把塔尔塔利亚的解法加以发展，并记载了费拉里 (L. Ferrari, 1522—1565) 的四次方程的一般解法。

数学史上，人们曾希望得到一般的五次及以上代数方程的根式解，但经过长期的努力仍无结果。1778 年，法国数学大师拉格朗日 (J.-L. Lagrange, 1736—1813) 提出了五次方程不存在根式解的猜想。1824 年，挪威年轻数学家阿贝尔 (N. H. Abel, 1802—1829) 成功地证明了五次及以上一般方程没有根式解。1828 年，法国天才数学家伽罗瓦 (E. Galois, 1811—1832) 巧妙而简洁地证明了存在不能用开方运算求解的具体方程，同时还给出了一个代数方程能用根式求解的充要条件，他完全解决了高次方程的求解问题，并创立了对代数学发展影响深远的“伽罗瓦理论”。

虽然指数方程、对数方程等超越方程和五次及以上的高次代数方程不能用代数运算求解，但其数值解法却随着现代计算技术的发展得到了广泛的运用，如本章介绍的二分法，就是一种常见的利用计算技术的数值解法。除了二分法，牛顿法、拟牛顿法、弦截法等也都是典型的数值解法。关于这些方法，感兴趣的同学还可以查阅相关资料作进一步的了解。

4.5.3 函数模型的应用

我们知道,函数是描述客观世界变化规律的数学模型,不同的变化规律需要用不同的函数模型来刻画.面临一个实际问题,该如何选择恰当的函数模型来刻画它呢?

例3 人口问题是当今世界各国普遍关注的问题.认识人口数量的变化规律,可以为制定一系列相关政策提供依据.早在1798年,英国经济学家马尔萨斯(T. R. Malthus, 1766—1834)就提出了自然状态下的人口增长模型

$$y = y_0 e^{rt},$$

其中 t 表示经过的时间, y_0 表示 $t=0$ 时的人口数, r 表示人口的增长率.

(1) 根据国家统计局网站公布的数据,我国1950年末、1959年末的人口总数分别为55 196万和67 207万.根据这些数据,用马尔萨斯人口增长模型建立我国在1950~1959年期间的具体人口增长模型.

(2) 利用(1)中的模型计算1951~1958年各年末的人口总数.查阅国家统计局网站公布的我国在1951~1958年间各年末的实际人口总数,检验所得模型与实际人口数据是否相符.

(3) 以(1)中的模型作预测,大约在什么时候我国人口总数达到13亿?

分析: 用马尔萨斯人口增长模型建立具体人口增长模型,就是要确定其中的初始量 y_0 和增长率 r .

解: (1) 由题意知 $y_0=55\,196$,设1950~1959年期间我国人口的年平均增长率为 r ,根据马尔萨斯人口增长模型,有

$$67\,207 = 55\,196 e^{9r},$$

由计算工具得

$$r \approx 0.021\,876.$$

因此我国在1950~1959年期间的人口增长模型为

$$y = 55\,196 e^{0.021\,876t}, t \in [0, 9].$$

(2) 分别取 $t=1, 2, \dots, 8$,由 $y=55\,196 e^{0.021\,876t}$ 可得我国在1951~1958年间的各年末人口总数;查阅国家统计局网站,得到我国1951~1958年各年末的实际人口总数,如表4.5-4所示.

尽管对马尔萨斯人口理论存在一些争议,但它对人口学和经济的发展都产生了一定的影响.上网了解,还有哪些人口模型,它们与我们所学的函数有怎样的关系?

表 4.5-4

年份	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
计算所得人口总数/万	56 417	57 665	58 940	60 243	61 576	62 938	64 330	65 753
实际人口总数/万	56 300	57 482	58 796	60 266	61 465	62 828	64 563	65 994

根据 1950~1959 年我国人口总数的实际数据画出散点图,并画出函数 $y = 55\,196e^{0.021\,876t}$ ($t \in [0, 9]$) 的图象 (图 4.5-6).

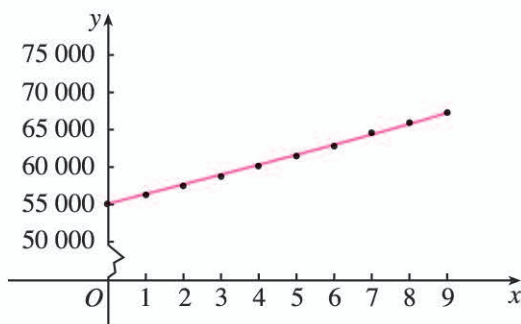


图 4.5-6

由表 4.5-4 和图 4.5-6 可以看出,所得模型与 1950~1959 年的实际人口数据基本吻合.

(3) 将 $y=130\,000$ 代入

$$y = 55\,196e^{0.021\,876t},$$

由计算工具得

$$t \approx 39.15.$$

所以,如果人口按照 (1) 中的模型增长,那么大约在 1950 年后的第 40 年 (即 1990 年),我国的人口就已达到 13 亿.

思考

事实上,我国 1990 年的人口数为 11.43 亿,直到 2005 年才突破 13 亿.对由函数模型所得的结果与实际情况不符,你有何看法?

因为人口基数较大,人口增长过快,与我国经济发展水平产生了较大矛盾,所以我国从 20 世纪 70 年代逐步实施了计划生育政策.因此这一阶段的人口增长条件并不符合马尔萨斯人口增长模型的条件,自然就出现了依模型得到的结果与实际不符的情况.

下面来解决章引言中的问题.

在用已知的函数模型刻画实际问题时,应注意模型的适用条件.

例 4 2010 年,考古学家对良渚古城水利系统中一条水坝的建筑材料 (草裹泥) 上提取的草茎遗存进行碳 14 年代学检测,检测出碳 14 的残留量约为初始量的 55.2%,能否以此推断此水坝大概是什么年代建成的?

分析: 因为死亡生物体内碳 14 的初始量按确定的衰减率衰减,属于指数衰减,所以应选择函数 $y = ka^x$ ($k \in \mathbf{R}$, 且 $k \neq 0$; $a > 0$, 且 $a \neq 1$) 建立数学模型.

解: 设样本中碳 14 的初始量为 k , 衰减率为 p ($0 < p < 1$), 经过 x 年后,残余量为 y . 根据问题的实际意义,可选择如下模型:

$$y=k(1-p)^x \quad (k \in \mathbf{R}, \text{ 且 } k \neq 0; 0 < p < 1; x \geq 0).$$

由碳 14 的半衰期为 5 730 年, 得

$$k(1-p)^{5\,730} = \frac{1}{2}k.$$

于是

$$1-p = \sqrt[5\,730]{\frac{1}{2}},$$

所以

$$y = k \left(\sqrt[5\,730]{\frac{1}{2}} \right)^x.$$

由样本中碳 14 的残余量约为初始量的 55.2% 可知,

$$k \left(\sqrt[5\,730]{\frac{1}{2}} \right)^x = 55.2\% k,$$

即

$$\left(\sqrt[5\,730]{\frac{1}{2}} \right)^x = 0.552.$$

解得

$$x = \log_{\sqrt[5\,730]{\frac{1}{2}}} 0.552.$$

由计算工具得

$$x \approx 4\,912.$$

因为 2010 年之前的 4 912 年是公元前 2903 年, 所以推断此水坝大概是公元前 2903 年建成的.

练习

- 已知 1650 年世界人口为 5 亿, 当时人口的年增长率为 0.3%; 1970 年世界人口为 36 亿, 当时人口的年增长率为 2.1%.
 - 用马尔萨斯人口模型计算, 什么时候世界人口是 1650 年的 2 倍? 什么时候世界人口是 1970 年的 2 倍?
 - 实际上, 1850 年以前世界人口就超过了 10 亿; 而 2004 年世界人口还没有达到 72 亿. 你对同样的模型得出的两个结果有何看法?
- 在一段时间内, 某地的野兔快速繁殖, 野兔总只数的倍增期为 21 个月, 那么 1 万只野兔增长到 1 亿只野兔大约需要多少年?
- 1959 年, 考古学家在河南洛阳偃师市区二里头村发掘出了一批古建筑群, 从其中的某样本中检测出碳 14 的残余量约为初始量的 62.76%, 能否以此推断二里头遗址大概是什么年代的?

在实际问题中, 有的能应用已知的函数模型解决, 有的需要根据问题的条件建立函数模型加以解决.

例 5 假设你有一笔资金用于投资, 现有三种投资方案供你选择, 这三种方案的回报如下:

- 方案一：每天回报 40 元；
- 方案二：第一天回报 10 元，以后每天比前一天多回报 10 元；
- 方案三：第一天回报 0.4 元，以后每天的回报比前一天翻一番。
- 请问，你会选择哪种投资方案？

分析：我们可以先建立三种投资方案所对应的函数模型，再通过比较它们的增长情况，为选择投资方案提供依据。

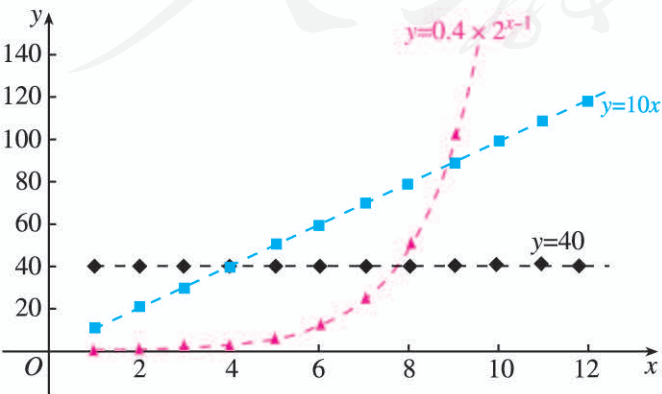
解：设第 x 天所得回报是 y 元，则方案一可以用函数 $y=40(x\in\mathbf{N}^*)$ 进行描述；方案二可以用函数 $y=10x(x\in\mathbf{N}^*)$ 进行描述；方案三可以用函数 $y=0.4\times 2^{x-1}(x\in\mathbf{N}^*)$ 进行描述. 三个模型中，第一个是常数函数，后两个都是增函数. 要对三个方案作出选择，就要对它们的增长情况进行分析.

我们先用信息技术计算一下三种方案所得回报的增长情况（表 4.5-5）.

表 4.5-5

x	方案一		方案二		方案三	
	y	增加量/元	y	增加量/元	y	增加量/元
1	40		10		0.4	
2	40	0	20	10	0.8	0.4
3	40	0	30	10	1.6	0.8
4	40	0	40	10	3.2	1.6
5	40	0	50	10	6.4	3.2
6	40	0	60	10	12.8	6.4
7	40	0	70	10	25.6	12.8
8	40	0	80	10	51.2	25.6
9	40	0	90	10	102.4	51.2
10	40	0	100	10	204.8	102.4
...	...	...	...	...	...	...
30	40	0	300	10	214 748 364.8	107 374 182.4

再画出三个函数的图象（图 4.5-7）.



函数图象是分析问题的好帮手. 为了便于观察，用虚线连接离散的点.

图 4.5-7

由表 4.5-5 和图 4.5-7 可知, 方案一的函数是常数函数, 方案二、方案三的函数都是增函数, 但方案三的函数与方案二的函数的增长情况很不相同. 可以看到, 尽管方案一、方案二在第 1 天所得回报分别是方案三的 100 倍和 25 倍, 但它们的生长量固定不变, 而方案三是“指数增长”, 其“生长量”是成倍增加的, 从第 7 天开始, 方案三比其他两个方案增长得快得多, 这种增长速度是方案一、方案二所无法企及的. 从每天所得回报看, 在第 1~3 天, 方案一最多; 在第 4 天, 方案一和方案二一样多, 方案三最少; 在第 5~8 天, 方案二最多; 第 9 天开始, 方案三比其他两个方案所得回报多得多, 到第 30 天, 所得回报已超过 2 亿元.

根据这里的分析, 是否应作这样的选择: 投资 5 天以下选方案一, 投资 5~8 天选方案二, 投资 8 天以上选方案三?

下面再看累计的回报数. 通过信息技术列表如下 (表 4.5-6).

表 4.5-6

方案	天数										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
一	40	80	120	160	200	240	280	320	360	400	440
二	10	30	60	100	150	210	280	360	450	550	660
三	0.4	1.2	2.8	6	12.4	25.2	50.8	102	204.4	409.2	818.8

因此, 投资 1~6 天, 应选择方案一; 投资 7 天, 应选择方案一或方案二; 投资 8~10 天, 应选择方案二; 投资 11 天 (含 11 天) 以上, 则应选择方案三.

上述例子只是一种假想情况, 但从中可以看到, 不同的函数增长模型, 增长变化存在很大差异.

例 6 某公司为了实现 1 000 万元利润的目标, 准备制定一个激励销售人员的奖励方案: 在销售利润达到 10 万元时, 按销售利润进行奖励, 且奖金 y (单位: 万元) 随销售利润 x (单位: 万元) 的增加而增加, 但奖金总数不超过 5 万元, 同时奖金不超过利润的 25%. 现有三个奖励模型: $y=0.25x$, $y=\log_7 x+1$, $y=1.002^x$, 其中哪个模型能符合公司的要求?

分析: 本例提供了三个不同增长方式的奖励模型, 按要求选择其中一个函数作为刻画奖金总数与销售利润的关系. 由于公司总的利润目标为 1 000 万元, 所以销售人员的销售利润一般不会超过公司总的利润. 于是, 只需在区间 $[10, 1\,000]$ 上, 寻找并验证所选函数是否满足两条要求: 第一, 奖金总数不超过 5 万元, 即最大值不大于 5; 第二, 奖金不超过利润的 25%, 即 $y \leq 0.25x$.

不妨先画出函数图象, 通过观察函数图象, 得到初步的结论, 再通过具体计算, 确认结果.

解：借助信息技术画出函数 $y=5$, $y=0.25x$, $y=\log_7 x+1$, $y=1.002^x$ 的图象 (图 4.5-8). 观察图象发现, 在区间 $[10, 1\ 000]$ 上, 模型 $y=0.25x$, $y=1.002^x$ 的图象都有一部分在直线 $y=5$ 的上方, 只有模型 $y=\log_7 x+1$ 的图象始终在 $y=5$ 的下方, 这说明只有按模型 $y=\log_7 x+1$ 进行奖励时才符合公司的要求.

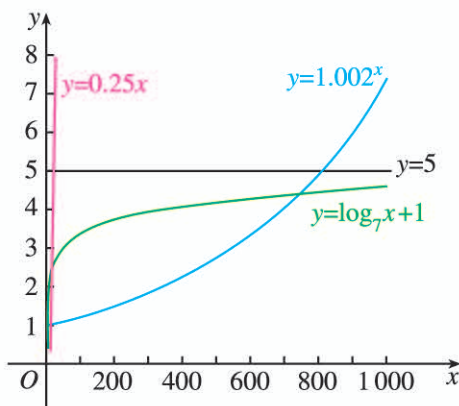


图 4.5-8

下面通过计算确认上述判断.

先计算哪个模型的奖金总数不超过 5 万元.

对于模型 $y=0.25x$, 它在区间 $[10, 1\ 000]$ 上单调递增, 而且当 $x=20$ 时, $y=5$, 因此, 当 $x>20$ 时, $y>5$, 所以该模型不符合要求;

对于模型 $y=1.002^x$, 由函数图象, 并利用信息技术, 可知在区间 $(805, 806)$ 内有一个点 x_0 满足 $1.002^{x_0}=5$, 由于它在区间 $[10, 1\ 000]$ 上单调递增, 因此当 $x>x_0$ 时, $y>5$, 所以该模型也不符合要求;

对于模型 $y=\log_7 x+1$, 它在区间 $[10, 1\ 000]$ 上单调递增, 而且当 $x=1\ 000$ 时, $y=\log_7 1\ 000+1\approx 4.55<5$, 所以它符合奖金总数不超过 5 万元的要求.

再计算按模型 $y=\log_7 x+1$ 奖励时, 奖金是否不超过利润的 25%, 即当 $x\in[10, 1\ 000]$ 时, 是否有 $y\leq 0.25x$, 即 $\log_7 x+1\leq 0.25x$ 成立.

令 $f(x)=\log_7 x+1-0.25x$, $x\in[10, 1\ 000]$, 利用信息技术画出它的图象 (图 4.5-9).

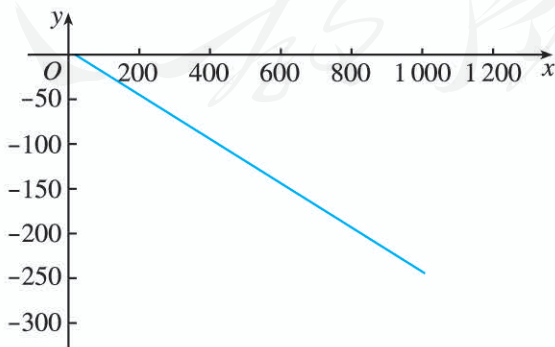


图 4.5-9

由图象可知函数 $f(x)$ 在区间 $[10, 1\ 000]$ 上单调递减, 因此

$$f(x)\leq f(10)\approx -0.316\ 7<0,$$