

即

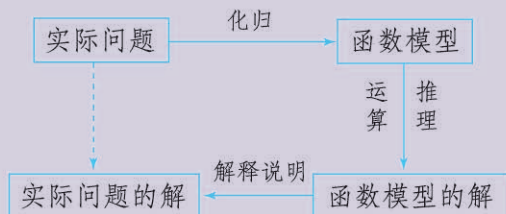
$$\log_7 x + 1 < 0.25x.$$

所以, 当  $x \in [10, 1\ 000]$  时,  $y \leq 0.25x$ , 说明按模型  $y = \log_7 x + 1$  奖励, 奖金不会超过利润的 25%.

综上所述, 模型  $y = \log_7 x + 1$  确实能符合公司要求.

## 归纳

用函数建立数学模型解决实际问题的基本过程如下:



这一过程包括分析和理解实际问题的增长情况 (是“对数增长”“直线上升”还是“指数爆炸”); 根据增长情况选择函数类型构建数学模型, 将实际问题化归为数学问题; 通过运算、推理求解函数模型; 用得到的函数模型描述实际问题的变化规律, 解决有关问题. 在这一过程中, 往往需要利用信息技术帮助画图、运算等.

## 练习

- 某地今年 1 月, 2 月, 3 月患某种传染病的人数分别为 52, 61, 68. 为了预测以后各月的患病人数, 甲选择了模型  $y = ax^2 + bx + c$ , 乙选择了模型  $y = pq^x + r$ , 其中  $y$  为患病人数,  $x$  为月份数,  $a, b, c, p, q, r$  都是常数. 结果 4 月, 5 月, 6 月份的患病人数分别为 74, 78, 83, 你认为谁选择的模型更符合实际?
- 由于提高了养殖技术并扩大了养殖规模, 某地的肉鸡产量在不断增加. 2008~2018 年的 11 年, 上市的肉鸡数量如下:

| 时间/年   | 2008  | 2009  | 2010  | 2011  | 2012  | 2013  | 2014  | 2015  | 2016  | 2017  | 2018  |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 肉鸡数量/吨 | 7 690 | 7 850 | 8 000 | 8 150 | 8 310 | 8 460 | 8 620 | 8 770 | 8 920 | 9 080 | 9 230 |

同期该地的人口数如下:

| 时间/年  | 2008  | 2009  | 2010  | 2011  | 2012  | 2013  | 2014  | 2015  | 2016  | 2017  | 2018  |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 人口数/万 | 100.0 | 101.2 | 102.4 | 103.6 | 104.9 | 106.1 | 107.4 | 108.7 | 110.0 | 111.3 | 112.7 |

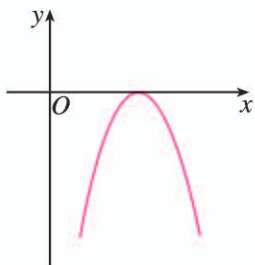
- 分别求出能近似地反映上述两组数据变化规律的函数;
- 如果 2017 年该地上市的肉鸡基本能满足本地的需求, 那么 2018 年是否能满足市场的需求?
- 按上述两表的变化趋势, 你对该地 2018 年后肉鸡市场的发展有何建议?

## 习题 4.5

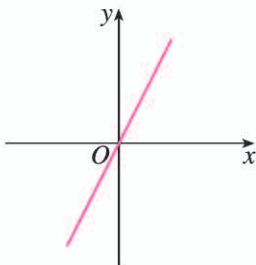


### 复习巩固

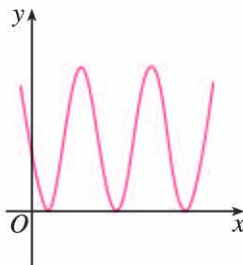
1. 下列函数图象与  $x$  轴均有交点, 其中不能用二分法求其零点的是\_\_\_\_\_. (填写上所有符合条件的图号)



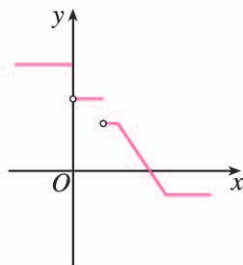
①



②



③



④

2. 已知函数  $y=f(x)$  的图象是一条连续不断的曲线, 且有如下对应值表:

| $x$ | 1       | 2      | 3     | 4     | 5       | 6        |
|-----|---------|--------|-------|-------|---------|----------|
| $y$ | 136.136 | 15.552 | -3.92 | 10.88 | -52.488 | -232.064 |

函数  $y=f(x)$  在哪几个区间内一定有零点? 为什么?

3. 已知函数  $f(x)=x^3-2x+1$ , 求证: 方程  $f(x)=x$  在  $(-1, 2)$  内至少有两个实数解.
4. 利用信息技术, 用二分法求函数  $f(x)=\ln x - \frac{2}{x}$  的零点(精确度为 0.1).
5. 利用信息技术, 用二分法求方程  $0.8^x - 1 = \ln x$  的近似解(精确度为 0.1).
6. 一种专门占据内存的计算机病毒, 开机时占据内存 2 KB, 然后每 3 分自身复制一次, 复制后所占内存是原来的 2 倍. 那么开机后多少分, 该病毒会占据 64 MB 内存 (1 MB=1 024 KB)?



### 综合运用

7. 设函数  $f(x)=ax^2+bx+c$  ( $a>0, b, c \in \mathbf{R}$ ), 且  $f(1)=-\frac{a}{2}$ , 求证: 函数  $f(x)$  在  $(0, 2)$  内至少有一个零点.

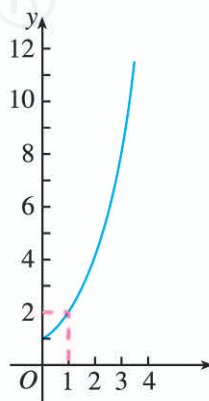
8. 已知函数  $f(x)=-x^2-3x-2, g(x)=2-[f(x)]^2$ ,

- (1) 求函数  $y=g(x)$  的解析式;
- (2) 利用信息技术, 画出函数  $y=g(x)$  的图象;
- (3) 求函数  $y=g(x)$  的零点(精确度为 0.1).

9. 如图, 某池塘里浮萍的面积  $y$  (单位:  $\text{m}^2$ ) 与时间  $t$  (单位: 月) 的关系为  $y=a^t$ . 关于下列说法:

- ① 浮萍每月的增长率为 1;
- ② 第 5 个月时, 浮萍面积就会超过  $30 \text{ m}^2$ ;
- ③ 浮萍每月增加的面积都相等;
- ④ 若浮萍蔓延到  $2 \text{ m}^2, 3 \text{ m}^2, 6 \text{ m}^2$  所经过的时间分别是  $t_1, t_2, t_3$ , 则  $t_1+t_2=t_3$ .

其中正确的说法是 ( ).



(第 9 题)

(A) ①② (B) ①②③ (C) ①②④ (D) ①②③④

10. 一种药在病人血液中的量保持在 1 500 mg 以上时才有疗效, 而低于 500 mg 时病人就有危险. 现给某病人的静脉注射了这种药 2 500 mg, 如果药在血液中以每小时 20% 的比例衰减, 那么应在什么时间范围再向病人的血液补充这种药 (精确到 0.1 h)?
11. 人类已进入大数据时代. 目前, 数据量已经从 TB (1 TB=1 024 GB) 级别跃升到 PB (1 PB=1 024 TB), EB (1 EB=1 024 PB) 乃至 ZB (1 ZB=1 024 EB) 级别. 曾经的研究结果表明, 2008 年全球产生的数据量为 0.49 ZB, 2009 年的数据量为 0.8 ZB, 2010 年增长到 1.2 ZB, 2011 年的数据量更是高达 1.82 ZB.
- (1) 为了较好地描述 2008 年起全球产生的数据量与时间  $x$  (单位: 年) 的关系, 根据上述数据信息, 从函数  $f(x)=kx+b$  和  $g(x)=ab^x$  中选择一个, 并求出解析式.
- (2) 根据 (1) 中所求函数模型, 估计 2018 年全球所产生的数据量, 并与所公布数据比较, 你有何看法?
12. 某地不同身高的未成年男性的体重平均值如下表:

| 身高/cm       | 60   | 70   | 80   | 90    | 100   | 110   | 120   | 130   | 140   | 150   | 160   | 170   |
|-------------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 平均<br>体重/kg | 6.13 | 7.90 | 9.99 | 12.15 | 15.02 | 17.50 | 20.92 | 26.86 | 31.11 | 38.85 | 47.25 | 55.05 |

- (1) 根据表中提供的数据建立恰当的函数模型, 使它能近似地反映这个地区未成年男性平均体重  $y$  (单位: kg) 与身高  $x$  (单位: cm) 的函数关系, 并写出这个函数的解析式.
- (2) 若体重超过相同身高男性体重平均值的 1.2 倍为偏胖, 低于 0.8 倍为偏瘦, 那么该地一名身高为 175 cm, 体重为 78 kg 的在校男生的体重是否正常?

## 拓广探索

13. 有一道题“若函数  $f(x)=24ax^2+4x-1$  在区间  $(-1, 1)$  内恰有一个零点, 求实数  $a$  的取值范围”, 某同学给出了如下解答:
- 由  $f(-1)f(1)=(24a-5)(24a+3)<0$ , 解得  $-\frac{1}{8}<a<\frac{5}{24}$ .
- 所以, 实数  $a$  的取值范围是  $(-\frac{1}{8}, \frac{5}{24})$ .
- 上述解答正确吗? 若不正确, 请说明理由, 并给出正确的解答.
14. 从甲地到乙地的距离约为 240 km, 经多次实验得到一辆汽车每小时耗油量  $Q$  (单位: L) 与速度  $v$  (单位: km/h) ( $0\leq v\leq 120$ ) 的下列数据:

| $v$ | 0     | 40    | 60    | 80     | 120    |
|-----|-------|-------|-------|--------|--------|
| $Q$ | 0.000 | 6.667 | 8.125 | 10.000 | 20.000 |

为了描述汽车每小时耗油量与速度的关系, 现有以下三种模型供选择:

$$Q=av^3+bv^2+cv, \quad Q=0.5^v+a, \quad Q=k\log_a v+b.$$

- (1) 选出你认为最符合实际的函数模型, 并写出相应的函数解析式;
- (2) 从甲地到乙地, 这辆车应以什么速度行驶才能使总耗油量最少?

## 对数概念的形成与发展

对数的发明、解析几何的创始和微积分的建立被恩格斯并称为 17 世纪数学的三大成就. 对数的发明及其计算是数学史上的重大事件, 天文学界更是以近乎狂喜的心情来迎接这一发明. 意大利科学家伽利略 (Galileo Galilei, 1564—1642) 说: “给我空间、时间及对数, 我就可以创造一个宇宙.” 法国数学家拉普拉斯 (P. \_ S. Laplace, 1749—1827) 也曾评价道: “因为省时省力, 对数倍增了天文学家的寿命.”

作为重要而简便的计算工具, 对数是如何产生和发展的? 在数学的发展、人类社会的发展历史中起了什么作用? 请你按以下要求, 查阅与对数有关的文献, 自己选题, 写一篇数学小论文.

### 一、主题

1. 对数概念形成和发展的过程.
2. 对数对简化运算的作用.

### 二、实施建议

1. 选题: 根据个人兴趣, 围绕主题, 初步确定选题范围.
2. 分组: 将相近选题的 5~6 人分为一个小组, 确定一名组长.
3. 分配任务: 根据个人的具体情况, 经小组共同商议, 由组长确定每人的具体任务.
4. 搜集资料: 针对具体的论文题目, 通过互联网、书店、图书馆等多种途径搜集素材, 包括文字、图片、数据以及音像资料, 并记录相关资料.
5. 素材整理: 用论文的形式展现小组的实践成果.
6. 交流讨论: 开展组内或全班的交流、讨论和总结.

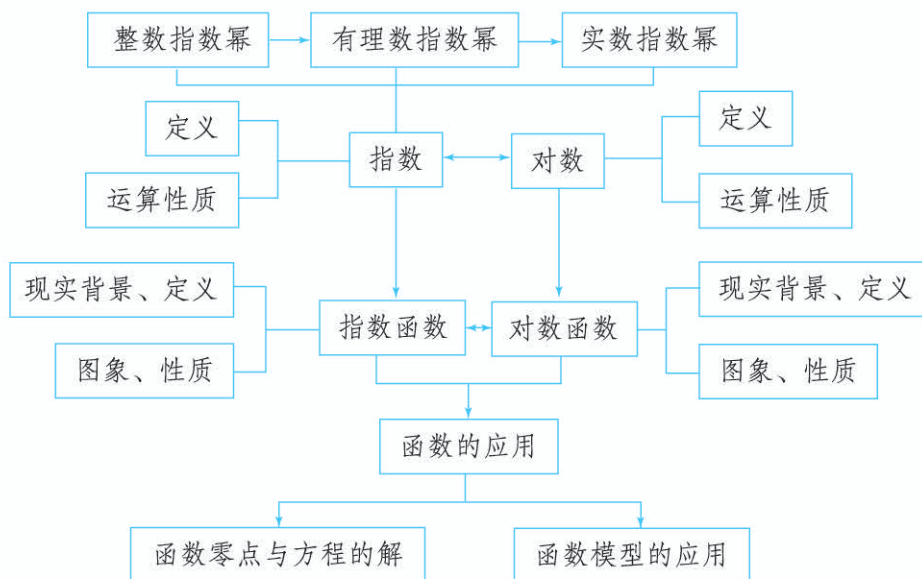
### 三、参考选题

1. 对数产生的背景.
2. 对数发明的过程.
3. 对数的具体应用.
4. 对数对简化运算的作用.
5. 对数对人类文明进步的贡献.

<sup>\*</sup> 标有 <sup>\*</sup> 的内容为选学内容, 不作为考试要求.

## 小结

### 一、本章知识结构



### 二、回顾与思考

本章我们先将指数概念由整数指数逐步拓展到了实数指数，并给出了实数指数幂的运算法则；通过对指数增长方式的实例分析，引入指数函数的概念，并研究了它的图象和性质。从对数与指数的相互联系出发，引入对数的概念，研究了对数的运算法则；在此基础上研究了对数函数的概念、图象和性质。指数函数和对数函数是两种不同类型但联系紧密的函数模型，是刻画客观世界中“指数爆炸”“对数增长”现象的重要数学模型。利用函数零点与方程解之间的关系，我们引入了函数零点存在定理，探索了用二分法求方程近似解的思路。二分法是求方程近似解的一般性方法。不同类型的函数具有不同的增长方式，通过比较，我们认识了对数函数、线性函数、指数函数增长速度的差异，并通过具体实例，学习了如何根据增长速度的差异，选择合适的函数类型构建数学模型、刻画现实问题变化规律的方法。

本章中，先从整数指数拓展到有理数指数，再利用有理数指数幂逼近无理数指数幂的思想认识无理数指数幂，从而将指数的概念拓展到实数指数；通过问题“在 $a^x=N$  ( $a>0$ ，且 $a\neq 1$ ) 中，已知 $a$ ， $N$ 求 $x$ ”引入，按照“定义—表示—性质—运算（法则）—应用”的路径研究对数。这里要注意体会数学概念推广的基本思想。整体而言，对指数函数、对数函数的研究，都是按照“实际问题—函数概念—图象与性质—应用”的路径展开。这里要特别注意在对现实

问题增长方式分析的基础上引入相应的函数概念,再通过对函数图象、性质的研究,把握相应函数的本质.这是建立函数模型解决实际问题的基础.

在应用函数解决实际问题时,首先应注意分析实际问题属于哪种类型的增长方式,这是选择和建立函数模型的基础;其次,要注意理解用函数构建数学模型的基本过程,体会运用模型思想发现和提出问题、分析和解决问题的数学方法.

请你带着下面的问题,复习一下全章内容吧!

1. 指数和对数的概念都有现实背景,你能举出一些实际例子吗?
2. 概述指数概念的拓展过程,你能由此说说数学概念拓展的过程与方法吗?
3. 对数概念是如何提出来的?它对发现和提出问题有什么启示?
4. 回忆指数函数、对数函数的研究过程,你能由此说说如何研究一类函数吗?例如研究的内容、过程和方法.
5. 不同函数模型刻画了现实世界不同类型问题的变化规律,你能说说指数函数和对数函数分别刻画了怎样的变化规律吗?你能举出“直线上升”“对数增长”“指数爆炸”的实际例子吗?
6. 你能举例说明函数的零点与方程解的关系吗?在什么条件下,函数在 $(a, b)$ 内一定有零点?
7. 你能说说用二分法求方程近似解的一般步骤吗?
8. 你能结合实例说明应用函数模型解决问题的基本过程吗?
9. 函数图象是研究函数性质的重要载体,信息技术是研究函数图象与性质的有力工具,你能结合实例谈谈这方面的体会吗?

## 复习参考题 4



### 复习巩固

#### 1. 选择题

- (1) 函数  $y = -2^{-x}$  与  $y = 2^x$  的图象 ( ).  
(A) 关于  $x$  轴对称 (B) 关于  $y$  轴对称  
(C) 关于原点对称 (D) 关于直线  $y = x$  对称
- (2) 如图 (1), ①②③④中不属于函数  $y = 2^x$ ,  $y = 6^x$ ,  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  的一个是 ( ).  
(A) ① (B) ② (C) ③ (D) ④

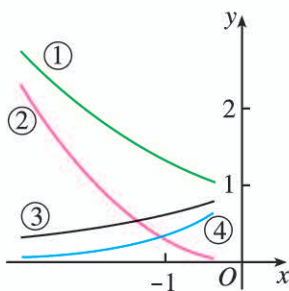
(3) 如图 (2), ①②③④中不属于函数  $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ ,  $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ ,  $y=\log_2x$  的一个是( ).

(A) ①

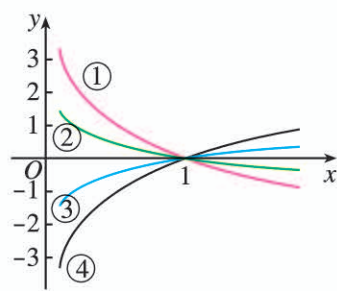
(B) ②

(C) ③

(D) ④



(1)



(2)

(第 1 题)

2. 用 “<” “>” “=” 填空:

(1)  $e^{0.8}$  \_\_\_\_  $0.8^e$ ;

(2)  $2^{a+1}$  \_\_\_\_  $3^a$  ( $a > 2$ );

(3)  $a^{0.2}$  \_\_\_\_  $a^{0.3}$  ( $0 < a < 1$ );

(4)  $\lg e$  \_\_\_\_  $\ln 0.8$ ;

(5)  $\log_2 3$  \_\_\_\_  $\log_3 2$ ;

(6)  $\log_a 0.2$  \_\_\_\_  $\log_a 0.3$  ( $a > 1$ ).

3. 借助信息技术, 用二分法求:

(1) 方程  $2x^3 - 4x^2 - 3x + 1 = 0$  的最大的根 (精确度为 0.01);

(2) 函数  $f(x) = \lg x$  和  $g(x) = \frac{1}{x}$  交点的横坐标 (精确度为 0.1).

4. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \leq 0, \\ -2 + \ln x, & x > 0, \end{cases}$  求使方程  $f(x) = k$  的实数解个数分别为 1, 2, 3 时  $k$  的相应取值范围.



## 综合运用

5. 选择题

(1) 已知集合  $A = \{y | y = \log_2 x, x > 1\}$ ,  $B = \{y | y = \frac{1}{2^x}, x > 1\}$ , 则  $A \cap B =$  ( ).

(A)  $\{y | 0 < y < \frac{1}{2}\}$

(B)  $\{y | 0 < y < 1\}$

(C)  $\{y | \frac{1}{2} < y < 1\}$

(D)  $\emptyset$

(2) 已知  $f(x) = |\lg x|$ , 若  $a = f(\frac{1}{4})$ ,  $b = f(\frac{1}{3})$ ,  $c = f(2)$ , 则 ( ).

(A)  $a < b < c$

(B)  $b < c < a$

(C)  $c < a < b$

(D)  $c < b < a$

(3) 已知函数  $f(x) = 2^x + x$ ,  $g(x) = \log_2 x + x$ ,  $h(x) = x^3 + x$  的零点分别为  $a, b, c$ , 则  $a, b, c$  的大小顺序为 ( ).

(A)  $a > b > c$

(B)  $b > c > a$

(C)  $c > a > b$

(D)  $b > a > c$

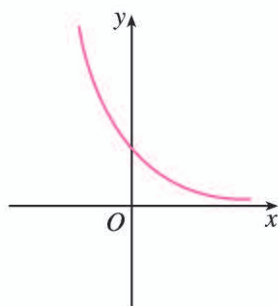
6. 设  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ,  $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ , 求证:

(1)  $[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$ ;

(2)  $f(2x) = 2f(x)g(x)$ ;

(3)  $g(2x) = [g(x)]^2 + [f(x)]^2$ .

7. 指数函数  $y = \left(\frac{b}{a}\right)^x$  的图象如图所示, 求二次函数  $y = ax^2 + bx$  图象顶点的横坐标的取值范围.



(第7题)

8. 1986年4月26日, 乌克兰境内的切尔诺贝利核电站爆炸, 核泄漏导致事故所在地被严重污染. 主要的核污染物是铯90, 它每年的衰减率为2.47%. 专家估计, 要完全消除这次核事故对自然环境的影响至少需要800年, 到那时原有的铯90还剩百分之几?
9. 某工厂产生的废气经过滤后排放, 过滤过程中废气的污染物含量  $P$  (单位: mg/L) 与时间  $t$  (单位: h) 间的关系为

$$P = P_0 e^{-kt},$$

其中  $P_0, k$  是正的常数. 如果在前5 h 消除了10%的污染物, 那么

- (1) 10 h 后还剩百分之几的污染物?
  - (2) 污染物减少50%需要花多少时间 (精确到1 h)?
  - (3) 画出  $P$  关于  $t$  变化的函数图象.
10. 把物体放在冷空气中冷却, 如果物体原来的温度是  $\theta_1$  °C, 空气的温度是  $\theta_0$  °C, 那么  $t$  min 后物体的温度  $\theta$  (单位: °C) 可由公式

$$\theta = \theta_0 + (\theta_1 - \theta_0)e^{-kt}$$

求得, 其中  $k$  是一个随着物体与空气的接触状况而定的正常数. 现有 62 °C 的物体, 放在 15 °C 的空气中冷却, 1 min 以后物体的温度是 52 °C.

- (1) 求  $k$  的值 (精确到0.01);
- (2) 若要将物体的温度降为 42 °C, 32 °C, 求分别需要冷却的时间 (精确到0.1 min).

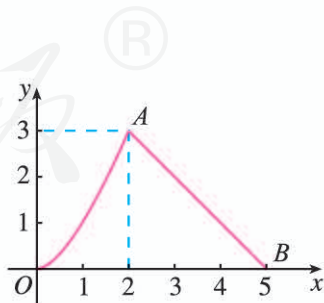
## 拓广探索

11. 已知函数  $f(x) = \log_a(x+1)$ ,  $g(x) = \log_a(1-x)$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ),
- (1) 求函数  $f(x) + g(x)$  的定义域;
  - (2) 判断函数  $f(x) + g(x)$  的奇偶性, 并说明理由.

12. 对于函数  $f(x) = a - \frac{2}{2^x + 1}$  ( $a \in \mathbf{R}$ ),

- (1) 探索函数  $f(x)$  的单调性;
- (2) 是否存在实数  $a$  使函数  $f(x)$  为奇函数?

13. 如图, 函数  $y = f(x)$  的图象由曲线段  $OA$  和直线段  $AB$  构成.



(第13题)

- (1) 写出函数  $y = f(x)$  的一个解析式;
- (2) 提出一个能满足函数  $y = f(x)$  图象变化规律的实际问题.

# 建立函数模型解决实际问题

我们知道，用函数构建数学模型解决实际问题时，首先要对实际问题中的变化过程进行分析，析出其中的常量、变量及其相互关系；明确其运动变化的基本特征，从而确定它的运动变化类型。然后根据分析结果，选择适当的函数类型构建数学模型，将实际问题化归为数学问题；再通过运算、推理，求解函数模型。最后利用函数模型的解说明实际问题的变化规律，达到解决问题的目的。在构建函数模型时，经常会遇到没有现成数据可用的情况，这时就需要先收集数据。

## 一、数学建模活动的一个实例

### 1. 观察实际情景，发现和提出问题

中国茶文化博大精深。茶水的口感与茶叶类型和水的温度有关。经验表明，某种绿茶用  $85\text{ }^{\circ}\text{C}$  的水泡制，再等到茶水温度降至  $60\text{ }^{\circ}\text{C}$  时饮用，可以产生最佳口感。那么在  $25\text{ }^{\circ}\text{C}$  室温下，刚泡好的茶水大约需要放置多长时间才能达到最佳饮用口感？

显然，如果能建立茶水温度随时间变化的函数模型，那么就能容易地解决这个问题。为此，需要收集一些茶水温度随时间变化的数据，再利用这些数据建立适当的函数模型。

### 2. 收集数据

我们可以利用秒表、温度计等工具（若用计算机、数据采集器、温度传感器等信息技术更好），收集茶水温度随时间变化的数据。

例如，某研究人员每隔  $1\text{ min}$  测量一次茶水温度，得到表 1 的一组数据。

表 1

| 时间/min                 | 0     | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     |
|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 水温/ $^{\circ}\text{C}$ | 85.00 | 79.19 | 74.75 | 71.19 | 68.19 | 65.10 |

### 3. 分析数据

茶水温度是时间的函数，但没有现成的函数模型。为此，可以先画出散点图，利用图象直观分析这组数据的变化规律，从而帮助我们选择函数类型。

设茶水温度从  $85\text{ }^{\circ}\text{C}$  开始，经过  $x\text{ min}$  后的温度为  $y\text{ }^{\circ}\text{C}$ 。根据表 1，画散点图（图 1）。

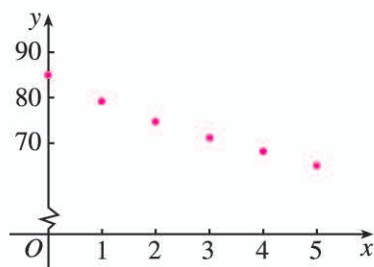


图 1

实际上, 你可以利用信息技术, 通过函数拟合的方法来帮助选择适当的函数模型.

观察散点图的分布状况, 并考虑到茶水温度降至室温就不能再降的事实, 可选择函数  $y = ka^x + 25 (k \in \mathbf{R}, 0 < a < 1, x \geq 0)$  来近似地刻画茶水温度随时间变化的规律.

#### 4. 建立模型

根据实际情况可知, 当  $x=0$  时,  $y=85$ , 可得  $k=60$ .

为了求出温度的衰减比例  $a$ , 可从第 2 min 的温度数据开始, 计算每分  $(y-25)$  的值与上一分  $(y-25)$  值的比值, 列出表 2.

表 2

| $x$    | 0     | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       |
|--------|-------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $y-25$ | 60.00 | 54.19   | 49.75   | 46.19   | 43.19   | 40.10   |
| 比值     |       | 0.903 2 | 0.918 1 | 0.928 4 | 0.935 1 | 0.928 5 |

能否直接将表 1 中的一组数据代入  $y = 60a^x + 25$  求  $a$ ? 这与用比值的平均值作为  $a$  建立函数模型有什么差异?

计算各比值的平均值, 得

$$a = \frac{1}{5} (0.903\ 2 + 0.918\ 1 + 0.928\ 4 + 0.935\ 1 + 0.928\ 5) \\ = 0.922\ 7.$$

我们把这个平均值作为衰减比例, 就得到一个函数模型

$$y = 60 \times 0.922\ 7^x + 25 (x \geq 0).$$

①

#### 5. 检验模型

将已知数据代入①式, 或画出函数①的图象 (图 2), 可以发现, 这个函数模型与实际数据基本吻合, 这说明它能较好地反映茶水温度随时间的变化规律.

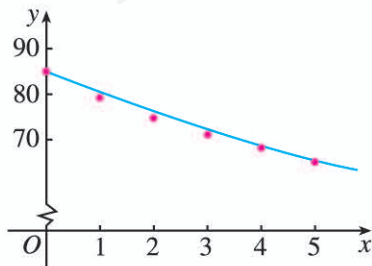


图 2

#### 6. 求解问题

将  $y=60$  代入  $y = 60 \times 0.922\ 7^x + 25$ , 得

$$60 \times 0.9227^x + 25 = 60.$$

解得

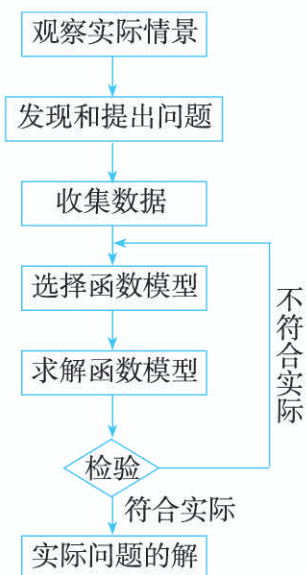
$$x = \log_{0.9227} \frac{7}{12}.$$

由信息技术得

$$x \approx 6.6997.$$

所以，泡制一杯最佳口感茶水所需时间大约是 7 min.

上述过程可以概括为：



## 二、数学建模活动的选题

请同学们仿照上述过程开展一次建立函数模型解决实际问题的活动. 可以继续研究不同室温下泡制一杯最佳口感茶水所需的时间, 也可以从下列选题中选择一个:

1. 应在炒菜之前多长时间将冰箱里的肉拿出来解冻?
2. 根据某一同学的身高和体重, 判断该同学是否超重.
3. 用微波炉或电磁炉烧一壶开水, 找到最省电的功率设定方法.
4. 估计阅读一本书所需要的时间.

也可以根据自己的兴趣, 与老师协商后确定一个课题进行研究.

## 三、数学建模活动的要求

### 1. 组建合作团队

数学建模活动需要团队协作. 首先, 在班级中组成 3~5 人的研究小组, 每位同学参加其中一个小组. 在小组内, 要确定一个课题负责人, 使每位成员都有明确的分工. 拟定研究课题、确定研究方案、规划研究步骤、编制研究手册, 然后在班里进行一次开题报告.

2. 开展研究活动

根据开题报告所规划的研究步骤，通过背景分析、数据收集、数据分析、数学建模、获得结论等过程，完成课题研究。在研究过程中，可以借助信息技术解决问题。

3. 撰写研究报告

以小组为单位，撰写一份研究报告。

4. 交流展示

(1) 对同一个课题，先由 3~4 个小组进行小组交流，每个小组都展示自己的研究成果，相互借鉴、取长补短。在小组研究报告的基础上形成大组的研究报告。选定代表，制作向全班汇报的演示文稿。

(2) 与老师一起进行全班研究成果展示与交流，在各组代表作研究报告的基础上，通过质疑、辩论、评价，总结成果，分享体会，分析不足。开展自我评价、同学评价和老师评价，完成本次数学建模活动。

四、 数学建模活动研究报告的参考形式

建立函数模型解决实际问题

\_\_\_\_\_年\_\_\_\_\_班

完成时间：

|                                                  |  |
|--------------------------------------------------|--|
| 1. 课题名称                                          |  |
| 2. 课题组成员及分工                                      |  |
| 3. 选题的意义                                         |  |
| 4. 研究计划（包括对选题的分析，解决问题的思路等）                       |  |
| 5. 研究过程（收集数据、分析数据、建立模型、求解模型的过程，以及过程中出现的难点及解决方案等） |  |

续表

|                        |
|------------------------|
| 6. 研究结果                |
| 7. 收获与体会               |
| 8. 对此研究的评价（由评价小组或老师填写） |

人教版®

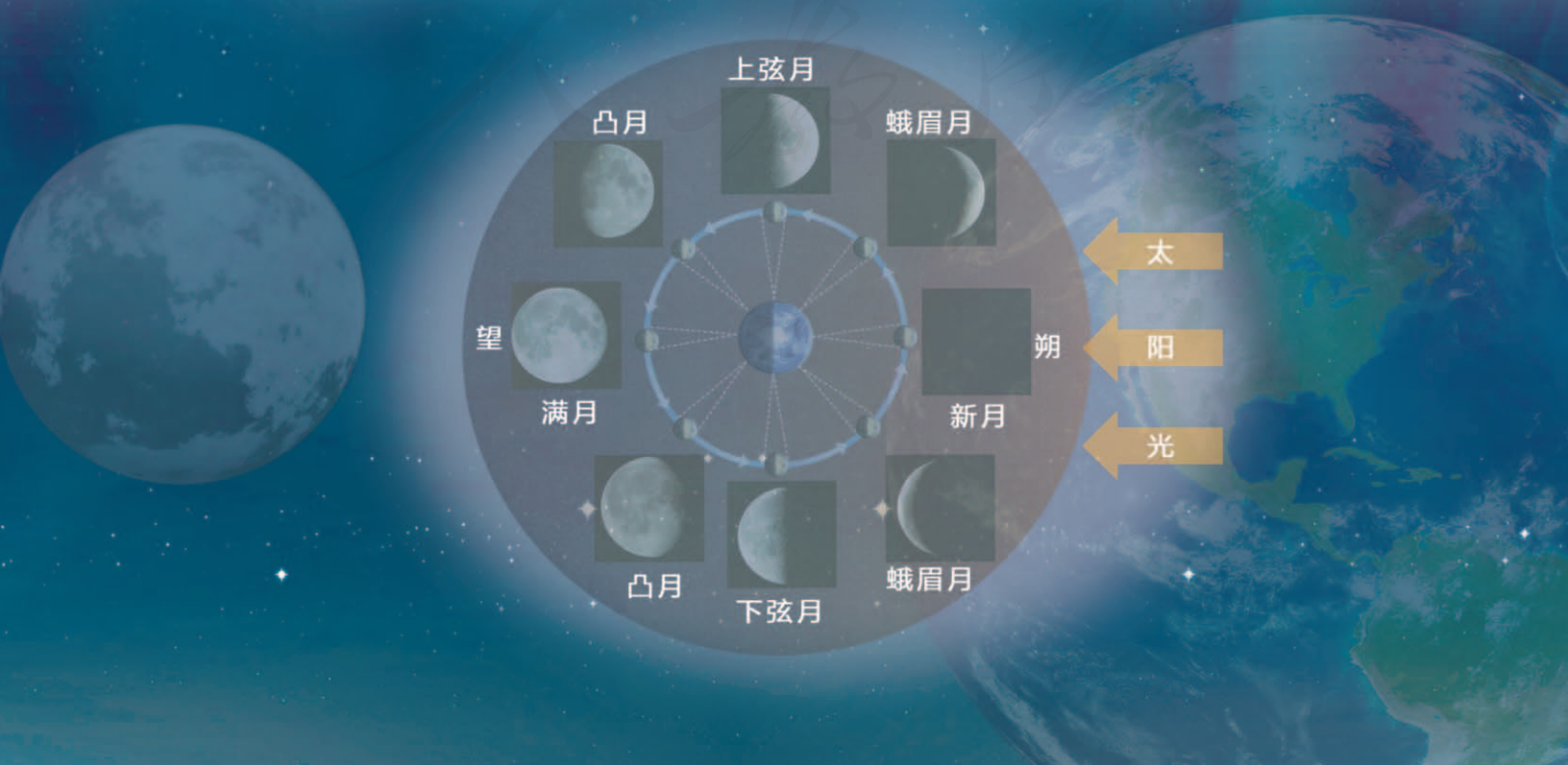
# 第五章

## 三角函数

现实世界中的许多运动、变化都有着循环往复、周而复始的规律，这种变化规律称为周期性。例如：地球自转引起的昼夜交替变化和公转引起的四季交替变化，月亮圆缺，潮汐变化，物体做匀速圆周运动时的位置变化，物体做简谐运动时的位移变化，交变电流变化等。这些现象都可以用三角函数刻画。

前面我们学习了函数的一般概念，并研究了指数函数、对数函数等，知道了函数的研究内容、过程和方法，以及如何用某类函数刻画相应现实问题的变化规律。本章我们将利用这些经验，学习刻画周期性变化规律的三角函数。

三角函数是怎样的函数？它具有哪些特性？如何利用三角函数模型刻画各种周期性变化现象？本章我们就来研究这些问题。



## 5.1 任意角和弧度制

圆周运动是一种常见的周期性变化现象. 如图 5.1-1,  $\odot O$  上的点  $P$  以  $A$  为起点做逆时针方向的旋转. 如何刻画点  $P$  的位置变化呢?

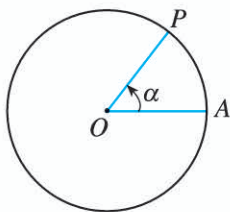


图 5.1-1

我们知道, 角可以看成一条射线绕着它的端点旋转所成的图形. 在图 5.1-1 中, 射线的端点是圆心  $O$ , 它从起始位置  $OA$  按逆时针方向旋转到终止位置  $OP$ , 形成一个角  $\alpha$ , 射线  $OA$ ,  $OP$  分别是角  $\alpha$  的始边和终边. 当角  $\alpha$  确定时, 终边  $OP$  的位置就确定了. 这时, 射线  $OP$  与  $\odot O$  的交点  $P$  也就确定了. 由此想到, 可以借助角  $\alpha$  的大小变化刻画点  $P$  的位置变化.

由初中知识可知, 射线  $OA$  绕端点  $O$  按逆时针方向旋转一周回到起始位置, 在这个过程中可以得到  $0^\circ \sim 360^\circ$  范围内的角. 如果继续旋转, 那么所得到的角就超出这个范围了. 所以, 为了借助角的大小变化刻画圆周运动, 需要先扩大角的范围.

### 5.1.1 任意角

现实生活中随处可见超出  $0^\circ \sim 360^\circ$  范围的角. 例如, 体操中有“前空翻转体  $540^\circ$ ”“后空翻转体  $720^\circ$ ”这样的动作名称, 这里不仅有超出  $0^\circ \sim 360^\circ$  范围的角, 而且旋转的方向也不相同; 又如, 图 5.1-2 是两个齿轮旋转的示意图, 被动轮随着主动轮的旋转而旋转, 而且被动轮与主动轮有相反的旋转方向. 这样,  $OA$  绕点  $O$  旋转所成的角与  $O'B$  绕点  $O'$  旋转所成的角就会有不同的方向. 因此, 要准确地描述这些现象, 不仅要知道旋转的度数, 还要知道旋转的方向, 这就需要对角的概念进行推广.

我们规定, 一条射线绕其端点按逆时针方向旋转形成的角叫做**正角**, 按顺时针方向旋转形成的角叫做**负角**.

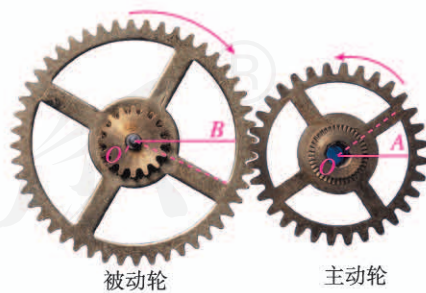


图 5.1-2

为了简单起见, 在不引起混淆的前提下, “角  $\alpha$ ” 或 “ $\angle \alpha$ ” 可以简记成 “ $\alpha$ ”.

如果一条射线没有做任何旋转,就称它形成了一个**零角**.这样,零角的始边与终边重合.如果 $\alpha$ 是零角,那么 $\alpha=0^\circ$ .图5.1-3(1)中的角是一个正角,它等于 $750^\circ$ ;图5.1-3(2)中,正角 $\alpha=210^\circ$ ,负角 $\beta=-150^\circ$ , $\gamma=-660^\circ$ .正常情况下,如果以零时为起始位置,那么钟表的时针或分针在旋转时所形成的角总是负角.

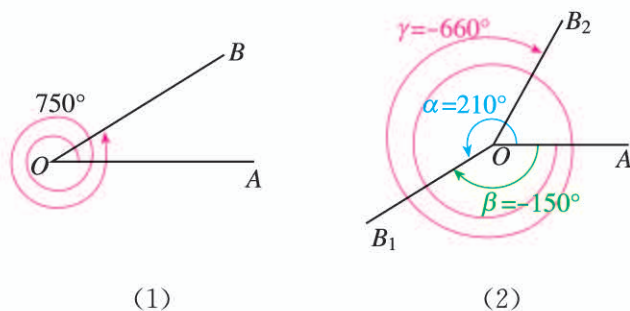


图 5.1-3

这样,我们就把角的概念推广到了**任意角**,包括正角、负角和零角.设角 $\alpha$ 由射线 $OA$ 绕端点 $O$ 旋转而成,角 $\beta$ 由射线 $O'A'$ 绕端点 $O'$ 旋转而成.如果它们的旋转方向相同且旋转量相等,那么就称 $\alpha=\beta$ .

设 $\alpha, \beta$ 是任意两个角.我们规定,把角 $\alpha$ 的终边旋转角 $\beta$ ,这时终边所对应的角是 $\alpha+\beta$ .

类似于实数 $a$ 的相反数是 $-a$ ,我们引入任意角 $\alpha$ 的相反角的概念.如图5.1-4,我们把射线 $OA$ 绕端点 $O$ 按不同方向旋转相同的量所成的两个角叫做互为相反角.角 $\alpha$ 的相反角记为 $-\alpha$ .于是,像实数减法的“减去一个数等于加上这个数的相反数”一样,我们有

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta).$$

这样,角的减法可以转化为角的加法.

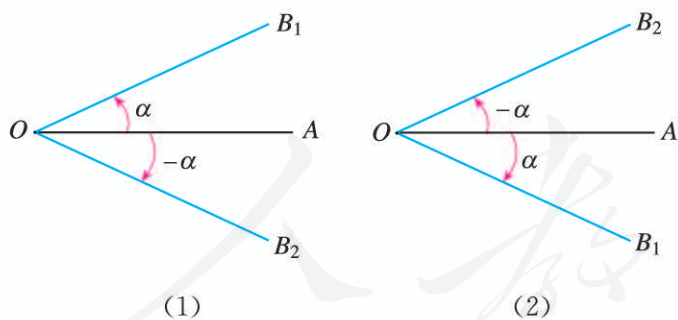


图 5.1-4

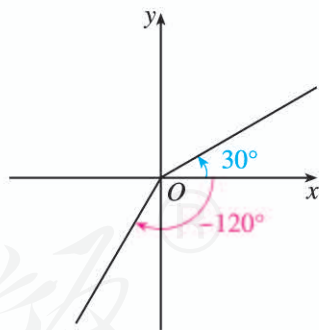


图 5.1-5

我们通常在直角坐标系内讨论角.为了方便,使角的顶点与原点重合,角的始边与 $x$ 轴的非负半轴重合.那么,角的终边在第几象限,就说这个角是第几象限角.例如,图5.1-5中的 $30^\circ$ 角、 $-120^\circ$ 角分别是第一象限角和第三象限角.如果角的终边在坐标轴上,那么就认为这个角不属于任何一个象限.



你能说说在直角坐标系内讨论角的好处吗?

## 探究

将角按照上述方法放在直角坐标系中后，给定一个角，就有唯一的一条终边与之对应. 反之，对于直角坐标系内任意一条射线  $OB$  (图 5.1-6)，以它为终边的角是否唯一？如果不唯一，那么终边相同的角有什么关系？

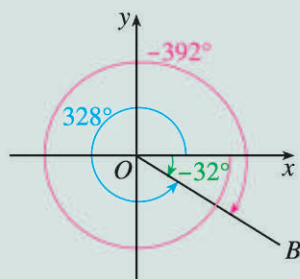


图 5.1-6

不难发现，在图 5.1-6 中，如果  $-32^\circ$  角的终边是  $OB$ ，那么  $328^\circ$ ， $-392^\circ$ ， $\dots$  角的终边都是  $OB$ ，并且与  $-32^\circ$  角终边相同的这些角都可以表示成  $-32^\circ$  的角与  $k$  个 ( $k \in \mathbf{Z}$ ) 周角的和，如

$$328^\circ = -32^\circ + 360^\circ \text{ (这里 } k = \underline{\quad} \text{)},$$

$$-392^\circ = -32^\circ - 360^\circ \text{ (这里 } k = \underline{\quad} \text{)}.$$

设  $S = \{\beta \mid \beta = -32^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ ，则  $328^\circ$ ， $-392^\circ$  角都是  $S$  的元素， $-32^\circ$  角也是  $S$  的元素 (此时  $k = \underline{\quad}$ )。因此，所有与  $-32^\circ$  角终边相同的角，连同  $-32^\circ$  角在内，都是集合  $S$  的元素；反过来，集合  $S$  的任一元素显然与  $-32^\circ$  角的终边相同。

一般地，我们有：

**所有与角  $\alpha$  终边相同的角，连同角  $\alpha$  在内，可构成一个集合**

$$S = \{\beta \mid \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\},$$

**即任一与角  $\alpha$  终边相同的角，都可以表示成角  $\alpha$  与整数个周角的和。**

在直角坐标系中，角的终边绕原点旋转  $360^\circ$  后回到原来的位置。因此，在直角坐标系中讨论角可以很好地表现角的“周而复始”的变化规律。

**例 1** 在  $0^\circ \sim 360^\circ$  范围内，找出与  $-950^\circ 12'$  角终边相同的角，并判定它是第几象限角。

**解：**  $-950^\circ 12' = 129^\circ 48' - 3 \times 360^\circ$ ，所以在  $0^\circ \sim 360^\circ$  范围内，与  $-950^\circ 12'$  角终边相同的角是  $129^\circ 48'$ ，它是第二象限角。

**例 2** 写出终边在  $y$  轴上的角的集合。

**解：** 在  $0^\circ \sim 360^\circ$  范围内，终边在  $y$  轴上的角有两个，即  $90^\circ$ ， $270^\circ$  角 (图 5.1-7)。因此，所有与  $90^\circ$  角终边相同的角构成集合

$$S_1 = \{\beta \mid \beta = 90^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\},$$

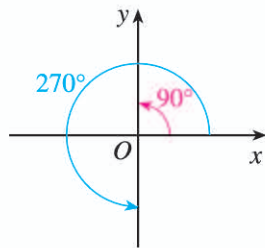


图 5.1-7

而所有与  $270^\circ$  角终边相同的角构成集合

$$S_2 = \{\beta \mid \beta = 270^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\},$$

于是, 终边在  $y$  轴上的角的集合

$$\begin{aligned} S &= S_1 \cup S_2 \\ &= \{\beta \mid \beta = 90^\circ + 2k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\} \cup \{\beta \mid \beta = 90^\circ + 180^\circ + 2k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\} \\ &= \{\beta \mid \beta = 90^\circ + 2k \cdot 180^\circ, k \in \mathbf{Z}\} \cup \{\beta \mid \beta = 90^\circ + (2k+1)180^\circ, k \in \mathbf{Z}\} \\ &= \{\beta \mid \beta = 90^\circ + n \cdot 180^\circ, n \in \mathbf{Z}\}. \end{aligned}$$

**例 3** 写出终边在直线  $y=x$  上的角的集合  $S$ .  $S$  中满足不等式  $-360^\circ \leq \beta < 720^\circ$  的元素  $\beta$  有哪些?

**解:** 如图 5.1-8, 在直角坐标系中画出直线  $y=x$ , 可以发现它与  $x$  轴的夹角是  $45^\circ$ , 在  $0^\circ \sim 360^\circ$  范围内, 终边在直线  $y=x$  上的角有两个:  $45^\circ$ ,  $225^\circ$ . 因此, 终边在直线  $y=x$  上的角的集合

$$\begin{aligned} S &= \{\beta \mid \beta = 45^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\} \cup \\ &\quad \{\beta \mid \beta = 225^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\} \\ &= \{\beta \mid \beta = 45^\circ + n \cdot 180^\circ, n \in \mathbf{Z}\}. \end{aligned}$$

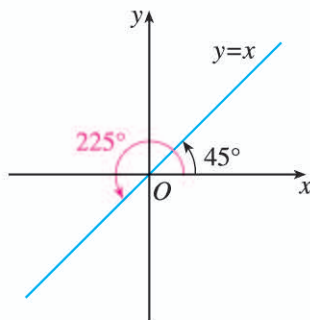


图 5.1-8

$S$  中适合不等式  $-360^\circ \leq \beta < 720^\circ$  的元素  $\beta$  有

$$\begin{aligned} 45^\circ - 2 \times 180^\circ &= -315^\circ, \\ 45^\circ - 1 \times 180^\circ &= -135^\circ, \\ 45^\circ + 0 \times 180^\circ &= 45^\circ, \\ 45^\circ + 1 \times 180^\circ &= 225^\circ, \\ 45^\circ + 2 \times 180^\circ &= 405^\circ, \\ 45^\circ + 3 \times 180^\circ &= 585^\circ. \end{aligned}$$

## 练习

- (口答) 锐角是第几象限角? 第一象限角一定是锐角吗? 再分别就直角、钝角来回答这两个问题.
- (口答) 今天是星期三, 那么  $7k$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) 天后的一天是星期几?  $7k$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) 天前的一天是星期几? 100 天后的一天是星期几?
- 已知角的顶点与直角坐标系的原点重合, 始边与  $x$  轴的非负半轴重合, 作出下列各角, 并指出它们是第几象限角:
  - $420^\circ$ ;
  - $-75^\circ$ ;
  - $855^\circ$ ;
  - $-510^\circ$ .
- 在  $0^\circ \sim 360^\circ$  范围内, 找出与下列各角终边相同的角, 并指出它们是第几象限角:
  - $-54^\circ 18'$ ;
  - $395^\circ 8'$ ;
  - $-1\ 190^\circ 30'$ .
- 写出与下列各角终边相同的角的集合, 并找出集合中适合不等式  $-720^\circ \leq \beta < 360^\circ$  的元素  $\beta$ :
  - $1\ 303^\circ 18'$ ;
  - $-225^\circ$ .

### 5.1.2 弧度制

度量长度可以用米、英尺、码等不同的单位制，度量质量可以用千克、磅等不同的单位制。不同的单位制能给解决问题带来方便。角的度量是否也能用不同的单位制呢？能否像度量长度那样，用十进制的实数来度量角的大小呢？

我们知道，角可以用度为单位进行度量，1度的角等于周角的 $\frac{1}{360}$ 。这种用度作为单位来度量角的单位制叫做**角度制**。

下面介绍在数学和其他科学研究中经常采用的另一种度量角的单位制——**弧度制**。

如图 5.1-9，射线  $OA$  绕端点  $O$  旋转到  $OB$  形成角  $\alpha$ 。在旋转过程中，射线  $OA$  上的一点  $P$ （不同于点  $O$ ）的轨迹是一条圆弧，这条圆弧对应于圆心角  $\alpha$ 。

设  $\alpha = n^\circ$ ， $OP = r$ ，点  $P$  所形成的圆弧  $\widehat{PP_1}$  的长为  $l$ 。由初中所学知识可知  $l = \frac{n\pi r}{180}$ ，于是

$$\frac{l}{r} = n \frac{\pi}{180}.$$

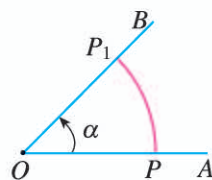


图 5.1-9

#### 探究

如图 5.1-10，在射线  $OA$  上任取一点  $Q$ （不同于点  $O$ ）， $OQ = r_1$ 。在旋转过程中，点  $Q$  所形成的圆弧  $\widehat{QQ_1}$  的长为  $l_1$ 。 $l_1$  与  $r_1$  的比值是多少？你能得出什么结论？

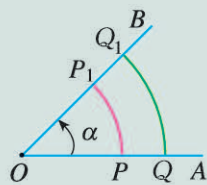


图 5.1-10

可以发现，圆心角  $\alpha$  所对的弧长与半径的比值，只与  $\alpha$  的大小有关。也就是说，这个比值随  $\alpha$  的确定而唯一确定。这就启发我们，可以利用圆的弧长与半径的关系度量圆心角。

我们规定：长度等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做 1 **弧度**（radian）的角，弧度单位用符号 rad 表示，读作弧度。

我们把半径为 1 的圆叫做单位圆。如图 5.1-11，在单位圆  $O$  中， $\widehat{AB}$  的长等于 1， $\angle AOB$  就是 1 弧度的角。

根据上述规定，在半径为  $r$  的圆中，弧长为  $l$  的弧所对的圆心角为  $\alpha$  rad，那么

$$|\alpha| = \frac{l}{r}.$$

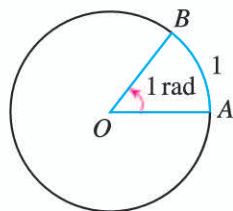


图 5.1-11

其中,  $\alpha$  的正负由角  $\alpha$  的终边的旋转方向决定, 即逆时针旋转为正, 顺时针旋转为负. 当角的终边旋转一周后继续旋转, 就可以得到弧度数大于  $2\pi$  或小于  $-2\pi$  的角. 这样就可以得到弧度为任意大小的角.

一般地, **正角的弧度数是一个正数, 负角的弧度数是一个负数, 零角的弧度数是 0.**

### 探究

角度制、弧度制都是角的度量制, 它们之间应该可以换算. 如何换算呢?

用角度制和弧度制来度量零角, 单位不同, 但量数相同 (都是 0); 用角度制和弧度制度量任一非零角, 单位不同, 量数也不同. 因为周角的弧度数是  $2\pi$ , 而在角度制下的度数是 360, 所以

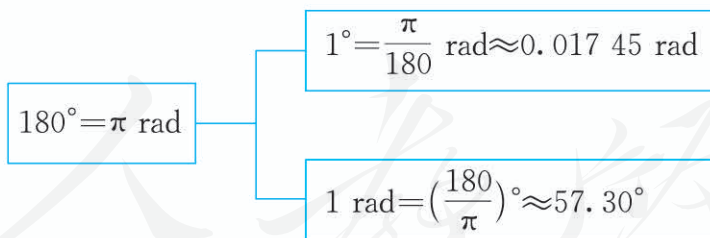
$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}, 180^\circ = \pi \text{ rad},$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.01745 \text{ rad}.$$

反过来有

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.30^\circ = 57^\circ 18'.$$

一般地, 只需根据



就可以进行弧度与角度的换算了.

**例 4** 按照下列要求, 把  $67^\circ 30'$  化成弧度:

- (1) 精确值; (2) 精确到 0.001 的近似值.

**解:** (1) 因为  $67^\circ 30' = \left(\frac{135}{2}\right)^\circ$ , 所以

$$67^\circ 30' = \frac{135}{2} \times \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{3}{8} \pi \text{ rad}.$$

公元 6 世纪, 印度人在制作正弦表时, 曾用同一单位度量半径和圆周, 孕育着最早的弧度制概念. 欧拉是明确提出弧度制思想的数学家. 1748 年, 在他的一部划时代著作《无穷小分析概论》中, 提出把圆的半径作为弧长的度量单位, 使一个圆周角等于  $2\pi$  弧度, 1 弧度等于周角的  $\frac{1}{2\pi}$ . 这一思想将线段与弧的度量统一起来, 大大简化了三角公式及计算.

(2) 利用计算器有



因此,  $67^\circ 30' \approx 1.178 \text{ rad}$ .

**例 5** 将  $3.14 \text{ rad}$  换算成角度 (用度数表示, 精确到  $0.001$ ).

**解:** 利用计算器有



因此,  $3.14 \text{ rad} \approx 179.909^\circ$ .

今后用弧度制表示角时, “弧度” 二字或 “rad” 通常略去不写, 而只写该角所对应的弧度数. 例如, 角  $\alpha = 2$  就表示  $\alpha$  是  $2 \text{ rad}$  的角;  $\sin \frac{\pi}{3}$  就表示  $\frac{\pi}{3} \text{ rad}$  的角的正弦, 即

$$\sin \frac{\pi}{3} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

填写下列特殊角的度数与弧度数的对应表:

|    |           |            |            |                 |                 |             |             |             |       |                  |             |
|----|-----------|------------|------------|-----------------|-----------------|-------------|-------------|-------------|-------|------------------|-------------|
| 度  | $0^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ |                 |                 | $120^\circ$ | $135^\circ$ | $150^\circ$ |       |                  | $360^\circ$ |
| 弧度 |           |            |            | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |             |             |             | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ |             |

角的概念推广后, 在弧度制下, 角的集合与实数集  $\mathbf{R}$  之间建立起一一对应的关系: 每一个角都有唯一的一个实数 (等于这个角的弧度数) 与它对应; 反过来, 每一个实数也都有唯一的一个角 (即弧度数等于这个实数的角) 与它对应 (图 5.1-12).

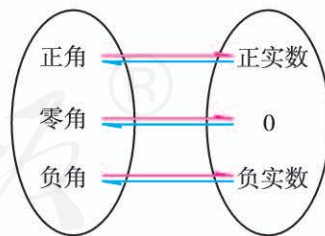


图 5.1-12

**例 6** 利用弧度制证明下列关于扇形的公式:

$$(1) l = \alpha R; \quad (2) S = \frac{1}{2} \alpha R^2; \quad (3) S = \frac{1}{2} l R.$$

其中  $R$  是圆的半径,  $\alpha (0 < \alpha < 2\pi)$  为圆心角,  $l$  是扇形的弧长,  $S$  是扇形的面积.

**证明:** 由公式  $|\alpha| = \frac{l}{r}$  可得

$$l = \alpha R.$$

下面证明 (2)(3).

半径为  $R$ ，圆心角为  $n^\circ$  的扇形的弧长公式和面积公式分别是

$$l = \frac{n\pi R}{180}, S = \frac{n\pi R^2}{360},$$

将  $n^\circ$  转换为弧度，得

$$\alpha = \frac{n\pi}{180},$$

于是，

$$S = \frac{1}{2}\alpha R^2.$$

将  $l = \alpha R$  代入上式，即得

$$S = \frac{1}{2}lR.$$

显然，弧度制下的弧长公式和扇形面积公式形式简单了. 在今后的学习中，我们还将进一步看到弧度制带来的便利.

### 练习

1. 把下列角度化成弧度：

(1)  $22^\circ 30'$ ;      (2)  $-210^\circ$ ;      (3)  $1\ 200^\circ$ .

2. 把下列弧度化成角度：

(1)  $\frac{\pi}{12}$ ;      (2)  $-\frac{4\pi}{3}$ ;      (3)  $\frac{3\pi}{10}$ .

3. 用弧度表示：

- (1) 终边在  $x$  轴上的角的集合；  
(2) 终边在  $y$  轴上的角的集合.

4. 利用计算工具比较下列各对值的大小：

(1)  $\cos 0.75^\circ$  和  $\cos 0.75$ ;      (2)  $\tan 1.2^\circ$  和  $\tan 1.2$ .

5. 分别用角度制、弧度制下的弧长公式，计算半径为 1 m 的圆中， $60^\circ$  的圆心角所对的弧的长度（可用计算工具）.

6. 已知半径为 120 mm 的圆上，有一条弧的长是 144 mm，求该弧所对的圆心角（正角）的弧度数.

### 习题 5.1



#### 复习巩固

1. 在  $0^\circ \sim 360^\circ$  范围内，找出与下列各角终边相同的角，并指出它们是哪个象限的角：

(1)  $-265^\circ$ ;      (2)  $-1\ 000^\circ$ ;      (3)  $-843^\circ 10'$ ;      (4)  $3\ 900^\circ$ .

2. 写出与下列各角终边相同的角的集合, 并找出集合中适合不等式  $-360^\circ \leq \beta < 360^\circ$  的元素  $\beta$ :

- (1)  $60^\circ$ ;                      (2)  $-75^\circ$ ;                      (3)  $-824^\circ 30'$ ;                      (4)  $475^\circ$ ;  
(5)  $90^\circ$ ;                      (6)  $270^\circ$ ;                      (7)  $180^\circ$ ;                      (8)  $0^\circ$ .

3. 分别用角度和弧度写出第一、二、三、四象限角的集合.

4. 一条弦的长等于半径, 这条弦所对的圆心角等于 1 弧度吗? 为什么?

5. 把下列角度化成弧度:

- (1)  $36^\circ$ ;                      (2)  $-150^\circ$ ;                      (3)  $1\ 095^\circ$ ;                      (4)  $1\ 440^\circ$ .

6. 把下列弧度化成角度 (第(3)(4)题精确到  $0.01^\circ$ ):

- (1)  $-\frac{7}{6}\pi$ ;                      (2)  $-\frac{10}{3}\pi$ ;                      (3) 1.4;                      (4)  $\frac{2}{3}$ .



## 综合运用

7. 选择题

(1) 已知  $\alpha$  是锐角, 那么  $2\alpha$  是 ( ).

- (A) 第一象限角                      (B) 第二象限角  
(C) 小于  $180^\circ$  的正角                      (D) 第一或第二象限角

(2) 已知  $\alpha$  是第一象限角, 那么  $\frac{\alpha}{2}$  是 ( ).

- (A) 第一象限角                      (B) 第二象限角  
(C) 第一或第二象限角                      (D) 第一或第三象限角

8. 要在半径  $OA=100$  cm 的圆形金属板上截取一块扇形板, 使其弧  $AB$  的长为 112 cm, 那么圆心角  $\angle AOB$  是多少度 (可用计算工具, 精确到  $1^\circ$ )?

9. 已知弧长 50 cm 的弧所对圆心角为  $200^\circ$ , 求这条弧所在的圆的半径 (可用计算工具, 精确到 1 cm).



## 拓展探索

10. 每人准备一把扇形的扇子, 然后与本小组其他同学的对比, 从中选出一把展开后看上去形状较为美观的扇子, 并用计算工具算出它的面积  $S_1$ .

(1) 假设这把扇子是从一个圆面中剪下的, 而剩余部分的面积为  $S_2$ , 求  $S_1$  与  $S_2$  的比值;

(2) 要使  $S_1$  与  $S_2$  的比值为 0.618, 则扇子的圆心角应为几度 (精确到  $1^\circ$ )?

11. (1) 时间经过 4 h (时), 时针、分针各转了多少度? 各等于多少弧度?

(2) 有人说, 钟的时针和分针一天内会重合 24 次. 你认为这种说法是否正确? 请说明理由.

(提示: 从午夜零时算起, 假设分针走了  $t$  min 会与时针重合, 一天内分针和时针会重合  $n$  次, 利用分针与时针转动的速度, 建立  $t$  关于  $n$  的函数解析式, 并求解.)

12. 已知相互啮合的两个齿轮, 大轮有 48 齿, 小轮有 20 齿.

(1) 当大轮转动一周时, 求小轮转动的角度;

(2) 如果大轮的转速为 180 r/min (转/分), 小轮的半径为 10.5 cm, 那么小轮周上一点每 1 s 转过的弧长是多少?

## 5.2 三角函数的概念

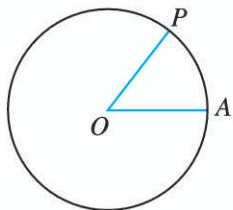


图 5.2-1

在弧度制下，我们已经将角的范围扩展到全体实数. 下面借助这些知识研究上一节开头提出的问题. 不失一般性，先研究单位圆上点的运动. 现在的任务是：

如图 5.2-1，单位圆  $\odot O$  上的点  $P$  以  $A$  为起点做逆时针方向旋转，建立一个数学模型，刻画点  $P$  的位置变化情况.

### 5.2.1 三角函数的概念

根据研究函数的经验，我们利用直角坐标系来研究上述问题.

如图 5.2-2，以单位圆的圆心  $O$  为原点，以射线  $OA$  为  $x$  轴的非负半轴，建立直角坐标系，点  $A$  的坐标为  $(1, 0)$ ，点  $P$  的坐标为  $(x, y)$ . 射线  $OA$  从  $x$  轴的非负半轴开始，绕点  $O$  按逆时针方向旋转角  $\alpha$ ，终止位置为  $OP$ .

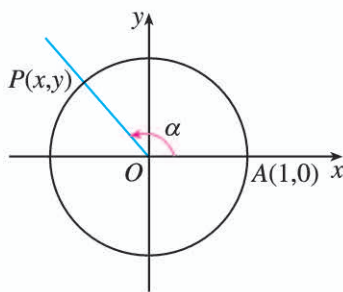


图 5.2-2

#### 探究

当  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  时，点  $P$  的坐标是什么？当  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  或  $\frac{2\pi}{3}$  时，点  $P$  的坐标又是什么？它们是唯一确定的吗？

一般地，任意给定一个角  $\alpha$ ，它的终边  $OP$  与单位圆交点  $P$  的坐标能唯一确定吗？

利用勾股定理可以发现，当  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  时，点  $P$  的坐标是  $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ ；当  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  或  $\frac{2\pi}{3}$  时，点  $P$  的坐标分别是  $(0, 1)$  和  $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ . 它们都是唯一确定的.

一般地，任意给定一个角  $\alpha \in \mathbf{R}$ ，它的终边  $OP$  与单位圆交点  $P$  的坐标，无论是横坐标  $x$  还是纵坐标  $y$ ，都是唯一确定的. 所以，点  $P$  的横坐标  $x$ 、纵坐标  $y$  都是角  $\alpha$  的函数. 下面给出这些函数的定义.

设  $\alpha$  是一个任意角， $\alpha \in \mathbf{R}$ ，它的终边  $OP$  与单位圆相交于点  $P(x, y)$ .

(1) 把点  $P$  的纵坐标  $y$  叫做  $\alpha$  的**正弦函数** (sine function), 记作  $\sin \alpha$ , 即

$$y = \sin \alpha;$$

(2) 把点  $P$  的横坐标  $x$  叫做  $\alpha$  的**余弦函数** (cosine function), 记作  $\cos \alpha$ , 即

$$x = \cos \alpha;$$

(3) 把点  $P$  的纵坐标与横坐标的比值  $\frac{y}{x}$  叫做  $\alpha$  的**正切**, 记作  $\tan \alpha$ , 即

$$\frac{y}{x} = \tan \alpha (x \neq 0).$$

可以看出, 当  $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$  时,  $\alpha$  的终边在  $y$  轴上, 这时点  $P$  的横坐标  $x$  等于 0, 所以  $\frac{y}{x} = \tan \alpha$  无意义. 除此之外, 对于确定的角  $\alpha$ ,  $\frac{y}{x}$  的值也是唯一确定的. 所以,  $\frac{y}{x} = \tan \alpha (x \neq 0)$  也是以角为自变量, 以单位圆上点的纵坐标与横坐标的比值为函数值的函数, 称为**正切函数** (tangent function).

我们将正弦函数、余弦函数和正切函数统称为**三角函数** (trigonometric function), 通常将它们记为:

正弦函数  $y = \sin x, x \in \mathbf{R};$

余弦函数  $y = \cos x, x \in \mathbf{R};$

正切函数  $y = \tan x, x \in \{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})\}.$

### 探究

在初中我们学了锐角三角函数, 知道它们都是以锐角为自变量, 以比值为函数值的函数. 设  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 把按锐角三角函数定义求得的锐角  $x$  的正弦记为  $z_1$ , 并把按本节三角函数定义求得的  $x$  的正弦记为  $y_1$ .  $z_1$  与  $y_1$  相等吗? 对于余弦、正切也有相同的结论吗?

**例 1** 求  $\frac{5\pi}{3}$  的正弦、余弦和正切值.

**解:** 在直角坐标系中, 作  $\angle AOB = \frac{5\pi}{3}$  (图 5.2-3). 易知  $\angle AOB$  的终边与单位圆的交点坐标为  $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ . 所以,

$$\sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

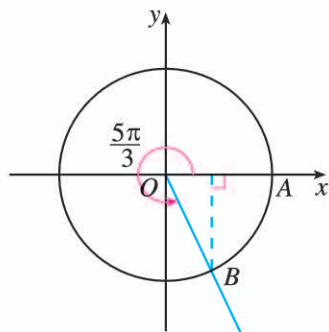


图 5.2-3

$$\cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\tan \frac{5\pi}{3} = -\sqrt{3}.$$

**例 2** 如图 5.2-4, 设  $\alpha$  是一个任意角, 它的终边上任意一点  $P$  (不与原点  $O$  重合) 的坐标为  $(x, y)$ , 点  $P$  与原点的距离为  $r$ . 求证:  $\sin \alpha = \frac{y}{r}$ ,  $\cos \alpha = \frac{x}{r}$ ,  $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ .

**分析:** 观察图 5.2-5, 由  $\triangle OMP \sim \triangle OM_0P_0$ , 根据三角函数的定义可以得到证明.

**证明:** 如图 5.2-5, 设角  $\alpha$  的终边与单位圆交于点  $P_0(x_0, y_0)$ . 分别过点  $P, P_0$  作  $x$  轴的垂线  $PM, P_0M_0$ , 垂足分别为  $M, M_0$ , 则

$$\begin{aligned} |P_0M_0| &= |y_0|, |PM| = |y|, \\ |OM_0| &= |x_0|, |OM| = |x|, \\ \triangle OMP &\sim \triangle OM_0P_0. \end{aligned}$$

于是

$$\frac{|P_0M_0|}{1} = \frac{|PM|}{r},$$

即

$$|y_0| = \frac{|y|}{r}.$$

因为  $y_0$  与  $y$  同号, 所以

$$y_0 = \frac{y}{r},$$

即

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}.$$

同理可得

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \tan \alpha = \frac{y}{x}.$$

根据勾股定理,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . 由例 2 可知, 只要知道角  $\alpha$  终边上任意一点  $P$  的坐标, 就可以求得角  $\alpha$  的各个三角函数值, 并且这些函数值不会随  $P$  点位置的改变而改变.

## 练习

1. 利用三角函数定义, 求  $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$  的三个三角函数值.

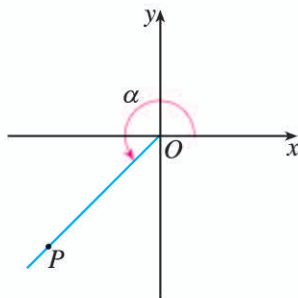


图 5.2-4

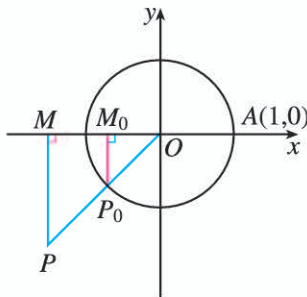


图 5.2-5

- 利用三角函数定义, 求  $\frac{7\pi}{6}$  的三个三角函数值.
- 已知角  $\theta$  的终边过点  $P(-12, 5)$ , 求角  $\theta$  的三角函数值.
- 已知点  $P$  在半径为 2 的圆上按顺时针方向做匀速圆周运动, 角速度为  $1 \text{ rad/s}$ . 求 2 s 时点  $P$  所在的位置.

学习了三角函数的定义, 接下来研究它们的一些性质.

### 探究

根据任意角的三角函数定义, 先将正弦、余弦、正切函数在弧度制下的定义域填入表 5.2-1, 再将这三种函数的值在各象限的符号填入图 5.2-6 中的括号.

表 5.2-1

| 三角函数          | 定义域 |
|---------------|-----|
| $\sin \alpha$ |     |
| $\cos \alpha$ |     |
| $\tan \alpha$ |     |

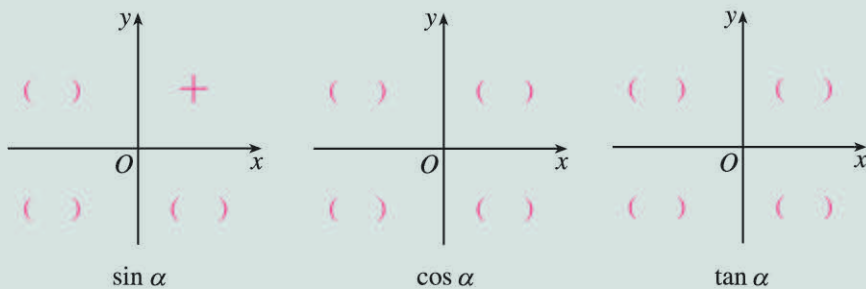


图 5.2-6

**例 3** 求证: 角  $\theta$  为第三象限角的充要条件是

$$\begin{cases} \sin \theta < 0, \\ \tan \theta > 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{①} \\ \text{②} \end{matrix}$$

**证明:** 先证充分性, 即如果①②式都成立, 那么  $\theta$  为第三象限角.

因为①式  $\sin \theta < 0$  成立, 所以  $\theta$  角的终边可能位于第三或第四象限, 也可能与  $y$  轴的负半轴重合;

又因为②式  $\tan \theta > 0$  成立, 所以  $\theta$  角的终边可能位于第一或第三象限.

因为①②式都成立, 所以  $\theta$  角的终边只能位于第三象限. 于是角  $\theta$  为第三象限角.

必要性请同学们自己证明.

由三角函数的定义, 可以知道: **终边相同的角的同一三角函数的值相等.**

由此得到一组公式:

#### 公式一

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + k \cdot 2\pi) &= \sin \alpha, \\ \cos(\alpha + k \cdot 2\pi) &= \cos \alpha, \\ \tan(\alpha + k \cdot 2\pi) &= \tan \alpha, \end{aligned}$$

其中  $k \in \mathbb{Z}$ .

由公式一可知, 三角函数值有“周而复始”的变化规律, 即角  $\alpha$  的终边每绕原点旋转一周, 函数值将重复出现.

利用公式一,可以把求任意角的三角函数值,转化为求  $0\sim 2\pi$  (或  $0^\circ\sim 360^\circ$ ) 角的三角函数值.

**例 4** 确定下列三角函数值的符号,然后用计算工具验证:

(1)  $\cos 250^\circ$ ; (2)  $\sin(-\frac{\pi}{4})$ ;

(3)  $\tan(-672^\circ)$ ; (4)  $\tan 3\pi$ .

**解:** (1) 因为  $250^\circ$  是第三象限角, 所以

$$\cos 250^\circ < 0;$$

(2) 因为  $-\frac{\pi}{4}$  是第四象限角, 所以

$$\sin(-\frac{\pi}{4}) < 0;$$

(3) 因为  $\tan(-672^\circ) = \tan(48^\circ - 2 \times 360^\circ) = \tan 48^\circ$ , 而  $48^\circ$  是第一象限角, 所以

$$\tan(-672^\circ) > 0;$$

(4) 因为

$$\tan 3\pi = \tan(\pi + 2\pi) = \tan \pi,$$

而  $\pi$  的终边在  $x$  轴上, 所以

$$\tan \pi = 0.$$

请同学们自己完成用计算工具验证.

**例 5** 求下列三角函数值:

(1)  $\sin 1\,480^\circ 10'$  (精确到 0.001);

(2)  $\cos \frac{9\pi}{4}$ ;

(3)  $\tan(-\frac{11\pi}{6})$ .

**解:** (1)  $\sin 1\,480^\circ 10' = \sin(40^\circ 10' + 4 \times 360^\circ)$   
 $= \sin 40^\circ 10' \approx 0.645$ ;

(2)  $\cos \frac{9\pi}{4} = \cos(\frac{\pi}{4} + 2\pi) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

(3)  $\tan(-\frac{11\pi}{6}) = \tan(\frac{\pi}{6} - 2\pi) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

可以直接利用计算工具求三角函数的值. 用计算工具求值时要注意设置角的适当的度量制.

## 练习

1. 填表:

| $\alpha$      | $2\pi$ | $\frac{13\pi}{6}$ | $-\pi$ | $-\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{15\pi}{4}$ |
|---------------|--------|-------------------|--------|-------------------|-------------------|
| $\sin \alpha$ |        |                   |        |                   |                   |
| $\cos \alpha$ |        |                   |        |                   |                   |
| $\tan \alpha$ |        |                   |        |                   |                   |

2. (口答) 设  $\alpha$  是三角形的一个内角, 在  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$ ,  $\tan \frac{\alpha}{2}$  中, 哪些有可能取负值?

3. 确定下列三角函数值的符号:

(1)  $\sin 156^\circ$ ;      (2)  $\cos \frac{16}{5}\pi$ ;      (3)  $\cos(-450^\circ)$ ;

(4)  $\tan(-\frac{17}{8}\pi)$ ;      (5)  $\sin(-\frac{4\pi}{3})$ ;      (6)  $\tan 556^\circ$ .

4. 对于 ① $\sin \theta > 0$ , ② $\sin \theta < 0$ , ③ $\cos \theta > 0$ , ④ $\cos \theta < 0$ , ⑤ $\tan \theta > 0$  与 ⑥ $\tan \theta < 0$ , 选择恰当的关系式序号填空:

(1) 角  $\theta$  为第一象限角的充要条件是\_\_\_\_\_;

(2) 角  $\theta$  为第二象限角的充要条件是\_\_\_\_\_;

(3) 角  $\theta$  为第三象限角的充要条件是\_\_\_\_\_;

(4) 角  $\theta$  为第四象限角的充要条件是\_\_\_\_\_.

5. 求下列三角函数值 (可用计算工具, 第 (1) 题精确到 0.000 1):

(1)  $\cos 1109^\circ$ ;      (2)  $\tan \frac{19\pi}{3}$ ;      (3)  $\sin(-1050^\circ)$ ;      (4)  $\tan(-\frac{31\pi}{4})$ .

## 5.2.2 同角三角函数的基本关系



### 探究

公式一表明终边相同的角的同一三角函数值相等, 那么, 终边相同的角的三个三角函数值之间是否也有某种关系呢?

因为三个三角函数值都是由角的终边与单位圆交点所唯一确定的, 所以终边相同的角的三个三角函数值一定有内在联系. 由公式一可知, 我们不妨讨论同一个角的三个三角函数值之间的关系.

如图 5.2-7, 设点  $P(x, y)$  是角  $\alpha$  的终边与单位圆的交点. 过  $P$  作  $x$  轴的垂线, 交  $x$  轴于  $M$ , 则  $\triangle OMP$  是直角三角形, 而且  $OP=1$ . 由勾股定理有

$$OM^2 + MP^2 = 1.$$

因此,  $x^2 + y^2 = 1$ , 即

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

显然, 当  $\alpha$  的终边与坐标轴重合时, 这个公式也成立.

根据三角函数的定义, 当  $\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$  时, 有

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha.$$

这就是说, 同一个角  $\alpha$  的正弦、余弦的平方和等于 1, 商等于角  $\alpha$  的正切.

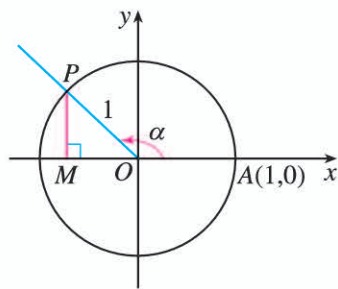


图 5.2-7

**例 6** 已知  $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ , 求  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$  的值.

**解:** 因为  $\sin \alpha < 0$ ,  $\sin \alpha \neq -1$ , 所以  $\alpha$  是第三或第四象限角.

由  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  得

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}.$$

如果  $\alpha$  是第三象限角, 那么  $\cos \alpha < 0$ . 于是

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5},$$

从而

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{3}{4}.$$

如果  $\alpha$  是第四象限角, 那么

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}, \tan \alpha = -\frac{3}{4}.$$

**例 7** 求证:  $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$ .

**证法 1:** 由  $\cos x \neq 0$ , 知  $\sin x \neq -1$ , 所以  $1 + \sin x \neq 0$ , 于是

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \frac{\cos x (1 + \sin x)}{(1 - \sin x) (1 + \sin x)} \\ &= \frac{\cos x (1 + \sin x)}{1 - \sin^2 x} \\ &= \frac{\cos x (1 + \sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \text{右边}. \end{aligned}$$

今后, 除特殊注明外, 我们假定三角恒等式是在使两边都有意义的情况下的恒等式.

所以, 原式成立.

**证法 2:** 因为

$$\begin{aligned}& (1-\sin x)(1+\sin x) \\&= 1-\sin^2 x = \cos^2 x \\&= \cos x \cos x,\end{aligned}$$

且  $1-\sin x \neq 0$ ,  $\cos x \neq 0$ , 所以

$$\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{\cos x}.$$

## 练习

1. 已知  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ , 且  $\alpha$  为第三象限角, 求  $\sin \alpha$ ,  $\tan \alpha$  的值.
2. 已知  $\tan \varphi = -\sqrt{3}$ , 求  $\sin \varphi$ ,  $\cos \varphi$  的值.
3. 已知  $\sin \theta = 0.35$ , 求  $\cos \theta$ ,  $\tan \theta$  的值 (精确到 0.01).
4. 化简:

$$(1) \cos \theta \tan \theta; \quad (2) \frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{1 - 2 \sin^2 \alpha}; \quad (3) (1 + \tan^2 \alpha) \cos^2 \alpha.$$

5. 求证:  $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ .

## 习题 5.2



### 复习巩固

1. 用定义法、公式一求下列角的三个三角函数值 (可用计算工具):
  - (1)  $-\frac{17\pi}{3}$ ;
  - (2)  $\frac{21\pi}{4}$ ;
  - (3)  $-\frac{23\pi}{6}$ ;
  - (4)  $1500^\circ$ .
2. 已知角  $\alpha$  的终边上有一点  $P$  的坐标是  $(3a, 4a)$ , 其中  $a \neq 0$ , 求  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$  的值.
3. 计算:
  - (1)  $6\sin(-90^\circ) + 3\sin 0^\circ - 8\sin 270^\circ + 12\cos 180^\circ$ ;
  - (2)  $10\cos 270^\circ + 4\sin 0^\circ + 9\tan 0^\circ + 15\cos 360^\circ$ ;
  - (3)  $2\cos \frac{\pi}{2} - \tan \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\tan^2 \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6} + \sin \frac{3\pi}{2}$ ;
  - (4)  $\sin^2 \frac{\pi}{3} + \cos^4 \frac{3\pi}{2} - \tan^2 \frac{\pi}{3}$ .
4. 化简:
  - (1)  $a \sin 0^\circ + b \cos 90^\circ + c \tan 180^\circ$ ;
  - (2)  $-p^2 \cos 180^\circ + q^2 \sin 90^\circ - 2pq \cos 0^\circ$ ;

$$(3) a^2 \cos 2\pi - b^2 \sin \frac{3\pi}{2} + ab \cos \pi - ab \sin \frac{\pi}{2};$$

$$(4) m \tan 0 + n \cos \frac{1}{2}\pi - p \sin \pi - q \cos \frac{3}{2}\pi - r \sin 2\pi.$$

5. 确定下列三角函数值的符号:

$$(1) \sin 186^\circ; \quad (2) \tan 505^\circ; \quad (3) \sin 7.6\pi;$$

$$(4) \tan\left(-\frac{23\pi}{4}\right); \quad (5) \cos 940^\circ; \quad (6) \cos\left(-\frac{59\pi}{17}\right).$$

6. (1) 已知  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 且  $\alpha$  为第四象限角, 求  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$  的值;

(2) 已知  $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ , 且  $\alpha$  为第二象限角, 求  $\sin \alpha$ ,  $\tan \alpha$  的值;

(3) 已知  $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ , 求  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  的值;

(4) 已知  $\cos \alpha = 0.68$ , 求  $\sin \alpha$ ,  $\tan \alpha$  的值 (精确到 0.01).



### 综合运用

7. 根据下列条件求函数  $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 4\cos 2x + 3\cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$  的值:

$$(1) x = \frac{\pi}{4};$$

$$(2) x = \frac{3\pi}{4}.$$

8. 确定下列式子的符号:

$$(1) \tan 125^\circ \sin 273^\circ;$$

$$(2) \frac{\tan 108^\circ}{\cos 305^\circ};$$

$$(3) \sin \frac{5\pi}{4} \cos \frac{4\pi}{5} \tan \frac{11\pi}{6};$$

$$(4) \frac{\cos \frac{5\pi}{6} \tan \frac{11\pi}{6}}{\sin \frac{2\pi}{3}}.$$

9. 求下列三角函数值 (可用计算工具, 第 (1)(3)(4) 题精确到 0.000 1):

$$(1) \sin\left(-\frac{67\pi}{12}\right);$$

$$(2) \tan\left(-\frac{15\pi}{4}\right);$$

$$(3) \cos 398^\circ 13';$$

$$(4) \tan 766^\circ 15'.$$

10. 求证:

(1) 角  $\theta$  为第二或第三象限角的充要条件是  $\sin \theta \tan \theta < 0$ ;

(2) 角  $\theta$  为第三或第四象限角的充要条件是  $\cos \theta \tan \theta < 0$ ;

(3) 角  $\theta$  为第一或第四象限角的充要条件是  $\frac{\sin \theta}{\tan \theta} > 0$ ;

(4) 角  $\theta$  为第一或第三象限角的充要条件是  $\sin \theta \cos \theta > 0$ .

11. 已知  $\sin x = -\frac{1}{3}$ , 求  $\cos x$ ,  $\tan x$  的值.

12. 已知  $\tan \alpha = \sqrt{3}$ ,  $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ , 求  $\cos \alpha - \sin \alpha$  的值.

13. 已知角  $\alpha$  的终边不在坐标轴上,

(1) 用  $\cos \alpha$  表示  $\sin \alpha$ ,  $\tan \alpha$ ;

(2) 用  $\sin \alpha$  表示  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$ .

14. 求证:

$$(1) \frac{1-2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1-\tan x}{1+\tan x};$$

$$(2) \tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \sin^2 \alpha;$$

$$(3) (\cos \beta - 1)^2 + \sin^2 \beta = 2 - 2\cos \beta;$$

$$(4) \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x.$$

15. 已知  $\tan \alpha = 2$ , 求  $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$  的值.

## 拓展探索

16. 化简  $\sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha}}$ , 其中  $\alpha$  为第二象限角.

17. 从本节的例 7 可以看出,  $\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{\cos x}$  就是  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  的一个变形. 你能利用同角三角函数的基本关系推导出更多的关系式吗?

18. (1) 分别计算  $\sin^4 \frac{\pi}{3} - \cos^4 \frac{\pi}{3}$  和  $\sin^2 \frac{\pi}{3} - \cos^2 \frac{\pi}{3}$  的值, 你有什么发现?

(2) 任取一个  $\alpha$  的值, 分别计算  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$ ,  $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$ , 你又有什么发现?

(3) 证明:  $\forall x \in \mathbf{R}, \sin^2 x - \cos^2 x = \sin^4 x - \cos^4 x$ .

## 阅读与思考

### 三角学与天文学

三角学的起源、发展与天文学密不可分, 它是天文观察结果推算的一种方法. 在 1450 年以前的三角学主要是球面三角, 这不但是因为航海、历法推算以及天文观测等人类实践活动的需要, 而且也因为宇宙的奥秘对人类的巨大吸引力, 这种“量天的学问”确实太诱人了. 后来, 由于间接测量、测绘工作的需要而出现了平面三角.

在欧洲, 最早将三角学从天文学中独立出来的数学家是德国人雷格蒙塔努斯(J. Regiomontanus, 1436—1476). 他在 1464 年完成的 5 卷本的著作《论各种三角形》, 是欧洲第一部独立于天文学的三角学著作, 这部著作首次对三角学做出了完整、独立的阐述. 前 2 卷论述平面三角学, 后 3 卷讨论球面三角学. 前 2 卷中, 他采用印度人的正弦, 即弧的半弦, 明确使用了正弦函数, 讨论了一般三角

形的正弦定理,提出了求三角形边长的代数解法;后3卷中,给出了球面三角的正弦定理和关于边的余弦定理.他的工作为三角学在平面与球面几何中的应用奠定了牢固基础,对16世纪的数学家产生了极大影响,也对哥白尼等一批天文学家产生了很大影响.

由于雷格蒙塔努斯仅仅采用正弦函数和余弦函数,而且函数值也限定在正数范围内,因而不能推出应有的三角公式,导致计算的困难.后来,哥白尼的学生雷提库斯(G. J. Rheticus, 1514—1576)将传统的弧与弦的关系改进为角的三角函数关系,把三角函数定义为直角三角形的边长之比,从而使平面三角学从球面三角学中独立出来.他还采用了六个函数(正弦、余弦、正切、余切、正割、余割),制定了更为精确的正弦、正切、正割表.这些工作都极大推进了三角学的发展.实际上,由于天文学研究的需要,制定更加精确的三角函数表一直是数学家奋斗的目标,这大大推动了三角学的发展.

法国数学家韦达(F. Viète, 1540—1603)所做的平面三角与球面三角系统化工作,使得三角学得到进一步发展.他总结了前人的三角学研究成果,将解平面直角三角形和斜三角形的公式汇集在一起,还补充了自己发现的新公式,如正切公式、和差化积公式等.他将解斜三角形的问题转化为解直角三角形的问题.对球面直角三角形,他给出了计算的方法和一套完整的公式及其记忆法则,并将这套公式表示成了代数形式,这是非常重要的工作.

16世纪,三角学从天文学中分离出来,成为数学的一个独立分支.后来,在微积分、物理学的研究和应用(如对振动、声音传播等的研究)中,三角学又找到了新的用武之地.

人教版®

## 5.3 诱导公式

前面利用圆的几何性质，得到了同角三角函数之间的基本关系. 我们知道，圆的最重要的性质是对称性，而对称性（如奇偶性）也是函数的重要性质. 由此想到，可以利用圆的对称性，研究三角函数的对称性.

### 探究1

如图 5.3-1，在直角坐标系内，设任意角  $\alpha$  的终边与单位圆交于点  $P_1$ .

(1) 作  $P_1$  关于原点的对称点  $P_2$ ，以  $OP_2$  为终边的角  $\beta$  与角  $\alpha$  有什么关系？角  $\beta$ ， $\alpha$  的三角函数值之间有什么关系？

(2) 如果作  $P_1$  关于  $x$  轴（或  $y$  轴）的对称点  $P_3$ （或  $P_4$ ），那么又可以得到什么结论？

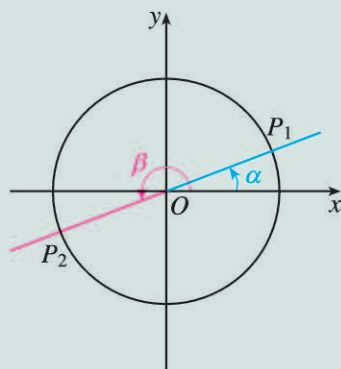


图 5.3-1

下面，借助单位圆的对称性进行探究.

如图 5.3-2，以  $OP_2$  为终边的角  $\beta$  都是与角  $\pi + \alpha$  终边相同的角，即  $\beta = 2k\pi + (\pi + \alpha)$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ). 因此，只要探究角  $\pi + \alpha$  与  $\alpha$  的三角函数值之间的关系即可.

设  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$ . 因为  $P_2$  是点  $P_1$  关于原点的对称点，所以

$$x_2 = -x_1, y_2 = -y_1.$$

根据三角函数的定义，得

$$\sin \alpha = y_1, \quad \cos \alpha = x_1, \quad \tan \alpha = \frac{y_1}{x_1};$$

$$\sin(\pi + \alpha) = y_2, \quad \cos(\pi + \alpha) = x_2, \quad \tan(\pi + \alpha) = \frac{y_2}{x_2}.$$

从而得

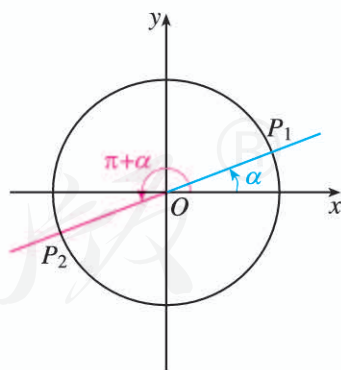


图 5.3-2

角  $\pi + \alpha$  还可以看作是角  $\alpha$  的终边按逆时针方向旋转角  $\pi$  得到的.

## 公式二

$$\begin{aligned}\sin(\pi+\alpha) &= -\sin \alpha, \\ \cos(\pi+\alpha) &= -\cos \alpha, \\ \tan(\pi+\alpha) &= \tan \alpha.\end{aligned}$$

如图 5.3-3, 作  $P_1$  关于  $x$  轴的对称点  $P_3$ , 则以  $OP_3$  为终边的角为  $-\alpha$ , 并且有

## 公式三

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin \alpha, \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha, \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha.\end{aligned}$$

如图 5.3-4, 作  $P_1$  关于  $y$  轴的对称点  $P_4$ , 则以  $OP_4$  为终边的角为  $\pi-\alpha$ , 并且有

## 公式四

$$\begin{aligned}\sin(\pi-\alpha) &= \sin \alpha, \\ \cos(\pi-\alpha) &= -\cos \alpha, \\ \tan(\pi-\alpha) &= -\tan \alpha.\end{aligned}$$

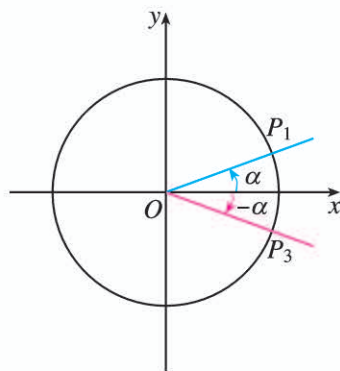


图 5.3-3

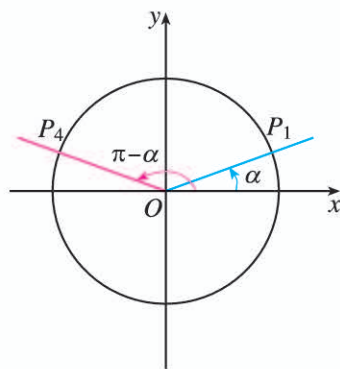


图 5.3-4

请你类比公式二, 证明公式三和公式四.

**例 1** 利用公式求下列三角函数值:

(1)  $\cos 225^\circ$ ; (2)  $\sin \frac{8\pi}{3}$ ;

(3)  $\sin(-\frac{16\pi}{3})$ ; (4)  $\tan(-2\,040^\circ)$ .

**解:** (1)  $\cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ)$

$$= -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

(2)  $\sin \frac{8\pi}{3} = \sin(2\pi + \frac{2\pi}{3})$

$$= \sin \frac{2\pi}{3} = \sin(\pi - \frac{\pi}{3})$$

$$= \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

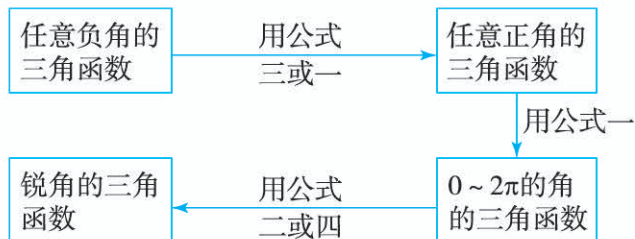
$$\begin{aligned}
 (3) \sin\left(-\frac{16\pi}{3}\right) &= -\sin \frac{16\pi}{3} \\
 &= -\sin\left(5\pi + \frac{\pi}{3}\right) \\
 &= -\left(-\sin \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \tan(-2\,040^\circ) &= -\tan 2\,040^\circ \\
 &= -\tan(6 \times 360^\circ - 120^\circ) \\
 &= \tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) \\
 &= -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

### 思考

由例 1, 你对公式一~公式四的作用有什么进一步的认识? 你能自己归纳一下把任意角的三角函数转化为锐角三角函数的步骤吗?

利用公式一~公式四, 可以把任意角的三角函数转化为锐角三角函数, 一般可按下面步骤进行:



数学史上, 求三角函数值曾经是一个重要而困难的问题. 数学家制作了锐角三角函数表, 并通过公式一~公式四, 按上述步骤解决了问题. 现在, 我们可以利用计算工具方便地求任意角的三角函数值, 所以这些公式的“求值”作用已经不重要了, 但它们所体现的三角函数的对称性, 在解决三角函数的各种问题中却依然有重要的作用.

### 例 2 化简

$$\frac{\cos(180^\circ + \alpha) \sin(\alpha + 360^\circ)}{\tan(-\alpha - 180^\circ) \cos(-180^\circ + \alpha)}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解: } \tan(-\alpha - 180^\circ) &= \tan[-(180^\circ + \alpha)] \\
 &= -\tan(180^\circ + \alpha) \\
 &= -\tan \alpha, \\
 \cos(-180^\circ + \alpha) &= \cos[-(180^\circ - \alpha)] \\
 &= \cos(180^\circ - \alpha) \\
 &= -\cos \alpha,
 \end{aligned}$$

所以

$$\text{原式} = \frac{-\cos \alpha \sin \alpha}{(-\tan \alpha)(-\cos \alpha)} = -\cos \alpha.$$

### 练习

1. 将下列三角函数转化为锐角三角函数, 并填在题中横线上:

- (1)  $\cos \frac{13}{9}\pi =$  \_\_\_\_\_;      (2)  $\sin(1+\pi) =$  \_\_\_\_\_;      (3)  $\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) =$  \_\_\_\_\_;
- (4)  $\tan(-70^\circ 6') =$  \_\_\_\_\_;      (5)  $\cos \frac{6\pi}{7} =$  \_\_\_\_\_;      (6)  $\tan 1\,000^\circ 21' =$  \_\_\_\_\_.

2. 利用公式求下列三角函数值:

- (1)  $\cos(-420^\circ)$ ;      (2)  $\sin\left(-\frac{7}{6}\pi\right)$ ;      (3)  $\tan(-1\,140^\circ)$ ;
- (4)  $\cos\left(-\frac{77}{6}\pi\right)$ ;      (5)  $\tan 315^\circ$ ;      (6)  $\sin\left(-\frac{11}{4}\pi\right)$ .

3. 化简:

- (1)  $\sin(-\alpha-180^\circ)\cos(-\alpha)\sin(-\alpha+180^\circ)$ ;
- (2)  $\cos^3(-\alpha)\sin(2\pi+\alpha)\tan^3(-\alpha-\pi)$ .

4. 填表:

| $\alpha$      | $-\frac{4\pi}{3}$ | $-\frac{5\pi}{4}$ | $-\frac{5\pi}{3}$ | $-\frac{7\pi}{4}$ | $-\frac{8\pi}{3}$ | $-\frac{11\pi}{4}$ |
|---------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|
| $\sin \alpha$ |                   |                   |                   |                   |                   |                    |
| $\cos \alpha$ |                   |                   |                   |                   |                   |                    |
| $\tan \alpha$ |                   |                   |                   |                   |                   |                    |

下面在探究 1 的基础上继续探究.

### 探究2

作  $P_1$  关于直线  $y=x$  的对称点  $P_5$ , 以  $OP_5$  为终边的角  $\gamma$  与角  $\alpha$  有什么关系? 角  $\gamma$  与角  $\alpha$  的三角函数值之间有什么关系?

如图 5.3-5, 以  $OP_5$  为终边的角  $\gamma$  都是与角  $\frac{\pi}{2}-\alpha$  终边相同的角, 即  $\gamma=2k\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). 因此, 只要探究角  $\frac{\pi}{2}-\alpha$  与  $\alpha$  的三角函数值之间的关系即可.

设  $P_5(x_5, y_5)$ ，由于  $P_5$  是点  $P_1$  关于直线  $y=x$  的对称点，可以证明

$$x_5 = y_1, y_5 = x_1.$$

根据三角函数的定义，得

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = y_5, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = x_5.$$

从而得

### 公式五

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha.$$

①

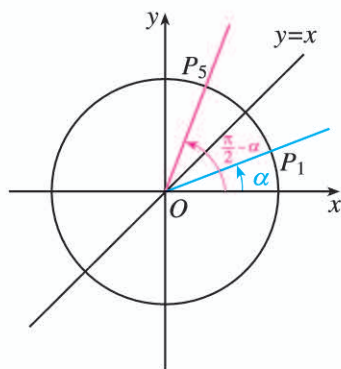


图 5.3-5

你能利用平面几何的知识，就图 5.3-5 所示的情况证明①式吗？其他情况呢？

### 探究3

作  $P_5$  关于  $y$  轴的对称点，又能得到什么结论？

类似地，可得

### 公式六

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha.$$

角  $\frac{\pi}{2} + \alpha$  的终边与角  $\alpha$  的终边具有怎样的对称性？据此你将如何证明公式六？

利用公式五或公式六，可以实现正弦函数与余弦函数的相互转化。  
公式一～公式六都叫做**诱导公式**。

**例 3** 证明：

$$(1) \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha;$$

$$(2) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha.$$

**证明：** (1)  $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left[\pi + \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right]$   
 $= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha;$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) &= \cos\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right] \\
 &= -\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \sin \alpha.
 \end{aligned}$$

**例 4** 化简

$$\frac{\sin(2\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{11\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\pi-\alpha)\sin(3\pi-\alpha)\sin(-\pi-\alpha)\sin\left(\frac{9\pi}{2}+\alpha\right)}.$$

**解：**原式

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(-\sin \alpha)(-\cos \alpha)(-\sin \alpha)\cos\left[5\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}{(-\cos \alpha)\sin(\pi-\alpha)[- \sin(\pi+\alpha)]\sin\left[4\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]} \\
 &= \frac{-\sin^2 \alpha \cos \alpha \left[-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}{(-\cos \alpha)\sin \alpha [-(-\sin \alpha)]\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} \\
 &= -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\tan \alpha.
 \end{aligned}$$

**例 5** 已知  $\sin(53^\circ-\alpha)=\frac{1}{5}$ ，且  $-270^\circ<\alpha<-90^\circ$ ，求  $\sin(37^\circ+\alpha)$  的值.

**分析：**联系条件与结论，注意到  $(53^\circ-\alpha)+(37^\circ+\alpha)=90^\circ$ ，由此可利用诱导公式解决问题.

**解：**因为  $(53^\circ-\alpha)+(37^\circ+\alpha)=90^\circ$ ，所以由诱导公式五，得

$$\begin{aligned}
 \sin(37^\circ+\alpha) &= \sin[90^\circ-(53^\circ-\alpha)] \\
 &= \cos(53^\circ-\alpha)
 \end{aligned}$$

因为

$$-270^\circ < \alpha < -90^\circ,$$

所以

$$143^\circ < 53^\circ - \alpha < 323^\circ.$$

由  $\sin(53^\circ-\alpha)=\frac{1}{5}>0$ ，得  $143^\circ < 53^\circ - \alpha < 180^\circ$ .

$$\text{所以} \quad \cos(53^\circ-\alpha) = -\sqrt{1-\sin^2(53^\circ-\alpha)} = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{6}}{5},$$

$$\text{所以} \quad \sin(37^\circ+\alpha) = -\frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

## 练习

1. 用诱导公式求下列三角函数值 (可用计算工具, 第(3)(4)(6)题精确到 0.000 1):

$$(1) \cos \frac{65}{6}\pi; \quad (2) \sin\left(-\frac{31}{4}\pi\right); \quad (3) \cos(-1\ 182^{\circ}13');$$

$$(4) \sin 670^{\circ}39'; \quad (5) \tan\left(-\frac{26\pi}{3}\right); \quad (6) \tan 580^{\circ}21'.$$

2. 证明:

$$(1) \cos\left(\frac{5}{2}\pi - \alpha\right) = \sin \alpha; \quad (2) \cos\left(\frac{7}{2}\pi + \alpha\right) = \sin \alpha;$$

$$(3) \sin\left(\frac{9}{2}\pi - \alpha\right) = \cos \alpha; \quad (4) \sin\left(\frac{11}{2}\pi - \alpha\right) = -\cos \alpha.$$

3. 化简:

$$(1) \frac{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right)} \sin(\alpha - 2\pi) \cos(2\pi - \alpha); \quad (2) \cos^2(-\alpha) - \frac{\tan(2\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)};$$

$$(3) \frac{\cos(\alpha - 3\pi) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

## 习题 5.3



### 复习巩固

1. 用诱导公式求下列三角函数值 (可用计算工具, 第(2)(3)(4)(5)题精确到 0.000 1):

$$(1) \cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right); \quad (2) \sin(-1\ 574^{\circ}); \quad (3) \sin(-2\ 160^{\circ}52');$$

$$(4) \cos(-1\ 751^{\circ}36'); \quad (5) \cos 1\ 615^{\circ}8'; \quad (6) \sin\left(-\frac{26}{3}\pi\right).$$

2. 求证:

$$(1) \sin(360^{\circ} - \alpha) = -\sin \alpha; \quad (2) \cos(360^{\circ} - \alpha) = \cos \alpha;$$

$$(3) \tan(360^{\circ} - \alpha) = -\tan \alpha.$$

3. 化简:

$$(1) 1 + \sin(\alpha - 2\pi) \sin(\pi + \alpha) - 2\cos^2(-\alpha);$$

$$(2) \sin(-1\ 071^{\circ}) \sin 99^{\circ} + \sin(-171^{\circ}) \sin(-261^{\circ}).$$

4. 在单位圆中, 已知角  $\alpha$  的终边与单位圆的交点为  $P\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ , 分别求角  $\pi + \alpha$ ,  $-\alpha$ ,  $\frac{\pi}{2} + \alpha$  的正弦、余弦函数值.



### 综合运用

5. 已知  $\sin\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{3}{5}$ , 那么  $\cos \alpha =$  ( ).

(A)  $-\frac{4}{5}$

(B)  $-\frac{3}{5}$

(C)  $\frac{3}{5}$

(D)  $\frac{4}{5}$

6. 已知  $\sin(\pi+\alpha)=-\frac{1}{2}$ , 计算:

(1)  $\sin(5\pi-\alpha)$ ;

(2)  $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ ;

(3)  $\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$ ;

(4)  $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ .

7. 在  $\triangle ABC$  中, 试判断下列关系是否成立, 并说明理由.

(1)  $\cos(A+B)=\cos C$ ;

(2)  $\sin(A+B)=\sin C$ ;

(3)  $\sin \frac{A+B}{2}=\sin \frac{C}{2}$ ;

(4)  $\cos \frac{A+B}{2}=\cos \frac{C}{2}$ .

8. 已知  $\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{1}{3}$ , 且  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , 求  $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$  和  $\cos\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)$  的值.



### 拓广探索

9. 化简下列各式, 其中  $n \in \mathbf{Z}$ :

(1)  $\sin\left(\frac{n\pi}{2}+\alpha\right)$ ;

(2)  $\cos\left(\frac{n\pi}{2}-\alpha\right)$ .

10. 借助单位圆, 还可以建立角的终边之间的哪些特殊位置关系? 由此还能得到三角函数值之间的哪些恒等关系?

人教版®

## 5.4 三角函数的图象与性质

前面给出了三角函数的定义，如何从定义出发研究这个函数呢？类比已有的研究方法，可以先画出函数图象，通过观察图象的特征，获得函数性质的一些结论。

我们知道，单位圆上任意一点在圆周上旋转一周就回到原来的位置，这一现象可以用公式

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x, \cos(x \pm 2\pi) = \cos x$$

来表示. 这说明，自变量每增加（减少） $2\pi$ ，正弦函数值、余弦函数值将重复出现. 利用这一特性，就可以简化正弦函数、余弦函数的图象与性质的研究过程.

### 5.4.1 正弦函数、余弦函数的图象

下面先研究函数  $y = \sin x$ ,  $x \in \mathbf{R}$  的图象，从画函数  $y = \sin x$ ,  $x \in [0, 2\pi]$  的图象开始.

#### 思考

在  $[0, 2\pi]$  上任取一个值  $x_0$ ，如何利用正弦函数的定义，确定正弦函数值  $\sin x_0$ ，并画出点  $T(x_0, \sin x_0)$ ？

如图 5.4-1，在直角坐标系中画出以原点  $O$  为圆心的单位圆， $\odot O$  与  $x$  轴正半轴的交点为  $A(1, 0)$ . 在单位圆上，将点  $A$  绕着点  $O$  旋转  $x_0$  弧度至点  $B$ ，根据正弦函数的定义，点  $B$  的纵坐标  $y_0 = \sin x_0$ . 由此，以  $x_0$  为横坐标， $y_0$  为纵坐标画点，即得到函数图象上的点  $T(x_0, \sin x_0)$ .

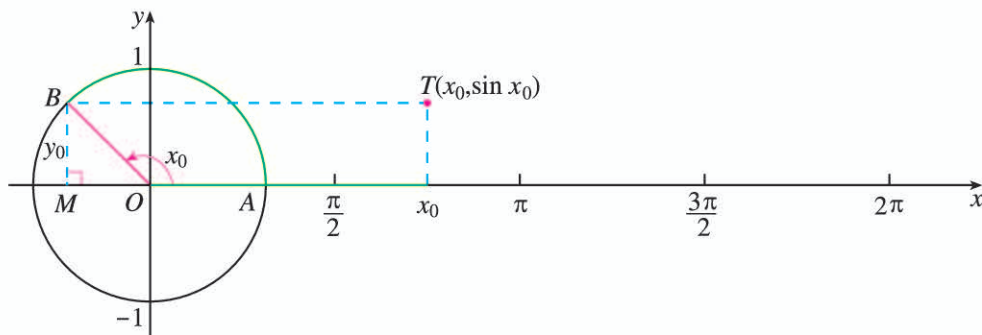


图 5.4-1

若把  $x$  轴上从  $0$  到  $2\pi$  这一段分成 12 等份, 使  $x_0$  的值分别为  $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \dots, 2\pi$ , 它们所对应的角的终边与单位圆的交点将圆周 12 等分, 再按上述画点  $T(x_0, \sin x_0)$  的方法, 就可画出自变量取这些值时对应的函数图象上的点 (图 5.4-2).

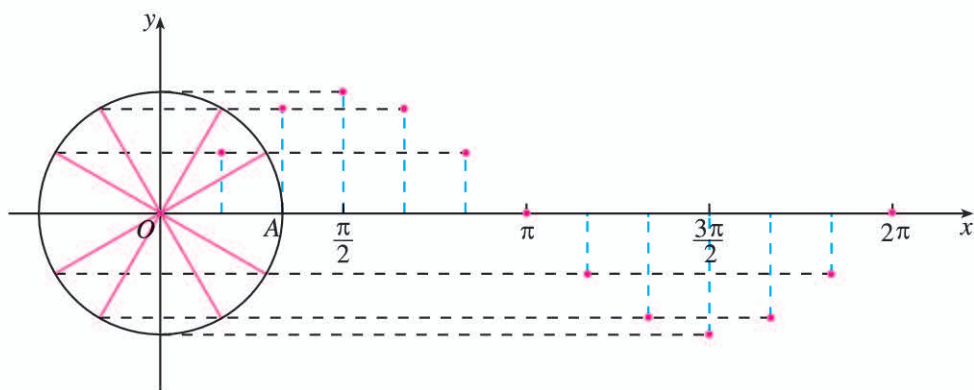


图 5.4-2

事实上, 利用信息技术, 可使  $x_0$  在区间  $[0, 2\pi]$  上取到足够多的值而画出足够多的点  $T(x_0, \sin x_0)$ , 将这些点用光滑的曲线连接起来, 可得到比较精确的函数  $y = \sin x, x \in [0, 2\pi]$  的图象 (图 5.4-3).

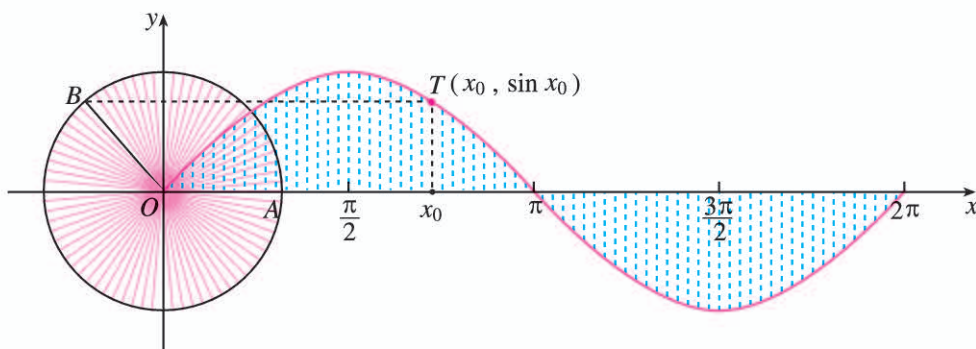


图 5.4-3

### 思考

根据函数  $y = \sin x, x \in [0, 2\pi]$  的图象, 你能想象函数  $y = \sin x, x \in \mathbf{R}$  的图象吗?

由诱导公式一可知, 函数  $y = \sin x, x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi], k \in \mathbf{Z}$  且  $k \neq 0$  的图象与  $y = \sin x, x \in [0, 2\pi]$  的图象形状完全一致. 因此将函数  $y = \sin x, x \in [0, 2\pi]$  的图象不断向左、向右平移 (每次移动  $2\pi$  个单位长度), 就可以得到正弦函数  $y = \sin x, x \in \mathbf{R}$  的图象 (图 5.4-4).

正弦函数的图象叫做**正弦曲线** (sine curve), 是一条“波浪起伏”的连续光滑曲线.

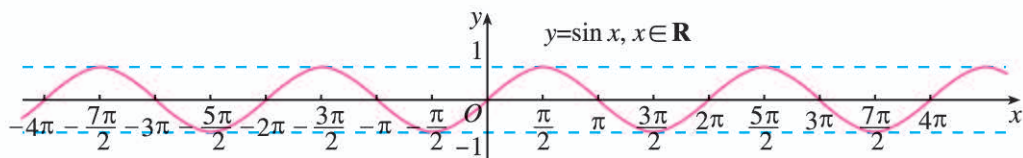


图 5.4-4

### 思考

在确定正弦函数的图象形状时，应抓住哪些关键点？

观察图 5.4-3，在函数  $y = \sin x$ ,  $x \in [0, 2\pi]$  的图象上，以下五个点：

$$(0, 0), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), (\pi, 0), \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right), (2\pi, 0)$$

在确定图象形状时起关键作用. 描出这五个点，函数  $y = \sin x$ ,  $x \in [0, 2\pi]$  的图象形状就基本确定了. 因此，在精确度要求不高时，常先找出这五个关键点，再用光滑的曲线将它们连接起来，得到正弦函数的简图. 这种近似的“五点（画图）法”是非常实用的.

由三角函数的定义可知，正弦函数、余弦函数是一对密切关联的函数. 下面我们利用这种关系，借助正弦函数的图象画出余弦函数的图象.

### 思考

你认为应该利用正弦函数和余弦函数的哪些关系，通过怎样的图形变换，才能将正弦函数的图象变换为余弦函数的图象？

对于函数  $y = \cos x$ ，由诱导公式  $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$  得，

$$y = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), x \in \mathbf{R}.$$

而函数

$$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), x \in \mathbf{R}$$

的图象可以通过正弦函数

$$y = \sin x, x \in \mathbf{R}$$

的图象向左平移  $\frac{\pi}{2}$  个单位长度而得到. 所以，将正弦函数的图象向左平移  $\frac{\pi}{2}$  个单位长度，就得到余弦函数的图象，如图 5.4-5 所示.

你能说明理由吗？

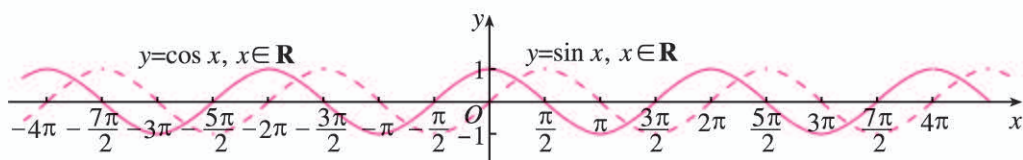


图 5.4-5

余弦函数  $y = \cos x$ ,  $x \in \mathbf{R}$  的图象叫做**余弦曲线** (cosine curve). 它是与正弦曲线具有相同形状的“波浪起伏”的连续光滑曲线.

### 探究

类似于用“五点法”画正弦函数图象, 找出余弦函数在区间  $[-\pi, \pi]$  上相应的五个关键点, 将它们的坐标填入表 5.4-1, 然后画出  $y = \cos x$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$  的简图.

表 5.4-1

|          |  |  |  |  |  |
|----------|--|--|--|--|--|
| $x$      |  |  |  |  |  |
| $\cos x$ |  |  |  |  |  |

**例 1** 画出下列函数的简图:

(1)  $y = 1 + \sin x$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ ;

(2)  $y = -\cos x$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ .

**解:** (1) 按五个关键点列表:

|              |   |                 |       |                  |        |
|--------------|---|-----------------|-------|------------------|--------|
| $x$          | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
| $\sin x$     | 0 | 1               | 0     | -1               | 0      |
| $1 + \sin x$ | 1 | 2               | 1     | 0                | 1      |

描点并将它们用光滑的曲线连接起来 (图 5.4-6):

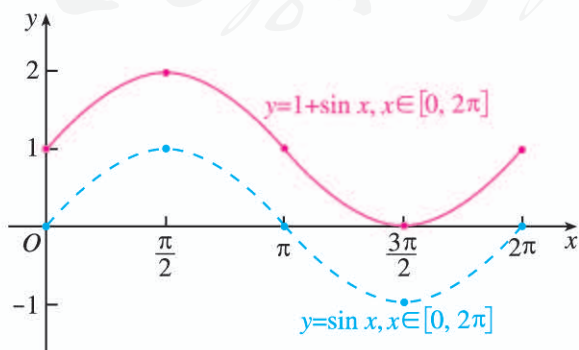


图 5.4-6

(2) 按五个关键点列表:

| $x$       | 0  | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|-----------|----|-----------------|-------|------------------|--------|
| $\cos x$  | 1  | 0               | -1    | 0                | 1      |
| $-\cos x$ | -1 | 0               | 1     | 0                | -1     |

描点并将它们用光滑的曲线连接起来 (图 5.4-7):

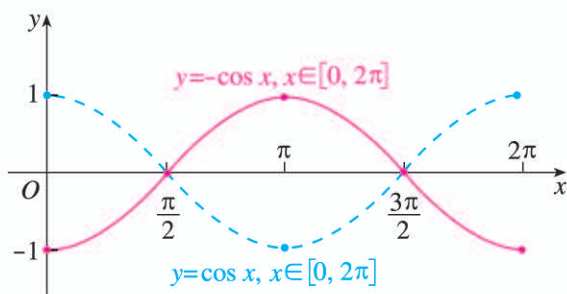


图 5.4-7

### 思考

你能利用函数  $y = \sin x, x \in [0, 2\pi]$  的图象, 通过图象变换得到  $y = 1 + \sin x, x \in [0, 2\pi]$  的图象吗? 同样地, 利用函数  $y = \cos x, x \in [0, 2\pi]$  的图象, 通过怎样的图象变换就能得到函数  $y = -\cos x, x \in [0, 2\pi]$  的图象?

### 练习

1. 在同一直角坐标系中, 画出函数

$$y = \sin x, x \in [0, 2\pi],$$

$$y = \cos x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

的图象. 通过观察两条曲线, 说出它们的异同.

2. 用五点法分别画下列函数在  $[-\pi, \pi]$  上的图象:

(1)  $y = -\sin x;$

(2)  $y = 2 - \cos x.$

3. 想一想函数  $y = |\sin x|$  与  $y = \sin x$  的图象及其关系, 并借助信息技术画出函数的图象进行检验.

4. (多项选择题) 函数  $y = 1 + \cos x, x \in \left(\frac{\pi}{3}, 2\pi\right)$  的图象与直线  $y = t (t \text{ 为常数})$  的交点可能有 ( ).

(A) 0 个 (B) 1 个 (C) 2 个 (D) 3 个 (E) 4 个

## 5.4.2 正弦函数、余弦函数的性质

### 探究

类比以往对函数性质的研究,你认为应研究正弦函数、余弦函数的哪些性质?观察它们的图象,你能发现它们具有哪些性质?

根据研究函数的经验,我们要研究正弦函数、余弦函数的单调性、奇偶性、最大(小)值等.另外,三角函数是刻画“周而复始”现象的数学模型,与此对应的性质是特别而重要的.

#### 1. 周期性

观察正弦函数的图象,可以发现,在图象上,横坐标每隔  $2\pi$  个单位长度,就会出现纵坐标相同的点,这就是正弦函数值具有的“周而复始”的变化规律.实际上,这一点既可从定义中看出,也能从诱导公式  $\sin(x+2k\pi)=\sin x (k\in\mathbf{Z})$  中得到反映,即自变量  $x$  的值增加  $2\pi$  整数倍时所对应的函数值,与  $x$  所对应的函数值相等.数学上,用周期性这个概念来定量地刻画这种“周而复始”的变化规律.

一般地,设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ ,如果存在一个非零常数  $T$ ,使得对每一个  $x\in D$  都有  $x+T\in D$ ,且

$$f(x+T)=f(x),$$

那么函数  $f(x)$  就叫做**周期函数** (periodic function). 非零常数  $T$  叫做这个函数的**周期** (period).

周期函数的周期不止一个.例如,  $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$  以及  $-2\pi, -4\pi, -6\pi, \dots$  都是正弦函数的周期.事实上,  $\forall k\in\mathbf{Z}$  且  $k\neq 0$ , 常数  $2k\pi$  都是它的周期.

如果在周期函数  $f(x)$  的所有周期中存在一个最小的正数,那么这个最小正数就叫做  $f(x)$  的**最小正周期**.

根据上述定义,我们有:

**正弦函数是周期函数,  $2k\pi (k\in\mathbf{Z}$  且  $k\neq 0)$  都是它的周期,最小正周期是  $2\pi$ .**

类似地, **余弦函数也是周期函数,  $2k\pi (k\in\mathbf{Z}$  且  $k\neq 0)$  都是它的周期,最小正周期是  $2\pi$ .**<sup>①</sup>

**例 2** 求下列函数的周期:

- (1)  $y=3\sin x, x\in\mathbf{R};$
- (2)  $y=\cos 2x, x\in\mathbf{R};$
- (3)  $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right), x\in\mathbf{R}.$

**①** 证明从略. 同学们可以从函数图象上观察出这一结论. 今后本书中所涉及的周期, 如果不加特别说明, 一般都是指函数的最小正周期.

**分析：**通常可以利用三角函数的周期性，通过代数变形，得出等式  $f(x+T)=f(x)$  而求出相应的周期。

对于 (2)，应从余弦函数的周期性出发，通过代数变形得出  $\cos 2(x+T)=\cos 2x$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ;

对于 (3)，应从正弦函数的周期性出发，通过代数变形得出  $\sin\left[\frac{1}{2}(x+T)-\frac{\pi}{6}\right]=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right)$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

**解：**(1)  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 有

$$3\sin(x+2\pi)=3\sin x.$$

由周期函数的定义可知，原函数的周期为  $2\pi$ .

(2) 令  $z=2x$ ，由  $x \in \mathbf{R}$  得  $z \in \mathbf{R}$ ，且  $y=\cos z$  的周期为  $2\pi$ ，即

$$\cos(z+2\pi)=\cos z,$$

于是

$$\cos(2x+2\pi)=\cos 2x,$$

所以

$$\cos 2(x+\pi)=\cos 2x, x \in \mathbf{R}.$$

由周期函数的定义可知，原函数的周期为  $\pi$ .

(3) 令  $z=\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}$ ，由  $x \in \mathbf{R}$  得  $z \in \mathbf{R}$ ，且  $y=2\sin z$  的周期为  $2\pi$ ，即

$$2\sin(z+2\pi)=2\sin z,$$

于是

$$2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}+2\pi\right)=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right),$$

所以

$$2\sin\left[\frac{1}{2}(x+4\pi)-\frac{\pi}{6}\right]=2\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6}\right).$$

由周期函数的定义可知，原函数的周期为  $4\pi$ .

## 思考

回顾例 2 的解答过程，你能发现这些函数的周期与解析式中哪些量有关吗？

## 2. 奇偶性

观察正弦曲线和余弦曲线，可以看到正弦曲线关于原点  $O$  对称，余弦曲线关于  $y$  轴对称. 这个事实，也可由诱导公式

$$\sin(-x)=-\sin x, \cos(-x)=\cos x$$

得到. 所以

**正弦函数是奇函数，余弦函数是偶函数.**

## 思考

知道一个函数具有周期性和奇偶性，对研究它的图象与性质有什么帮助？

## 练习

- 等式  $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi\right) = \sin \frac{\pi}{6}$  是否成立? 如果这个等式成立, 能否说  $\frac{2}{3}\pi$  是正弦函数  $y = \sin x, x \in \mathbf{R}$  的一个周期? 为什么?
- 求下列函数的周期, 并借助信息技术画出下列函数的图象进行检验:
  - $y = \sin \frac{3}{4}x, x \in \mathbf{R};$
  - $y = \cos 4x, x \in \mathbf{R};$
  - $y = \frac{1}{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right), x \in \mathbf{R};$
  - $y = \sin\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{4}\right), x \in \mathbf{R}.$
- 下列函数中, 哪些是奇函数? 哪些是偶函数?
  - $y = 2\sin x;$
  - $y = 1 - \cos x;$
  - $y = x + \sin x;$
  - $y = -\sin x \cos x.$
- 设函数  $f(x) (x \in \mathbf{R})$  是以 2 为最小正周期的周期函数, 且当  $x \in [0, 2]$  时,  $f(x) = (x-1)^2$ . 求  $f(3), f\left(\frac{7}{2}\right)$  的值.

## 探究与发现

### 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 及函数 $y = A \cos(\omega x + \varphi)$ 的周期

从前面的例子中可以看出, 函数

$$y = A \sin(\omega x + \varphi), x \in \mathbf{R}$$

及函数

$$y = A \cos(\omega x + \varphi), x \in \mathbf{R}$$

(其中  $A, \omega, \varphi$  为常数, 且  $A \neq 0, \omega > 0$ ) 的周期仅与自变量的系数有关. 那么, 如何用自变量的系数表示上述函数的周期呢?

事实上, 令  $z = \omega x + \varphi$ , 那么由  $x \in \mathbf{R}$  得  $z \in \mathbf{R}$ , 且函数  $y = A \sin z, z \in \mathbf{R}$  及函数  $y = A \cos z, z \in \mathbf{R}$  的周期都是  $2\pi$ .

因为

$$z + 2\pi = (\omega x + \varphi) + 2\pi = \omega\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi,$$

所以, 自变量  $x$  增加  $\frac{2\pi}{\omega}$ , 函数值就重复出现; 并且增加量小于  $\frac{2\pi}{\omega}$  时, 函数值不会重复出现. 即

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

是使等式

$$A \sin[\omega(x+T)+\varphi] = A \sin(\omega x + \varphi),$$

$$A \cos[\omega(x+T)+\varphi] = A \cos(\omega x + \varphi)$$

成立的最小正数. 从而, 函数

$$y = A \sin(\omega x + \varphi), x \in \mathbf{R}$$

及函数

$$y = A \cos(\omega x + \varphi), x \in \mathbf{R}$$

的周期  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

根据这个结论, 我们可以由这类函数的解析式直接写出函数的周期.

想一想: 上述求函数  $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ,  $x \in \mathbf{R}$  及函数  $y = A \cos(\omega x + \varphi)$ ,  $x \in \mathbf{R}$  周期的方法是否能推广到求一般周期函数的周期? 即命题“如果函数  $y = f(x)$  的周期是  $T$ , 那么函数  $y = f(\omega x)$  ( $\omega > 0$ ) 的周期是  $\frac{T}{\omega}$ ”是否成立?

### 3. 单调性

根据正弦函数的周期性, 我们可以先在它的一个周期的区间 (如  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ ) 上讨论它的单调性, 再利用它的周期性, 将单调性扩展到整个定义域.

观察图 5.4-8, 可以看到:

当  $x$  由  $-\frac{\pi}{2}$  增大到  $\frac{\pi}{2}$  时, 曲线逐渐上升,  $\sin x$  的值由  $-1$  增大到  $1$ ; 当  $x$  由  $\frac{\pi}{2}$  增大到  $\frac{3\pi}{2}$  时, 曲线逐渐下降,  $\sin x$  的值由  $1$  减小到  $-1$ .

$\sin x$  的值的变化情况如表 5.4-2 所示:

根据三角函数的周期性, 只要把握了它一个周期内的规律, 就把握了整个三角函数的规律.

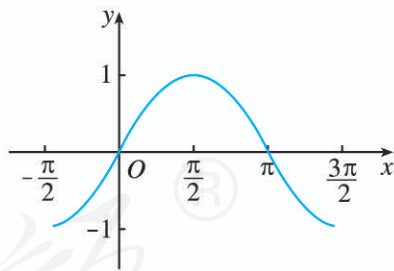


图 5.4-8

表 5.4-2

|          |                  |            |     |            |                 |            |       |            |                  |
|----------|------------------|------------|-----|------------|-----------------|------------|-------|------------|------------------|
| $x$      | $-\frac{\pi}{2}$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\nearrow$ | $\pi$ | $\nearrow$ | $\frac{3\pi}{2}$ |
| $\sin x$ | $-1$             | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$             | $\searrow$ | $0$   | $\searrow$ | $-1$             |

这就是说,

正弦函数  $y = \sin x$  在区间  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  上单调递增, 在区间  $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$  上单调递减.

由正弦函数的周期性可得,

正弦函数在每一个闭区间 $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi](k \in \mathbf{Z})$ 上都单调递增, 其值从 $-1$ 增大到 $1$ ; 在每一个闭区间 $[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi](k \in \mathbf{Z})$ 上都单调递减, 其值从 $1$ 减小到 $-1$ .

类似地, 观察余弦函数在一个周期区间(如 $[-\pi, \pi]$ )上函数值的变化规律, 将看到的函数值的变化情况填入表 5.4-3:

表 5.4-3

|          |        |            |                  |            |     |            |                 |            |       |
|----------|--------|------------|------------------|------------|-----|------------|-----------------|------------|-------|
| $x$      | $-\pi$ | $\nearrow$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\nearrow$ | $\pi$ |
| $\cos x$ |        |            |                  |            |     |            |                 |            |       |

由此可得,

函数  $y = \cos x$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$  在区间\_\_\_\_\_上单调递增, 其值从 $-1$ 增大到 $1$ ; 在区间\_\_\_\_\_上单调递减, 其值从 $1$ 减小到 $-1$ .

由余弦函数的周期性可得,

余弦函数在每一个闭区间\_\_\_\_\_上都单调递增, 其值从 $-1$ 增大到 $1$ ; 在每一个闭区间\_\_\_\_\_上都单调递减, 其值从 $1$ 减小到 $-1$ .

#### 4. 最大值与最小值

从上述对正弦函数、余弦函数的单调性的讨论中容易得到,

正弦函数当且仅当  $x =$ \_\_\_\_\_时取得最大值 $1$ , 当且仅当  $x =$ \_\_\_\_\_时取得最小值 $-1$ ;

余弦函数当且仅当  $x =$ \_\_\_\_\_时取得最大值 $1$ , 当且仅当  $x =$ \_\_\_\_\_时取得最小值 $-1$ .

**例 3** 下列函数有最大值、最小值吗? 如果有, 请写出取最大值、最小值时自变量  $x$  的集合, 并求出最大值、最小值.

(1)  $y = \cos x + 1, x \in \mathbf{R};$

(2)  $y = -3\sin 2x, x \in \mathbf{R}.$

**解:** 容易知道, 这两个函数都有最大值、最小值.

(1) 使函数  $y = \cos x + 1, x \in \mathbf{R}$  取得最大值的  $x$  的集合, 就是使函数  $y = \cos x, x \in \mathbf{R}$  取得最大值的  $x$  的集合

$$\{x \mid x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\};$$

使函数  $y = \cos x + 1, x \in \mathbf{R}$  取得最小值的  $x$  的集合, 就是使函数  $y = \cos x, x \in \mathbf{R}$  取得最小值的  $x$  的集合

$$\{x \mid x = (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}\}.$$

函数  $y = \cos x + 1$ ,  $x \in \mathbf{R}$  的最大值是  $1+1=2$ ; 最小值是  $-1+1=0$ .

(2) 令  $z=2x$ , 使函数  $y=-3\sin z$ ,  $z \in \mathbf{R}$  取得最大值的  $z$  的集合, 就是使  $y=\sin z$ ,  $z \in \mathbf{R}$  取得最小值的  $z$  的集合

$$\{z \mid z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}.$$

由  $2x=z=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ , 得  $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ . 所以, 使函数  $y=-3\sin 2x$ ,  $x \in \mathbf{R}$  取得最大值的  $x$  的集合是

$$\{x \mid x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}.$$

同理, 使函数  $y=-3\sin 2x$ ,  $x \in \mathbf{R}$  取得最小值的  $x$  的集合是

$$\{x \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}\}.$$

函数  $y=-3\sin 2x$ ,  $x \in \mathbf{R}$  的最大值是 3, 最小值是 -3.

**例 4** 不通过求值, 比较下列各组数的大小:

$$(1) \sin\left(-\frac{\pi}{18}\right) \text{ 与 } \sin\left(-\frac{\pi}{10}\right); \quad (2) \cos\left(-\frac{23\pi}{5}\right) \text{ 与 } \cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right).$$

**分析:** 可利用三角函数的单调性比较两个同名三角函数值的大小. 为此, 先用诱导公式将已知角化为同一单调区间内的角, 然后再比较大小.

**解:** (1) 因为

$$-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{10} < -\frac{\pi}{18} < 0,$$

正弦函数  $y = \sin x$  在区间  $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$  上单调递增, 所以

$$\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right) > \sin\left(-\frac{\pi}{10}\right).$$

$$(2) \cos\left(-\frac{23\pi}{5}\right) = \cos \frac{23\pi}{5} = \cos \frac{3\pi}{5},$$

$$\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right) = \cos \frac{17\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}.$$

因为  $0 < \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{5} < \pi$ , 且函数  $y = \cos x$  在区间  $[0, \pi]$  上单调递减, 所以

$$\cos \frac{\pi}{4} > \cos \frac{3\pi}{5},$$

即

$$\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right) > \cos\left(-\frac{23\pi}{5}\right).$$

你能借助单位圆直观地比较上述两对函数值的大小吗? 试一试.

**例 5** 求函数  $y = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$ ,  $x \in [-2\pi, 2\pi]$  的单调递增区间.

**分析:** 令  $z = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}$ ,  $x \in [-2\pi, 2\pi]$ , 当自变量  $x$  的值增大时,  $z$  的值也随之增大, 因此若函数  $y = \sin z$  在某个区间上单调递增, 则函数  $y = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$  在相应的区间上也一定单调递增.

**解:** 令  $z = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}$ ,  $x \in [-2\pi, 2\pi]$ , 则  $z \in \left[-\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right]$ .

因为  $y = \sin z$ ,  $z \in \left[-\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right]$  的单调递增区间是  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , 且由

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2},$$

得  $-\frac{5\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ .

所以, 函数  $y = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$ ,  $x \in [-2\pi, 2\pi]$  的单调递增区间是  $\left[-\frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ .

### 思考

你能求出函数  $y = \sin\left(-\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$ ,  $x \in [-2\pi, 2\pi]$  的单调递增区间吗?

### 练习

1. 观察正弦曲线和余弦曲线, 写出满足下列条件的  $x$  所在的区间:

- (1)  $\sin x > 0$ ; (2)  $\sin x < 0$ ; (3)  $\cos x > 0$ ; (4)  $\cos x < 0$ .

2. 求使下列函数取得最大值、最小值的自变量的集合, 并求出最大值、最小值.

- (1)  $y = 2\sin x$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ; (2)  $y = 2 - \cos \frac{x}{3}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

3. 下列关于函数  $y = 4\sin x$ ,  $x \in [0, 2\pi]$  的单调性的叙述, 正确的是 ( ).

- (A) 在  $[0, \pi]$  上单调递增, 在  $[\pi, 2\pi]$  上单调递减  
(B) 在  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上单调递增, 在  $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$  上单调递减  
(C) 在  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  及  $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$  上单调递增, 在  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$  上单调递减  
(D) 在  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$  上单调递增, 在  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  及  $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$  上单调递减

4. 不通过求值, 比较下列各组中两个三角函数值的大小:

- (1)  $\cos \frac{2}{7}\pi$  与  $\cos\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$ ; (2)  $\sin 250^\circ$  与  $\sin 260^\circ$ .

5. 求函数  $y = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $x \in [0, \pi]$  的单调递减区间.

## 利用单位圆的性质研究正弦函数、余弦函数的性质

根据三角函数的定义可知,“单位圆上点的坐标就是三角函数”.因此,单位圆的性质与三角函数的性质有天然的联系,单位圆是研究三角函数性质的好工具.例如,借助单位圆的对称性可以方便地得到诱导公式.借助单位圆研究三角函数的性质体现了数形结合的思想方法,有利于从整体上把握三角函数.

如图1,在直角坐标系  $uOv$  中,角  $x$  的顶点与原点重合,始边与  $Ou$  轴重合,终边与单位圆交于点  $P(\cos x, \sin x)$ . 容易发现,当角  $x$  的终边绕原点从  $Ou$  轴的正半轴开始,按照逆时针方向旋转时,点  $P$  的横坐标按照

$$1 \rightarrow 0 \rightarrow -1 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \dots$$

的规律连续地、周而复始地变化;同时,纵坐标按照

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow -1 \rightarrow 0 \dots$$

的规律连续地、周而复始地变化.

由上述变化规律,可得余弦函数、正弦函数的各种性质(下述表格中的  $k \in \mathbb{Z}$ ).

### (1) 周期性

自变量每增加  $2\pi$  (角  $x$  的终边旋转一周),余弦函数值、正弦函数值重复出现,所以余弦函数、正弦函数的周期都是  $2\pi$ .

### (2) 奇偶性

角  $x$ 、角  $-x$  与单位圆的交点  $P(\cos x, \sin x)$ 、 $P'(\cos(-x), \sin(-x))$  关于  $Ou$  轴对称,所以  $\cos(-x) = \cos x$ ,  $\sin(-x) = -\sin x$ , 所以余弦函数为偶函数,正弦函数为奇函数.

### (3) 单调性

余弦函数的单调性:

| 角 $x$         | $2k\pi \rightarrow 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ | $2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow 2k\pi + \pi$ | $2k\pi + \pi \rightarrow 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ | $2k\pi + \frac{3\pi}{2} \rightarrow 2k\pi + 2\pi$ |
|---------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $P$ 点横坐标的变化   | $1 \rightarrow 0$                         | $0 \rightarrow -1$                              | $-1 \rightarrow 0$                               | $0 \rightarrow 1$                                 |
| $\cos x$ 的单调性 | 单调递减                                      | 单调递减                                            | 单调递增                                             | 单调递增                                              |

正弦函数的单调性:

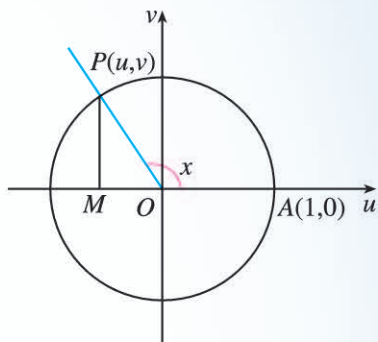


图1

|               |                                           |                                                 |                                                  |                                                   |
|---------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| 角 $x$         | $2k\pi \rightarrow 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ | $2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow 2k\pi + \pi$ | $2k\pi + \pi \rightarrow 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ | $2k\pi + \frac{3\pi}{2} \rightarrow 2k\pi + 2\pi$ |
| $P$ 点纵坐标的变化   | $0 \rightarrow 1$                         | $1 \rightarrow 0$                               | $0 \rightarrow -1$                               | $-1 \rightarrow 0$                                |
| $\sin x$ 的单调性 | 单调递增                                      | 单调递减                                            | 单调递减                                             | 单调递增                                              |

#### (4) 最大值、最小值

余弦函数的最大值、最小值：

|           |               |         |
|-----------|---------------|---------|
| 角 $x$     | $\pi + 2k\pi$ | $2k\pi$ |
| $P$ 点的横坐标 | $-1$          | $1$     |
| $\cos x$  | 最小值           | 最大值     |

正弦函数的最大值、最小值：

|           |                          |                         |
|-----------|--------------------------|-------------------------|
| 角 $x$     | $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ | $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ |
| $P$ 点的纵坐标 | $-1$                     | $1$                     |
| $\sin x$  | 最小值                      | 最大值                     |

在后续的学习中我们还可以看到，借助单位圆的性质（主要是对称性），不仅可以得到三角函数的各种性质，而且可以推导各种三角公式。

### 5.4.3 正切函数的性质与图象

#### 思考

- (1) 根据研究正弦函数、余弦函数的经验，你认为应如何研究正切函数的图象与性质？
- (2) 你能用不同的方法研究正切函数吗？

有了前面的知识准备，我们可以换个角度，即从正切函数的定义出发研究它的性质，再利用性质研究正切函数的图象。

#### 1. 周期性

由诱导公式

$$\tan(x + \pi) = \tan x, \quad x \in \mathbf{R}, \text{ 且 } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$$

可知，正切函数是周期函数，周期是  $\pi$ 。

## 2. 奇偶性

由诱导公式

$$\tan(-x) = -\tan x, x \in \mathbf{R}, \text{ 且 } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

可知, **正切函数是奇函数.**

### 思考

你认为正切函数的周期性和奇偶性对研究它的图象及其他性质会有什么帮助?

可以先考察函数  $y = \tan x, x \in [0, \frac{\pi}{2})$  的图象与性质, 然后再根据奇偶性、周期性进行拓展.

### 探究

如何画出函数  $y = \tan x, x \in [0, \frac{\pi}{2})$  的图象?

如图 5.4-9, 设  $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ , 在直角坐标系中画出角  $x$  的终边与单位圆的交点  $B(x_0, y_0)$ . 过点  $B$  作  $x$  轴的垂线, 垂足为  $M$ ; 过点  $A(1, 0)$  作  $x$  轴的垂线与角  $x$  的终边交于点  $T$ , 则

$$\tan x = \frac{y_0}{x_0} = \frac{MB}{OM} = \frac{AT}{OA} = AT.$$

由此可见, 当  $x \in [0, \frac{\pi}{2})$  时, 线段  $AT$  的长度就是相应角  $x$  的正切值. 我们可以利用线段  $AT$  画出函数  $y = \tan x, x \in [0, \frac{\pi}{2})$  的图象, 如图 5.4-10 所示.

观察图 5.4-10 可知, 当  $x \in [0, \frac{\pi}{2})$  时, 随着  $x$  的增大, 线段  $AT$  的长度也在增大, 而且当  $x$  趋向于  $\frac{\pi}{2}$  时,  $AT$  的长度

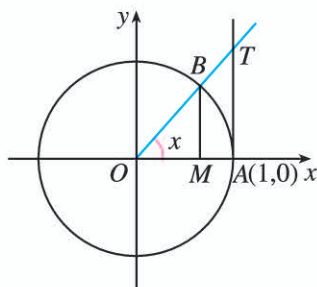


图 5.4-9

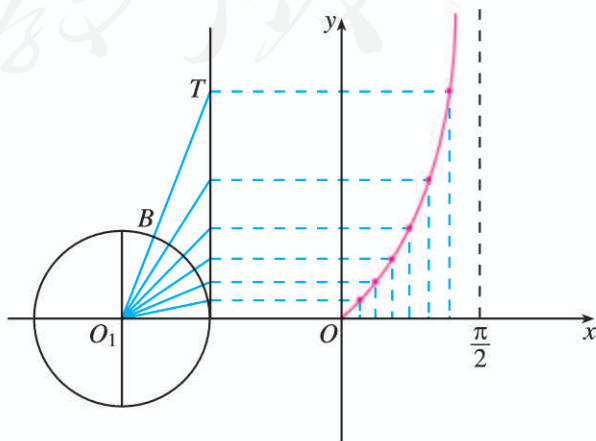


图 5.4-10

趋向于无穷大. 相应地, 函数  $y = \tan x$ ,  $x \in [0, \frac{\pi}{2})$  的图象从左向右呈不断上升趋势, 且向右上方无限逼近直线  $x = \frac{\pi}{2}$ .

### 探究

你能借助以上结论, 并根据正切函数的性质, 画出正切函数的图象吗? 正切函数的图象有怎样的特征?

根据正切函数是奇函数, 只要画  $y = \tan x$ ,  $x \in [0, \frac{\pi}{2})$  的图象关于原点的对称图形, 就可得到  $y = \tan x$ ,  $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0]$  的图象; 根据正切函数的周期性, 只要把函数  $y = \tan x$ ,  $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  的图象向左、右平移, 每次平移  $\pi$  个单位, 就可得到正切函数

$$y = \tan x, x \in \mathbf{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

的图象, 我们把它叫做**正切曲线** (tangent curve) (图 5.4-11).

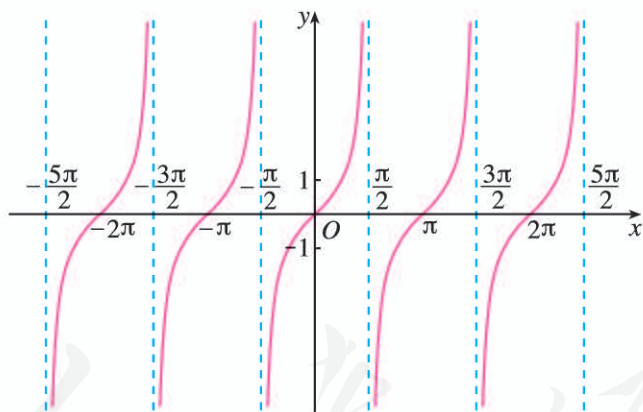


图 5.4-11

从图 5.4-11 可以看出, 正切曲线是被与  $y$  轴平行的一系列直线  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  所隔开的无穷多支形状相同的曲线组成的.

### 3. 单调性

观察正切曲线可知, 正切函数在区间  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  上单调递增.

由正切函数的周期性可得,

正切函数在每一个区间 $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$  ( $k \in \mathbf{Z}$ )上都单调递增.

#### 4. 值域

当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 时,  $\tan x$  在 $(-\infty, +\infty)$ 内可取到任意实数值, 但没有最大值、最小值.

因此, 正切函数的值域是实数集  $\mathbf{R}$ .

**例 6** 求函数  $y = \tan(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3})$  的定义域、周期及单调区间.

**分析:** 利用正切函数的性质, 通过代数变形可以得出相应的结论.

**解:** 自变量  $x$  的取值应满足

$$\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3} \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbf{Z},$$

即

$$x \neq 2k + \frac{1}{3}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

所以, 函数的定义域是  $\{x \mid x \neq 2k + \frac{1}{3}, k \in \mathbf{Z}\}$ .

设  $z = \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3}$ , 又  $\tan(z + \pi) = \tan z$ ,

所以 
$$\tan\left[\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) + \pi\right] = \tan\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3}\right),$$

即 
$$\tan\left[\frac{\pi}{2}(x+2) + \frac{\pi}{3}\right] = \tan\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3}\right).$$

因为  $\forall x \in \{x \mid x \neq 2k + \frac{1}{3}, k \in \mathbf{Z}\}$  都有

$$\tan\left[\frac{\pi}{2}(x+2) + \frac{\pi}{3}\right] = \tan\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3}\right),$$

所以, 函数的周期为 2.

由  $-\frac{\pi}{2} + k\pi < \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  解得

$$-\frac{5}{3} + 2k < x < \frac{1}{3} + 2k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

因此, 函数的单调递增区间为  $(-\frac{5}{3} + 2k, \frac{1}{3} + 2k)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

## 练习

- 借助函数  $y = \tan x$  的图象解不等式  $\tan x \geq -1$ ,  $x \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$ .
- 观察正切曲线, 写出满足下列条件的  $x$  值的范围:
  - $\tan x > 0$ ;                      (2)  $\tan x = 0$ ;                      (3)  $\tan x < 0$ .
- 求函数  $y = \tan 3x$  的定义域.
- 求下列函数的周期:
  - $y = \tan 2x$ ,  $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ ;                      (2)  $y = 5 \tan \frac{x}{2}$ ,  $x \neq (2k+1)\pi (k \in \mathbf{Z})$ .
- 不通过求值, 比较下列各组中两个正切值的大小:
  - $\tan(-52^\circ)$  与  $\tan(-47^\circ)$ ;                      (2)  $\tan \frac{13\pi}{4}$  与  $\tan \frac{17\pi}{5}$ .

## 习题 5.4



### 复习巩固

- 画出下列函数的简图:
  - $y = 1 - \sin x$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ ;                      (2)  $y = 3 \cos x + 1$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ .
- 求下列函数的周期:
  - $y = \sin \frac{2}{3}x$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ;                      (2)  $y = \frac{1}{2} \cos 4x$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- 下列函数中, 哪些是奇函数? 哪些是偶函数? 哪些既不是奇函数, 也不是偶函数?
  - $y = |\sin x|$ ;                      (2)  $y = 1 - \cos 2x$ ;
  - $y = -3 \sin 2x$ ;                      (4)  $y = 1 + 2 \tan x$ .
- 求使下列函数取得最大值、最小值的自变量  $x$  的集合, 并求出最大值、最小值:
  - $y = 1 - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3}x$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ;                      (2)  $y = 3 \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ;
  - $y = -\frac{3}{2} \cos(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6})$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ;                      (4)  $y = \frac{1}{2} \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3})$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .
- 利用函数的单调性比较下列各组中两个三角函数值的大小:
  - $\sin 103^\circ 15'$  与  $\sin 164^\circ 30'$ ;                      (2)  $\cos(-\frac{3}{10}\pi)$  与  $\cos(-\frac{4}{9}\pi)$ ;
  - $\sin 508^\circ$  与  $\sin 144^\circ$ ;                      (4)  $\cos(\frac{47}{10}\pi)$  与  $\cos(\frac{44}{9}\pi)$ .
- 求下列函数的单调区间:
  - $y = 1 + \sin x$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ ;                      (2)  $y = -\cos x$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ .
- 求函数  $y = -\tan(x + \frac{\pi}{6}) + 2$  的定义域.
- 求函数  $y = \tan(2x - \frac{\pi}{3})$ ,  $x \neq \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$  的周期.

9. 利用正切函数的单调性比较下列各组中两个函数值的大小:

- (1)  $\tan\left(-\frac{\pi}{5}\right)$  与  $\tan\left(-\frac{3\pi}{7}\right)$ ; (2)  $\tan 1519^\circ$  与  $\tan 1493^\circ$ ;  
 (3)  $\tan 6\frac{9}{11}\pi$  与  $\tan\left(-5\frac{3}{11}\pi\right)$ ; (4)  $\tan \frac{7\pi}{8}$  与  $\tan \frac{\pi}{6}$ .

## 综合运用

10. 求下列函数的值域:

- (1)  $y = \sin x, x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ ; (2)  $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right), x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

11. 根据正弦函数、余弦函数的图象, 写出使下列不等式成立的  $x$  的取值集合:

- (1)  $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} (x \in \mathbf{R})$ ; (2)  $\sqrt{2} + 2\cos x \geq 0 (x \in \mathbf{R})$ .

12. 下列四个函数中, 以  $\pi$  为最小正周期, 且在区间  $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  上单调递减的是 ( ).

- (A)  $y = |\sin x|$  (B)  $y = \cos x$  (C)  $y = \tan x$  (D)  $y = \cos \frac{x}{2}$

13. 若  $x$  是斜三角形的一个内角, 写出使下列不等式成立的  $x$  的集合:

- (1)  $1 + \tan x \leq 0$ ; (2)  $\tan x - \sqrt{3} \geq 0$ .

14. 求函数  $y = -\tan\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right)$  的单调区间.

15. 已知函数  $y = f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上周期为 2 的奇函数, 若  $f(0.5) = 1$ , 求  $f(1)$ ,  $f(3.5)$  的值.

16. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right), x \in \mathbf{R}$ ,

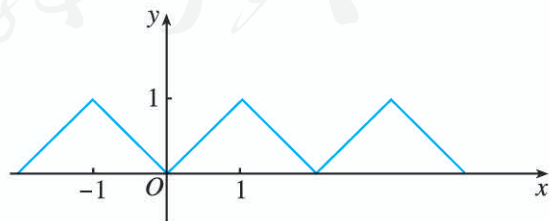
- (1) 求  $f(x)$  的最小正周期; (2) 求  $f(x)$  在区间  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$  上的最大值和最小值.

## 拓广探索

17. 在直角坐标系中, 已知  $\odot O$  是以原点  $O$  为圆心, 半径长为 2 的圆, 角  $x$  (rad) 的终边与  $\odot O$  的交点为  $B$ , 求点  $B$  的纵坐标  $y$  关于  $x$  的函数解析式, 并借助信息技术画出其图象.

18. 已知函数  $y = f(x) (x \in \mathbf{R})$  是周期函数, 周期为 2, 其部分图象如图所示,

- (1) 写出函数  $y = f(x)$  的解析式;  
 (2) 画出函数  $y = f(x+1)$  的图象.



(第 18 题)

19. 容易知道, 正弦函数  $y = \sin x$  是奇函数, 正弦曲线关于原点对称, 即原点是正弦曲

线的对称中心. 除原点外, 正弦曲线还有其他对称中心吗? 如果有, 那么对称中心的坐标是什么? 另外, 正弦曲线是轴对称图形吗? 如果是, 那么对称轴的方程是什么? 你能用已经学过的正弦函数性质解释上述现象吗? 对余弦函数和正切函数, 讨论上述同样的问题.

## 5.5 三角恒等变换

前面我们学习了诱导公式，利用它们对三角函数式进行恒等变形，可以达到化简、求值或证明的目的. 这种利用公式对三角函数式进行的恒等变形就是三角恒等变换. 观察诱导公式，可以发现它们都是特殊角与任意角  $\alpha$  的和（或差）的三角函数与这个任意角  $\alpha$  的三角函数的恒等关系. 如果把特殊角换为任意角  $\beta$ ，那么任意角  $\alpha$  与  $\beta$  的和（或差）的三角函数与  $\alpha, \beta$  的三角函数会有什么关系呢？下面来研究这个问题.

### 5.5.1 两角和与差的正弦、余弦和正切公式

#### 1. 两角差的余弦公式

##### 探究

如果已知任意角  $\alpha, \beta$  的正弦、余弦，能由此推出  $\alpha + \beta, \alpha - \beta$  的正弦、余弦吗？

下面，我们来探究  $\cos(\alpha - \beta)$  与角  $\alpha, \beta$  的正弦、余弦之间的关系.

不妨令  $\alpha \neq 2k\pi + \beta, k \in \mathbf{Z}$ .

如图 5.5-1，设单位圆与  $x$  轴的正半轴相交于点  $A(1, 0)$ ，以  $x$  轴非负半轴为始边作角  $\alpha, \beta, \alpha - \beta$ ，它们的终边分别与单位圆相交于点  $P_1(\cos \alpha, \sin \alpha)$ ， $A_1(\cos \beta, \sin \beta)$ ， $P(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))$ .

连接  $A_1P_1, AP$ . 若把扇形  $OAP$  绕着点  $O$  旋转  $\beta$  角，则点  $A, P$  分别与点  $A_1, P_1$  重合. 根据圆的旋转对称性可知， $\widehat{AP}$  与  $\widehat{A_1P_1}$  重合，从而  $\widehat{AP} = \widehat{A_1P_1}$ ，所以  $AP = A_1P_1$ .

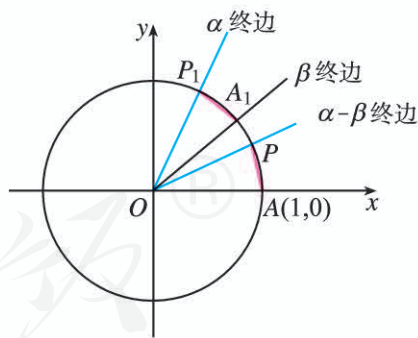


图 5.5-1

任意一个圆绕着其圆心旋转任意角后都与原来的圆重合，这一性质叫做圆的旋转对称性.

根据两点间的距离公式, 得

$$\begin{aligned} & [\cos(\alpha-\beta)-1]^2 + \sin^2(\alpha-\beta) \\ &= (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2, \end{aligned}$$

化简得

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

当  $\alpha = 2k\pi + \beta (k \in \mathbb{Z})$  时, 容易证明上式仍然成立.

所以, 对于任意角  $\alpha, \beta$  有

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

$(C_{(\alpha-\beta)})$

此公式给出了任意角  $\alpha, \beta$  的正弦、余弦与其差角  $\alpha-\beta$  的余弦之间的关系, 称为差角的余弦公式, 简记作  $C_{(\alpha-\beta)}$ .

**例 1** 利用公式  $C_{(\alpha-\beta)}$  证明:

$$(1) \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin \alpha; \quad (2) \cos(\pi-\alpha) = -\cos \alpha.$$

**证明:** (1)  $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{2} \sin \alpha$   
 $= 0 + 1 \times \sin \alpha$   
 $= \sin \alpha.$

(2)  $\cos(\pi-\alpha) = \cos \pi \cos \alpha + \sin \pi \sin \alpha$   
 $= (-1) \times \cos \alpha + 0$   
 $= -\cos \alpha.$

**例 2** 已知  $\sin \alpha = \frac{4}{5}, \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \cos \beta = -\frac{5}{13}, \beta$  是第三象限角, 求  $\cos(\alpha-\beta)$  的值.

**解:** 由  $\sin \alpha = \frac{4}{5}, \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , 得

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= -\sqrt{1-\sin^2 \alpha} \\ &= -\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}. \end{aligned}$$

又由  $\cos \beta = -\frac{5}{13}, \beta$  是第三象限角, 得

$$\begin{aligned} \sin \beta &= -\sqrt{1-\cos^2 \beta} \\ &= -\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2} = -\frac{12}{13}. \end{aligned}$$

所以

平面上任意两点  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$  间的距离公式  $P_1P_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}.$

$$\begin{aligned}
 \cos(\alpha-\beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\
 &= \left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{13}\right) + \frac{4}{5} \times \left(-\frac{12}{13}\right) \\
 &= -\frac{33}{65}.
 \end{aligned}$$

## 练习

1. 利用公式  $C_{(\alpha-\beta)}$  证明:

$$(1) \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin \alpha; \quad (2) \cos(-\alpha)=\cos \alpha.$$

2. 利用公式  $C_{(\alpha-\beta)}$  求  $\cos 15^\circ$  的值.

3. 已知  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ ,  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , 求  $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$  的值.

4. 已知  $\sin \theta = \frac{15}{17}$ ,  $\theta$  是第二象限角, 求  $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$  的值.

5. 已知  $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$ ,  $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ ,  $\cos \beta = \frac{3}{4}$ ,  $\beta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ , 求  $\cos(\beta-\alpha)$  的值.

## 2. 两角和与差的正弦、余弦、正切公式

### 思考

由公式  $C_{(\alpha-\beta)}$  出发, 你能推导出两角和与差的三角函数的其他公式吗?

下面以公式  $C_{(\alpha-\beta)}$  为基础来推导其他公式.

例如, 比较  $\cos(\alpha-\beta)$  与  $\cos(\alpha+\beta)$ , 并注意到  $\alpha+\beta$  与  $\alpha-\beta$  之间的联系:  $\alpha+\beta=\alpha-(-\beta)$ , 则由公式  $C_{(\alpha-\beta)}$ , 有

$$\begin{aligned}
 \cos(\alpha+\beta) &= \cos[\alpha-(-\beta)] \\
 &= \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta) \\
 &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.
 \end{aligned}$$

于是得到了两角和的余弦公式, 简记作  $C_{(\alpha+\beta)}$ .

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos \alpha \cos \beta-\sin \alpha \sin \beta. \quad (C_{(\alpha+\beta)})$$

这里用到的是加法和减法的联系, 也可用换元的观点来考虑: 由于公式  $C_{(\alpha-\beta)}$  对于任意  $\alpha, \beta$  都成立, 那么把其中的  $\beta$  换成  $-\beta$  后, 也一定成立. 由此也可推得公式  $C_{(\alpha+\beta)}$ .

### 探究

上面得到了两角和与差的余弦公式. 我们知道, 用诱导公式五 (或六) 可以实现正弦、余弦的互化. 你能根据  $C_{(\alpha+\beta)}$ ,  $C_{(\alpha-\beta)}$  及诱导公式五 (或六), 推导出用任意角  $\alpha, \beta$  的正弦、余弦表示  $\sin(\alpha+\beta)$ ,  $\sin(\alpha-\beta)$  的公式吗?

通过推导,可以得到:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin \alpha \cos \beta+\cos \alpha \sin \beta, \quad (S_{(\alpha+\beta)})$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin \alpha \cos \beta-\cos \alpha \sin \beta. \quad (S_{(\alpha-\beta)})$$

### 探究

你能根据正切函数与正弦函数、余弦函数的关系,从  $C_{(\alpha \pm \beta)}$ ,  $S_{(\alpha \pm \beta)}$  出发,推导出用任意角  $\alpha, \beta$  的正切表示  $\tan(\alpha+\beta)$ ,  $\tan(\alpha-\beta)$  的公式吗?

通过推导,可以得到:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan \alpha+\tan \beta}{1-\tan \alpha \tan \beta}, \quad (T_{(\alpha+\beta)})$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan \alpha-\tan \beta}{1+\tan \alpha \tan \beta}. \quad (T_{(\alpha-\beta)})$$

公式  $S_{(\alpha+\beta)}$ ,  $C_{(\alpha+\beta)}$ ,  $T_{(\alpha+\beta)}$  给出了任意角  $\alpha, \beta$  的三角函数值与其和角  $\alpha+\beta$  的三角函数值之间的关系. 为方便起见,我们把这三个公式都叫做**和角公式**.

类似地,  $S_{(\alpha-\beta)}$ ,  $C_{(\alpha-\beta)}$ ,  $T_{(\alpha-\beta)}$  都叫做**差角公式**.

### 探究

和(差)角公式中,  $\alpha, \beta$  都是任意角. 如果令  $\alpha$  为某些特殊角,就能得到许多有用的公式. 你能从和(差)角公式出发推导出诱导公式吗? 你还能得到哪些等式?

**例3** 已知  $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ ,  $\alpha$  是第四象限角, 求  $\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)$ ,  $\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)$ ,  $\tan(\alpha-\frac{\pi}{4})$  的值.

**解:** 由  $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ ,  $\alpha$  是第四象限角, 得

$$\cos \alpha = \sqrt{1-\sin^2 \alpha} = \sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5},$$

所以

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}.$$

于是有

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) &= \sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{4}{5} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{10}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) &= \cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{4}{5} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{10}; \\
 \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\tan \alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} \\
 &= \frac{\tan \alpha - 1}{1 + \tan \alpha} \\
 &= \frac{-\frac{3}{4} - 1}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)} = -7.
 \end{aligned}$$

### 思考

由以上解答可以看到, 在本题条件下有  $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ . 那么对于任意角  $\alpha$ , 此等式成立吗? 若成立, 你会用几种方法予以证明?

**例 4** 利用和 (差) 角公式计算下列各式的值:

(1)  $\sin 72^\circ \cos 42^\circ - \cos 72^\circ \sin 42^\circ$ ;

(2)  $\cos 20^\circ \cos 70^\circ - \sin 20^\circ \sin 70^\circ$ ;

(3)  $\frac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ}$ .

**分析:** 和、差角公式把  $\alpha \pm \beta$  的三角函数式转化成了  $\alpha, \beta$  的三角函数式. 如果反过来, 从右到左使用公式, 就可以将上述三角函数式化简.

**解:** (1) 由公式  $S_{(\alpha-\beta)}$ , 得

$$\begin{aligned}
 &\sin 72^\circ \cos 42^\circ - \cos 72^\circ \sin 42^\circ \\
 &= \sin(72^\circ - 42^\circ) \\
 &= \sin 30^\circ \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

(2) 由公式  $C_{(\alpha+\beta)}$ , 得

$$\begin{aligned}
 &\cos 20^\circ \cos 70^\circ - \sin 20^\circ \sin 70^\circ \\
 &= \cos(20^\circ + 70^\circ) \\
 &= \cos 90^\circ \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

(3) 由公式  $T_{(\alpha+\beta)}$  及  $\tan 45^\circ=1$ , 得

$$\begin{aligned}\frac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ} &= \frac{\tan 45^\circ+\tan 15^\circ}{1-\tan 45^\circ \tan 15^\circ} \\ &= \tan(45^\circ+15^\circ) \\ &= \tan 60^\circ \\ &= \sqrt{3}.\end{aligned}$$

## 练习

1. 利用和（差）角公式，求下列各式的值：

(1)  $\sin 15^\circ$ ;      (2)  $\cos 75^\circ$ ;      (3)  $\sin 75^\circ$ ;      (4)  $\tan 15^\circ$ .

2. (1) 已知  $\cos \theta = -\frac{3}{5}$ ,  $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ , 求  $\sin(\theta + \frac{\pi}{3})$  的值;

(2) 已知  $\sin \theta = -\frac{12}{13}$ ,  $\theta$  是第三象限角, 求  $\cos(\frac{\pi}{6} + \theta)$  的值;

(3) 已知  $\tan \alpha = 3$ , 求  $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4})$  的值.

3. 求下列各式的值:

(1)  $\sin 72^\circ \cos 18^\circ + \cos 72^\circ \sin 18^\circ$ ;

(2)  $\cos 72^\circ \cos 12^\circ + \sin 72^\circ \sin 12^\circ$ ;

(3)  $\frac{\tan 12^\circ + \tan 33^\circ}{1 - \tan 12^\circ \tan 33^\circ}$ ;

(4)  $\cos 74^\circ \sin 14^\circ - \sin 74^\circ \cos 14^\circ$ ;

(5)  $\sin 34^\circ \sin 26^\circ - \cos 34^\circ \cos 26^\circ$ ;

(6)  $\sin 20^\circ \cos 110^\circ + \cos 160^\circ \sin 70^\circ$ .

4. 化简:

(1)  $\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$ ;

(2)  $\sqrt{3} \sin x + \cos x$ ;

(3)  $\sqrt{2}(\sin x - \cos x)$ ;

(4)  $\sqrt{2} \cos x - \sqrt{6} \sin x$ .

5. 已知  $\sin(\alpha - \beta) \cos \alpha - \cos(\beta - \alpha) \sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\beta$  是第三象限角, 求  $\sin(\beta + \frac{5\pi}{4})$  的值.

## 3. 二倍角的正弦、余弦、正切公式

以公式  $C_{(\alpha-\beta)}$  为基础, 我们已经得到六个和（差）角公式, 下面将以和（差）角公式为基础来推导倍角公式.

### 探究

你能利用  $S_{(\alpha\pm\beta)}$ ,  $C_{(\alpha\pm\beta)}$ ,  $T_{(\alpha\pm\beta)}$  推导出  $\sin 2\alpha$ ,  $\cos 2\alpha$ ,  $\tan 2\alpha$  的公式吗?

通过推导, 可以得到:

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha,$$

(S<sub>2α</sub>)

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

(C<sub>2α</sub>)

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}.$$

(T<sub>2α</sub>)

如果要求二倍角的余弦公式 (C<sub>2α</sub>) 中仅含 α 的正弦 (余弦), 那么又可得到:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha,$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1.$$

这里的“倍角”专指“二倍角”，遇到“三倍角”等名词时，“三”字等不可省去。

以上这些公式都叫做**倍角公式**。倍角公式给出了 α 的三角函数与 2α 的三角函数之间的关系。

### 归纳

从和 (差) 角公式、倍角公式的推导过程可以发现, 这些公式存在紧密的逻辑联系, 请你进行归纳总结。

**例 5** 已知  $\sin 2\alpha = \frac{5}{13}$ ,  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , 求  $\sin 4\alpha$ ,  $\cos 4\alpha$ ,  $\tan 4\alpha$  的值。

**分析:** 已知条件给出了 2α 的正弦函数值。由于 4α 是 2α 的二倍角, 因此可以考虑用倍角公式。

**解:** 由  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , 得

$$\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi.$$

又  $\sin 2\alpha = \frac{5}{13},$

所以  $\cos 2\alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = -\frac{12}{13}.$

于是

$$\begin{aligned}\sin 4\alpha &= \sin[2 \times (2\alpha)] \\ &= 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha \\ &= 2 \times \frac{5}{13} \times \left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{120}{169}; \\ \cos 4\alpha &= \cos[2 \times (2\alpha)] \\ &= 1 - 2\sin^2 2\alpha \\ &= 1 - 2 \times \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{119}{169};\end{aligned}$$

“倍”是描述两个数量之间关系的, 2α 是 α 的二倍, 4α 是 2α 的二倍,  $\frac{\alpha}{2}$  是  $\frac{\alpha}{4}$  的二倍, 这里蕴含着换元思想。

$$\begin{aligned}\tan 4\alpha &= \frac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha} \\ &= -\frac{120}{169} \times \frac{169}{119} = -\frac{120}{119}.\end{aligned}$$

**例 6** 在  $\triangle ABC$  中,  $\cos A = \frac{4}{5}$ ,  $\tan B = 2$ , 求  $\tan(2A+2B)$  的值.

**解法 1:** 在  $\triangle ABC$  中,

由  $\cos A = \frac{4}{5}$ ,  $0 < A < \pi$ , 得

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5},$$

所以  $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4},$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} = \frac{2 \times \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{24}{7}.$$

又  $\tan B = 2,$

所以  $\tan 2B = \frac{2\tan B}{1 - \tan^2 B} = \frac{2 \times 2}{1 - 2^2} = -\frac{4}{3}.$

$$\text{于是 } \tan(2A+2B) = \frac{\tan 2A + \tan 2B}{1 - \tan 2A \tan 2B} = \frac{\frac{24}{7} - \frac{4}{3}}{1 - \frac{24}{7} \times \left(-\frac{4}{3}\right)} = \frac{44}{117}.$$

**解法 2:** 在  $\triangle ABC$  中,

由  $\cos A = \frac{4}{5}$ ,  $0 < A < \pi$ , 得

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5},$$

所以

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4}.$$

又  $\tan B = 2,$

所以

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{\frac{3}{4} + 2}{1 - \frac{3}{4} \times 2} = -\frac{11}{2},$$

?

$2A+2B$  与  $A, B$  之间能构成怎样的关系?

所以

$$\begin{aligned}\tan(2A+2B) &= \tan[2(A+B)] \\ &= \frac{2\tan(A+B)}{1-\tan^2(A+B)} \\ &= \frac{2 \times \left(-\frac{11}{2}\right)}{1-\left(-\frac{11}{2}\right)^2} = \frac{44}{117}.\end{aligned}$$

### 练习

1. 已知  $\cos \frac{\alpha}{8} = -\frac{4}{5}$ ,  $8\pi < \alpha < 12\pi$ , 求  $\sin \frac{\alpha}{4}$ ,  $\cos \frac{\alpha}{4}$ ,  $\tan \frac{\alpha}{4}$  的值.

2. 已知  $\sin(\alpha - \pi) = \frac{3}{5}$ , 求  $\cos 2\alpha$  的值.

3. 已知  $\sin 2\alpha = -\sin \alpha$ ,  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , 求  $\tan \alpha$  的值.

4. 已知  $\tan 2\alpha = \frac{1}{3}$ , 求  $\tan \alpha$  的值.

5. 求下列各式的值:

(1)  $\sin 15^\circ \cos 15^\circ$ ;

(2)  $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}$ ;

(3)  $\frac{\tan 22.5^\circ}{1 - \tan^2 22.5^\circ}$ ;

(4)  $2\cos^2 22.5^\circ - 1$ .

人教版®

## 利用信息技术制作三角函数表

前面在“对数的发明”中曾经谈到，纳皮尔利用对数制作了  $0^\circ \sim 90^\circ$  每隔  $1'$  的八位三角函数表。应当说，纳皮尔仅仅凭借手工运算得到这个三角函数表的工作量是非常大的，这也显示出他超人的毅力和为科学献身的精神。今天，我们可以利用已经学会的三角函数知识以及算法知识，借助信息技术，容易地制作出非常精确的三角函数表。下面我们借助信息技术来作一个  $0^\circ \sim 90^\circ$  每隔  $1'$  的八位三角函数表。

用计算工具可得：

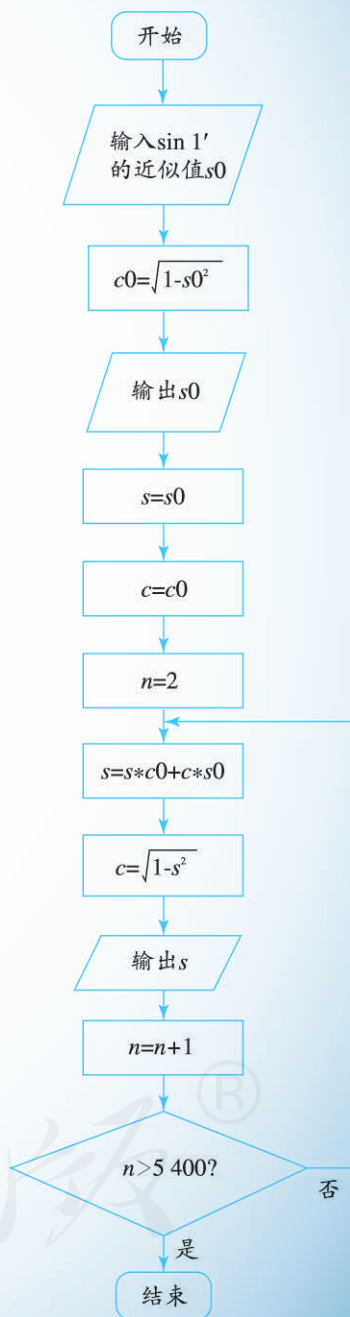
$$\begin{aligned}\sin 1' &\approx 2.908\ 882\ 046 \times 10^{-4} \\ &\approx 0.000\ 290\ 888.\end{aligned}$$

以此作为初始值，利用

$$\begin{aligned}\cos 1' &= \sqrt{1 - \sin^2 1'}; \\ \alpha_0 &= 1', \alpha_n = \alpha_{n-1} + 1', n \geq 1; \\ \sin \alpha_n &= \sin 1' \cos \alpha_{n-1} + \cos 1' \sin \alpha_{n-1}, \\ \cos \alpha_n &= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_n},\end{aligned}$$

就可以写出一个程序框图（如右图所示），然后通过信息技术得到一个正弦函数的三角函数表。

请同学们根据上述思路，自己编写程序，得出一个三角函数表。



### 5.5.2 简单的三角恒等变换

学习了和(差)角公式、二倍角公式以后,我们就有了进行三角恒等变换的新工具,从而使三角恒等变换的内容、思路和方法更加丰富.

**例 7** 试以  $\cos \alpha$  表示  $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ ,  $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$ ,  $\tan^2 \frac{\alpha}{2}$ .

**解:**  $\alpha$  是  $\frac{\alpha}{2}$  的二倍角. 在倍角公式  $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$

中,以  $\alpha$  代替  $2\alpha$ ,以  $\frac{\alpha}{2}$  代替  $\alpha$ ,得

$$\cos \alpha = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

所以

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}. \quad ①$$

在倍角公式  $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$  中,以  $\alpha$  代替  $2\alpha$ ,以  $\frac{\alpha}{2}$  代替  $\alpha$ ,得

$$\cos \alpha = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1,$$

所以

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}. \quad ②$$

将①②两个等式的左右两边分别相除,得

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

?

$\alpha$  与  $\frac{\alpha}{2}$  有什么关系?

例 7 的结果还可以表示为:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}},$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}},$$

并称之为半角公式,符号由  $\frac{\alpha}{2}$  所在象限决定.

因为不同的三角函数式不仅会有结构形式方面的差异,而且还会存在所包含的角,以及这些角的三角函数种类方面的差异,所以进行三角恒等变换时,常常要先寻找式子所包含的各个角之间的联系,并以此为依据选择适当的公式. 这是三角恒等变换的一个重要特点.

**例 8** 求证:

$$(1) \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)];$$

$$(2) \sin \theta + \sin \varphi = 2 \sin \frac{\theta + \varphi}{2} \cos \frac{\theta - \varphi}{2}.$$

**证明:** (1) 因为

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta,$$

将以上两式的左右两边分别相加,得

?

这两个式子的左右两边在结构形式上有什么不同?

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta,$$

即

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)].$$

(2) 由 (1) 可得

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta. \quad \textcircled{1}$$

设  $\alpha+\beta=\theta$ ,  $\alpha-\beta=\varphi$ ,

那么

$$\alpha=\frac{\theta+\varphi}{2}, \quad \beta=\frac{\theta-\varphi}{2}.$$

把  $\alpha, \beta$  的值代入①, 即得

$$\sin\theta+\sin\varphi=2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}.$$

如果不用 (1) 的结果, 如何证明?

例 8 的证明用到了换元的方法. 如把  $\alpha+\beta$  看作  $\theta$ ,  $\alpha-\beta$  看作  $\varphi$ , 从而把包含  $\alpha, \beta$  的三角函数式转化为  $\theta, \varphi$  的三角函数式. 或者, 把  $\sin\alpha\cos\beta$  看作  $x$ ,  $\cos\alpha\sin\beta$  看作  $y$ , 把等式看作  $x, y$  的方程, 则原问题转化为解方程 (组) 求  $x$ . 它们都体现了化归思想.

## 练习

1. 求证:  $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$

2. 已知  $\cos\theta=\frac{1}{3}$ , 且  $270^\circ<\theta<360^\circ$ , 试求  $\sin\frac{\theta}{2}$  和  $\cos\frac{\theta}{2}$  的值.

3. 已知等腰三角形的顶角的余弦等于  $\frac{7}{25}$ , 求这个三角形的一个底角的正切.

4. 求证:

$$(1) \cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)];$$

$$(2) \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];$$

$$(3) \sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)].$$

5. 求证:

$$(1) \sin\theta-\sin\varphi=2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2};$$

$$(2) \cos\theta+\cos\varphi=2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2};$$

$$(3) \cos\theta-\cos\varphi=-2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}.$$

**例 9** 求下列函数的周期, 最大值和最小值:

(1)  $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ ; (2)  $y = 3 \sin x + 4 \cos x$ .

**分析:** 便于求周期和最大值、最小值的三角函数式是  $y = A \sin(x + \varphi)$ , 利用和角公式将其展开, 可化为  $y = a \sin x + b \cos x$  的形式. 反之, 利用和(差)角公式, 可将  $y = a \sin x + b \cos x$  转化为  $y = A \sin(x + \varphi)$  的形式, 进而就可以求得其周期和最值了.

**解:** (1)  $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x$

$$= 2 \left( \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) \textcircled{1}$$

$$= 2 \left( \sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right).$$

因此, 所求周期为  $2\pi$ , 最大值为 2, 最小值为 -2.

(2) 设  $3 \sin x + 4 \cos x = A \sin(x + \varphi)$ , 则

$$3 \sin x + 4 \cos x = A \sin x \cos \varphi + A \cos x \sin \varphi.$$

于是  $A \cos \varphi = 3, A \sin \varphi = 4,$

于是  $A^2 \cos^2 \varphi + A^2 \sin^2 \varphi = 25,$

所以  $A^2 = 25.$

取  $A = 5$ , 则  $\cos \varphi = \frac{3}{5}, \sin \varphi = \frac{4}{5}.$

由  $y = 5 \sin(x + \varphi)$  可知, 所求周期为  $2\pi$ , 最大值为 5, 最小值为 -5.

?

① 你能说说这一步变形的理由吗?

**例 10** 如图 5.5-2, 在扇形  $OPQ$  中, 半径  $OP = 1$ , 圆心角  $\angle POQ = \frac{\pi}{3}$ ,  $C$  是扇形弧上的动点, 矩形  $ABCD$  内接于扇形. 记  $\angle POC = \alpha$ , 求当角  $\alpha$  取何值时, 矩形  $ABCD$  的面积最大? 并求出这个最大面积.

**分析:** 可先建立矩形  $ABCD$  的面积  $S$  与  $\alpha$  之间的函数关系  $S = f(\alpha)$ , 再求函数  $S = f(\alpha)$  的最大值.

**解:** 在  $\text{Rt}\triangle OBC$  中,  $OB = \cos \alpha, BC = \sin \alpha.$

在  $\text{Rt}\triangle OAD$  中,  $\frac{DA}{OA} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$

所以

$$OA = \frac{\sqrt{3}}{3} DA = \frac{\sqrt{3}}{3} BC = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \alpha,$$

$$AB = OB - OA = \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \alpha.$$

设矩形  $ABCD$  的面积为  $S$ , 则

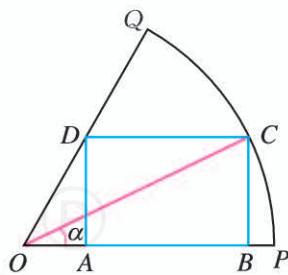


图 5.5-2

$$\begin{aligned}
S &= AB \cdot BC \\
&= \left( \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \alpha \right) \sin \alpha \\
&= \sin \alpha \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin^2 \alpha \\
&= \frac{1}{2} \sin 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{6} (1 - \cos 2\alpha) \\
&= \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{6} \cos 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{6} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \cos 2\alpha \right) - \frac{\sqrt{3}}{6} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \left( 2\alpha + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{\sqrt{3}}{6}.
\end{aligned}$$

由  $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ , 得  $\frac{\pi}{6} < 2\alpha + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}$ , 所以当  $2\alpha + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ , 即  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  时,

$$S_{\text{最大}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

因此, 当  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  时, 矩形  $ABCD$  的面积最大, 最大面积为  $\frac{\sqrt{3}}{6}$ .

由例 9、例 10 可以看到, 通过三角恒等变换, 我们把  $y = a \sin x + b \cos x$  转化为  $y = A \sin(x + \varphi)$  的形式, 这个过程中蕴含了化归思想.

## 练习

1. 求下列函数的周期, 最大值和最小值:

(1)  $y = 5 \cos x - 12 \sin x$ ;

(2)  $y = \cos x + 2 \sin x$ .

2. 要在半径为  $R$  的圆形场地内建一个矩形的花坛, 应怎样截取, 才能使花坛的面积最大?

3. 已知正  $n$  边形的边长为  $a$ , 内切圆的半径为  $r$ , 外接圆的半径为  $R$ . 求证  $R + r = \frac{a}{2 \tan \frac{\pi}{2n}}$ .

## 习题 5.5



### 复习巩固

1. 已知  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ ,  $\cos \beta = -\frac{3}{4}$ ,  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ,  $\beta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ , 求  $\cos(\alpha - \beta)$  的值.

2. 已知  $\alpha, \beta$  都是锐角,  $\cos \alpha = \frac{1}{7}$ ,  $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{11}{14}$ , 求  $\cos \beta$  的值. (提示:  $\beta = (\alpha + \beta) - \alpha$ .)

3. 已知  $\sin(30^\circ + \alpha) = \frac{3}{5}$ ,  $60^\circ < \alpha < 150^\circ$ , 求  $\cos \alpha$  的值.

4. 在  $\triangle ABC$  中,  $\sin A = \frac{5}{13}$ ,  $\cos B = \frac{3}{5}$ , 求  $\cos C$  的值.

5. 已知  $\tan(\alpha + \beta) = 3$ ,  $\tan(\alpha - \beta) = 5$ , 求  $\tan 2\alpha$ ,  $\tan 2\beta$  的值.

6. 化简:

(1)  $\sin 347^\circ \cos 148^\circ + \sin 77^\circ \cos 58^\circ$ ;

(2)  $\sin 164^\circ \sin 224^\circ + \sin 254^\circ \sin 314^\circ$ ;

(3)  $\sin(\alpha + \beta) \cos(\gamma - \beta) - \cos(\beta + \alpha) \sin(\beta - \gamma)$ ; (4)  $\sin(\alpha - \beta) \sin(\beta - \gamma) - \cos(\alpha - \beta) \cos(\gamma - \beta)$ ;

(5)  $\frac{\tan \frac{5\pi}{4} + \tan \frac{5\pi}{12}}{1 - \tan \frac{5\pi}{12}}$ ;

(6)  $\frac{\sin(\alpha + \beta) - 2\sin \alpha \cos \beta}{2\sin \alpha \sin \beta + \cos(\alpha + \beta)}$ .

7. 已知  $\sin \alpha = 0.80$ ,  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 求  $\sin 2\alpha$ ,  $\cos 2\alpha$  的值 (精确到 0.01).

8. 求证:

(1)  $(\sin 2\alpha - \cos 2\alpha)^2 = 1 - \sin 4\alpha$ ;

(2)  $\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) + \tan(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) = 2\tan x$ ;

(3)  $\frac{1 + \sin 2\varphi}{\cos \varphi + \sin \varphi} = \cos \varphi + \sin \varphi$ ;

(4)  $\frac{1 - 2\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$ ;

(5)  $\frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \tan^2 \theta$ ;

(6)  $\frac{1 + \sin 2\theta - \cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta + \cos 2\theta} = \tan \theta$ .

9. 已知  $\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}$ ,  $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$ , 求证:

(1)  $\sin \alpha \cos \beta = 5 \cos \alpha \sin \beta$ ;

(2)  $\tan \alpha = 5 \tan \beta$ .

10. 已知  $\frac{1 - \tan \theta}{2 + \tan \theta} = 1$ , 求证  $\tan 2\theta = -4 \tan(\theta + \frac{\pi}{4})$ .

11. 已知一段圆弧所对的圆心角的正弦值等于  $\frac{3}{5}$ , 求这段圆弧所对的圆周角的正弦、余弦和正切.

12. 化简:

(1)  $3\sqrt{15} \sin x + 3\sqrt{5} \cos x$ ;

(2)  $\frac{3}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$ ;

(3)  $\sqrt{3} \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}$ ;

(4)  $\frac{\sqrt{2}}{4} \sin(\frac{\pi}{4} - x) + \frac{\sqrt{6}}{4} \cos(\frac{\pi}{4} - x)$ .



## 综合运用

13. 在  $\triangle ABC$  中, 已知  $\tan A, \tan B$  是  $x$  的方程  $x^2 + p(x+1) + 1 = 0$  的两个实根, 求  $\angle C$ .

14. 在  $\triangle ABC$  中,  $B = \frac{\pi}{4}$ ,  $BC$  边上的高等于  $\frac{1}{3}BC$ , 则  $\cos A =$  ( ).

(A)  $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

(B)  $\frac{\sqrt{10}}{10}$

(C)  $-\frac{\sqrt{10}}{10}$

(D)  $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

15. 求证:

(1)  $3 + \cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha = 8\sin^4 \alpha$ ;

(2)  $\frac{\tan \alpha \tan 2\alpha}{\tan 2\alpha - \tan \alpha} + \sqrt{3}(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = 2\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$ .

16. 是否存在锐角  $\alpha, \beta$ , 使  $\alpha + 2\beta = \frac{2\pi}{3}$ ,  $\tan \frac{\alpha}{2} \tan \beta = 2 - \sqrt{3}$  同时成立? 若存在, 求出  $\alpha, \beta$  的度数; 若不存在, 请说明理由.

17. (1) 求函数  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + 4x\right) + \sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$  的周期和单调递增区间;

(2) 求函数  $f(x) = a \sin x + b \cos x (a^2 + b^2 \neq 0)$  的最大值和最小值.

### 拓展探索

18. 观察以下各等式:

$$\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ = \frac{3}{4},$$

$$\sin^2 20^\circ + \cos^2 50^\circ + \sin 20^\circ \cos 50^\circ = \frac{3}{4},$$

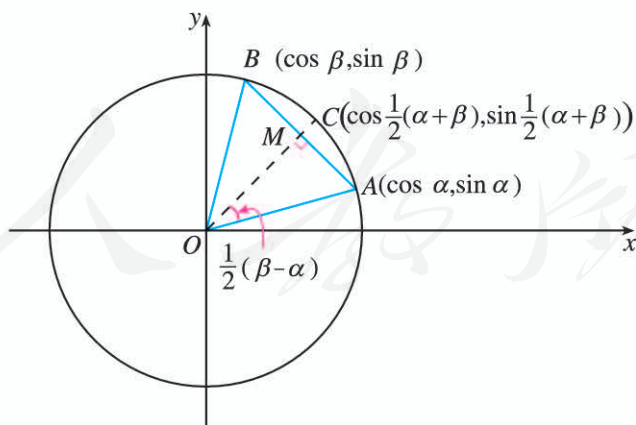
$$\sin^2 15^\circ + \cos^2 45^\circ + \sin 15^\circ \cos 45^\circ = \frac{3}{4}.$$

分析上述各式的共同特点, 写出能反映一般规律的等式, 并对等式的正确性作出证明.

19. 你能利用所给图形, 证明下列两个等式吗?

$$\frac{1}{2}(\sin \alpha + \sin \beta) = \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\frac{1}{2}(\cos \alpha + \cos \beta) = \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$



(第 19 题)

20. 设  $f(\alpha) = \sin^x \alpha + \cos^x \alpha$ ,  $x \in \{n \mid n = 2k, k \in \mathbf{N}_+\}$ . 利用三角变换, 估计  $f(\alpha)$  在  $x = 2, 4, 6$  时的取值情况, 进而猜想  $x$  取一般值时  $f(\alpha)$  的取值范围.

## 5.6 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$

我们知道，单位圆上的点，以  $(1, 0)$  为起点，以单位速度按逆时针方向运动，其运动规律可用三角函数加以刻画. 对于一个一般的匀速圆周运动可以用怎样的数学模型刻画呢？下面先看一个实际问题.

### 5.6.1 匀速圆周运动的数学模型

**问题** 筒车是我国古代发明的一种水利灌溉工具，因其经济又环保，至今还在农业生产中得到使用（图 5.6-1）. 明朝科学家徐光启在《农政全书》中用图画描绘了筒车的工作原理（图 5.6-2）.



图 5.6-1



图 5.6-2

假定在水流量稳定的情况下，筒车上的每一个盛水桶都做匀速圆周运动. 你能用一个合适的函数模型来刻画盛水桶（视为质点）距离水面的相对高度与时间的关系吗？

因筒车上盛水桶的运动具有周期性，可以考虑利用三角函数模型刻画它的运动规律.

#### 思考

与盛水桶运动相关的量有哪些？它们之间有怎样的关系？

如图 5.6-3，将筒车抽象为一个几何图形，设经过  $t$  s 后，盛水桶  $M$  从点  $P_0$  运动到点  $P$ . 由筒车的工作原理可知，这个盛水桶距离水面的高度  $H$ ，由以下量所决定：筒车转轮的中心  $O$  到水面的距离  $h$ ，筒车的半径  $r$ ，筒车转动的角速度  $\omega$ ，盛水桶的初始位置  $P_0$  以及所经过的时间  $t$ .

下面我们分析这些量的相互关系，进而建立盛水桶  $M$  运动的数学模型.

如图 5.6-3, 以  $O$  为原点, 以与水平面平行的直线为  $x$  轴建立直角坐标系. 设  $t=0$  时, 盛水筒  $M$  位于点  $P_0$ , 以  $Ox$  为始边,  $OP_0$  为终边的角为  $\varphi$ , 经过  $t$  s 后运动到点  $P(x, y)$ . 于是, 以  $Ox$  为始边,  $OP$  为终边的角为  $\omega t + \varphi$ , 并且有

$$y = r \sin(\omega t + \varphi). \quad ①$$

所以, 盛水筒  $M$  距离水面的高度  $H$  与时间  $t$  的关系是

$$H = r \sin(\omega t + \varphi) + h. \quad ②$$

函数②就是要建立的数学模型, 只要将它的性质研究清楚, 就能把握盛水筒的运动规律. 由于  $h$  是常量, 我们可以只研究函数①的性质.

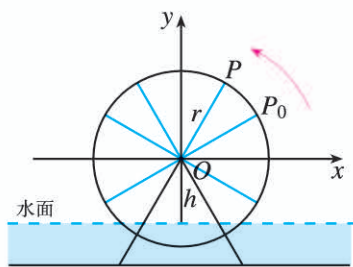


图 5.6-3

### 5.6.2 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象

上面我们利用三角函数的知识建立了一个形如  $y = A \sin(\omega x + \varphi)$  (其中  $A > 0$ ,  $\omega > 0$ ) 的函数. 显然, 这个函数由参数  $A$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$  所确定. 因此, 只要了解这些参数的意义, 知道它们的变化对函数图象的影响, 就能把握这个函数的性质.

#### 思考

从解析式看, 函数  $y = \sin x$  就是函数  $y = A \sin(\omega x + \varphi)$  在  $A=1$ ,  $\omega=1$ ,  $\varphi=0$  时的特殊情形.

(1) 能否借助我们熟悉的函数  $y = \sin x$  的图象与性质研究参数  $A$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$  对函数  $y = A \sin(\omega x + \varphi)$  的影响?

(2) 函数  $y = A \sin(\omega x + \varphi)$  含有三个参数, 你认为应按怎样的思路进行研究?

#### 1. 探索 $\varphi$ 对 $y = \sin(x + \varphi)$ 图象的影响

为了更加直观地观察参数  $\varphi$  对函数图象的影响, 下面借助信息技术做一个数学实验. 如图 5.6-4, 取  $A=1$ ,  $\omega=1$ , 动点  $M$  在单位圆  $O_1$  上以单位角速度按逆时针方向运动. 如果动点  $M$  以  $Q_0$  为起点 (此时  $\varphi=0$ ), 经过  $x$  s 后运动到点  $P$ , 那么点  $P$  的纵坐标

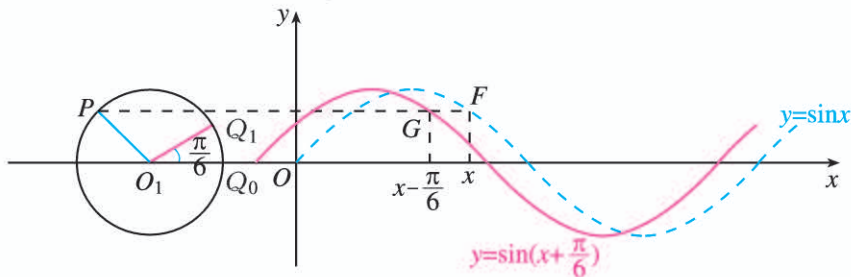


图 5.6-4

$y$  就等于  $\sin x$ . 以  $(x, y)$  为坐标描点, 可得正弦函数  $y = \sin x$  的图象.

## 探究

在单位圆上拖动起点  $Q_0$ , 使点  $Q_0$  绕点  $O_1$  旋转  $\frac{\pi}{6}$  到  $Q_1$ , 你发现图象有什么变化?

如果使点  $Q_0$  绕点  $O_1$  旋转  $-\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{3}$ ,  $-\frac{\pi}{3}$ , 或者旋转一个任意角  $\varphi$  呢?

当起点位于  $Q_1$  时,  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ , 可得函数  $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$  的图象.

进一步, 在单位圆上, 设两个动点分别以  $Q_0, Q_1$  为起点同时开始运动. 如果以  $Q_0$  为起点的动点到达圆周上点  $P$  的时间为  $x$  s, 那么以  $Q_1$  为起点的动点相继到达点  $P$  的时间是  $(x - \frac{\pi}{6})$  s. 这个规律反映在图象上就是: 如果  $F(x, y)$

是函数  $y = \sin x$  图象上的一点, 那么  $G(x - \frac{\pi}{6}, y)$  就是函数

$y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$  图象上的点, 如图 5.6-4 所示. 这说明, 把

正弦曲线  $y = \sin x$  上的所有点向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度, 就

得到  $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$  的图象.

一般地, 当动点  $M$  的起点位置  $Q$  所对应的角为  $\varphi$  时, 对应的函数是  $y = \sin(x + \varphi)$  ( $\varphi \neq 0$ ), 把正弦曲线上的所有点向左 (当  $\varphi > 0$  时) 或向右 (当  $\varphi < 0$  时) 平移  $|\varphi|$  个单位长度, 就得到函数  $y = \sin(x + \varphi)$  的图象.

## 2. 探索 $\omega (\omega > 0)$ 对 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 图象的影响

下面, 仍然通过数学实验来探索. 如图 5.6-5, 取圆的半径  $A = 1$ . 为了研究方便, 不妨令  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ . 当  $\omega = 1$  时得到  $y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$  的图象.

分别说一说旋转  $-\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{3}$ ,  $-\frac{\pi}{3}$  时的情况.

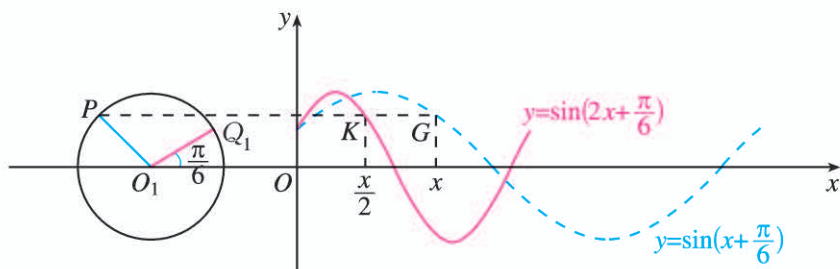


图 5.6-5