

探究

取 $\omega=2$, 图象有什么变化? 取 $\omega=\frac{1}{2}$ 呢? 取 $\omega=3$, $\omega=\frac{1}{3}$, 图象又有什么变化?
当 ω 取任意正数呢?

取 $\omega=2$ 时, 得到函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象.

进一步, 在单位圆上, 设以 Q_1 为起点的动点, 当 $\omega=1$ 时到达点 P 的时间为 x_1 s, 当 $\omega=2$ 时到达点 P 的时间为 x_2 s. 因为 $\omega=2$ 时动点的转速是 $\omega=1$ 时的 2 倍, 所以 $x_2=\frac{1}{2}x_1$. 这样, 设 $G(x, y)$ 是函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 图象上的一点, 那么 $K\left(\frac{1}{2}x, y\right)$ 就是函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 图象上的相应点, 如图 5.6-5 所示. 这说明, 把 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变), 就得到 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象.
 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的周期为 π , 是 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的周期的 $\frac{1}{2}$.

同理, 当 $\omega=\frac{1}{2}$ 时, 动点的转速是 $\omega=1$ 时的 $\frac{1}{2}$, 以 Q_1 为起点, 到达点 P 的时间是 $\omega=1$ 时的 2 倍. 这样, 把 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍 (纵坐标不变), 就得到 $y=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象. $y=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的周期为 4π , 是 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的周期的 2 倍.

说一说 $\omega=3$, $\omega=\frac{1}{3}$

时的情况.

一般地, 函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的周期是 $\frac{2\pi}{\omega}$, 把 $y=\sin(x+\varphi)$ 图象上所有点的横坐标缩短 (当 $\omega>1$ 时) 或伸长 (当 $0<\omega<1$ 时) 到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍 (纵坐标不变), 就得到 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象.

3. 探索 $A(A>0)$ 对 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的影响

下面通过数学实验探索 A 对函数图象的影响. 为了研究方便, 不妨令 $\omega=2$, $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

当 $A=1$ 时, 如图 5.6-6, 可得 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象.

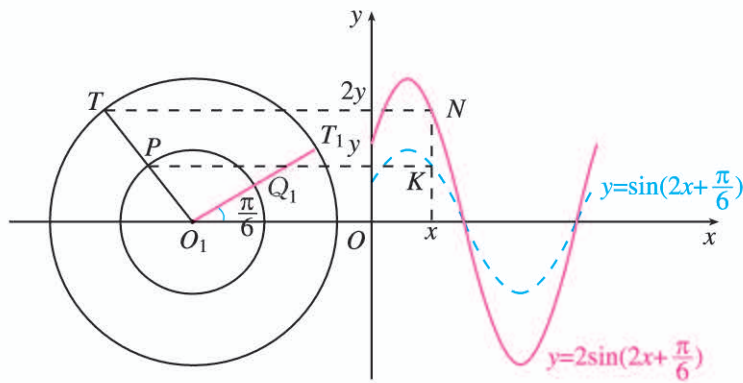


图 5.6-6

探究

改变 A 的取值, 使 A 取 $2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}$ 等, 你发现图象有什么变化? 当 A 取任意正数呢?

当 $A=2$ 时, 得到函数 $y=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 的图象.

进一步, 设射线 O_1Q_1 与以 O_1 为圆心、2 为半径的圆交于 T_1 . 如果单位圆上以 Q_1 为起点的动点, 以 $\omega=2$ 的转速经过 x s 到达圆周上点 P , 那么点 P 的纵坐标是 $\sin(2x+\frac{\pi}{6})$; 相应地, 点 T_1 在以 O_1 为圆心、2 为半径的圆上运动到点 T , 点 T 的纵坐标是 $2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$. 这样, 设 $K(x, y)$ 是函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 图象上的一点, 那么点 $N(x, 2y)$ 就是函数 $y=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 图象上的相应点, 如图 5.6-6 所示. 这说明, 把 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 图象上所有点的纵坐标伸长到原来的 2 倍 (横坐标不变), 就得到 $y=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 的图象.

同理, 把 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 图象上所有点的纵坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (横坐标不变), 就得到 $y=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{6})$ 的图象.

一般地, 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象, 可以看作是 把 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 图象上所有点的纵坐标伸长 (当 $A>1$ 时) 或缩短 (当 $0<A<1$ 时) 到原来的 A 倍 (横坐标不变) 而得到. 从而, 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的值域是 $[-A, A]$, 最大值是 A , 最小值是 $-A$.

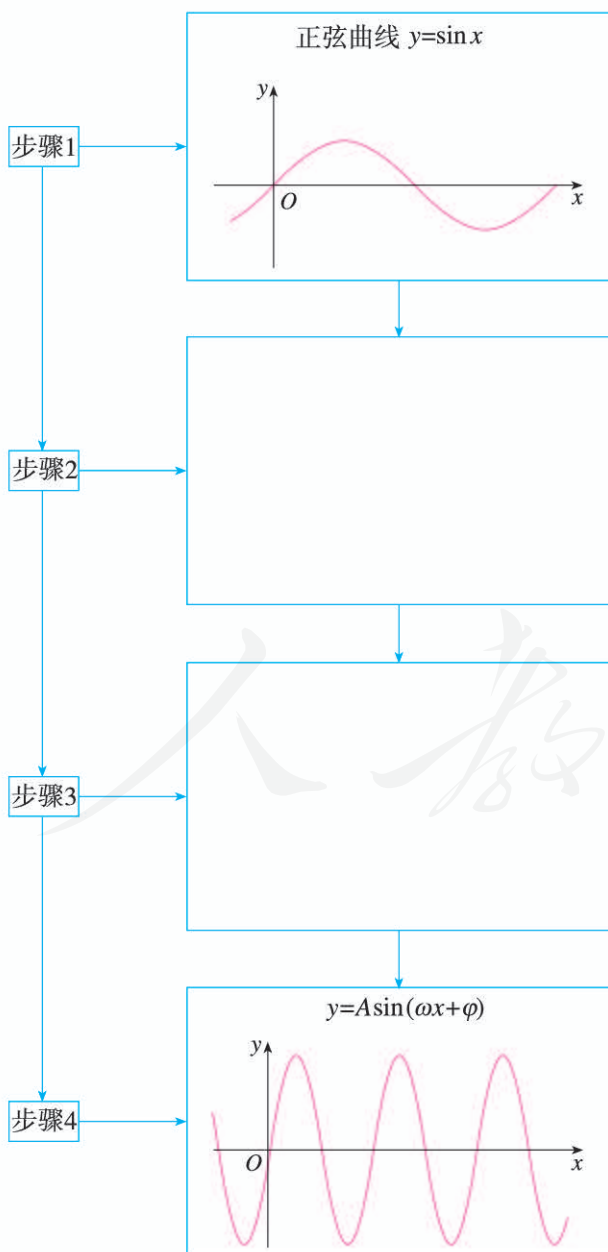
说一说 $A=3, A=\frac{1}{3}$ 时的情况.

思考

你能总结一下从正弦函数图象出发，通过图象变换得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ ($A>0$, $\omega>0$) 图象的过程与方法吗？

一般地，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ ($A>0$, $\omega>0$) 的图象，可以用下面的方法得到：先画出函数 $y=\sin x$ 的图象；再把正弦曲线向左（或右）平移 $|\varphi|$ 个单位长度，得到函数 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象；然后把曲线上各点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍（纵坐标不变），得到函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象；最后把曲线上各点的纵坐标变为原来的 A 倍（横坐标不变），这时的曲线就是函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象。

这一过程的步骤如下：



补全步骤 2 和 3 的函数及图象。

从上述步骤可以清楚地看到, 参数 A , ω , φ 是如何对函数图象产生影响的.

例 1 画出函数 $y=2\sin(3x-\frac{\pi}{6})$ 的简图.

解: 先画出函数 $y=\sin x$ 的图象; 再把正弦曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到函数 $y=\sin(x-\frac{\pi}{6})$ 的图象; 然后使曲线上各点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{3}$, 得到函数 $y=\sin(3x-\frac{\pi}{6})$ 的图象; 最后把曲线上各点的纵坐标变为原来的 2 倍, 这时的曲线就是函数 $y=2\sin(3x-\frac{\pi}{6})$ 的图象, 如图 5.6-7 所示.

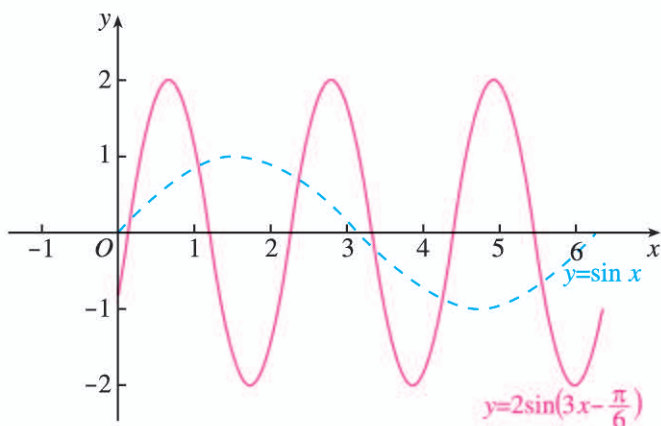


图 5.6-7

下面用“五点法”画函数 $y=2\sin(3x-\frac{\pi}{6})$ 在一个周期 ($T=\frac{2\pi}{3}$) 内的图象.

令 $X=3x-\frac{\pi}{6}$, 则 $x=\frac{1}{3}(X+\frac{\pi}{6})$. 列表 (表 5.6-1), 描点画图 (图 5.6-8).

表 5.6-1

X	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{5\pi}{9}$	$\frac{13\pi}{18}$
y	0	2	0	-2	0

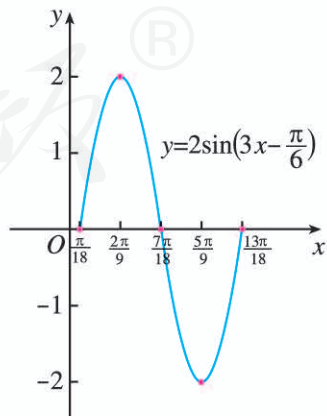


图 5.6-8

例 2 摩天轮是一种大型转轮状的机械建筑设施, 游客坐在摩天轮的座舱里慢慢地往上转, 可以从高处俯瞰四周景色. 如图 5.6-9, 某摩天轮最高点距离地面高度为 120 m, 转盘直径为 110 m, 设置有 48 个座舱, 开启后按逆时针方向匀速旋转, 游客在座舱转到距离地面最近的位置进舱, 转一周大约需要 30 min.



图 5.6-9

(1) 游客甲坐上摩天轮的座舱, 开始转动 t min 后距离地面的高度为 H m, 求在转动一周的过程中, H 关于 t 的函数解析式;

(2) 求游客甲在开始转动 5 min 后距离地面的高度;

(3) 若甲、乙两人分别坐在两个相邻的座舱里, 在运行一周的过程中, 求两人距离地面的高度差 h (单位: m) 关于 t 的函数解析式, 并求高度差的最大值 (精确到 0.1).

分析: 摩天轮上的座舱运动可以近似地看作是质点在圆周上做匀速旋转. 在旋转过程中, 游客距离地面的高度 H 呈现周而复始的变化, 因此可以考虑用三角函数来刻画.

解: 如图 5.6-10, 设座舱距离地面最近的位置为点 P , 以轴心 O 为原点, 与地面平行的直线为 x 轴建立直角坐标系.

(1) 设 $t=0$ min 时, 游客甲位于点 $P(0, -55)$, 以 OP 为终边的角为 $-\frac{\pi}{2}$; 根据摩天轮转一周大约需要 30 min, 可知座舱转动的角速度约为 $\frac{\pi}{15}$ rad/min, 由题意可得

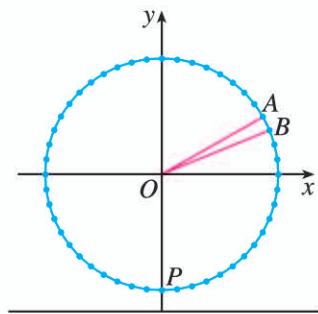


图 5.6-10

$$H = 55 \sin\left(\frac{\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + 65, \quad 0 \leq t \leq 30.$$

(2) 当 $t=5$ 时,

$$H = 55 \sin\left(\frac{\pi}{15} \times 5 - \frac{\pi}{2}\right) + 65 = 37.5.$$

所以, 游客甲在开始转动 5 min 后距离地面的高度约为 37.5 m.

(3) 如图 5.6-10, 甲、乙两人的位置分别用点 A, B 表示, 则 $\angle AOB = \frac{2\pi}{48} = \frac{\pi}{24}$. 经过 t min 后甲距离地面的高度为 $H_1 = 55 \sin\left(\frac{\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + 65$, 点 B 相对于点 A 始终落后 $\frac{\pi}{24}$ rad, 此时乙距离地面的高度为 $H_2 = 55 \sin\left(\frac{\pi}{15}t - \frac{13\pi}{24}\right) + 65$. 则甲、乙距离地面的高度差

$$h = |H_1 - H_2| = 55 \left| \sin\left(\frac{\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{15}t - \frac{13\pi}{24}\right) \right| = 55 \left| \sin\left(\frac{\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{13\pi}{24} - \frac{\pi}{15}t\right) \right|,$$

利用 $\sin \theta + \sin \varphi = 2 \sin \frac{\theta + \varphi}{2} \cos \frac{\theta - \varphi}{2}$, 可得

$$h = 110 \left| \sin \frac{\pi}{48} \sin \left(\frac{\pi}{15} t - \frac{\pi}{48} \right) \right|, 0 \leq t \leq 30.$$

当 $\frac{\pi}{15}t - \frac{\pi}{48} = \frac{\pi}{2}$ (或 $\frac{3\pi}{2}$), 即 $t \approx 7.8$ (或 22.8) 时, h 的最大值为 $110 \sin \frac{\pi}{48} \approx 7.2$.

所以, 甲、乙两人距离地面的高度差的最大值约为 7.2 m .

练习

1. 画出下列函数在长度为一个周期的闭区间上的简图, 并用信息技术检验:

(1) $y = \frac{1}{2} \sin x$;

(2) $y = \sin 3x$;

(3) $y = \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$;

(4) $y = 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$.

2. 已知函数 $y = 3 \sin \left(x + \frac{\pi}{5} \right)$ 的图象为 C .

(1) 为了得到函数 $y = 3 \sin \left(x - \frac{\pi}{5} \right)$ 的图象, 只要把 C 上所有的点 ().

(A) 向右平行移动 $\frac{\pi}{5}$ 个单位长度

(B) 向左平行移动 $\frac{\pi}{5}$ 个单位长度

(C) 向右平行移动 $\frac{2\pi}{5}$ 个单位长度

(D) 向左平行移动 $\frac{2\pi}{5}$ 个单位长度

(2) 为了得到函数 $y = 3 \sin \left(2x + \frac{\pi}{5} \right)$ 的图象, 只要把 C 上所有的点 ().

(A) 横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变

(B) 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标不变

(C) 纵坐标伸长到原来的 2 倍, 横坐标不变

(D) 纵坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$, 横坐标不变

(3) 为了得到函数 $y = 4 \sin \left(x + \frac{\pi}{5} \right)$ 的图象, 只要把 C 上所有的点 ().

(A) 横坐标伸长到原来的 $\frac{4}{3}$ 倍, 纵坐标不变

(B) 横坐标缩短到原来的 $\frac{3}{4}$, 纵坐标不变

(C) 纵坐标伸长到原来的 $\frac{4}{3}$ 倍, 横坐标不变

(D) 纵坐标缩短到原来的 $\frac{3}{4}$, 横坐标不变

3. 函数 $y = \frac{2}{3} \sin \left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4} \right)$ 的图象与正弦曲线有什么关系?

4. 函数 $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{12} \right)$, $x \in [0, +\infty)$ 的图象与正弦曲线有什么关系?



复习巩固

1. 选择题

(1) 为了得到函数 $y = \cos\left(x + \frac{1}{3}\right)$ 的图象, 只需把余弦曲线上所有的点 ().

(A) 向左平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

(B) 向右平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

(C) 向左平行移动 $\frac{1}{3}$ 个单位长度

(D) 向右平行移动 $\frac{1}{3}$ 个单位长度

(2) 为了得到函数 $y = \cos \frac{x}{5}$ 的图象, 只需把余弦曲线上所有的点 ().

(A) 横坐标伸长到原来的 5 倍, 纵坐标不变

(B) 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{5}$, 纵坐标不变

(C) 纵坐标伸长到原来的 5 倍, 横坐标不变

(D) 纵坐标缩短到原来的 $\frac{1}{5}$, 横坐标不变

(3) 为了得到函数 $y = \frac{1}{4} \cos x$ 的图象, 只需把余弦曲线上所有的点 ().

(A) 横坐标伸长到原来的 4 倍, 纵坐标不变

(B) 横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{4}$, 纵坐标不变

(C) 纵坐标伸长到原来的 4 倍, 横坐标不变

(D) 纵坐标缩短到原来的 $\frac{1}{4}$, 横坐标不变

2. 画出下列函数在长度为一个周期的闭区间上的简图, 并用信息技术检验:

(1) $y = 4 \sin \frac{1}{2}x$; (2) $y = \frac{1}{2} \cos 3x$;

(3) $y = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$; (4) $y = 2 \cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$.

3. 说明下列函数的图象可由正弦曲线经过怎样的变换得到 (注意定义域):

(1) $y = 8 \sin\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{8}\right)$, $x \in [0, +\infty)$;

(2) $y = \frac{1}{3} \sin\left(3x + \frac{\pi}{7}\right)$, $x \in [0, +\infty)$.

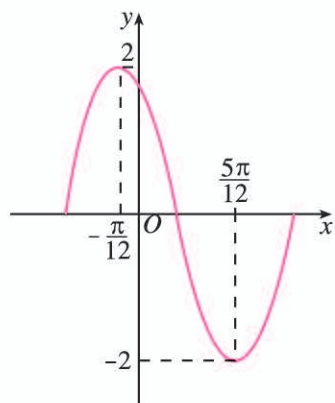


综合运用

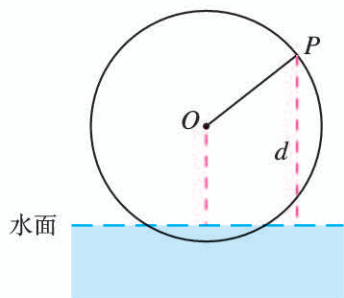
- 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 在一个周期内的图象如图所示, 此函数的解析式为_____.
- 将函数 $y = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 后得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 求 $y = g(x)$ 的解析式.
- 某时钟的秒针端点 A 到中心点 O 的距离为 5 cm, 秒针绕点 O 匀速旋转, 当时间 $t = 0$ 时, 点 A 与钟面上标 12 的点 B 重合. 将 A, B 两点间的距离 d (单位: cm) 表示成 t (单位: s) 的函数, 则 $d = \underline{\hspace{2cm}}$, $t \in [0, 60]$.
- 如图, 一个半径为 3 m 的筒车按逆时针方向每分转 1.5 圈, 筒车的轴心 O 距离水面的高度为 2.2 m. 设筒车上的某个盛水筒 P 到水面的距离为 d (单位: m) (在水面下则 d 为负数), 若以盛水筒 P 刚浮出水面时开始计算时间, 则 d 与时间 t (单位: s) 之间的关系为

$$d = A \sin(\omega t + \varphi) + K \left(A > 0, \omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \right).$$

- 求 A, ω, φ, K 的值 (φ 精确到 0.000 1);
- 盛水筒出水后至少经过多长时间就可到达最高点 (精确到 0.01 s)?



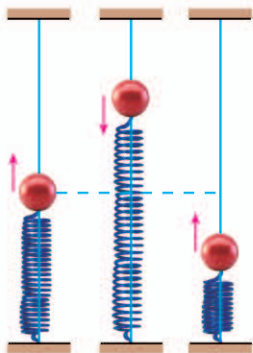
(第 4 题)



(第 7 题)

人教版®

5.7 三角函数的应用



现实生活中存在大量具有周而复始、循环往复特点的周期运动变化现象，如果某种变化着的现象具有周期性，那么就可以考虑借助三角函数来描述. 本节通过几个具体实例，说明三角函数模型的简单应用.

问题 1 某个弹簧振子（简称振子）在完成一次全振动的过程中，时间 t （单位：s）与位移 y （单位：mm）之间的对应数据如表 5.7-1 所示. 试根据这些数据确定这个振子的位移关于时间的函数解析式.

表 5.7-1

t	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60
y	-20.0	-17.8	-10.1	0.1	10.3	17.7	20.0	17.7	10.3	0.1	-10.1	-17.8	-20.0

振子的振动具有循环往复的特点，由振子振动的物理学原理可知，其位移 y 随时间 t 的变化规律可以用函数 $y = A\sin(\omega t + \varphi)$ 来刻画.

根据已知数据作出散点图，如图 5.7-1 所示.

请你查阅资料，了解振子的运动原理.

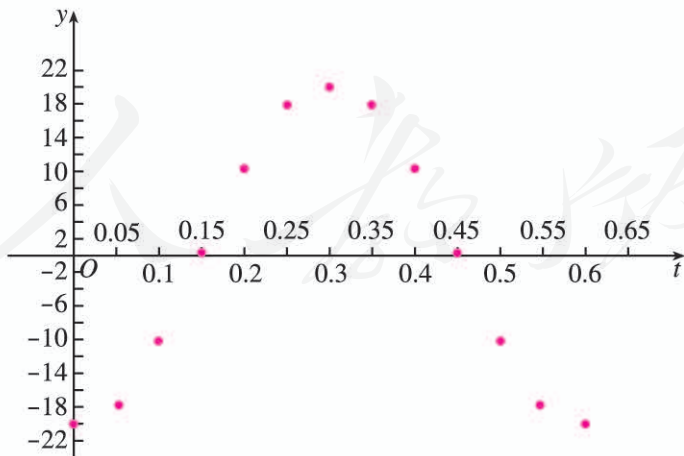


图 5.7-1

由数据表和散点图可知，振子振动时位移的最大值为 20 mm，因此 $A=20$ ；振子振动的周期为 0.6 s，即 $\frac{2\pi}{\omega}=0.6$ ，解得 $\omega=\frac{10\pi}{3}$ ；再由初始状态（ $t=0$ ）振子的位移为 -20，

可得 $\sin \varphi = -1$, 因此 $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. 所以振子位移关于时间的函数解析式为

$$y = 20 \sin\left(\frac{10\pi}{3}t - \frac{\pi}{2}\right), t \in [0, +\infty).$$

现实生活中存在大量类似弹簧振子的运动, 如钟摆的摆动, 水中浮标的上下浮动, 琴弦的振动, 等等. 这些都是物体在某一中心位置附近循环往复的运动. 在物理学中, 把物体受到的力 (总是指向平衡位置) 正比于它离开平衡位置的距的运动称为“简谐运动”. 可以证明, 在适当的直角坐标系下, 简谐运动可以用函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$, $x \in [0, +\infty)$ 表示, 其中 $A > 0$, $\omega > 0$. 描述简谐运动的物理量, 如振幅、周期和频率等都与这个解析式中的常数有关:

A 就是这个简谐运动的**振幅**, 它是做简谐运动的物体离开平衡位置的最大距离;

这个简谐运动的**周期**是 $T = \frac{2\pi}{\omega}$, 它是做简谐运动的物体往复运动一次所需要的时间;

这个简谐运动的**频率**由公式 $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ 给出, 它是做简谐运动的物体在单位时间内往复运动的次数;

$\omega x + \varphi$ 称为**相位**; $x = 0$ 时的相位 φ 称为**初相**.

问题 2 图 5.7-2(1) 是某次实验测得的交变电流 i (单位: A) 随时间 t (单位: s) 变化的图象. 将测得的图象放大, 得到图 5.7-2(2).

(1) 求电流 i 随时间 t 变化的函数解析式;

(2) 当 $t = 0, \frac{1}{600}, \frac{1}{150}, \frac{7}{600}, \frac{1}{60}$ 时, 求电流 i .

请你查阅资料, 了解交变电流的产生原理.

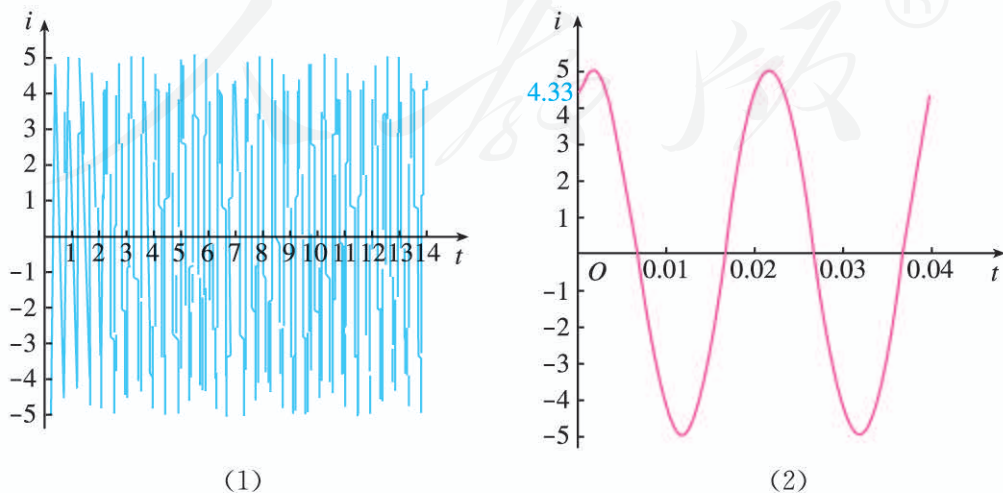


图 5.7-2

由交变电流的产生原理可知, 电流 i 随时间 t 的变化规律可用 $i = A \sin(\omega t + \varphi)$ 来刻画, 其中 $\frac{\omega}{2\pi}$ 表示频率, A 表示振幅, φ 表示初相.

由图 5.7-2(2) 可知, 电流最大值为 5 A, 因此 $A = 5$; 电流变化的周期为 $\frac{1}{50}$ s, 频率为 50 Hz, 即 $\frac{\omega}{2\pi} = 50$, 解得 $\omega = 100\pi$; 再由初始状态 ($t = 0$) 的电流约为 4.33 A, 可得 $\sin \varphi = 0.866$, 因此 φ 约为 $\frac{\pi}{3}$. 所以电流 i 随时间 t 变化的函数解析式是

$$i = 5 \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right), t \in [0, +\infty).$$

$$\text{当 } t = 0 \text{ 时, } i = \frac{5\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{当 } t = \frac{1}{600} \text{ 时, } i = 5;$$

$$\text{当 } t = \frac{1}{150} \text{ 时, } i = 0;$$

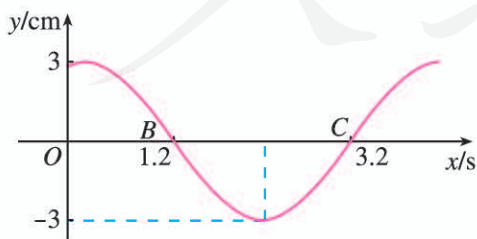
$$\text{当 } t = \frac{7}{600} \text{ 时, } i = -5;$$

$$\text{当 } t = \frac{1}{60} \text{ 时, } i = 0.$$

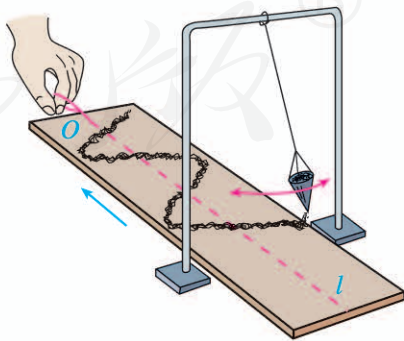
练习

1. 某简谐运动的图象如图所示, 试根据图象回答下列问题:

- (1) 这个简谐运动的振幅、周期与频率各是多少?
- (2) 写出这个简谐运动的函数解析式.



(第 1 题)

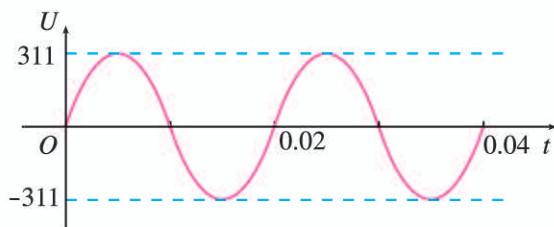


(第 2 题)

2. 如图, 一根绝对刚性且长度不变、质量可忽略不计的线, 一端固定, 另一端悬挂一个沙漏. 让沙漏在偏离平衡位置一定角度 (最大偏角) 后在重力作用下在铅垂面内做周期摆动. 若线长为 l cm, 沙漏摆动时离开平衡位置的位移 s (单位: cm) 与时间 t (单位: s) 的函数关系是

$$s = 3\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \frac{\pi}{3}\right), t \in [0, +\infty).$$

- (1) 当 $l=25$ 时, 求该沙漏的最大偏角 (精确到 0.0001 rad);
- (2) 已知 $g=9.8 \text{ m/s}^2$, 要使沙漏摆动的周期是 1 s , 线的长度应当是多少 (精确到 0.1 cm)?
3. 一台发电机产生的电流是正弦式电流, 电压和时间之间的关系如图所示. 由图象说出它的周期、频率和电压的最大值, 并求出电压 U (单位: V) 关于时间 t (单位: s) 的函数解析式.



(第3题)

匀速圆周运动、简谐运动和交变电流都是理想化的运动变化现象, 可以用三角函数模型准确地描述它们的运动变化规律. 在现实生活中也有大量运动变化现象, 仅在一定范围内呈现出近似于周期变化的特点, 这些现象也可以借助三角函数近似地描述.

例1 如图 5.7-3, 某地一天从 6~14 时的温度变化曲线近似满足函数

$$y = A\sin(\omega x + \varphi) + b.$$

- (1) 求这一天 6~14 时的最大温差;
- (2) 写出这段曲线的函数解析式.

解: (1) 由图 5.7-3 可知, 这段时间的最大温差是 20°C .

(2) 由图 5.7-3 可以看出, 从 6~14 时的图象是函数

$$y = A\sin(\omega x + \varphi) + b$$

的半个周期的图象, 所以

$$A = \frac{1}{2}(30 - 10) = 10, b = \frac{1}{2}(30 + 10) = 20.$$

因为 $\frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{\omega} = 14 - 6$, 所以 $\omega = \frac{\pi}{8}$.

将 $A=10$, $b=20$, $\omega=\frac{\pi}{8}$, $x=6$, $y=10$ 代入①式, 可得 $\varphi=\frac{3\pi}{4}$.

综上, 所求解析式为

$$y = 10\sin\left(\frac{\pi}{8}x + \frac{3\pi}{4}\right) + 20, x \in [6, 14].$$

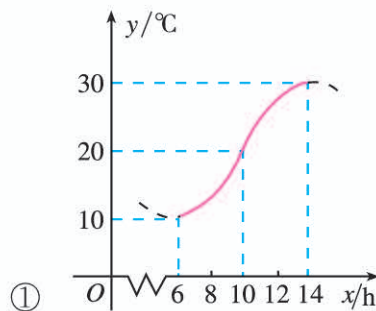


图 5.7-3

一般地, 所求出的函数模型只能近似刻画这天某个时段的温度变化情况, 因此应当特别注意自变量的变化范围.

例 2 海水受日月的引力，在一定的时候发生涨落的现象叫潮. 一般地，早潮叫潮，晚潮叫汐. 在通常情况下，船在涨潮时驶进航道，靠近码头；卸货后，在落潮时返回海洋. 表 5.7-2 是某港口某天的时刻与水深关系的预报.

表 5.7-2

时刻	水深/m	时刻	水深/m	时刻	水深/m
0: 00	5.0	9: 18	2.5	18: 36	5.0
3: 06	7.5	12: 24	5.0	21: 42	2.5
6: 12	5.0	15: 30	7.5	24: 00	4.0

(1) 选用一个函数来近似描述这一天该港口的水深与时间的关系，给出整点时水深的近似数值（精确到 0.001 m）.

(2) 一条货船的吃水深度（船底与水面的距离）为 4 m，安全条例规定至少要有 1.5 m 的安全间隙（船底与洋底的距离），该船这一天何时能进入港口？在港口能待多久？

(3) 某船的吃水深度为 4 m，安全间隙为 1.5 m，该船这一天在 2: 00 开始卸货，吃水深度以 0.3 m/h 的速度减少. 如果这条船一直卸货，那么港口水深将在某一时刻与这条船需要的安全水深相等. 为了安全，这条船需要在这时刻前至少 0.4 h 停止卸货并驶离港口，那么该船最好在什么时间停止卸货并驶离港口？

分析：观察问题中所给出的数据，可以看出，水深的变化具有周期性. 根据表 5.7-2 中的数据画出散点图，如图 5.7-4. 从散点图的形状可以判断，这个港口的水深与时间的关系可以用形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+h$ 的函数来刻画，其中 x 是时间， y 是水深. 根据数据可以确定 A, ω, φ, h 的值.

解：(1) 以时间 x （单位：h）为横坐标，水深 y （单位：m）为纵坐标，在直角坐标系中画出散点图（图 5.7-4）. 根据图象，可以考虑用函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+h$ 刻画水深与时间之间的对应关系. 从数据和图象可以得出：

$$A=2.5, h=5, T=12.4, \varphi=0;$$

$$\text{由 } T=\frac{2\pi}{\omega}=12.4, \text{ 得}$$

$$\omega=\frac{5\pi}{31}.$$

所以，这个港口的水深与时间的关系可用函数 $y=2.5\sin\frac{5\pi}{31}x+5$ 近似描述.

由上述关系式易得港口在整点时水深的近似值（表 5.7-3）：

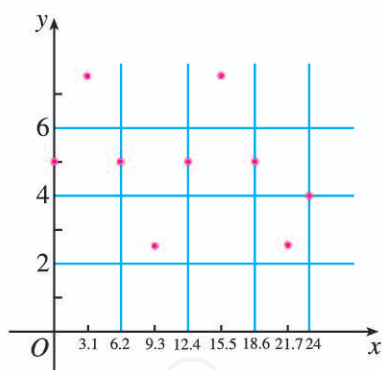


图 5.7-4

表 5.7-3

时刻	0: 00	1: 00	2: 00	3: 00	4: 00	5: 00	6: 00	7: 00	8: 00	9: 00	10: 00	11: 00
水深 /m	5.000	6.213	7.122	7.497	7.245	6.428	5.253	4.014	3.023	2.529	2.656	3.372
时刻	12: 00	13: 00	14: 00	15: 00	16: 00	17: 00	18: 00	19: 00	20: 00	21: 00	22: 00	23: 00
水深 /m	4.497	5.748	6.812	7.420	7.420	6.812	5.748	4.497	3.372	2.656	2.529	3.023

(2) 货船需要的安全水深为 $4+1.5=5.5$ m, 所以当 $y \geq 5.5$ 时就可以进港. 令

$$2.5 \sin \frac{5\pi}{31}x + 5 = 5.5,$$

$$\sin \frac{5\pi}{31}x = 0.2.$$

由计算器可得



$$\text{SHIFT} \quad \sin^{-1} \quad 0 \quad . \quad 2 \quad = \quad 0.201 \ 357 \ 9208 \approx 0.201 \ 4.$$

科学计算器上, 有 $\sin^{-1}$ 、 $\cos^{-1}$ 、 $\tan^{-1}$ 三个键, 在已知一个三角函数值时, 可以利用它们求出对应的角.

如图 5.7-5, 在区间 $[0, 12]$ 内, 函数 $y = 2.5 \sin \frac{5\pi}{31}x + 5$ 的图象与直线 $y = 5.5$ 有两个交点 A, B , 因此

$$\frac{5\pi}{31}x \approx 0.201 \ 4, \text{ 或 } \pi - \frac{5\pi}{31}x \approx 0.201 \ 4.$$

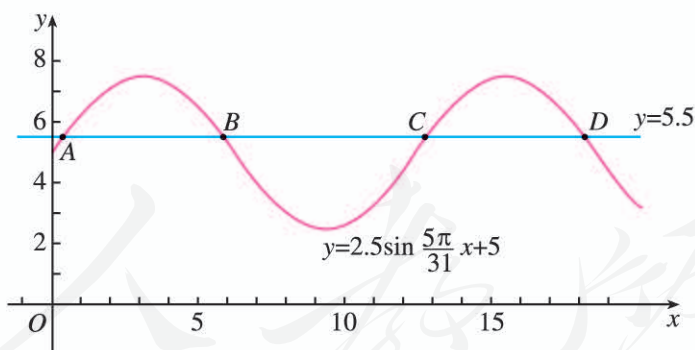


图 5.7-5

解得

$$x_A \approx 0.397 \ 5, \ x_B \approx 5.802 \ 5.$$

由函数的周期性易得:

$$x_C \approx 12.4 + 0.397 \ 5 = 12.797 \ 5,$$

$$x_D \approx 12.4 + 5.802 \ 5 = 18.202 \ 5.$$

因此, 货船可以在零时 30 分左右进港, 5 时 45 分左右出港; 或在 13 时左右进港, 18 时左右出港. 每次可以在港口停留 5 小时左右.

(3) 设在 x h 时货船的安全水深为 y m, 那么 $y=5.5-0.3(x-2)(x \geq 2)$. 在同一直角坐标系内画出这两个函数的图象, 可以看到在 6~8 时之间两个函数图象有一个交点 (图 5.7-6).

借助计算工具, 用二分法可以求得点 P 的坐标约为 $(7.016, 3.995)$, 因此为了安全, 货船最好在 6.6 时之前停止卸货并驶离港口.

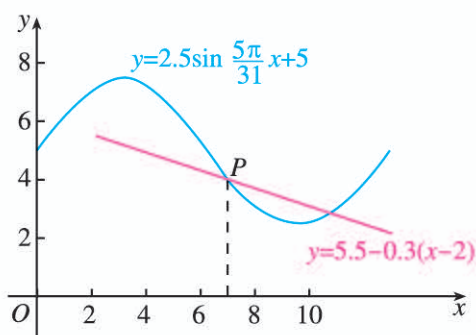


图 5.7-6

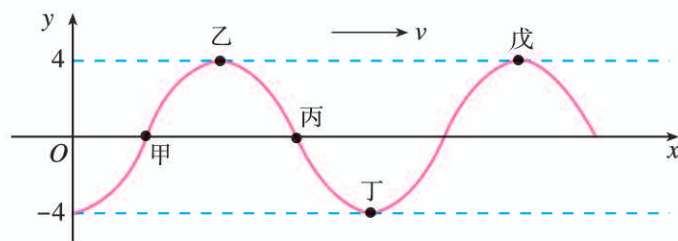
三角函数作为描述现实世界中周期现象的一种数学模型, 可以用来研究很多问题, 在刻画周期变化规律、预测其未来等方面都发挥着十分重要的作用.

具体地, 我们可以利用搜集到的数据, 先画出相应的“散点图”、观察散点图, 然后进行函数拟合获得具体的函数模型, 最后利用这个函数模型来解决相应的实际问题.

实际问题通常涉及复杂的数据, 因此往往需要使用信息技术.

练习

1. 下图为一向右传播的绳波在某一时刻绳子各点的位置图, 经过 $\frac{1}{2}$ 周期后, 乙点的位置将移至何处?



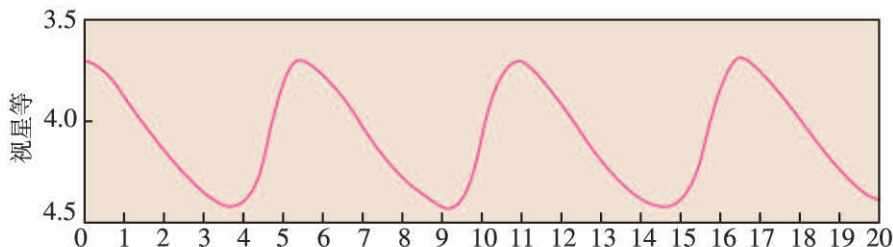
(第 1 题)

2. 自出生之日起, 人的体力、情绪、智力等心理、生理状况就呈周期变化. 根据心理学家的统计, 人体节律分为体力节律、情绪节律和智力节律三种. 这些节律的时间周期分别为 23 天、28 天、33 天. 每个节律周期又分为高潮期、临界日和低潮期三个阶段. 以上三个节律周期的半数为临界日, 这就是说 11.5 天、14 天、16.5 天分别为体力节律、情绪节律和智力节律的临界日. 临界日的前半期为高潮期, 后半期为低潮期. 生日前一天是起始位置 (平衡位置), 请根据自己的出生日期, 绘制自己的体力、情绪和智力曲线, 并总结自己在什么时候应当控制情绪, 在什么时候应当鼓励自己; 在什么时候应当加强锻炼, 在什么时候应当保持体力.



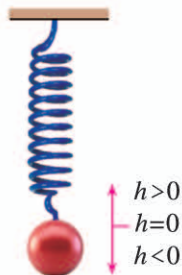
综合运用

1. 天上有些恒星的亮度是会变化的, 其中一种称为造父(型)变星, 本身体积会膨胀收缩造成亮度周期性的变化. 下图是一造父变星的亮度随时间的周期变化图. 此变星的亮度变化的周期为多少天? 最亮时是几等星? 最暗时是几等星?



(第 1 题)

2. 如图, 弹簧挂着的小球做上下运动, 它在 t s 时相对于平衡位置的高度 h (单位: cm) 由关系式 $h = 2\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ 确定. 以 t 为横坐标, h 为纵坐标, 画出这个函数在一个周期的闭区间上的图象, 并回答下列问题:



(第 2 题)

- (1) 小球在开始振动 (即 $t=0$) 时的位置在哪里?
- (2) 小球的最高点和最低点与平衡位置的距离分别是多少?
- (3) 经过多少时间小球往复运动一次?
- (4) 每秒钟小球能往复振动多少次?



拓广探索

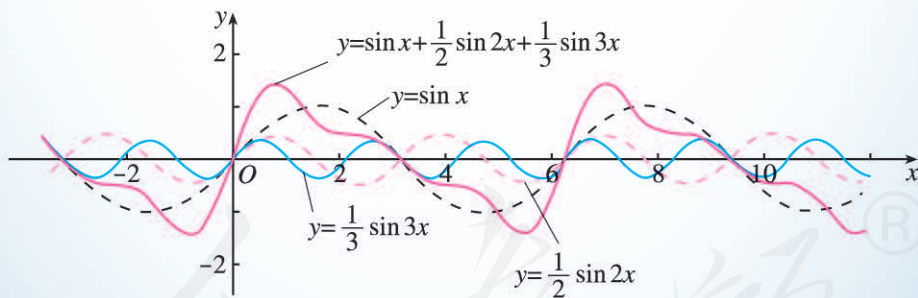
3. 北京天安门广场的国旗每天是在日出时随太阳升起, 在日落时降旗. 请根据年鉴或其他参考资料, 统计过去一年不同日期的日出和日落时间.
- (1) 在同一直角坐标系中, 以日期为横轴, 画出散点图, 并用曲线去拟合这些数据, 同时找到函数模型;
 - (2) 某同学准备在五一长假时去看升旗, 他应当在几点前到达天安门广场?
4. 夏天是用电的高峰时期, 特别是在晚上, 为保证居民空调制冷用电, 电力部门不得不对企事业单位拉闸限电, 而到了零时以后, 又出现电力过剩的情况. 因此每天的用电也出现周期性的变化. 为保证居民用电, 电力部门提出了“错峰平谷”的想法, 即提高晚上高峰时期的电价, 同时降低后半夜低峰时期的电价, 鼓励各单位在低峰时用电. 请调查你们地区每天的用电情况, 制定一项“错峰平谷”的电价方案.



振幅、周期、频率、相位

人体就是一个包含各种周期运动的生物体，医学上把周期为 24 小时的生理运动称为中周期运动，如血压、血糖浓度的变化；小于 24 小时的叫短周期运动，如心跳、脉搏每分 50~70 次、呼吸每分 16~24 次；大于 24 小时的叫长周期运动，如人的情绪、体力、智力等。

声音中也包含着正弦函数，声音是由于物体的振动产生的能引起听觉的波。每一个音都是由纯音合成的，纯音的数学模型是函数 $y = A \sin \omega t$ 。音有四要素：音调、响度、音长和音色。这都与正弦函数的参数有关。响度与振幅有关，即与声波的能量有关，振幅越大，响度越大。音长也与振幅有关，声音消失过程是由于声波在传播过程中受阻尼振动，系统的机械能随时间逐渐减小，振动的振幅也逐渐减小。音调与声波的振动频率是有关的，频率低的声音低沉，频率高的声音尖利。像我们平时听到的乐音不只是一个音在响，而是许多个音的结合，称为复合音。复合音的产生是因为发声体在全段振动，产生频率为 f 的基音的同时，其各部分，如二分之一、三分之一、四分之一部分也在振动，产生的频率恰好是全段振动频率的倍数，如 $2f$, $3f$, $4f$ 等。这些音叫谐音，因为其振幅较小，我们一般不易单独听出来。所以我们听到的声音的函数是 $y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{4} \sin 4x + \dots$ 。

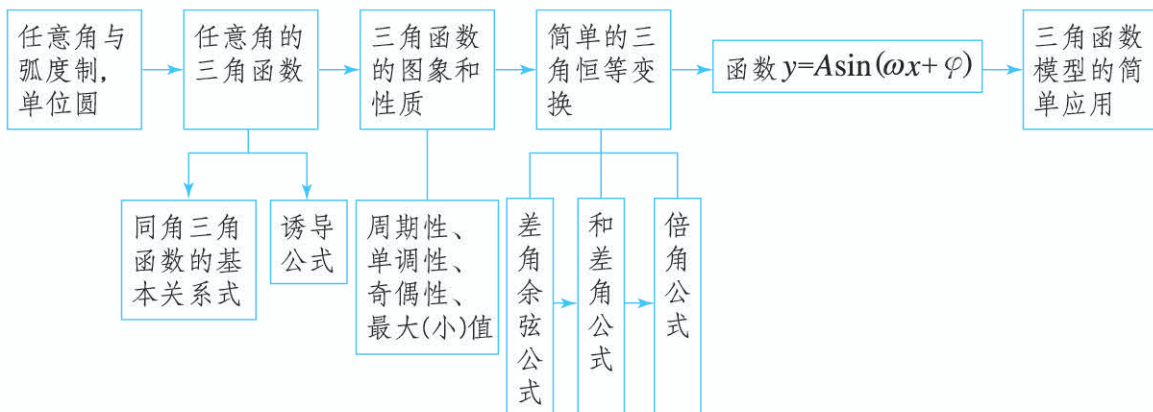


音色一般是由基音和谐音的综合作用所决定的，不同乐器、不同人发出的音调可以相同，但音色不同，人们由此分辨出不同的声音。

周期函数产生了美妙的音乐！

小结

一、本章知识结构



二、回顾与思考

现实世界中存在着大量周期现象，任意角的三角函数就是刻画这种现象的基本而有效的数学模型。

为了建立三角函数概念，本章我们先把角的范围推广到任意角，并引进弧度制；然后借助单位圆建立了一般三角函数的概念。接着，利用单位圆的性质（主要是对称性），用几何直观和代数运算的方法研究了三角函数的周期性、对称性、单调性和最大（小）值等性质。和（差）角公式、倍角公式等反映了三角函数之间的内在联系，也是圆的几何性质的代数表示，我们借助单位圆，通过代数运算对这些关系进行了研究。最后，利用三角函数的概念和性质，建立了具有广泛应用价值的函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ ，并用它解决了许多实际问题。

根据第三章给出的概念，函数是两个实数集之间的对应。这样，我们不仅可以对各种函数进行加、减、乘、除等运算，还可以在自变量与函数值之间进行运算，从而使函数具有更广泛的应用。弧度制的本质是用长度单位来度量角的大小，统一了三角函数自变量和函数值的单位，从而使三角函数成为从实数集到实数集之间的对应。如果只用角度制，那么将导致自变量是60进位的角度、函数值是10进位的实数，例如 $60^\circ+\sin 60^\circ$ 之类的运算将失去意义。所以，弧度制的引入对建立任意角的三角函数概念是至关重要的。在本章中已经看到，三角函数可以刻画振动、波动等大量周期现象，它们的自变量不是角度，而是时间、距离等其他量，这也说明了引入弧度制的必要性。在今后的学习中，我们还会不断体验到引入弧度制对拓展三角函数应用范围的必要性。

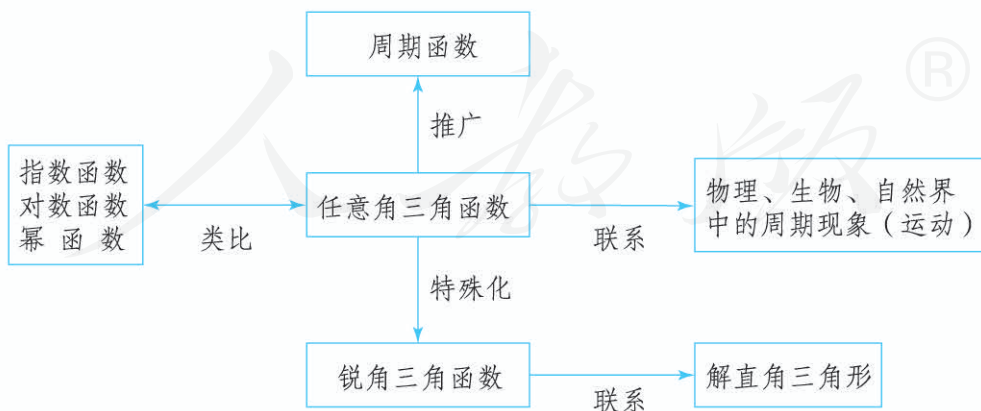
将角放在直角坐标系中讨论不但使角的表示有了统一的方法，而且使我们能

够借助直角坐标系中的单位圆，建立角的变化与单位圆上点的变化之间的对应关系，从而建立正弦函数、余弦函数. 因此，正弦函数、余弦函数的性质与圆的几何性质（主要是对称性）之间存在着非常紧密的联系. 例如，和单位圆相关的“勾股定理”与同角三角函数的基本关系有内在的一致性；单位圆周长为 2π 与正弦函数、余弦函数的周期为 2π 是一致的；圆的各种对称性与三角函数的奇偶性、诱导公式等也是一致的；等等. 因此，在研究三角函数时，单位圆的作用非常重要.

周期性是三角函数最重要的性质，利用周期性，我们只要研究清楚三角函数在一个最小正周期内的性质即可；除了奇偶性外，三角函数还有非常丰富的对称性，诱导公式就是三角函数对称性的体现. 利用周期性、奇偶性和诱导公式等可以发现， x 轴上的点 $(k\pi, 0) (k \in \mathbf{Z})$ 都是正弦函数 $y = \sin x$ 的对称中心，而直线 $x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 则都是正弦函数 $y = \sin x$ 的对称轴. 对于余弦函数、正切函数可以得到类似的结论.

本章出现了大量三角公式，这些公式具有紧密的联系. 其中，和（差）角公式具有一般意义，诱导公式、倍角公式等都可以看作它的特例. 学习时要充分利用这种联系性，避免对公式的死记硬背.

三角函数是一类特殊的周期函数，在研究三角函数时，既可以联系物理、生物、自然界中的周期现象（运动），也可以从已学过的指数函数、对数函数、幂函数等得到启发，还要注意与锐角三角函数建立联系. 这种关系可以用以下框图表示：



请你带着下面的问题，复习一下全章内容吧！

1. 从本章的学习中可以看到，弧度制的引入为三角函数的研究奠定了基础. 你能概括一下引入弧度制的必要性吗？

2. 回顾三角函数的定义方法, 说说它与幂函数、指数函数的定义方法的共性和差异性.

3. 单位圆在三角函数的研究中有非常重要的作用. 你能借助单位圆, 自己归纳一下研究三角函数的图象与性质的过程与方法吗?

4. 两角差的余弦公式 $C_{(\alpha-\beta)}$ 不仅是和 (差) 角公式的基础, 也可以看成诱导公式的一般化. 你能画一张本章公式的“逻辑图”吗? 推导这些公式的过程中用到了哪些数学思想方法?

5. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 在刻画周期现象时有着非常重要的作用, 其中参数 ω, φ, A 都有相应的实际意义. 你能借助匀速圆周运动或其他周期现象 (如简谐振动、单摆等), 说明这些参数的意义, 以及它们的变化对函数图象的影响吗?

6. 你能针对现实生活中的某种周期现象, 用适当的方法搜集数据, 并利用这些数据为这种周期现象建立一个函数模型吗?

复习参考题 5



复习巩固

1. 写出与下列各角终边相同的角的集合 S , 并且把 S 中适合不等式 $-2\pi \leq \beta < 4\pi$ 的元素 β 写出来:

(1) $\frac{\pi}{4}$; (2) $-\frac{2}{3}\pi$; (3) $\frac{12}{5}\pi$; (4) 0 .

2. 一个扇形的弧长与面积的数值都是 5, 求这个扇形中心角的度数 (精确到 1°).

3. (1) 已知 $\cos \varphi = \frac{1}{4}$, 求 $\sin \varphi, \tan \varphi$.

(2) 已知 $\sin x = 2\cos x$, 求角 x 的三个三角函数值.

4. 已知 $\tan \alpha = -\frac{1}{3}$, 计算:

(1) $\frac{\sin \alpha + 2\cos \alpha}{5\cos \alpha - \sin \alpha}$; (2) $\frac{1}{2\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}$;

(3) $\sin \alpha \cos \alpha$; (4) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2$.

5. 计算 (可用计算工具, 第(2)(3)题精确到 0.000 1):

(1) $\sin \frac{25}{6}\pi + \cos \frac{25}{3}\pi + \tan\left(-\frac{25}{4}\pi\right)$; (2) $\sin 2 + \cos 3 + \tan 4$;

(3) $\cos(\sin 2)$.

6. 设 $\pi < x < 2\pi$, 填表:

x	$\frac{7\pi}{6}$				$\frac{7\pi}{4}$	
$\sin x$				-1		
$\cos x$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$				$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan x$			$\sqrt{3}$			

7. 求下列函数的最大值、最小值, 并求使函数取得最大、最小值的 x 的集合:

(1) $y = \sqrt{2} + \frac{\sin x}{\pi}$; (2) $y = 3 - 2\cos x$.

8. 画出下列函数在长度为一个周期的闭区间上的简图, 并指出分别由函数 $y = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$ 的图象经过怎样的变换得到:

(1) $y = \frac{1}{2} \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$; (2) $y = -2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

(3) $y = 1 - \sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right)$; (4) $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{3}\right)$.

9. (1) 用描点法画出函数 $y = \sin x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 的图象.

(2) 如何根据第 (1) 小题并运用正弦函数的性质, 得到函数 $y = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$ 的图象?

(3) 如何根据第 (2) 小题并通过平行移动坐标轴, 得到函数 $y = \sin(x + \varphi) + k$, $x \in [0, 2\pi]$ (φ, k 都是常数) 的图象?

10. 不通过画图, 写出下列函数的振幅、周期、初相, 并说明如何由正弦曲线得到它们的图象:

(1) $y = \sin\left(5x + \frac{\pi}{6}\right)$; (2) $y = 2\sin \frac{1}{6}x$.

11. (1) 已知 α, β 都是锐角, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}$, 求 $\sin \beta$ 的值;

(2) 已知 $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{3}{5}$, $\sin\left(\frac{5\pi}{4} + \beta\right) = -\frac{12}{13}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$, $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, 求 $\sin(\alpha + \beta)$ 的值;

(3) 已知 α, β 都是锐角, $\tan \alpha = \frac{1}{7}$, $\sin \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}$, 求 $\tan(\alpha + 2\beta)$ 的值.

12. (1) 证明 $\tan \alpha + \tan \beta = \tan(\alpha + \beta) - \tan \alpha \tan \beta \tan(\alpha + \beta)$;

(2) 求 $\tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \sqrt{3} \tan 20^\circ \tan 40^\circ$ 的值;

(3) 若 $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$, 求 $(1 - \tan \alpha)(1 - \tan \beta)$ 的值;

(4) 求 $\frac{\tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \tan 120^\circ}{\tan 20^\circ \tan 40^\circ}$ 的值.

13. 化简:

(1) $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$; (2) $\sin 40^\circ (\tan 10^\circ - \sqrt{3})$;

(3) $\tan 70^\circ \cos 10^\circ (\sqrt{3} \tan 20^\circ - 1)$; (4) $\sin 50^\circ (1 + \sqrt{3} \tan 10^\circ)$.

14. (1) 已知 $\cos \theta = -\frac{3}{5}$, $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, 求 $(\sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2})^2$ 的值;

(2) 已知 $\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{5}$, 求 $\sin \alpha$ 的值;

(3) 已知 $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta = \frac{5}{9}$, 求 $\sin 2\theta$ 的值;

(4) 已知 $\cos 2\theta = \frac{3}{5}$, 求 $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta$ 的值.

15. (1) 已知 $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{5}$, $\cos(\alpha - \beta) = \frac{3}{5}$, 求 $\tan \alpha \tan \beta$ 的值;

(2) 已知 $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{2}$, $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{3}$, 求 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值.

综合运用

16. 证明:

(1) $\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3 = 8\cos^4 \alpha$;

(2) $\frac{1 + \sin 2\alpha}{2 \cos^2 \alpha + \sin 2\alpha} = \frac{1}{2} \tan \alpha + \frac{1}{2}$;

(3) $\frac{\sin(2\alpha + \beta)}{\sin \alpha} - 2\cos(\alpha + \beta) = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$;

(4) $\frac{3 - 4\cos 2A + \cos 4A}{3 + 4\cos 2A + \cos 4A} = \tan^4 A$.

17. 已知 $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{5}$, $0 \leq \alpha \leq \pi$, 求 $\sin(2\alpha - \frac{\pi}{4})$ 的值.

18. 已知 $\cos(\frac{\pi}{4} + x) = \frac{3}{5}$, $\frac{17\pi}{12} < x < \frac{7\pi}{4}$, 求 $\frac{\sin 2x + 2 \sin^2 x}{1 - \tan x}$ 的值.

19. 已知 $\sin \theta + \cos \theta = 2\sin \alpha$, $\sin \theta \cos \theta = \sin^2 \beta$, 求证 $4\cos^2 2\alpha = \cos^2 2\beta$.

20. 已知函数 $f(x) = \cos^4 x - 2\sin x \cos x - \sin^4 x$,

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, 求 $f(x)$ 的最小值以及取得最小值时 x 的集合.

21. 已知函数 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6}) + \sin(x - \frac{\pi}{6}) + \cos x + a$ 的最大值为 1,

(1) 求常数 a 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调递减区间;

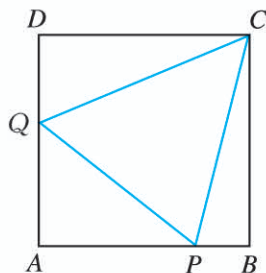
(3) 求使 $f(x) \geq 0$ 成立的 x 的取值集合.

22. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x + 2\cos^2 x + m$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为 6,

(1) 求常数 m 的值;

(2) 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最小值, 以及相应 x 的集合.

23. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 1, P, Q 分别为边 AB, DA 上的点. 当 $\triangle APQ$ 的周长为 2 时, 求 $\angle PCQ$ 的大小.

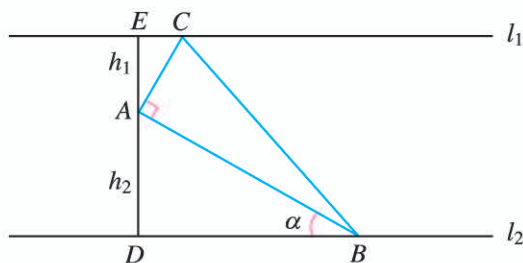


(第 23 题)

24. 已知 $\sin \beta + \cos \beta = \frac{1}{5}$, $\beta \in (0, \pi)$,

- (1) 求 $\tan \beta$ 的值;
- (2) 你能根据所给的条件, 自己构造出一些求值问题吗?

25. 如图, 已知直线 $l_1 \parallel l_2$, A 是 l_1, l_2 之间的一点, 并且点 A 到 l_1, l_2 的距离分别为 h_1, h_2 . B 是直线 l_2 上一动点, 作 $AC \perp AB$, 且使 AC 与直线 l_1 交于点 C . 设 $\angle ABD = \alpha$.



(第 25 题)

- (1) 写出 $\triangle ABC$ 的面积 S 关于角 α 的函数解析式 $S(\alpha)$;
- (2) 画出上述函数的图象;
- (3) 由(2)中的图象求 $S(\alpha)$ 的最小值.

26. 英国数学家泰勒给出如下公式:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

其中 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n$.

这些公式被编入计算工具, 计算工具计算足够多的项就可以确保显示值的精确性. 比如, 用

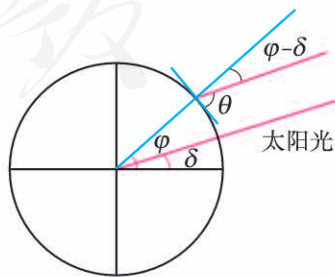
前三项计算 $\cos 0.3$, 就得到 $\cos 0.3 \approx 1 - \frac{0.3^2}{2!} + \frac{0.3^4}{4!} = 0.955\ 337\ 5$.

试用你的计算工具计算 $\cos 0.3$, 并与上述结果比较.

27. 在地球公转过程中, 太阳直射点的纬度随时间周而复始不断变化.

- (1) 如图, 设地球表面某地正午太阳高度角为 θ , δ 为此时太阳直射点的纬度, φ 为当地的纬度值, 那么这三个量满足 $\theta = 90^\circ - |\varphi - \delta|$.

某科技小组以某年春分(太阳直射赤道且随后太阳直射点逐渐北移的时间)为初始时间, 统计了连续 400 天太阳直射点的纬度平均值(太阳直射北半球时取正值, 太阳直射南半球时取负值). 下面是该科技小组的三处观测站成员在春分后第 45 天测得的当地太阳高度角数据:



(第 27 题)

	观测站		
	A	B	C
观测站所在纬度 φ /度	40.000 0	23.439 3	0.000 0
观测站正午太阳高度角 θ /度	66.387 0	82.946 4	73.614 1
太阳直射点的纬度 δ /度			
太阳直射点的纬度平均值/度			

请根据数据完成上面的表格（计算结果精确到 0.000 1）；

- (2) 设第 x 天时太阳直射点的纬度平均值为 y . 该科技小组通过对数据的整理和分析, 推断 y 与 x 近似满足函数 $y = A \sin \omega x$, 其中 A 为北回归线的纬度值, 约为 23.439 291 1, 试利用 (1) 中的数据, 估计 ω 的值 (精确到 10^{-8});
- (3) 定义从某年春分到次年春分所经历的时间为一个回归年, 求一个回归年对应的天数 (精确到 0.000 1);
- (4) 利用 (3) 的结果, 估计每 400 年中, 应设定多少个闰年, 可使这 400 年与 400 个回归年所含的天数最为接近 (精确到 1).

人教版®

部分中英文词汇索引

中文	英文	页码
元素	element	2
集合	set	2
属于	belong to	2
子集	subset	7
真子集	proper subset	8
空集	empty set	8
并集	union set	10
交集	intersection set	11
全集	universal set	12
补集	complementary set	13
充分条件	sufficient condition	17
必要条件	necessary condition	17
充要条件	necessary and sufficient condition	21
全称量词	universal quantifier	26
存在量词	existential quantifier	27
基本不等式	basic inequality	44
一元二次不等式	quadratic inequality with one unknown	50
函数	function	62
定义域	domain	62
值域	range	62
增函数	increasing function	77
减函数	decreasing function	77
最大值	maximum value	80
最小值	minimum value	80
偶函数	even function	83
奇函数	odd function	84
幂函数	power function	89
根式	radical	104

续表

中文	英文	页码
指数函数	exponential function	113
对数	logarithm	122
常用对数	common logarithm	122
自然对数	natural logarithm	122
对数函数	logarithmic function	130
反函数	inverse function	134
零点	zero	142
二分法	bisection method	145
弧度	radian	172
正弦函数	sine function	178
余弦函数	cosine function	178
正切函数	tangent function	178
三角函数	trigonometric function	178
正弦曲线	sine curve	197
余弦曲线	cosine curve	199
周期函数	periodic function	201
周期	period	201
正切曲线	tangent curve	211

人教版®

后 记

本册教科书是人民教育出版社课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心依据教育部《普通高中数学课程标准(2017年版)》编写的,经国家教材委员会2019年审查通过.

本册教科书的编写,集中反映了我国十余年来普通高中课程改革的成果,吸取了2004年版《普通高中课程标准实验教科书·数学(A版)》的编写经验,凝聚了参与课改实验的教育专家、学科专家、教材编写专家、教研人员和一线教师,以及教材设计装帧专家的集体智慧.本册教科书的编写者还有李世杰、汪晓勤、金克勤等;本书插图绘制为王俊宏,为本书提供照片的有东方IC图片网(第1,36,59,167页各一张图)等.

我们感谢2004年版《普通高中课程标准实验教科书·数学(A版)》的主编刘绍学,副主编钱珮玲、章建跃,以及所有编写人员.我们感谢所有对教科书的编写、出版、试教等提供过帮助与支持的同仁和社会各界朋友.

本册教科书出版之前,我们通过多种渠道与教科书选用作品(包括照片、画作)的作者进行了联系,得到了他们的大力支持.对此,我们表示衷心的感谢!恳请未联系到的作者与我们联系,以便及时支付稿酬.

我们真诚地希望广大教师、学生及家长在使用本册教科书的过程中提出宝贵意见.我们将集思广益,不断修订,使教科书趋于完善.

联系方式

电话:010-58758866

电子邮箱:jcfk@pep.com.cn

人民教育出版社 课程教材研究所

中学数学课程教材研究开发中心

2019年4月



PUTONG GAOZHONG JIAOKESHU
SHUXUE

人教版®



绿色印刷产品

ISBN 978-7-107-13545-5



9 787107 135455 >

定价： 元