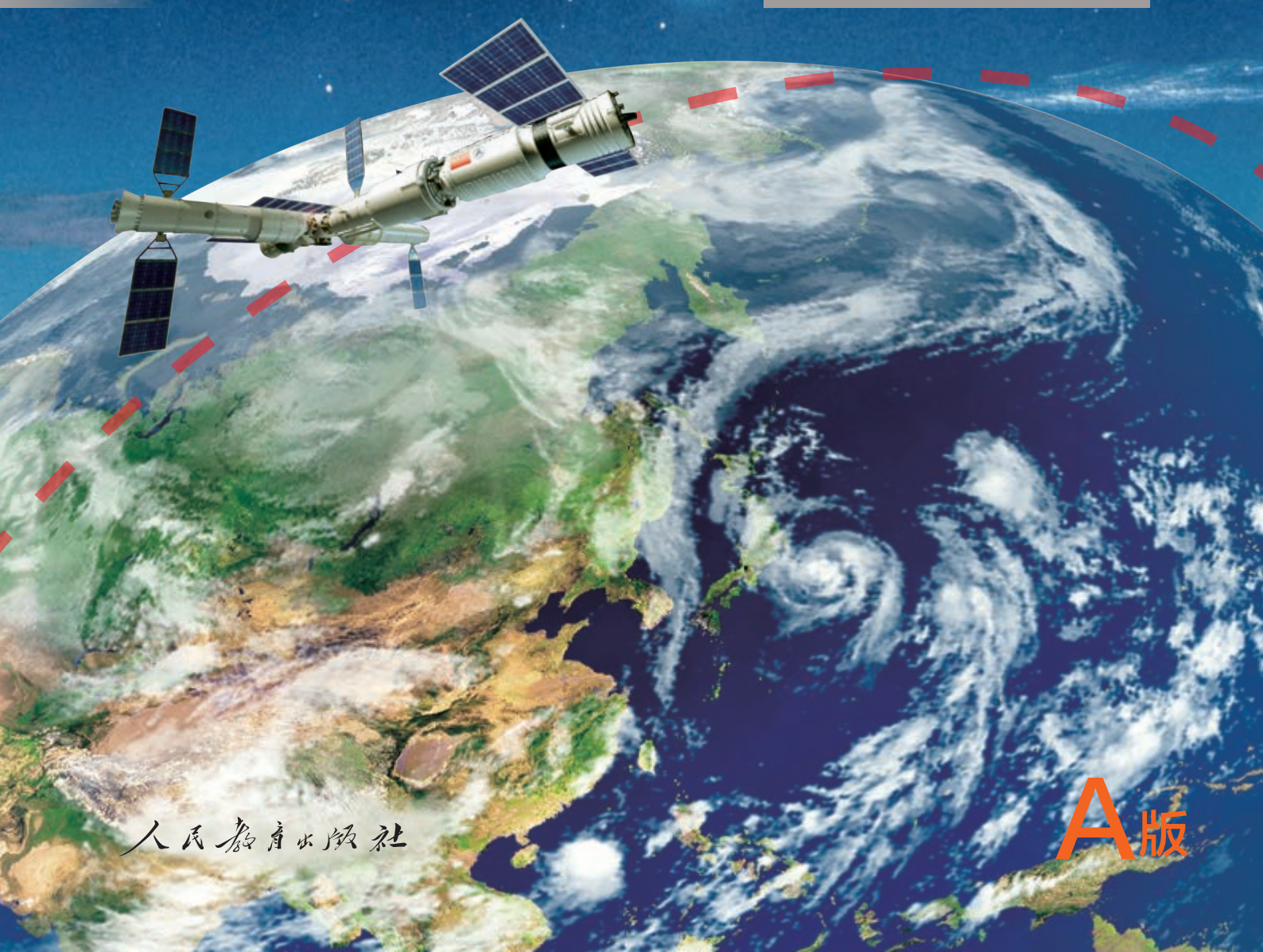
国家教材委员会专家委员会审核通过
2019

普通高中教科书

数学

选择性必修

第一册



人民教育出版社

A版

普 通 高 中 教 科 书

数学

选择性必修

第一册

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

人教版®

人民教育出版社
·北京·

A版

主　　编：章建跃　李增沪
副 主 编：李　勇　李海东　李龙才
本册主编：张劲松　申　铁

编写人员：王红权　申　铁　刘长明　李昌官　李建明
　　吴明华　俞求是　薛　彬

责任编辑：刘长明
美术编辑：王俊宏

普通高中教科书　数学　选择性必修　第一册
人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

出　　版　人民教育出版社
　　（北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）
网　　址　http://www.pep.com.cn

版权所有・未经许可不得采用任何方式擅自复制或使用本产品任何部分・违者必究
如发现内容质量问题，请登录中小学教材意见反馈平台：jcyjfk.pep.com.cn
如发现印、装质量问题，影响阅读，请与 ××× 联系调换。电话：×××–×××××××××

本册导引

本书根据《普通高中数学课程标准（2017 年版）》编写，包括“空间向量与立体几何”“直线和圆的方程”“圆锥曲线的方程”三章内容.

在必修（第二册）学习“平面向量及其应用”和“立体几何初步”的基础上，我们学习“**空间向量与立体几何**”. 在本章，我们将类比平面向量，学习空间向量的概念、线性运算和数量积运算、空间向量基本定理及空间向量的坐标运算，从中体会平面向量与空间向量的共性和差异；运用向量方法研究空间基本图形的平行、垂直等位置关系和距离、角度等度量问题，从中体会向量方法与综合几何方法的共性和差异；通过运用向量方法解决简单的数学问题和实际问题，感悟向量是研究几何问题的有效工具.

“直线和圆的方程”“圆锥曲线的方程”属于解析几何的内容. 解析几何是数学发展过程中的一个标志性成果，是微积分创立的基础. 我们将在平面直角坐标系中探索确定直线、圆、椭圆、双曲线、抛物线等几何图形的几何要素，并利用几何要素建立它们的方程；再通过方程，运用代数方法进一步认识直线、圆、圆锥曲线的性质以及它们之间的一些位置关系；通过运用解析几何方法解决简单的数学问题和实际问题，感悟解析几何中蕴含的数学思想和方法.

本册的研究对象是几何图形，所用的研究方法主要是代数方法. 通过学习，同学们将逐步体会用代数方法解决几何问题的“三步曲”：

第一步：用向量或坐标或方程表示几何问题中的几何要素，如点、直线、平面、圆、圆锥曲线等，把几何问题转化为代数问题；

第二步：通过代数运算，解决代数问题；

第三步：把代数运算的结果“翻译”成几何结论.

祝愿同学们通过本册书的学习，不但学到更多的数学知识，而且在数学能力、数学核心素养等方面都有较大的提高，并培养起更高的数学学习兴趣，形成对数学的更加全面的认识.

目 录



第一章　空间向量与立体几何 …… 1

1.1　空间向量及其运算 …… 2

1.2　空间向量基本定理 …… 11

1.3　空间向量及其运算的坐标表示 …… 16

阅读与思考　向量概念的推广与应用 …… 23

1.4　空间向量的应用 …… 26

小结 …… 45

复习参考题 1 …… 47



第二章　直线和圆的方程 …… 50

2.1　直线的倾斜角与斜率 …… 51

2.2　直线的方程 …… 59

探究与发现　方向向量与直线的参数方程 …… 68

2.3　直线的交点坐标与距离公式 …… 70

阅读与思考　笛卡儿与解析几何 …… 80

2.4　圆的方程 …… 82

阅读与思考　坐标法与数学机械化 …… 89

2.5　直线与圆、圆与圆的位置关系 …… 91

小结 …… 100

复习参考题 2 …… 102



第三章　圆锥曲线的方程 …… 104

3.1　椭圆 …… 105

信息技术应用　用信息技术探究点的轨迹：椭圆 … 116

3.2　双曲线 …… 118

探究与发现　为什么 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的渐近线 …… 128

3.3　抛物线 …… 130

探究与发现　为什么二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象是抛物线 …… 133

阅读与思考　圆锥曲线的光学性质及其应用 …… 140

文献阅读与数学写作 *　解析几何的形成与发展 …… 142

小结 …… 143

复习参考题 3 …… 145

部分中英文词汇索引 …… 147

第一章
空间向量与立体几何

通过“平面向量及其应用”的学习，我们知道，平面内的点、直线可以通过平面向量及其运算来表示，它们之间的平行、垂直、夹角、距离等关系可以通过平面向量运算而得到，从而有关平面图形的问题可以利用平面向量的方法解决. 在“立体几何初步”中，我们用综合几何方法研究了空间几何体的结构特征以及空间点、直线、平面的位置关系. 一个自然的想法是，能否把平面向量推广到空间向量，从而利用空间向量表示空间中点、直线、平面等基本元素，通过空间向量运算解决立体几何问题. 在本章，我们就来研究这些问题.

在本章学习中，我们要注意利用类比的方法理解空间向量的概念、运算、基本定理及其坐标表示，在此过程中体会平面向量与空间向量的共性和差异；在运用向量的方法研究空间基本图形的位置关系和度量关系的过程中，体会向量方法与综合几何方法的共性和差异；通过用向量方法解决数学问题和实际问题，感悟向量在研究几何问题中的作用.



1.1 空间向量及其运算

章前图展示的是一个做滑翔伞运动的场景. 可以想象，在滑翔过程中，飞行员会受到来自不同方向、大小各异的力，例如绳索的拉力、风力、重力等. 显然，这些力不在同一个平面内. 联想用平面向量解决物理问题的方法，能否把平面向量推广到空间向量，从而利用空间向量研究滑翔运动呢？下面我们类比平面向量研究空间向量，先从空间向量的概念和表示开始.

1.1.1 空间向量及其线性运算

与平面向量一样，在空间，我们把具有大小和方向的量叫做**空间向量**（space vector），空间向量的大小叫做空间向量的**长度**或**模**（modulus）. 空间向量用字母 $\boldsymbol{a}$[1]，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，… 表示. 空间中点的位移、物体运动的速度、物体受到的力等都可以用空间向量表示.

与平面向量一样，空间向量也用有向线段表示，有向线段的长度表示空间向量的模. 如图 1.1-1，向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点是 A，终点是 B，则向量 $\boldsymbol{a}$ 也可以记作 $\overrightarrow{AB}$，其模记为 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$. 图 1.1-2 所示的正方体中，过同一个顶点 O 的三条棱上的三条有向线段表示的三个向量为 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，它们是不共面的向量，即它们是不同在任何一个平面内的三个向量.

与平面向量一样，我们规定，长度为 0 的向量叫做**零向量**（zero vector），记为 $\boldsymbol{0}$. 当有向线段的起点 A 与终点 B 重合时，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{0}$. 模为 1 的向量叫做**单位向量**（unit vector）. 与向量 $\boldsymbol{a}$ 长度相等而方向相反的向量，叫做 $\boldsymbol{a}$ 的**相反向量**，记为 $-\boldsymbol{a}$.

如果表示若干空间向量的有向线段所在的直线互相平行或重合，那么这些向量叫做**共线向量**（collinear vectors）或**平行向量**（parallel vectors）. 我们规定：零向量与任意向量平行，即对于任意向量 $\boldsymbol{a}$，都有 $\boldsymbol{0}\parallel\boldsymbol{a}$.

[1] 印刷用黑体 $\boldsymbol{a}$，书写用 $\vec{a}$.

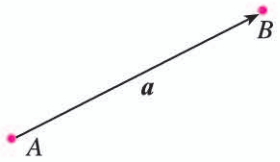


图 1.1-1

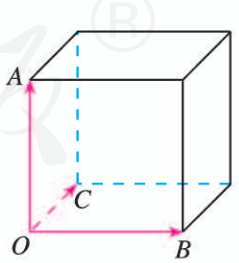


图 1.1-2

空间向量是平面向量的推广，其表示方法以及一些相关概念与平面向量一致.

方向相同且模相等的向量叫做**相等向量**（equal vectors）. 因此，在空间，同向且等长的有向线段表示同一向量或相等向量. 空间向量是自由的，所以对于空间中的任意两个非零向量，我们都可以通过平移使它们的起点重合. 因为两条相交直线确定一个平面，所以起点重合的两个不共线向量可以确定一个平面，也就是说，任意两个空间向量都可以平移到同一个平面内，成为同一平面内的两个向量. 如图 1.1-3，已知空间向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，以任意点 O 为起点，作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，我们就可以把它们平移到同一个平面 α 内.

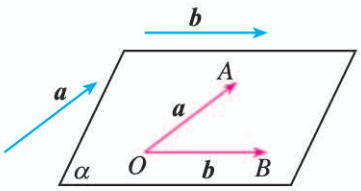


图 1.1-3

数学中，引进一种量后，一个很自然的问题就是要研究它们的运算. 由于任意两个空间向量都可以通过平移转化为同一平面内的向量，这样任意两个空间向量的运算就可以转化为平面向量的运算. 由此，我们把平面向量的线性运算推广到空间，定义空间向量的加法、减法（图 1.1-4）以及数乘运算（图 1.1-5）：

（1）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$；

（2）$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CA}$；

（3）当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{PQ}$；

当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{MN}$；

当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

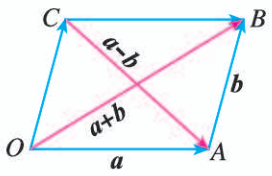


图 1.1-4

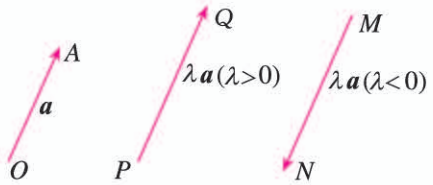


图 1.1-5

想一想，向量线性运算的结果，与向量起点的选择有关系吗？

与平面向量一样，空间向量的线性运算满足以下运算律（其中 λ，$\mu\in\mathbf{R}$）：

交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

你能证明这些运算律吗？证明结合律时，与证明平面向量的结合律有什么不同？

探究

如图 1.1-6，在平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，分别标出 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}$ 表示的向量. 从中你能体会向量加法运算的交换律和结合律吗？一般地，三个不共面的向量的和与这三个向量有什么关系？

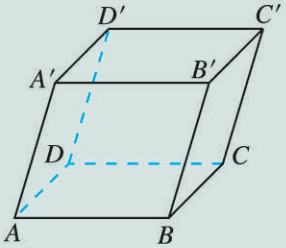


图 1.1-6

可以发现，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC'}$. 一般地，对于三个不共面的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，以任意点 O 为起点，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 为邻边作平行六面体，则 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的和等于以 O 为起点的平行六面体对角线所表示的向量. 另外，利用向量加法的交换律和结合律，还可以得到：有限个向量求和，交换相加向量的顺序，其和不变.

探究

对任意两个空间向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，如果 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ $(\lambda\in\mathbf{R})$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 有什么位置关系？反过来，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 有什么位置关系时，$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$？

类似于平面向量共线的充要条件，对任意两个空间向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0})$，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件是存在实数 λ，使

$$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}.$$

如图 1.1-7，O 是直线 l 上一点，在直线 l 上取非零向量 $\boldsymbol{a}$，则对于直线 l 上任意一点 P，由数乘向量的定义及向量共线的充要条件可知，存在实数 λ，使得

$$\overrightarrow{OP}=\lambda\boldsymbol{a}.$$

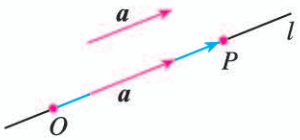


图 1.1-7

我们把与向量 $\boldsymbol{a}$ 平行的非零向量称为直线 l 的**方向向量**（direction vector）. 这样，直线 l 上任意一点都可以由直线 l 上的一点和它的方向向量表示，也就是说，直线可以由其上一点和它的方向向量确定.

如图 1.1-8，如果表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 所在的直线 OA 与直线 l 平行或重合，那么称向量 $\boldsymbol{a}$ 平行于直线 l. 如果直线 OA 平行于平面 α 或在平面 α 内，那么称向量 $\boldsymbol{a}$ 平行于平面 α. 平行于同一个平面的向量，叫做**共面向量**（coplanar vectors）.

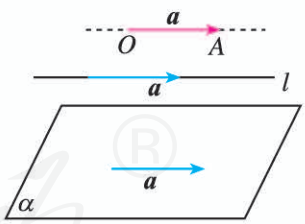


图 1.1-8

我们知道，任意两个空间向量总是共面的，但三个空间向量既可能是共面的，也可能是不共面的. 那么，什么情况下三个空间向量共面呢？

探究

对平面内任意两个不共线向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，由平面向量基本定理可知，这个平面内的任意一个向量 $\boldsymbol{p}$ 可以写成 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，其中 (x, y) 是唯一确定的有序实数对. 对两个不共线的空间向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，如果 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，那么向量 $\boldsymbol{p}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 有什么位置关系？反过来，向量 $\boldsymbol{p}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 有什么位置关系时，$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$？

可以发现，如果两个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，那么向量 $\boldsymbol{p}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共面的充要条件是存在唯一的有序实数对 (x, y)，使

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}.$$

例 1 如图 1.1-9，已知平行四边形 $ABCD$，过平面 AC 外一点 O 作射线 OA，OB，OC，OD，在四条射线上分别取点 E，F，G，H，使 $\dfrac{OE}{OA}=\dfrac{OF}{OB}=\dfrac{OG}{OC}=\dfrac{OH}{OD}=k$. 求证：$E$，$F$，$G$，$H$ 四点共面.

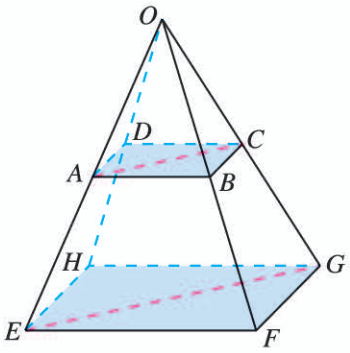


图 1.1-9

分析： 欲证 E，F，G，H 四点共面，只需证明 $\overrightarrow{EH}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{EG}$ 共面. 而由已知 $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 共面，可以利用向量运算由 $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 共面的表达式推得 $\overrightarrow{EH}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{EG}$ 共面的表达式.

证明： 因为 $\dfrac{OE}{OA}=\dfrac{OF}{OB}=\dfrac{OG}{OC}=\dfrac{OH}{OD}=k$，所以

$$\overrightarrow{OE}=k\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OF}=k\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OG}=k\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OD}.$$

因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}.$$

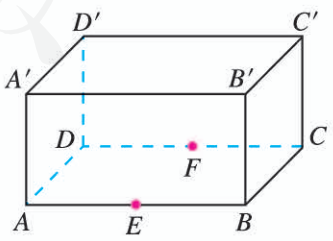
因此
$$\begin{aligned}\overrightarrow{EG}&=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OE}=k\overrightarrow{OC}-k\overrightarrow{OA}=k\overrightarrow{AC}\\&=k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})\\&=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}.\end{aligned}$$

选择恰当的向量表示问题中的几何元素，通过向量运算得出几何元素的关系，是解决立体几何问题的常用方法.

由向量共面的充要条件可知，$\overrightarrow{EH}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{EG}$ 共面，又 $\overrightarrow{EH}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{EG}$ 过同一点 E，从而 E，F，G，H 四点共面.

练习

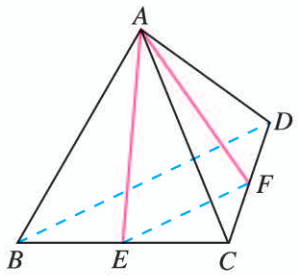
1. 举出一些表示三个不同在一个平面内的向量的实例.
2. 如图，E，F 分别是长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 的棱 AB，CD 的中点. 化简下列表达式，并在图中标出化简结果：
   (1) $\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{CB}$；　(2) $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}$；
   (3) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{B'D'}$；　(4) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CF}$.
3. 在图 1.1-6 中，用 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AA'}$ 表示 $\overrightarrow{A'C}$，$\overrightarrow{BD'}$ 及 $\overrightarrow{DB'}$.
4. 如图，已知四面体 $ABCD$，E，F 分别是 BC，CD 的中点. 化简下列表达式，并在图中标出化简结果：
   (1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$；　(2) $\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})$；　(3) $\overrightarrow{AF}-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.



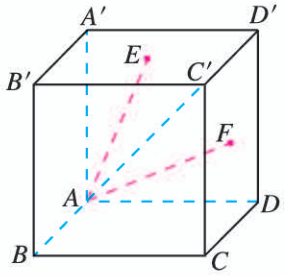
（第 2 题）

5. 如图，已知正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，E，F 分别是上底面 $A'C'$ 和侧面 CD' 的中心．求下列各式中 x，y 的值：

(1) $\overrightarrow{AC'}=x(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'})$；(2) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AA'}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$；(3) $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AA'}$.



（第 4 题）



（第 5 题）

1.1.2 空间向量的数量积运算

由于任意两个空间向量都可以通过平移转化为同一平面内的向量，因此，两个空间向量的夹角和数量积就可以像平面向量那样来定义.

如图 1.1-10，已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，在空间任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\angle AOB$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$.

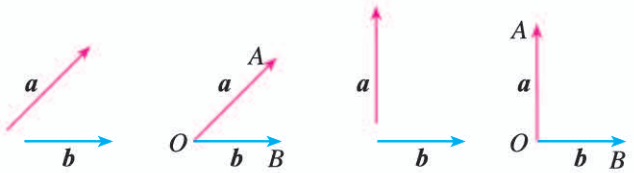


图 1.1-10

通常规定，$0\leqslant\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$. 这样，两个向量的夹角是唯一确定的，且 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle$.

如果 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{2}$，那么向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 互相垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$ 叫做 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的**数量积**（inner product），记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$. 即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle.$$

特别地，零向量与任意向量的数量积为 0.

由向量的数量积定义，可以得到：

$$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0;$$

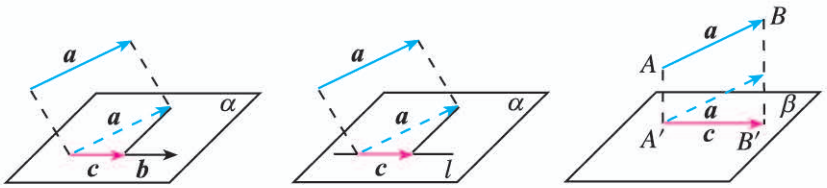
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle=|\boldsymbol{a}|^2.$$

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ 也记作 $\boldsymbol{a}^2$.

思考

在平面向量的学习中，我们学习了向量的投影．类似地，在空间，向量 $\boldsymbol{a}$ 向向量 $\boldsymbol{b}$ 的投影有什么意义？向量 $\boldsymbol{a}$ 向直线 l 的投影呢？向量 $\boldsymbol{a}$ 向平面 β 的投影呢？

如图 1.1-11(1)，在空间，向量 $\boldsymbol{a}$ 向向量 $\boldsymbol{b}$ 投影，由于它们是自由向量，因此可以先将它们平移到同一个平面 α 内，进而利用平面上向量的投影，得到与向量 $\boldsymbol{b}$ 共线的向量 $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$，向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量. 类似地，可以将向量 $\boldsymbol{a}$ 向直线 l 投影（图 1.1-11(2)）.



(1)　　(2)　　(3)

图 1.1-11

如图 1.1-11（3），向量 $\boldsymbol{a}$ 向平面 β 投影，就是分别由向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点 A 和终点 B 作平面 β 的垂线，垂足分别为 A'，B'，得到向量 $\overrightarrow{A'B'}$，向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在平面 β 上的投影向量. 这时，向量 $\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{A'B'}$ 的夹角就是向量 $\boldsymbol{a}$ 所在直线与平面 β 所成的角.

空间向量的数量积满足如下的运算律：

$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，$\lambda\in\mathbf{R}$；

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$（交换律）；

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$（分配律）.

思考

1. 对于三个均不为 0 的数 a，b，c，若 $ab=ac$，则 $b=c$. 对于向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，你能得到 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ 吗？如果不能，请举出反例.

2. 对于三个均不为 0 的数 a，b，c，若 $ab=c$，则 $a=\dfrac{c}{b}$（或 $b=\dfrac{c}{a}$）. 对于向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=k$，能不能写成 $\boldsymbol{a}=\dfrac{k}{\boldsymbol{b}}$（或 $\boldsymbol{b}=\dfrac{k}{\boldsymbol{a}}$）的形式？

3. 对于三个均不为 0 的数 a，b，c，有 $(ab)c=a(bc)$. 对于向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 成立吗？为什么？

例 2　如图 1.1-12，在平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，$AB=5$，$AD=3$，$AA'=7$，$\angle BAD=60°$，$\angle BAA'=\angle DAA'=45°$. 求：

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$；(2) AC' 的长（精确到 0.1）.

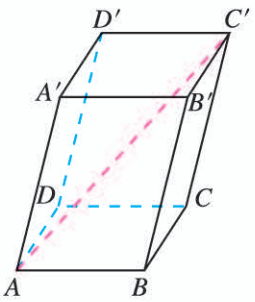


图 1.1-12

解：(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\rangle$

$=5\times3\times\cos\ 60°=7.5$；

(2) $|\overrightarrow{AC'}|^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'})^2$

$=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{AA'}|^2+2(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA'})$

$=5^2+3^2+7^2+2(5\times3\times\cos 60^\circ+5\times7\times\cos 45^\circ+3\times7\times\cos 45^\circ)$

$=98+56\sqrt{2}$,

所以 $AC'\approx13.3$.

由于空间向量的线性运算和数量积运算具有鲜明的几何背景，空间图形的许多性质可以由向量的线性运算及数量积运算表示出来，因此，立体几何中的许多问题可以用向量运算的方法加以解决.

例 3 如图 1.1-13，m，n 是平面 α 内的两条相交直线. 如果 $l\perp m$，$l\perp n$，求证：$l\perp\alpha$.

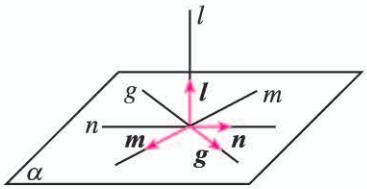


图 1.1-13

分析： 要证明 $l\perp\alpha$，就是要证明 l 垂直于 α 内的任意一条直线 g（直线与平面垂直的定义）. 如果我们能在 g 和 m，n 之间建立某种联系，并由 $l\perp m$，$l\perp n$，得到 $l\perp g$，那么就能解决此问题.

证明： 在平面 α 内作任意一条直线 g，分别在直线 l，m，n，g 上取非零向量 $\boldsymbol{l}$，$\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{g}$.

因为直线 m 与 n 相交，所以向量 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ 不平行. 由向量共面的充要条件可知，存在唯一的有序实数对 (x, y)，使

$$\boldsymbol{g}=x\boldsymbol{m}+y\boldsymbol{n}.$$

将上式两边分别与向量 $\boldsymbol{l}$ 作数量积运算，得

$$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{g}=x\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{m}+y\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}.$$

因为 $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{m}=0$，$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}=0$（为什么?），所以 $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{g}=0$.

所以 $l\perp g$.

这就证明了直线 l 垂直于平面 α 内的任意一条直线，所以 $l\perp\alpha$.

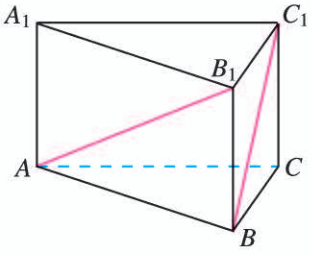
例 3 即为直线与平面垂直的判定定理的证明过程. 尝试用综合几何方法证明这个定理，并比较两种方法，你能从中体会到向量方法的优越性吗?

练习

1. 如图，在正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，若 $AB=\sqrt{2}BB_1$，则 AB_1 与 BC_1 所成角的大小为（　　）.

(A) 60°　　(B) 90°　　(C) 105°　　(D) 75°

2. 如图，正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 的棱长为 1，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$，求：

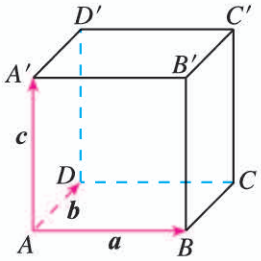


（第 1 题）

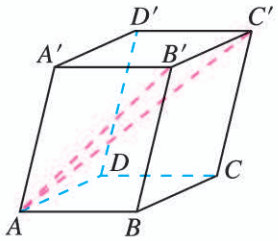
(1) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；　(2) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；　(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

3. 如图，在平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，$AB=4$，$AD=3$，$AA'=5$，$\angle BAD=90°$，$\angle BAA'=\angle DAA'=60°$. 求：

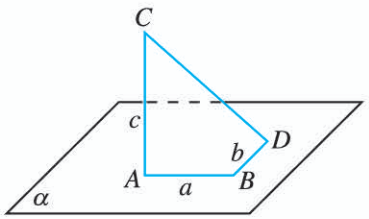
(1) $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{AB}$；　(2) AB' 的长；　(3) AC' 的长.



（第 2 题）



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，线段 AB，BD 在平面 α 内，$BD\perp AB$，$AC\perp\alpha$，且 $AB=a$，$BD=b$，$AC=c$. 求 C，D 两点间的距离.

习题 1.1

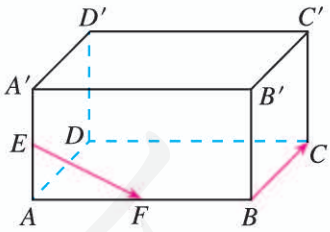
复习巩固

1. 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，E，F 分别为棱 AA'，AB 的中点.

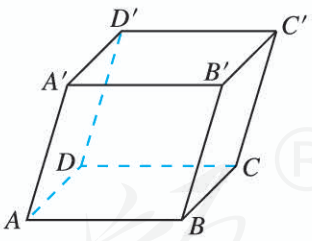
(1) 写出与向量 $\overrightarrow{BC}$ 相等的向量；

(2) 写出与向量 $\overrightarrow{BC}$ 相反的向量；

(3) 写出与向量 $\overrightarrow{EF}$ 平行的向量.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，已知平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，化简下列表达式，并在图中标出化简结果：

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$；　(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CC'}$；

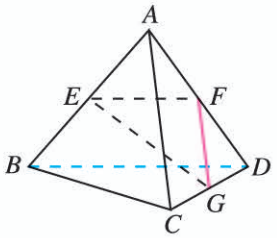
(3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CC'}$；　(4) $\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'})$.

3. 证明：如果向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，那么向量 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线.

4. 如图，已知四面体 $ABCD$ 的所有棱长都等于 a，E，F，G 分别是棱 AB，AD，DC 的中点. 求：

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$；　(2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DB}$；　(3) $\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{AC}$；

(4) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}$；　(5) $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{BA}$；　(6) $\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{GF}$.



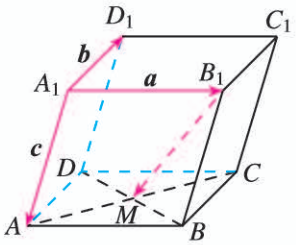
（第 4 题）

综合运用

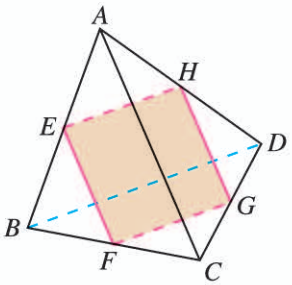
5. 如图，在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，AC 与 BD 的交点为 M. 设 $\overrightarrow{A_1B_1}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{A_1D_1}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{A_1A}=\boldsymbol{c}$，则下列向量中与 $\overrightarrow{B_1M}$ 相等的向量是（　　）.

（A）$-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　（B）$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$

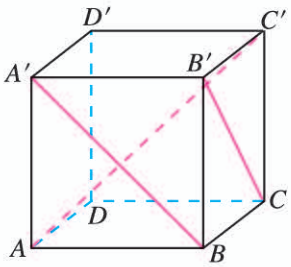
（C）$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　（D）$-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$



（第 5 题）



（第 6 题）



（第 7 题）

6. 如图，已知 E，F，G，H 分别为四面体 $ABCD$ 的棱 AB，BC，CD，DA 的中点，求证：E，F，G，H 四点共面.

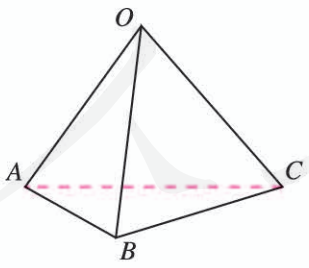
7. 如图，正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 的棱长为 a.

（1）求 $A'B$ 和 $B'C$ 的夹角；（2）求证：$A'B\perp AC'$.

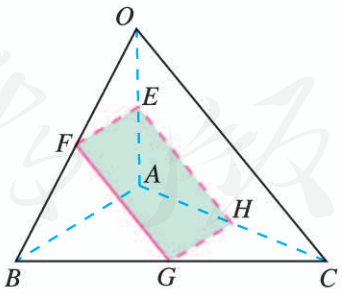
8. 用向量方法证明：在平面内的一条直线，如果与这个平面的一条斜线在这个平面上的射影垂直，那么它也与这条斜线垂直（三垂线定理）.

拓广探索

9. 如图，在四面体 $OABC$ 中，$OA\perp BC$，$OB\perp AC$. 求证：$OC\perp AB$.



（第 9 题）



（第 10 题）

10. 如图，在四面体 $OABC$ 中，$OA=OB$，$CA=CB$，E，F，G，H 分别是 OA，OB，BC，CA 的中点. 求证：四边形 $EFGH$ 是矩形.

1.2 空间向量基本定理

我们知道，平面内的任意一个向量 $\boldsymbol{p}$ 都可以用两个不共线的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 来表示（平面向量基本定理）. 类似地，任意一个空间向量能否用任意三个不共面的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 来表示呢?

我们先从空间中三个不共面的向量两两垂直这一特殊情况开始讨论.

如图 1.2-1，设 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 是空间中三个两两垂直的向量，且表示它们的有向线段有公共起点 O. 对于任意一个空间向量 $\boldsymbol{p}=\overrightarrow{OP}$，设 $\overrightarrow{OQ}$ 为 $\overrightarrow{OP}$ 在 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 所确定的平面上的投影向量，则 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}$. 又向量 $\overrightarrow{QP}$，$\boldsymbol{k}$ 共线，因此存在唯一的实数 z，使得 $\overrightarrow{QP}=z\boldsymbol{k}$，从而

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+z\boldsymbol{k}.$$

而在 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 所确定的平面上，由平面向量基本定理可知，存在唯一的有序实数对（x，y），使得

$$\overrightarrow{OQ}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}.$$

从而

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+z\boldsymbol{k}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

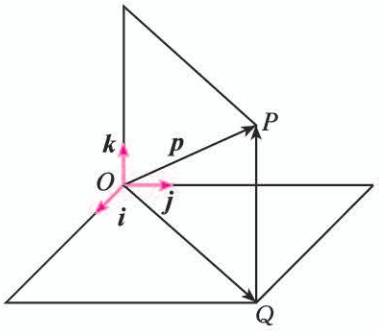


图 1.2-1

因此，如果 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 是空间三个两两垂直的向量，那么对任意一个空间向量 $\boldsymbol{p}$，存在唯一的有序实数组（x，y，z），使得

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

我们称 $x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$ 分别为向量 $\boldsymbol{p}$ 在 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 上的分向量.

你能证明唯一性吗?

探究

在空间中，如果用任意三个不共面的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 代替两两垂直的向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，你能得出类似的结论吗?

类似平面向量基本定理，我们有空间向量基本定理.

定理　如果三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面，那么对任意一个空间向量 $\boldsymbol{p}$，存在唯一的有序实数组（x，y，z），使得

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}.$$

请你自己给出空间向量基本定理的证明.

由此可知，如果三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面，那么所有空间向量组成的集合就是$\{\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}，x，y，z\in\mathbf{R}\}$. 这个集合可看作由向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 生成的，我们把 $\{\boldsymbol{a}，\boldsymbol{b}，\boldsymbol{c}\}$ 叫做空间的一个**基底**（base），$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 都叫做**基向量**（base vectors）. 空间任意三个不共面的向量都可以构成空间的一个基底.

特别地，如果空间的一个基底中的三个基向量两两垂直，且长度都为 1，那么这个基底叫做**单位正交基底**，常用 $\{\boldsymbol{i}，\boldsymbol{j}，\boldsymbol{k}\}$ 表示. 由空间向量基本定理可知，对空间中的任意向量 $\boldsymbol{a}$，均可以分解为三个向量 $x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$，使 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. 像这样，把一个空间向量分解为三个两两垂直的向量，叫做把空间向量进行**正交分解**.

由空间向量基本定理可知，如果把三个不共面的向量作为空间的一个基底，那么所有空间向量都可以用三个基向量表示出来. 进一步地，所有空间向量间的运算都可以转化为基向量间的运算，这为解决问题带来了方便.

例 1 如图 1.2-2，M 是四面体 $OABC$ 的棱 BC 的中点，点 N 在线段 OM 上，点 P 在线段 AN 上，且 $MN=\frac{1}{2}ON$，$AP=\frac{3}{4}AN$，用向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 表示 $\overrightarrow{OP}$.

分析： $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 是三个不共面的向量，它们构成空间的一个基底 $\{\overrightarrow{OA}，\overrightarrow{OB}，\overrightarrow{OC}\}$，$\overrightarrow{OP}$ 可以用基底 $\{\overrightarrow{OA}，\overrightarrow{OB}，\overrightarrow{OC}\}$ 表示出来.

解：
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AN}\\&=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OA})\\&=\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{ON}-\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}\\&=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}\right)\\&=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}.\end{aligned}$$

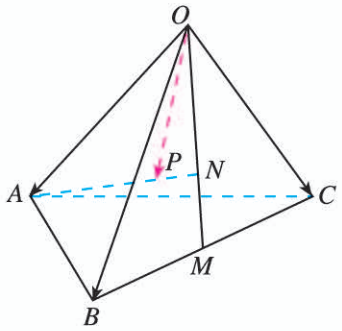


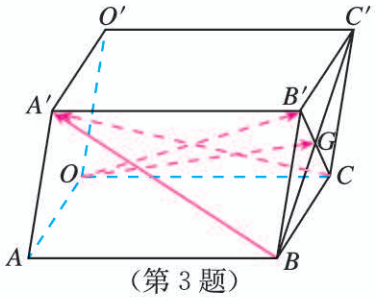
图 1.2-2

练习

1. 已知 $\{\boldsymbol{a}，\boldsymbol{b}，\boldsymbol{c}\}$ 是空间的一个基底，从 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 中选哪一个向量，一定可以与向量 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 构成空间的另一个基底？
2. 已知 O，A，B，C 为空间的四个点，且向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 不构成空间的一个基底，那么点 O，A，B，C 是否共面？
3. 如图，已知平行六面体 $OABC\text{-}O'A'B'C'$，点 G 是侧面 $BB'C'C$ 的中心，且 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OO'}=\boldsymbol{c}$.

   （1）$\{\boldsymbol{a}，\boldsymbol{b}，\boldsymbol{c}\}$ 是否构成空间的一个基底？

   （2）如果 $\{\boldsymbol{a}，\boldsymbol{b}，\boldsymbol{c}\}$ 构成空间的一个基底，那么用它表示下列向量：$\overrightarrow{OB'}$，$\overrightarrow{BA'}$，$\overrightarrow{CA'}$，$\overrightarrow{OG}$.



（第 3 题）

例 2　如图 1.2-3，在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=4$，$AD=4$，$AA_1=5$，$\angle DAB=60°$，$\angle BAA_1=60°$，$\angle DAA_1=60°$，M，N 分别为 D_1C_1，C_1B_1 的中点. 求证 $MN\perp AC_1$.

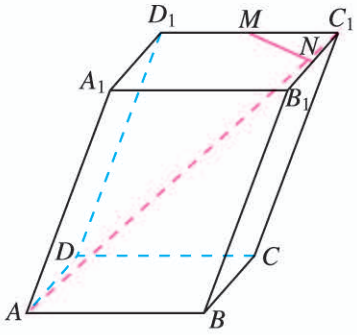


图 1.2-3

分析：要证 $MN\perp AC_1$，只需证明 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0$. 由已知，$\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA_1}\}$ 可构成空间的一个基底. 把 $\overrightarrow{MN}$ 和 $\overrightarrow{AC_1}$ 分别用基底表示，然后计算 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC_1}$ 即可.

证明：设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，这三个向量不共面，$\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 构成空间的一个基底，我们用它们表示 $\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{AC_1}$，则

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC_1}+\overrightarrow{C_1N}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},$$

所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AC_1}&=\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\\&=\frac{1}{2}\times4^2+\frac{1}{2}\times4^2\times\cos 60°+\frac{1}{2}\times4\times5\times\cos 60°-\frac{1}{2}\times4^2\times\cos 60°-\\&\quad\frac{1}{2}\times4^2-\frac{1}{2}\times4\times5\times\cos 60°\\&=0.\end{aligned}$$

所以 $MN\perp AC_1$.

例 3　如图 1.2-4，正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 的棱长为 1，E，F，G 分别为 $C'D'$，$A'D'$，$D'D$ 的中点.

(1) 求证：$EF/\!/AC$；

(2) 求 CE 与 AG 所成角的余弦值.

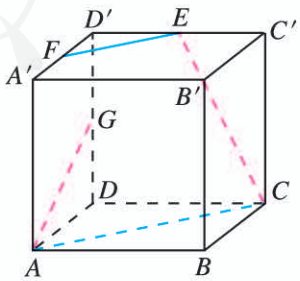


图 1.2-4

分析：(1) 要证明 $EF/\!/AC$，只需证明 $\overrightarrow{EF}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 共线. 设 $\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{DD'}=\boldsymbol{k}$，则 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 构成空间的一个单位正交基底，把 $\overrightarrow{EF}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 分别用基向量表示，作相应的运算证明它们共线即可. (2) 要求 CE 与 AG 所成角的余弦值，只需求 $\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{AG}$ 所成角的余弦值即可.

（1）**证明**：设 $\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{DD'}=\boldsymbol{k}$，则$\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$构成空间的一个单位正交基底．所以

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{D'F}-\overrightarrow{D'E}=\frac{1}{2}\boldsymbol{i}-\frac{1}{2}\boldsymbol{j}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}),$$

$$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}.$$

所以 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

所以 $EF/\!/AC$.

（2）**解**：因为

$$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'E}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},$$

$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG}=-\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{k},$$

所以

$$\cos\langle\overrightarrow{CE},\overrightarrow{AG}\rangle=\frac{\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AG}}{|\overrightarrow{CE}|\,|\overrightarrow{AG}|}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\right)\cdot\left(-\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}\boldsymbol{k}\right)}{\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

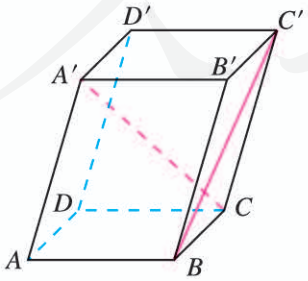
$$=\frac{2}{5}.$$

所以 CE 与 AG 所成角的余弦值为 $\frac{2}{5}$.

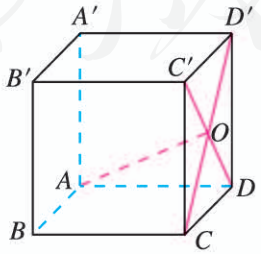
练习

1. 已知四面体 $OABC$，$OB=OC$，$\angle AOB=\angle AOC=\theta$．求证：$OA\perp BC$.

2. 如图，在平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，$AB=2$，$AD=2$，$AA'=3$，$\angle BAD=\angle BAA'=\angle DAA'=60°$．求 BC' 与 CA' 所成角的余弦值.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，已知正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$，CD' 和 DC' 相交于点 O，连接 AO，求证 $AO\perp CD'$.

习题 1.2

复习巩固

1. 如果向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 与任何向量都不能构成空间的一个基底，那么 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 间应有什么关系？

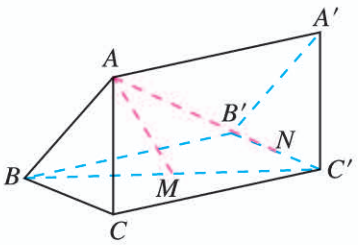
2. 若 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ 构成空间的一个基底，则下列向量不共面的是（　　）.

（A）$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$　　（B）$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

（C）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$　　（D）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}$

3. 已知四面体 $OABC$，M，N 分别是棱 OA，BC 的中点，且 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{MN}$.

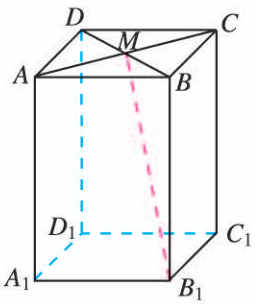
4. 如图，在空间平移 $\triangle ABC$ 到 $\triangle A'B'C'$，连接对应顶点. 设 $\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$，$M$ 是 BC' 的中点，N 是 $B'C'$ 的中点，用基底 $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ 表示向量 $\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AN}$.



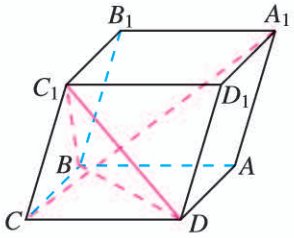
（第 4 题）

综合运用

5. 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M 是 AC 与 BD 的交点. 若 $D_1A_1=2$，$D_1C_1=2$，$D_1D=3$，求 B_1M 的长.



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是菱形，且 $\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD=60°$，$CD=CC_1$，求证：$CA_1\perp$ 平面 C_1BD.

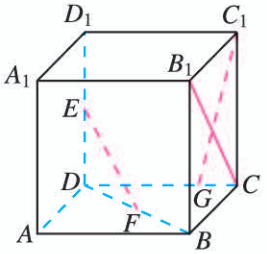
拓广探索

7. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为 DD_1，BD 的中点，点 G 在 CD 上，且 $CG=\dfrac{1}{4}CD$.

（1）求证：$EF\perp B_1C$；

（2）求 EF 与 C_1G 所成角的余弦值.

8. 已知四面体中三组相对棱的中点间的距离都相等，求证：这个四面体相对的棱两两垂直.



（第 7 题）

1.3 空间向量及其运算的坐标表示

学习了空间向量基本定理，建立了“空间基底”的概念，我们就可以利用基底表示任意一个空间向量，进而把空间向量的运算转化为基向量的运算. 所以，基底概念的引入为几何问题代数化奠定了基础.

在平面向量中，我们以平面直角坐标系中与 x 轴、y 轴方向相同的两个单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 为基底，建立了向量的坐标与点的坐标的一一对应关系，从而把平面向量的运算化归为数的运算. 类似地，为了把空间向量的运算化归为数的运算，能否利用空间向量基本定理和空间的单位正交基底，建立空间直角坐标系，进而建立空间向量的坐标与空间点的坐标的一一对应呢？下面我们就来研究这个问题.

1.3.1 空间直角坐标系

我们知道，平面直角坐标系由平面内两条互相垂直、原点重合的数轴组成. 利用单位正交基底概念，我们还可以这样理解平面直角坐标系：如图 1.3-1，在平面内选定一点 O 和一个单位正交基底 $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$，以 O 为原点，分别以 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 的方向为正方向、以它们的长为单位长度建立两条数轴：x 轴、y 轴，那么我们就建立了一个平面直角坐标系.

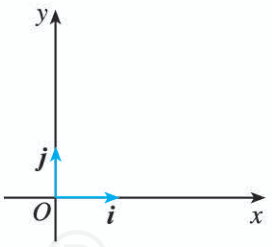


图 1.3-1

类似地，在空间选定一点 O 和一个单位正交基底 $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$（图 1.3-2）. 以点 O 为原点，分别以 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 的方向为正方向、以它们的长为单位长度建立三条数轴：x 轴、y 轴、z 轴，它们都叫做**坐标轴**. 这时我们就建立了一个**空间直角坐标系** $Oxyz$，O 叫做**原点**，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 都叫做**坐标向量**，通过每两条坐标轴的平面叫做**坐标平面**，分别称为 Oxy 平面，Oyz 平面，Ozx 平面，它们把空间分成八个部分.

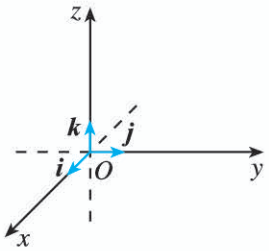


图 1.3-2

画空间直角坐标系 $Oxyz$ 时，一般使 $\angle xOy = 135^\circ$（或 45°），$\angle yOz = 90^\circ$.

在空间直角坐标系中，让右手拇指指向 x 轴的正方向，食指

指向 y 轴的正方向，如果中指指向 z 轴的正方向，则称这个坐标系为**右手直角坐标系**. 本书建立的坐标系都是右手直角坐标系.

探究

在平面直角坐标系中，每一个点和向量都可用一对有序实数（即它的坐标）表示. 对空间直角坐标系中的每一个点和向量，是否也有类似的表示呢？

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中（图 1.3-3），$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 为坐标向量，对空间任意一点 A，对应一个向量 $\overrightarrow{OA}$，且点 A 的位置由向量 $\overrightarrow{OA}$ 唯一确定，由空间向量基本定理，存在唯一的有序实数组 (x, y, z)，使

$$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

在单位正交基底 $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ 下与向量 $\overrightarrow{OA}$ 对应的有序实数组 (x, y, z)，叫做点 A 在空间直角坐标系中的坐标，记作 $A(x, y, z)$，其中 x 叫做点 A 的**横坐标**，y 叫做点 A 的**纵坐标**，z 叫做点 A 的**竖坐标**.

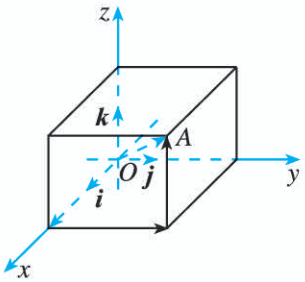


图 1.3-3

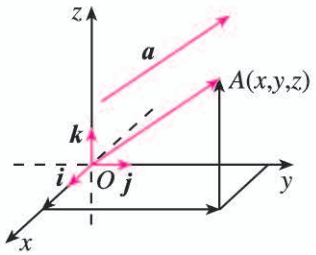


图 1.3-4

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，给定向量 $\boldsymbol{a}$，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$（图 1.3-4）. 由空间向量基本定理，存在唯一的有序实数组 (x, y, z)，使

$$\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

有序实数组 (x, y, z) 叫做 $\boldsymbol{a}$ 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标，上式可简记作

$$\boldsymbol{a}=(x, y, z).$$

这样，在空间直角坐标系中，空间中的点和向量都可以用三个有序实数表示.

符号 (x, y, z) 具有双重意义，它既可以表示向量，也可以表示点，在表述时要注意区分.

探究

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，对空间任意一点 A，或任意一个向量 $\overrightarrow{OA}$，你能借助几何直观确定它们的坐标 (x, y, z) 吗？

事实上，如图 1.3-5，过点 A 分别作垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴的平面，依次交 x 轴、y 轴和 z 轴于点 B，C 和 D. 可以证明 $\overrightarrow{OA}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影向量分别为 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$，且 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$. 设点 B，C 和 D 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标分别是 x，y 和 z，那么点 A（向量 $\overrightarrow{OA}$）的坐标为（x，y，z）.

你能给出证明吗？

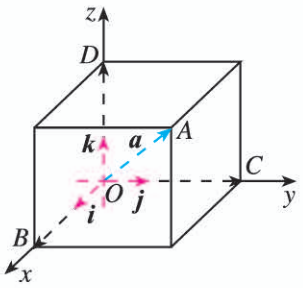


图 1.3-5

例 1 如图 1.3-6，在长方体 $OABC\text{-}D'A'B'C'$ 中，$OA=3$，$OC=4$，$OD'=2$，以 $\left\{\frac{1}{3}\overrightarrow{OA},\ \frac{1}{4}\overrightarrow{OC},\ \frac{1}{2}\overrightarrow{OD'}\right\}$ 为单位正交基底，建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$.

（1）写出 D'，C，A'，B' 四点的坐标；

（2）写出向量 $\overrightarrow{A'B'}$，$\overrightarrow{B'B}$，$\overrightarrow{A'C}$，$\overrightarrow{AC'}$ 的坐标.

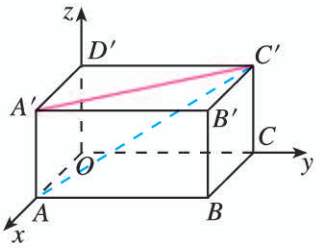


图 1.3-6

解：（1）点 D' 在 z 轴上，且 $OD'=2$，所以 $\overrightarrow{OD'}=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$. 所以点 D' 的坐标是（0，0，2）.

同理，点 C 的坐标是（0，4，0）.

点 A' 在 x 轴、y 轴、z 轴上的射影分别为 A，O，D'，它们在坐标轴上的坐标分别为 3，0，2，所以点 A' 的坐标是（3，0，2）.

点 B' 在 x 轴、y 轴、z 轴上的射影分别为 A，C，D'，它们在坐标轴上的坐标分别为 3，4，2，所以点 B' 的坐标是（3，4，2）.

（2）$\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{OC}=0\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}=(0,\ 4,\ 0)$；

$\overrightarrow{B'B}=-\overrightarrow{OD'}=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}=(0,\ 0,\ -2)$；

$\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{D'C}=-3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}=(-3,\ 4,\ 0)$；

$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CC'}=-3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}=(-3,\ 4,\ 2)$.

练习

1. 在空间直角坐标系中标出下列各点：

   $A(0,\ 2,\ 4)$，$B(1,\ 0,\ 5)$，$C(0,\ 2,\ 0)$，$D(1,\ 3,\ 4)$.

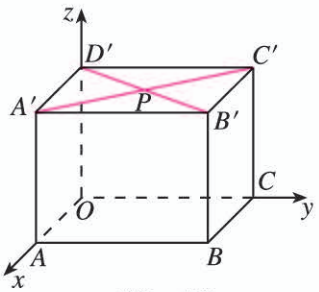
2. 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，

   （1）哪个坐标平面与 x 轴垂直？哪个坐标平面与 y 轴垂直？哪个坐标平面与 z 轴垂直？

   （2）写出点 $P(2,\ 3,\ 4)$ 在三个坐标平面内的射影的坐标.

   （3）写出点 $P(1,\ 3,\ 5)$ 关于原点成中心对称的点的坐标.

3. 在长方体 $OABC\text{-}D'A'B'C'$ 中，$OA=3$，$OC=4$，$OD'=3$，$A'C'$ 与 $B'D'$ 相交于点 P，建立如图所示的空间直角坐标系 $Oxyz$.



（第 3 题）

(1) 写出点 C，B'，P 的坐标；

(2) 写出向量 $\overrightarrow{BB'}$，$\overrightarrow{A'C'}$ 的坐标.

4. 已知点 B 是点 $A(3, 4, 5)$ 在坐标平面 Oxy 内的射影，求 $|\overrightarrow{OB}|$.

1.3.2 空间向量运算的坐标表示

探究

有了空间向量的坐标表示，你能类比平面向量的坐标运算，得出空间向量运算的坐标表示并给出证明吗？

设

$$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3),\ \boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3),$$

与平面向量运算的坐标表示一样，我们有：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3),$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3),$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3),\ \lambda\in\mathbf{R},$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

下面我们证明空间向量数量积运算的坐标表示.

设 $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ 为空间的一个单位正交基底，则

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k},$$

所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}).$$

利用向量数量积的分配律以及

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0,$$

得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

其他运算的坐标表示可以类似证明，请同学们自己完成.

由上述结论可知，空间向量运算的坐标表示与平面向量运算的坐标表示是完全一致的. 例如，我们有：

一个空间向量的坐标等于表示此向量的有向线段的终点坐标减去起点坐标.

类似平面向量运算的坐标表示，我们还可以得到：

当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_1=\lambda b_1$，$a_2=\lambda b_2$，$a_3=\lambda b_3(\lambda\in\mathbf{R})$；

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$；

$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$；

$$\cos\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

探究

你能利用空间向量运算的坐标表示推导空间两点间的距离公式吗？

如图 1.3-7 建立空间直角坐标系 $Oxyz$，设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间中任意两点，则

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1).$$

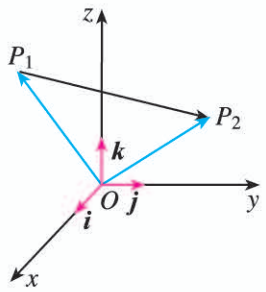


图 1.3-7

于是

$$|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}}$$

$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

所以

$$P_1P_2=|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

这就是**空间两点间的距离公式**.

将空间向量的运算与向量的坐标表示结合起来，不仅可以解决夹角和距离的计算问题，而且可以使一些问题的解决变得简单.

例 2 如图 1.3-8，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是 BB_1，D_1B_1 的中点. 求证 $EF\perp DA_1$.

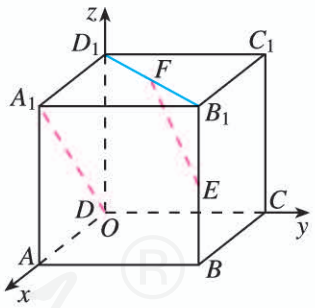


图 1.3-8

分析：要证明 $EF\perp DA_1$，只要证明 $\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{DA_1}$，即证 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DA_1}=0$. 我们只要用坐标表示 $\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{DA_1}$，并进行数量积运算即可.

证明：不妨设正方体的棱长为 1，建立如图 1.3-8 所示的空间直角坐标系 $Oxyz$，则

$$E\left(1, 1, \frac{1}{2}\right), F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right),$$

所以 $\overrightarrow{EF}=\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

又 $A_1(1, 0, 1)$，$D(0, 0, 0)$，

所以 $\overrightarrow{DA_1}=(1, 0, 1)$.

所以 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DA_1}=\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\cdot(1, 0, 1)=0$.

所以 $\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{DA_1}$，即 $EF\perp DA_1$.

你能从本题的解答中体会到根据问题的特点，建立适当的空间直角坐标系，用向量表示相关元素，并通过向量及其坐标的运算求解问题的基本思路吗？

例 3　如图 1.3-9，在棱长为 1 的正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为 BC_1 的中点，E_1，F_1 分别在棱 A_1B_1，C_1D_1 上，$B_1E_1=\frac{1}{4}A_1B_1$，$D_1F_1=\frac{1}{4}C_1D_1$.

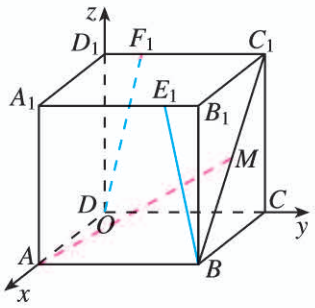


图 1.3-9

(1) 求 AM 的长.

(2) 求 BE_1 与 DF_1 所成角的余弦值.

分析：(1) 利用条件建立适当的空间直角坐标系，写出点 A，M 的坐标，利用空间两点间的距离公式求出 AM 的长. (2) BE_1 与 DF_1 所成的角就是 $\overrightarrow{BE_1}$，$\overrightarrow{DF_1}$ 所成的角或它的补角. 因此，可以通过 $\overrightarrow{BE_1}$，$\overrightarrow{DF_1}$ 的坐标运算得到结果.

解：(1) 建立如图 1.3-9 所示的空间直角坐标系 $Oxyz$，则点 A 的坐标为 (1，0，0)，点 M 的坐标为 $\left(\frac{1}{2}，1，\frac{1}{2}\right)$. 于是

$$AM=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+(1-0)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

(2) 由已知，得

$$B(1，1，0)，E_1\left(1，\frac{3}{4}，1\right)，D(0，0，0)，F_1\left(0，\frac{1}{4}，1\right)，$$

所以 $\overrightarrow{BE_1}=\left(1，\frac{3}{4}，1\right)-(1，1，0)=\left(0，-\frac{1}{4}，1\right)$，

$\overrightarrow{DF_1}=\left(0，\frac{1}{4}，1\right)-(0，0，0)=\left(0，\frac{1}{4}，1\right)$，

$|\overrightarrow{BE_1}|=\frac{\sqrt{17}}{4}$，$|\overrightarrow{DF_1}|=\frac{\sqrt{17}}{4}$.

所以

$$\overrightarrow{BE_1}\cdot\overrightarrow{DF_1}=0\times0+\left(-\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)+1\times1=\frac{15}{16}.$$

所以

$$\cos\langle\overrightarrow{BE_1}，\overrightarrow{DF_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{BE_1}\cdot\overrightarrow{DF_1}}{|\overrightarrow{BE_1}|\,|\overrightarrow{DF_1}|}=\frac{\frac{15}{16}}{\frac{\sqrt{17}}{4}\times\frac{\sqrt{17}}{4}}=\frac{15}{17}.$$

所以，BE_1 与 DF_1 所成角的余弦值是 $\frac{15}{17}$.

练习

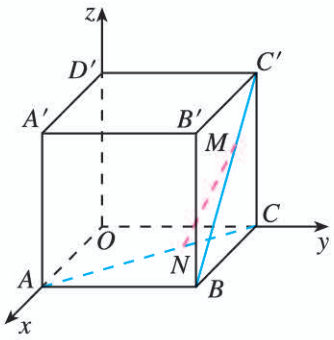
1. 已知 $\boldsymbol{a}=(-3,\ 2,\ 5)$，$\boldsymbol{b}=(1,\ 5,\ -1)$，求：

   (1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$；　(2) $6\boldsymbol{a}$；　(3) $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$；　(4) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

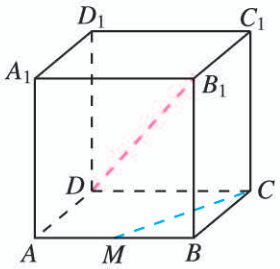
2. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,\ -1,\ 3)$，$\boldsymbol{b}=(-4,\ 2,\ x)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 求 x 的值.

3. 在 z 轴上求一点 M，使点 M 到点 $A(1,\ 0,\ 2)$ 与点 $B(1,\ -3,\ 1)$ 的距离相等.

4. 如图，正方体 $OABC\text{-}D'A'B'C'$ 的棱长为 a，点 N，M 分别在 AC，BC' 上，$AN=2CN$，$BM=2MC'$，求 MN 的长.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M 是 AB 的中点，求 DB_1 与 CM 所成角的余弦值.

习题 1.3

复习巩固

1. 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，三个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 分别平行于 x 轴、y 轴、z 轴，它们的坐标各有什么特点？

2. $M(x,\ y,\ z)$ 是空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的一点，写出满足下列条件的点的坐标：

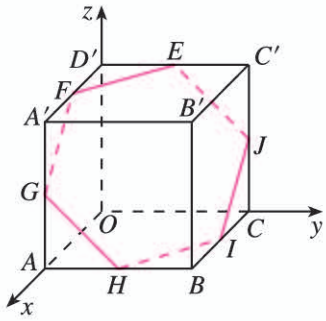
   (1) 与点 M 关于 x 轴对称的点；

   (2) 与点 M 关于 y 轴对称的点；

   (3) 与点 M 关于 z 轴对称的点；

   (4) 与点 M 关于原点对称的点.

3. 如图，正方体 $OABC\text{-}D'A'B'C'$ 的棱长为 a，E，F，G，H，I，J 分别是棱 $C'D'$，$D'A'$，$A'A$，AB，BC，CC' 的中点，写出正六边形 $EFGHIJ$ 各顶点的坐标.



（第 3 题）

4. 先在空间直角坐标系中标出 A，B 两点，再求它们之间的距离：

   (1) $A(2,\ 3,\ 5)$，$B(3,\ 1,\ 4)$；

   (2) $A(6,\ 0,\ 1)$，$B(3,\ 5,\ 7)$.

5. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,0,3)$，$\boldsymbol{c}=(0,0,2)$．求：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；(2) $\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}-8\boldsymbol{c}$．

综合运用

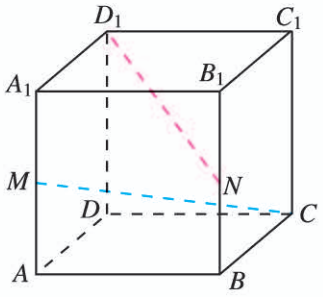
6. 求证：以 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形．

7. 已知 $A(3,5,-7)$，$B(-2,4,3)$，求 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BA}$，线段 AB 的中点坐标及线段 AB 的长．

拓广探索

8. 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别为棱 A_1A 和 B_1B 的中点，求 CM 和 D_1N 所成角的余弦值．

9. $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 是空间的一个单位正交基底，向量 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}$，$\{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 是空间的另一个基底，用基底 $\{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 表示向量 $\boldsymbol{p}$．



（第 8 题）

阅读与思考

向量概念的推广与应用

我们知道，在平面内取定单位正交基底建立坐标系后，任意一个平面向量，都可以用二元有序实数对 (a_1,a_2) 表示．平面向量又称为二维向量．给定空间一个单位正交基底，任意一个空间向量，都可用三元有序实数组 (a_1,a_2,a_3) 表示．空间向量又称为三维向量．二维向量、三维向量统称为几何向量．

在实际问题中，经常会遇到一些需要用更多实数来表示的量．比如：期末进行了五门学科的考试，每个学生的成绩可用顺序排列的五科成绩来表示；在汽车生产线上，对装配好的汽车进行制动距离、最高车速、每 100 千米油耗、滑行距离、噪声、废气排放量等六项指标的测试，那么每辆新车质量可用六元有序实数组 $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)$ 表示．

一般地，n 元有序实数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 称为 n 维向量，它是几何向量的推广．n 维向量的全体构成的集合，赋予相应的结构后，叫做 n 维向量空间．它的每一个元素可看成 n 维向量空间的一点．

类似二维向量，对于 n 维向量，也可定义两个向量的加法运算、减法运算、数乘运算、两个向量的数量积、向量的长度（模）、两点间的“距离”等：

设 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(a_1, a_2, \cdots, a_n)\pm(b_1, b_2, \cdots, b_n)\\&=(a_1\pm b_1, a_2\pm b_2, \cdots, a_n\pm b_n);\end{aligned}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_1, a_2, \cdots, a_n)=(\lambda a_1, \lambda a_2, \cdots, \lambda a_n),\ \lambda\in\mathbf{R};$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)\cdot(b_1, b_2, \cdots, b_n)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n;$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}.$$

n 维向量空间中 $A(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$B(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 两点间的“距离”

$$d_{AB}=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+\cdots+(b_n-a_n)^2}.$$

利用向量的运算可以解决许多实际问题.

例如，为了研究某种商品的销售量是否随季节的变化出现规律性的变化，采集了 5 年内这种商品每月销售量的数据. 每年此商品的销售量可用 12 个月的销售量所形成的 12 维向量表示. 不妨设 5 年的销售向量分别为

$$\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_{12}),$$

$$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \cdots, b_{12}),$$

$$\boldsymbol{c}=(c_1, c_2, \cdots, c_{12}),$$

$$\boldsymbol{d}=(d_1, d_2, \cdots, d_{12}),$$

$$\boldsymbol{e}=(e_1, e_2, \cdots, e_{12}).$$

计算这 5 年的月平均销售向量

$$\frac{1}{5}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}).$$

观察这个向量的 12 个分量，就可看出这 5 年内月平均销售量是否与季节的变化有关.

上面是一个应用向量的加法与数乘运算的例子，下面我们再来看用“距离”概念解决实际问题的例子.

依据“距离”来分类是一种常用的分类方法. 计算每个向量与标准点的距离，与哪个标准点的距离最近就归哪一类. 请看下面的具体例子.

翱翔校服有限公司根据以往制作校服的经验，得出适用于本地区高一新生的 8 种校服标准型号及相应的测量指标参数值，如表 1 所示.

表 1

型号	身高/cm	胸围/cm	腰围/cm	肩宽/cm
XXS	150	76	62	34
XS	155	80	66	36

续表

型号	身高/cm	胸围/cm	腰围/cm	肩宽/cm
S	160	84	70	38
M	165	88	74	40
L	170	92	78	42
XL	175	96	82	44
XXL	180	100	86	46
XXXL	185	104	90	48

为了给树人中学 1 000 名高一新生制作校服，翱翔公司测量了每名学生的身高、胸围、腰围、肩宽等，得到 1 000 组（每组 4 个）数据，如何根据这些数据得出 8 种标准型号的服装各应制作的套数呢？

我们把测量得到的数据按身高、胸围、腰围、肩宽的顺序排列，则每名学生的身材可以用四维向量表示，并且可以把它看作四维向量空间中的一个点. 这样，上面的问题用数学语言来描述，就是如何将 1 000 个点分成 8 类. 一种常用的分类方法是依据“距离”来分类. 8 种标准型号为 8 个标准点，用两点间距离的计算公式，计算每个学生的身材点与 8 个标准点的距离，与哪个标准点的距离最近就归入哪一类. 例如，某同学身高为 172 cm，胸围 95 cm，腰围 80 cm，肩宽 43 cm，则该同学的身材点可以表示为 P（172，95，80，43）. 设 8 种标准型号分别为点 A（150，76，62，34），B（155，80，66，36），C（160，84，70，38），D（165，88，74，40），E（170，92，78，42），F（175，96，82，44），G（180，100，86，46），H（185，104，90，48），分别计算点 P 与点 A，B，C，D，E，F，G，H 的距离，可得 $d_{PA}\approx 35.4$，$d_{PB}\approx 27.5$，$d_{PC}\approx 19.7$，$d_{PD}\approx 12.0$，$d_{PE}\approx 4.2$，$d_{PF}\approx 3.9$，$d_{PG}\approx 11.6$，$d_{PH}\approx 19.4$. 因为 d_{PF} 最小，所以该同学的身材点应归类为 XL 号.

翱翔校服有限公司只要设计一个小程序，将测量所得的 1 000 组数据输入计算机，就可以迅速计算出 1 000 名学生属于每一类的点数，进而得到 8 种标准型号的服装各应制作的套数.

从以上两个例子可以看出，由有序实数组构成的向量，比几何向量的应用更加广泛. 在日常生活和科学研究中，有许多量都可由有序实数组构成的向量来表示，并可用向量理论研究这些量的性质.

1.4 空间向量的应用

我们已经把向量从平面推广到空间，并利用空间向量解决了一些有关空间位置关系和度量的问题. 我们发现，建立空间向量与几何要素的对应关系是利用空间向量解决立体几何问题的关键. 本节我们进一步运用空间向量研究立体几何中有关直线、平面的位置关系和度量问题.

1.4.1 用空间向量研究直线、平面的位置关系

1. 空间中点、直线和平面的向量表示

我们知道，点、直线和平面是空间的基本图形，点、线段和平面图形等是组成空间几何体的基本元素. 因此，为了用空间向量解决立体几何问题，首先要用向量表示空间中的点、直线和平面.

思考

如何用向量表示空间中的一个点？

如图 1.4-1，在空间中，我们取一定点 O 作为基点，那么空间中任意一点 P 就可以用向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示. 我们把向量 $\overrightarrow{OP}$ 称为点 P 的位置向量.

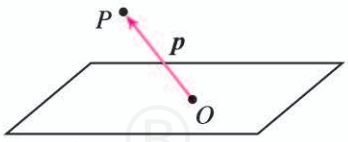


图 1.4-1

思考

我们知道，空间中给定一个点 A 和一个方向就能唯一确定一条直线 l. 如何用向量表示直线 l？

用向量表示直线 l，就是要利用点 A 和直线 l 的方向向量表示直线上的任意一点.

如图 1.4-2，$\boldsymbol{a}$ 是直线 l 的方向向量，在直线 l 上取 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，设 P 是直线 l 上的任意一点，由向量共线的条件可知，点 P 在直线 l 上的充要条件是存在实数 t，使得

$$\overrightarrow{AP}=t\boldsymbol{a}，即\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}.$$

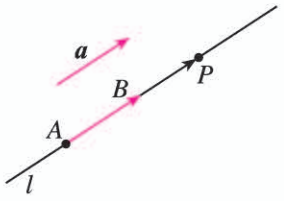


图 1.4-2

进一步地，如图 1.4-3，取定空间中的任意一点 O，可以得到点 P 在直线 l 上的充要条件是存在实数 t，使

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\boldsymbol{a}, \qquad ①$$

将 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$ 代入①式，得

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}. \qquad ②$$

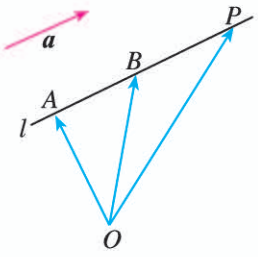


图 1.4-3

①式和②式都称为空间直线的向量表示式．由此可知，空间任意直线由直线上一点及直线的方向向量唯一确定．

你能证明这个结论吗？

思考

一个定点和两个定方向能否确定一个平面？进一步地，一个定点和一个定方向能否确定一个平面？如果能确定，如何用向量表示这个平面？

我们知道，平面 α 可以由 α 内两条相交直线确定．如图 1.4-4，设两条直线相交于点 O，它们的方向向量分别为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，P 为平面 α 内任意一点，由平面向量基本定理可知，存在唯一的有序实数对（x，y），使得

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}.$$

这样，点 O 与向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不仅可以确定平面 α，还可以具体表示出 α 内的任意一点．这种表示在解决几何问题时有重要作用．

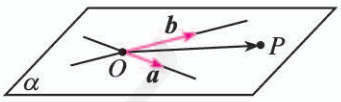


图 1.4-4

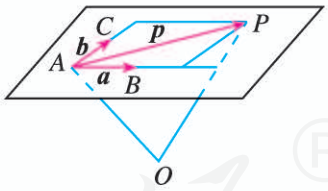


图 1.4-5

进一步地，如图 1.4-5，取定空间任意一点 O，可以得到，空间一点 P 位于平面 ABC 内的充要条件是存在实数 x，y，使

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}. \qquad ③$$

你能证明这个结论吗？

我们把③式称为空间平面 ABC 的向量表示式．由此可知，空间中任意平面由空间一点及两个不共线向量唯一确定．

我们知道，给定空间一点 A 和一条直线 l，则过点 A 且垂直于直线 l 的平面是唯一确定的．由此得到启发，我们

可以利用点 A 和直线 l 的方向向量来确定平面.

如图 1.4-6，直线 $l\perp\alpha$. 取直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{a}$，我们称向量 $\boldsymbol{a}$ 为平面 α 的**法向量**(normal vector). 给定一个点 A 和一个向量 $\boldsymbol{a}$，那么过点 A，且以向量 $\boldsymbol{a}$ 为法向量的平面完全确定，可以表示为集合 $\{P\mid \boldsymbol{a}\cdot\overrightarrow{AP}=0\}$.

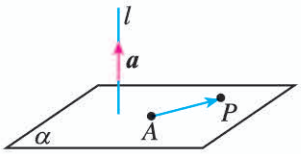


图 1.4-6

如果另有一条直线 $m\perp\alpha$，在直线 m 上任取向量 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 有什么关系？

例 1 如图 1.4-7，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=4$，$BC=3$，$CC_1=2$，M 是 AB 的中点. 以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.

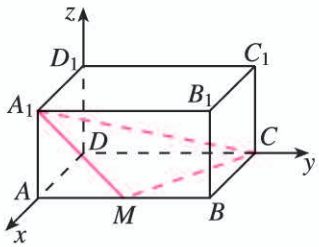


图 1.4-7

(1) 求平面 BCC_1B_1 的法向量；

(2) 求平面 MCA_1 的法向量.

分析：(1) 平面 BCC_1B_1 与 y 轴垂直，其法向量可以直接写出；(2) 平面 MCA_1 可以看成由 $\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{MA_1}$，$\overrightarrow{CA_1}$ 中的两个向量所确定，运用法向量与它们的垂直关系，可转化为数量积运算求得法向量.

解：(1) 因为 y 轴垂直于平面 BCC_1B_1，所以 $\boldsymbol{n}_1=(0,\ 1,\ 0)$ 是平面 BCC_1B_1 的一个法向量.

(2) 因为 $AB=4$，$BC=3$，$CC_1=2$，M 是 AB 的中点，所以 M，C，A_1 的坐标分别为 $(3,\ 2,\ 0)$，$(0,\ 4,\ 0)$，$(3,\ 0,\ 2)$. 因此

$$\overrightarrow{MC}=(-3,\ 2,\ 0),\ \overrightarrow{MA_1}=(0,\ -2,\ 2).$$

设 $\boldsymbol{n}_2=(x,\ y,\ z)$ 是平面 MCA_1 的法向量，则

$$\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{MC},\ \boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{MA_1}.$$

所以

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{MC}=-3x+2y=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{MA_1}=-2y+2z=0.\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}z,\\ y=z.\end{cases}$$

取 $z=3$，则 $x=2$，$y=3$. 于是 $\boldsymbol{n}_2=(2,\ 3,\ 3)$ 是平面 MCA_1 的一个法向量.

求平面的法向量，通常只需要求出平面的一个法向量. 求直线的方向向量也是如此.

练习

1. 判断下列命题是否正确，正确的在括号内打“√”，错误的打“×”.

（1）零向量不能作为直线的方向向量和平面的法向量；（　　）

（2）若 $\boldsymbol{v}$ 是直线 l 的方向向量，则 $\lambda\boldsymbol{v}(\lambda\in\mathbf{R})$ 也是直线 l 的方向向量；（　　）

（3）在空间直角坐标系中，$\boldsymbol{j}=(0,\ 0,\ 1)$ 是坐标平面 Oxy 的一个法向量.（　　）

2. 在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，$O$ 是 BD_1 与 B_1D 的交点. 以 $\{\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}\}$ 为空间的一个基底，求直线 OA 的一个方向向量.

3. 在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=4$，$BC=3$，$CC_1=2$. 以 D 为原点，以 $\left\{\frac{1}{3}\overrightarrow{DA},\ \frac{1}{4}\overrightarrow{DC},\ \frac{1}{2}\overrightarrow{DD_1}\right\}$ 为空间的一个单位正交基底，建立空间直角坐标系 $Oxyz$，求平面 ACD_1 的一个法向量.

2. 空间中直线、平面的平行

我们知道，直线的方向向量和平面的法向量是确定空间中的直线和平面的关键量. 那么是否能用这些向量来刻画空间直线、平面的平行、垂直关系呢？首先来看平行的问题.

思考

由直线与直线、直线与平面或平面与平面的平行关系，可以得到直线的方向向量、平面的法向量间的什么关系？

如图 1.4-8，设 $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ 分别是直线 l_1，l_2 的方向向量. 由方向向量的定义可知，如果两条直线平行，那么它们的方向向量一定平行；反过来，如果两条直线的方向向量平行，那么这两条直线也平行. 所以

$$l_1/\!/l_2\Leftrightarrow\boldsymbol{u}_1/\!/\boldsymbol{u}_2\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbf{R}，\text{使得 }\boldsymbol{u}_1=\lambda\boldsymbol{u}_2.$$

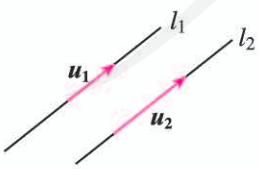


图 1.4-8

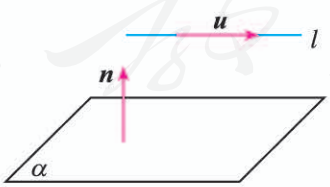


图 1.4-9

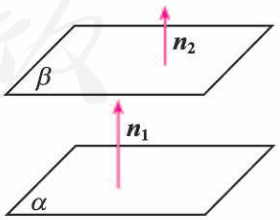


图 1.4-10

类似地，如图 1.4-9，设 $\boldsymbol{u}$ 是直线 l 的方向向量，$\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的法向量，$l\not\subset\alpha$ 则

$$l/\!/\alpha\Leftrightarrow\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{n}\Leftrightarrow\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}=0.$$

如图 1.4-10，设 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ 分别是平面 α，β 的法向量，则

$$\alpha/\!/\beta\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbf{R}，\text{使得 }\boldsymbol{n}_1=\lambda\boldsymbol{n}_2.$$

例 2 证明“平面与平面平行的判定定理”：**若一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，则这两个平面平行.**

已知：如图 1.4-11，$a\subset\beta$，$b\subset\beta$，$a\cap b=P$，$a/\!/\alpha$，$b/\!/\alpha$.

求证：$\alpha/\!/\beta$.

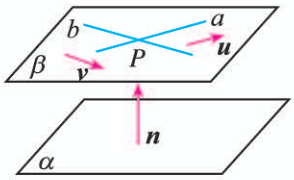


图 1.4-11

分析： 设平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，直线 a，b 的方向向量分别为 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，则由已知条件可得 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}=0$，由此可以证明 $\boldsymbol{n}$ 与平面 β 内的任意一个向量垂直，即 $\boldsymbol{n}$ 也是 β 的法向量.

证明： 如图 1.4-11，取平面 α 的法向量 $\boldsymbol{n}$，直线 a，b 的方向向量 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$.

因为 $a/\!/\alpha$，$b/\!/\alpha$，所以 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}=0$.

因为 $a\subset\beta$，$b\subset\beta$，$a\cap b=P$，

所以对任意点 $Q\in\beta$，存在 x，$y\in\mathbf{R}$，使得 $\overrightarrow{PQ}=x\boldsymbol{u}+y\boldsymbol{v}$.

从而 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{n}\cdot(x\boldsymbol{u}+y\boldsymbol{v})=x\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}+y\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}=0$.

所以，向量 $\boldsymbol{n}$ 也是平面 β 的法向量. 故 $\alpha/\!/\beta$.

例 3 如图 1.4-12，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=4$，$BC=3$，$CC_1=2$. 线段 B_1C 上是否存在点 P，使得 $A_1P/\!/$平面 ACD_1？

分析： 根据条件建立适当的空间直角坐标系，那么问题中涉及的点、向量 $\overrightarrow{B_1C}$，$\overrightarrow{A_1P}$，以及平面 ACD_1 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 等都可以用坐标表示. 如果点 P 存在，那么就有 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1P}=0$，由此通过向量的坐标运算可得结果.

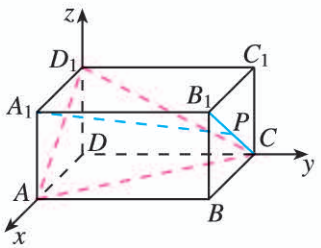


图 1.4-12

解： 以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图 1.4-12 所示的空间直角坐标系. 因为 A，C，D_1 的坐标分别为 $(3,0,0)$，$(0,4,0)$，$(0,0,2)$，所以

$$\overrightarrow{AC}=(-3,4,0),\ \overrightarrow{AD_1}=(-3,0,2).$$

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 是平面 ACD_1 的法向量，则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0$，即

$$\begin{cases}-3x+4y=0,\\-3x+2z=0.\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}z,\\[2mm]y=\dfrac{1}{2}z.\end{cases}$$

取 $z=6$，则 $x=4$，$y=3$. 所以，$\boldsymbol{n}=(4,3,6)$ 是平面 ACD_1 的一个法向量.

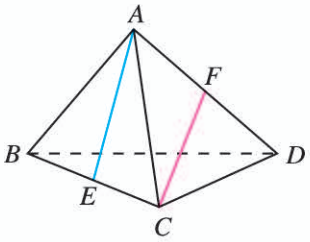
由 A_1，C，B_1 的坐标分别为 $(3,0,2)$，$(0,4,0)$，$(3,4,2)$，得 $\overrightarrow{A_1B_1}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{B_1C}=(-3,0,-2)$. 设点 P 满足 $\overrightarrow{B_1P}=\lambda\overrightarrow{B_1C}$ $(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，则 $\overrightarrow{B_1P}=(-3\lambda,0,-2\lambda)$，所以 $\overrightarrow{A_1P}=\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1P}=(-3\lambda,4,-2\lambda)$.

令 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1P}=0$，得 $-12\lambda+12-12\lambda=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$，此时 $A_1P\not\subset$ 平面 ACD_1，这样的点 P 存在. 所以，当 $\overrightarrow{B_1P}=\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C}$，即 P 为 B_1C 的中点时，A_1P // 平面 ACD_1.

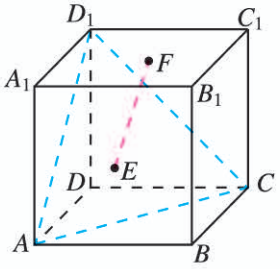
练习

1. 用向量方法证明“直线与平面平行的判定定理”：**若平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，则该直线与此平面平行.**

2. 如图，在四面体 $ABCD$ 中，E 是 BC 的中点. 直线 AD 上是否存在点 F，使得 AE // CF？



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是面 AB_1，面 A_1C_1 的中心. 求证：EF // 平面 ACD_1.

3. 空间中直线、平面的垂直

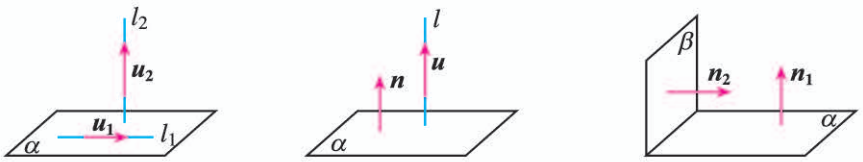
思考

类似空间中直线、平面平行的向量表示，在直线与直线、直线与平面、平面与平面的垂直关系中，直线的方向向量、平面的法向量之间有什么关系？

一般地，直线与直线垂直，就是两直线的方向向量垂直；直线与平面垂直，就是直线的方向向量与平面的法向量平行；平面与平面垂直，就是两平面的法向量垂直.

如图 1.4-13(1)，设直线 l_1，l_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，则

$$l_1\perp l_2\Leftrightarrow\boldsymbol{u}_1\perp\boldsymbol{u}_2\Leftrightarrow\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2=0.$$



(1)　(2)　(3)

图 1.4-13

如图 1.4-13(2)，设直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{u}$，平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，则

$l\perp\alpha\Leftrightarrow\boldsymbol{u}/\!/\boldsymbol{n}\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbf{R}$，使得 $\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{n}$.

如图 1.4-13(3)，设平面 α，β 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$，则

$$\alpha\perp\beta\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0.$$

我们随时随地看到向量运算的作用，你同意“向量是躯体，运算是灵魂”“没有运算的向量只能起路标的作用”的说法吗？

例 4 如图 1.4-14，在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AD=AA_1=1$，$\angle A_1AB=\angle A_1AD=\angle BAD=60^\circ$，求证：直线 $A_1C\perp$ 平面 BDD_1B_1.

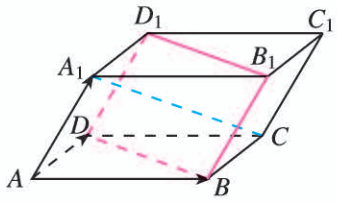


图 1.4-14

分析： 根据条件，可以 $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA_1}\}$ 为基底，并用基向量表示 $\overrightarrow{A_1C}$ 和平面 BDD_1B_1，再通过向量运算证明 $\overrightarrow{A_1C}$ 是平面 BDD_1B_1 的法向量即可.

证明： 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，则 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 为空间的一个基底，且

$$\overrightarrow{A_1C}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},\ \overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},\ \overrightarrow{BB_1}=\boldsymbol{c}.$$

因为 $AB=AD=AA_1=1$，$\angle A_1AB=\angle A_1AD=\angle BAD=60^\circ$，所以

$$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{c}^2=1,\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}.$$

在平面 BDD_1B_1 上，取 $\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{BB_1}$ 为基向量，则对于平面 BDD_1B_1 上任意一点 P，存在唯一的有序实数对 (λ,μ)，使得

$$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BD}+\mu\overrightarrow{BB_1}.$$

所以，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BP}&=\lambda\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BD}+\mu\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BB_1}\\&=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})+\mu(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}=0.\end{aligned}$$

所以 $\overrightarrow{A_1C}$ 是平面 BDD_1B_1 的法向量.

所以 $A_1C\perp$ 平面 BDD_1B_1.

例 5 证明“平面与平面垂直的判定定理”：**若一个平面过另一个平面的垂线，则这两个平面垂直.**

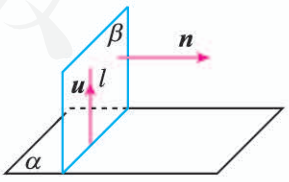


图 1.4-15

已知：如图 1.4-15，$l\perp\alpha$，$l\subset\beta$，

求证：$\alpha\perp\beta$.

证明： 取直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{u}$，平面 β 的法向量 $\boldsymbol{n}$.

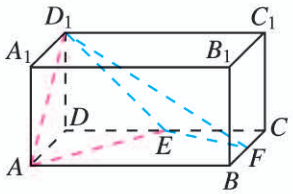
因为 $l\perp\alpha$，所以 $\boldsymbol{u}$ 是平面 α 的法向量.

因为 $l\subset\beta$，而 $\boldsymbol{n}$ 是平面 β 的法向量，所以 $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{n}$.

所以 $\alpha\perp\beta$.

练习

1. 已知 $\boldsymbol{u}=(3,\ a+b,\ a-b)(a,\ b\in\mathbf{R})$ 是直线 l 的方向向量，$\boldsymbol{n}=(1,\ 2,\ 3)$ 是平面 α 的法向量.
   (1) 若 $l/\!/\alpha$，求 a，b 的关系式；(2) 若 $l\perp\alpha$，求 a，b 的值.
2. 已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，以 D 为原点，$\{\overrightarrow{DA},\ \overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{DD_1}\}$ 为单位正交基底建立空间直角坐标系. 求证：$A_1C\perp BC_1$.
3. 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$BC=CC_1=1$，E 是 CD 的中点，F 是 BC 的中点. 求证：平面 $EAD_1\perp$ 平面 EFD_1.



(第 3 题)

1.4.2 用空间向量研究距离、夹角问题

我们知道，立体几何中的距离问题包括点到直线、点到平面、两条平行直线以及两个平行平面的距离问题等. 如何用空间向量解决这些距离问题呢?

下面我们先研究用向量方法求直线 l 外一点 P 到直线 l 的距离.

探究

已知直线 l 的单位方向向量为 $\boldsymbol{u}$，A 是直线 l 上的定点，P 是直线 l 外一点. 如何利用这些条件求点 P 到直线 l 的距离?

如图 1.4-16，向量 $\overrightarrow{AP}$ 在直线 l 上的投影向量为 $\overrightarrow{AQ}$，则 $\triangle APQ$ 是直角三角形. 因为 A，P 都是定点，所以 $|\overrightarrow{AP}|$，$\overrightarrow{AP}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 的夹角 $\angle PAQ$ 都是确定的. 于是可求 $|\overrightarrow{AQ}|$. 再利用勾股定理，可以求出点 P 到直线 l 的距离 PQ.

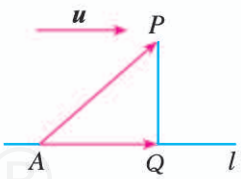


图 1.4-16

设 $\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{a}$，则向量 $\overrightarrow{AP}$ 在直线 l 上的投影向量 $\overrightarrow{AQ}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$.

在 Rt$\triangle APQ$ 中，由勾股定理，得

$$PQ=\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2-|\overrightarrow{AQ}|^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})^2}.$$

思考

类比点到直线的距离的求法，如何求两条平行直线之间的距离?

我们再来看平面 α 外一点 P 到平面 α 的距离问题.

如图 1.4-17，已知平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，A 是平面 α 内的定点，P 是平面 α 外一点. 过点 P 作平面 α 的垂线 l，交平面 α 于点 Q，则 $\boldsymbol{n}$ 是直线 l 的方向向量，且点 P 到平面 α

的距离就是 $\overrightarrow{AP}$ 在直线 l 上的投影向量 $\overrightarrow{QP}$ 的长度. 因此

$$PQ=\left|\overrightarrow{AP}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}.$$

类似地，请同学们研究如何求两个平行平面的距离.

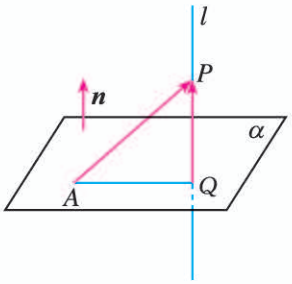


图 1.4-17

例 6 如图 1.4-18，在棱长为 1 的正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为线段 A_1B_1 的中点，F 为线段 AB 的中点.

(1) 求点 B 到直线 AC_1 的距离；

(2) 求直线 FC 到平面 AEC_1 的距离.

分析： 根据条件建立空间直角坐标系，用坐标表示相关的点、直线的方向向量和平面的法向量，再利用有关公式，通过坐标运算得出相应的距离.

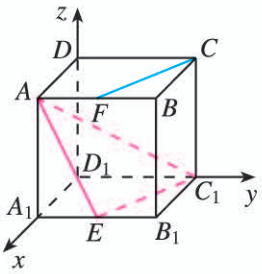


图 1.4-18

解： 以 D_1 为原点，D_1A_1，D_1C_1，D_1D 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图 1.4-18 所示的空间直角坐标系，则 $A(1,\ 0,\ 1)$，$B(1,\ 1,\ 1)$，$C(0,\ 1,\ 1)$，$C_1(0,\ 1,\ 0)$，$E(1,\ \frac{1}{2},\ 0)$，$F(1,\ \frac{1}{2},\ 1)$，所以

$$\overrightarrow{AB}=(0,\ 1,\ 0),\ \overrightarrow{AC_1}=(-1,\ 1,\ -1),\ \overrightarrow{AE}=(0,\ \frac{1}{2},\ -1),$$

$$\overrightarrow{EC_1}=(-1,\ \frac{1}{2},\ 0),\ \overrightarrow{FC}=(-1,\ \frac{1}{2},\ 0),\ \overrightarrow{AF}=(0,\ \frac{1}{2},\ 0).$$

(1) 取 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=(0,\ 1,\ 0)$，$\boldsymbol{u}=\dfrac{\overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AC_1}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(-1,\ 1,\ -1)$，则 $\boldsymbol{a}^2=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

所以，点 B 到直线 AC_1 的距离为

$$\sqrt{\boldsymbol{a}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})^2}=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

(2) 因为 $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{EC_1}=(-1,\ \frac{1}{2},\ 0)$，所以 $FC/\!/EC_1$，所以 $FC/\!/$平面 AEC_1. 所以点 F 到平面 AEC_1 的距离即为直线 FC 到平面 AEC_1 的距离.

设平面 AEC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EC_1}=0.\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}y-z=0,\\ -x+\dfrac{1}{2}y=0.\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} x=z, \\ y=2z. \end{cases}$$

取 $z=1$，则 $x=1$，$y=2$. 所以，$\boldsymbol{n}=(1,\ 2,\ 1)$ 是平面 AEC_1 的一个法向量.

又因为 $\overrightarrow{AF}=(0,\ \frac{1}{2},\ 0)$，所以点 F 到平面 AEC_1 的距离为

$$\frac{|\overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{\left|(0,\ \frac{1}{2},\ 0)\cdot(1,\ 2,\ 1)\right|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

即直线 FC 到平面 AEC_1 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

与用平面向量解决平面几何问题的“三步曲”类似，我们可以得出用空间向量解决立体几何问题的“三步曲”：

（1）建立立体图形与空间向量的联系，用空间向量表示问题中涉及的点、直线、平面，把立体几何问题转化为向量问题；

（2）通过向量运算，研究点、直线、平面之间的位置关系以及它们之间的距离和夹角等问题；

（3）把向量运算的结果“翻译”成相应的几何结论.

练习

1. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 A 到平面 B_1C 的距离等于_____；直线 DC 到平面 AB_1 的距离等于_____；平面 DA_1 到平面 CB_1 的距离等于_____.

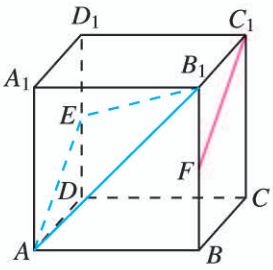
2. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为线段 DD_1 的中点，F 为线段 BB_1 的中点.

（1）求点 A_1 到直线 B_1E 的距离；

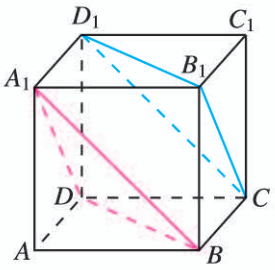
（2）求直线 FC_1 到直线 AE 的距离；

（3）求点 A_1 到平面 AB_1E 的距离；

（4）求直线 FC_1 到平面 AB_1E 的距离.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，求平面 A_1DB 与平面 D_1CB_1 的距离.

与距离类似，角度是立体几何中另一个重要的度量．下面我们用向量方法研究直线与直线所成的角、直线与平面所成的角以及平面与平面的夹角，先看下列问题．

例 7 如图 1.4-19，在棱长为 1 的正四面体（四个面都是正三角形）$ABCD$ 中，M，N 分别为 BC，AD 的中点，求直线 AM 和 CN 夹角的余弦值．

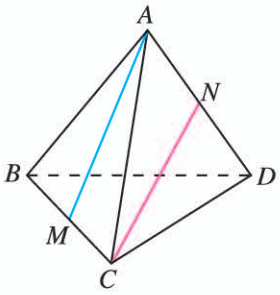


图 1.4-19

分析： 求直线 AM 和 CN 夹角的余弦值，可以转化为求向量 $\overrightarrow{MA}$ 与 $\overrightarrow{CN}$ 夹角的余弦值．为此需要把向量 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{CN}$ 用适当的基底表示出来，进而求得向量 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{CN}$ 夹角的余弦值．

解：

化为向量问题

如图 1.4-19，以 $\{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}\}$ 作为基底，则

$$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}).$$

设向量 $\overrightarrow{CN}$ 与 $\overrightarrow{MA}$ 的夹角为 θ，则直线 AM 和 CN 夹角的余弦值等于 $|\cos\theta|$．

进行向量运算

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{MA}&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD})\cdot(\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CB})\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CA}-\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB}\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

又 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 均为等边三角形，所以 $|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{CN}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

所以
$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{CN}\cdot\overrightarrow{MA}}{|\overrightarrow{CN}||\overrightarrow{MA}|}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{3}.$$

回到图形问题

所以直线 AM 和 CN 夹角的余弦值为 $\frac{2}{3}$．

思考

以上我们用向量方法解决了异面直线 AM 和 CN 所成角的问题，你能用向量方法求直线 AB 与平面 BCD 所成的角吗？

一般地，两条异面直线所成的角，可以转化为两条异面直线的方向向量的夹角来求

得. 也就是说，若异面直线 l_1，l_2 所成的角为 θ，其方向向量分别是 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，则

$$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}\right|=\frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}.$$

类似地，直线与平面所成的角，可以转化为直线的方向向量与平面的法向量的夹角. 如图 1.4-20，直线 AB 与平面 α 相交于点 B，设直线 AB 与平面 α 所成的角为 θ，直线 AB 的方向向量为 $\boldsymbol{u}$，平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，则

$$\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{n}|}.$$

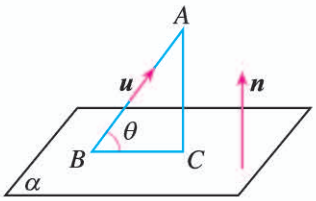


图 1.4-20

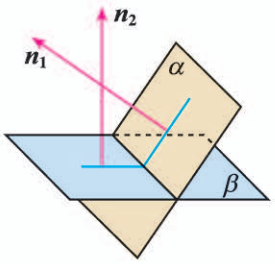


图 1.4-21

如图 1.4-21，平面 α 与平面 β 相交，形成四个二面角，我们把这四个二面角中不大于 90°的二面角称为**平面 α 与平面 β 的夹角**.

类似于两条异面直线所成的角，若平面 α，β 的法向量分别是 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$，则平面 α 与平面 β 的夹角即向量 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 的夹角或其补角. 设平面 α 与平面 β 的夹角为 θ，则

$$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}\right|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}.$$

图 1.4-21 中有几个二面角？两个平面的夹角与这两个平面形成的二面角有什么关系？

例 8 如图 1.4-22，在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$AC=CB=2$，$AA_1=3$，$\angle ACB=90°$，P 为 BC 的中点，点 Q，R 分别在棱 AA_1，BB_1 上，$A_1Q=2AQ$，$BR=2RB_1$. 求平面 PQR 与平面 $A_1B_1C_1$ 夹角的余弦值.

分析： 因为平面 PQR 与平面 $A_1B_1C_1$ 的夹角可以转化为平面 PQR 与平面 $A_1B_1C_1$ 的法向量的夹角，所以只需要求出这两个平面的法向量的夹角即可.

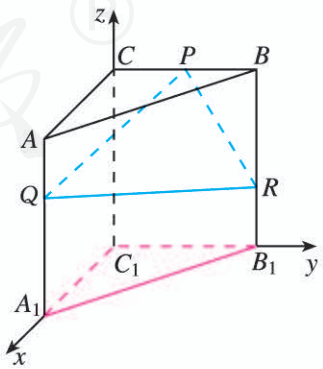


图 1.4-22

解：

化为向量问题

以 C_1 为原点，C_1A_1，C_1B_1，C_1C 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图 1.4-22 所示的空间直角坐标系. 设平面 $A_1B_1C_1$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1$，平面 PQR 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2$，则平面 PQR 与平面 $A_1B_1C_1$ 的夹角就是 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 的夹角或其补角.

进行向量运算

因为 $C_1C\perp$平面 $A_1B_1C_1$，所以平面 $A_1B_1C_1$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(0,\ 0,\ 1)$.

根据所建立的空间直角坐标系，可知 $P(0,\ 1,\ 3)$，$Q(2,\ 0,\ 2)$，$R(0,\ 2,\ 1)$. 所以 $\overrightarrow{PQ}=(2,\ -1,\ -1)$，$\overrightarrow{PR}=(0,\ 1,\ -2)$. 设 $\boldsymbol{n}_2=(x,\ y,\ z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{PQ}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{PR}=0,\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}2x-y-z=0,\\ y-2z=0.\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}z,\\ y=2z.\end{cases}$$

取 $\boldsymbol{n}_2=(3,\ 4,\ 2)$，则

$$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{(0,\ 0,\ 1)\cdot(3,\ 4,\ 2)}{1\times\sqrt{29}}=\frac{2\sqrt{29}}{29}.$$

回到图形问题

设平面 PQR 与平面 $A_1B_1C_1$ 的夹角为 θ，则

$$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2\rangle|=\frac{2\sqrt{29}}{29}.$$

即平面 PQR 与平面 $A_1B_1C_1$ 的夹角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{29}}{29}$.

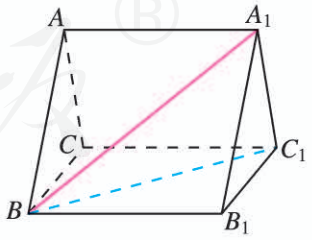
练习

1. 在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$\angle BCA=90^\circ$，D_1，F_1 分别是 A_1B_1，A_1C_1 的中点，$BC=CA=CC_1$，则 BD_1 与 AF_1 所成角的余弦值是（　　）.

(A) $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{30}}{15}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{15}}{10}$

2. PA，PB，PC 是从点 P 出发的三条射线，每两条射线的夹角均为 60°，那么直线 PC 与平面 PAB 所成角的余弦值是（　　）.

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　(C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$



（第 3 题）

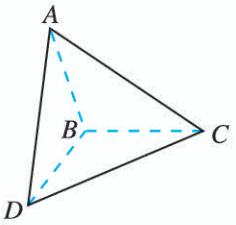
3. 如图，正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的所有棱长都为 2，求平面 AA_1B 与平面 A_1BC_1 夹角的余弦值.

4. 如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 所在平面垂直，且 $AB=BC=BD$，$\angle CBA=\angle DBC=120^\circ$. 求：

(1) 直线 AD 与直线 BC 所成角的大小；

(2) 直线 AD 与平面 BCD 所成角的大小；

(3) 平面 ABD 和平面 BDC 的夹角的余弦值.



（第 4 题）

例 9 图 1.4-23 为某种礼物降落伞的示意图，其中有 8 根绳子和伞面连接，每根绳子和水平面的法向量的夹角均为 30°. 已知礼物的质量为 1 kg，每根绳子的拉力大小相同. 求降落伞在匀速下落的过程中每根绳子拉力的大小（重力加速度 g 取 9.8 m/s^2，精确到 0.01 N).



图 1.4-23

分析： 因为降落伞匀速下落，所以降落伞 8 根绳子拉力的合力的大小等于礼物重力的大小. 8 根绳子的拉力在水平面的法向量方向上的投影向量的和向量与礼物的重力是一对相反向量.

解： 如图 1.4-24，设水平面的单位法向量为 $\boldsymbol{n}$，其中一根绳子的拉力为 $\boldsymbol{F}$. 因为$\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{F}\rangle = 30°$，所以 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 上的投影向量为 $\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{F}\right|\boldsymbol{n}$. 所以 8 根绳子拉力的合力

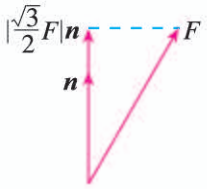


图 1.4-24

$$\boldsymbol{F}_{合} = 8\times\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{F}\right|\boldsymbol{n} = 4\sqrt{3}\,|\boldsymbol{F}|\boldsymbol{n}.$$

又因为降落伞匀速下落，所以

$$|\boldsymbol{F}_{合}| = |\boldsymbol{G}_{礼物}| = 1\times 9.8 = 9.8\ (\mathrm{N}).$$

所以

$$\left|4\sqrt{3}\,|\boldsymbol{F}|\boldsymbol{n}\right| = 9.8.$$

所以

$$|\boldsymbol{F}| = \frac{9.8}{4\sqrt{3}} \approx 1.41\ (\mathrm{N}).$$

例 10 如图 1.4-25，在四棱锥 P-$ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，侧棱 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，$PD = DC$，E 是 PC 的中点，作 $EF\perp PB$ 交 PB 于点 F.

(1) 求证：PA // 平面 EDB；

(2) 求证：$PB\perp$ 平面 EFD；

(3) 求平面 CPB 与平面 PBD 的夹角的大小.

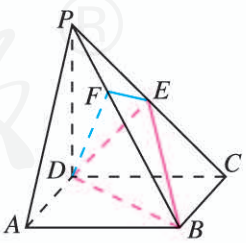


图 1.4-25

分析： 本题涉及的问题包括：直线与平面平行和垂直的判定，计算两个平面的夹角. 这些问题都可以利用向量方法解决. 由于四棱锥的底面是正方形，而且一条侧棱垂直于底面，可以利用这些条件建立适当的空间直角坐标系，用向量及坐标表示问题中的几何元素，进而解决问题.

解： 以 D 为原点，DA，DC，DP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图 1.4-26 所示的空间直角坐标系，设 $DC = 1$.

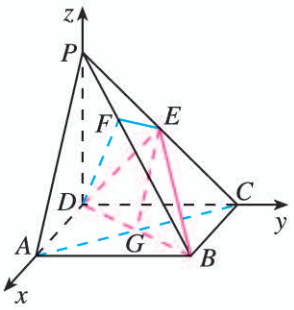


图 1.4-26

(1) **证明**：连接 AC，交 BD 于点 G，连接 EG.

依题意得 $A(1,\ 0,\ 0)$，$P(0,\ 0,\ 1)$，$E\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$.

因为底面 $ABCD$ 是正方形，所以点 G 是它的中心，故点 G 的坐标为 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$，且 $\overrightarrow{PA}=(1,\ 0,\ -1)$，$\overrightarrow{EG}=\left(\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2}\right)$.

所以 $\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{EG}$，即 $PA/\!/EG$.

而 $EG\subset$ 平面 EDB，且 $PA\not\subset$ 平面 EDB，因此 $PA/\!/$ 平面 EDB.

(2) **证明**：依题意得

$$B(1,\ 1,\ 0),\overrightarrow{PB}=(1,\ 1,\ -1).$$

又 $\overrightarrow{DE}=\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，故

$$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{DE}=0+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0.$$

所以 $PB\perp DE$.

由已知 $EF\perp PB$，且 $EF\cap DE=E$，

所以 $PB\perp$ 平面 EFD.

(3) **解**：已知 $PB\perp EF$，由 (2) 可知 $PB\perp DF$，故 $\angle EFD$ 是平面 CPB 与平面 PBD 的夹角.

由 (2) 可知点 F 的坐标为 $(x,\ y,\ z)$，则 $\overrightarrow{PF}=(x,\ y,\ z-1)$.

因为 $\overrightarrow{PF}=k\overrightarrow{PB}$，所以

$(x,\ y,\ z-1)=k(1,\ 1,\ -1)=(k,\ k,\ -k)$，即 $x=k$，$y=k$，$z=1-k$.

设 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{DF}=0$，则

$$(1,\ 1,\ -1)\cdot(k,\ k,\ 1-k)=k+k-1+k=3k-1=0.$$

所以 $k=\frac{1}{3}$，点 F 的坐标为 $\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$.

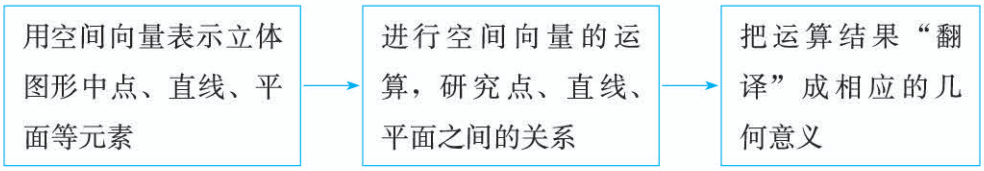
又点 E 的坐标为 $\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，所以

$$\overrightarrow{FE}=\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{6},\ -\frac{1}{6}\right).$$

所以 $\cos\angle EFD=\dfrac{\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FD}}{|\overrightarrow{FE}||\overrightarrow{FD}|}=\dfrac{\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{6},\ -\frac{1}{6}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)}{\frac{\sqrt{6}}{6}\times\frac{\sqrt{6}}{3}}=\frac{1}{2}.$

所以 $\angle EFD=60^\circ$，即平面 CPB 与平面 PBD 的夹角大小为 60°.

通过本节的学习，你对立体几何中的向量法是否有了一定的认识？请结合例题就下面的框图谈谈体会.

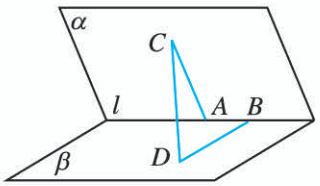


解决立体几何中的问题，可用三种方法：综合法、向量法、坐标法. 你能说出它们各自的特点吗？

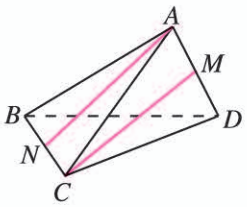
综合法以逻辑推理作为工具解决问题；向量法利用向量的概念及其运算解决问题，如本节的例 7、例 9；坐标法利用数及其运算来解决问题，坐标法经常与向量法结合起来使用，如本节的例 6，例 8，例 10. 对于具体的问题，应根据它的条件和所求选择合适的方法.

练习

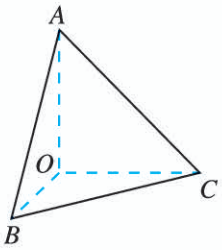
1. 如图，二面角 α-l-β 的棱上有两个点 A，B，线段 BD 与 AC 分别在这个二面角的两个面内，并且都垂直于棱 l. 若 $AB=4$，$AC=6$，$BD=8$，$CD=2\sqrt{17}$，求平面 α 与平面 β 的夹角.



（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）

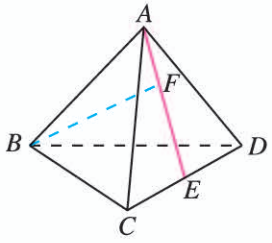
2. 如图，在三棱锥 A-BCD 中，$AB=AC=BD=CD=3$，$AD=BC=2$，M，N 分别是 AD，BC 的中点. 求异面直线 AN，CM 所成角的余弦值.
3. 如图，在三棱锥 O-ABC 中，OA，OB，OC 两两垂直，$OA=OC=3$，$OB=2$. 求直线 OB 与平面 ABC 所成角的正弦值.

习题 1.4

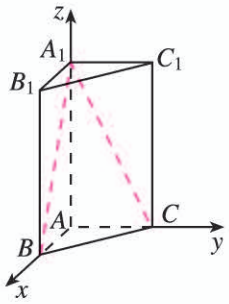
复习巩固

1. 如图，在三棱锥 A-BCD 中，E 是 CD 的中点，点 F 在 AE 上，且 $EF=2FA$. 设 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{c}$，求直线 AE，BF 的方向向量.
2. 如图，在直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp AC$，$AB=AC=1$，$AA_1=2$. 以 A 为原点，建立如图所示空间直角坐标系.

（1）求平面 BCC_1B_1 的法向量；（2）求平面 A_1BC 的法向量.

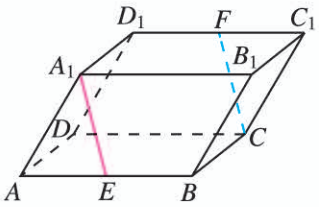


（第 1 题）

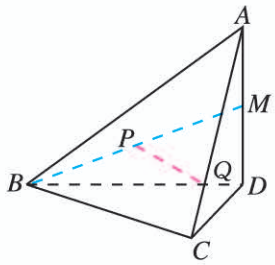


（第 2 题）

3. 如图，在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是 AB 的中点，F 是 C_1D_1 的中点. 求证：$A_1E/\!/CF$.



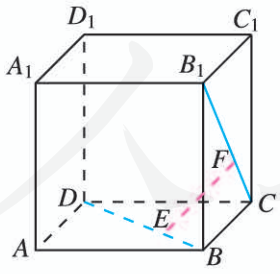
（第 3 题）



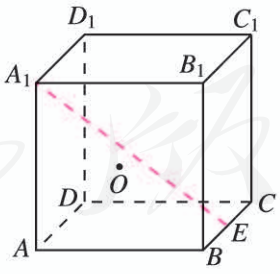
（第 4 题）

4. 如图，在四面体 $ABCD$ 中，$AD\perp$ 平面 BCD，M 是 AD 的中点，P 是 BM 的中点. 点 Q 在线段 AC 上，且 $AQ=3QC$. 求证：$PQ/\!/$ 平面 BCD.

5. 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 在 BD 上，且 $BE=\dfrac{1}{3}BD$；点 F 在 CB_1 上，且 $CF=\dfrac{1}{3}CB_1$. 求证：（1）$EF\perp BD$；（2）$EF\perp CB_1$.



（第 5 题）



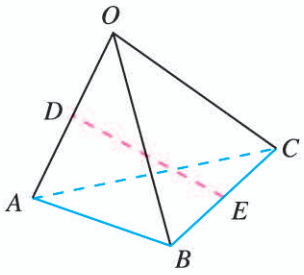
（第 6 题）

6. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，O 为平面 A_1ABB_1 的中心，E 为 BC 的中点，求点 O 到直线 A_1E 的距离.

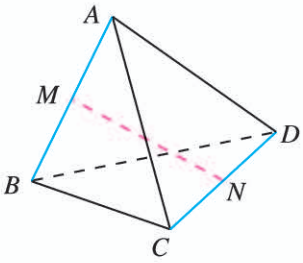
7. 如图，四面体 $OABC$ 的所有棱长都是 1，D，E 分别是 OA，BC 的中点，连接 DE.

（1）计算 DE 的长；

（2）求点 O 到平面 ABC 的距离.



（第 7 题）

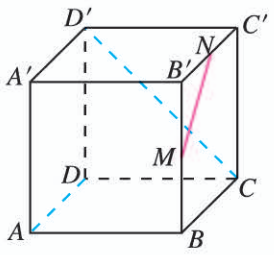


（第 8 题）

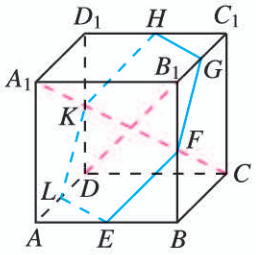
8. 如图，四面体 $ABCD$ 的每条棱长都等于 a，M，N 分别是 AB，CD 的中点．求证：$MN\perp AB$，$MN\perp CD$.

9. 如图，M，N 分别是正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 的棱 BB' 和 $B'C'$ 的中点，求：

（1）MN 和 CD' 所成角的大小；（2）MN 和 AD 所成角的大小.



（第 9 题）



（第 10 题）

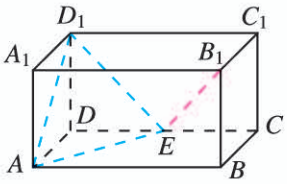
10. 如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F，G，H，K，L 分别是 AB，BB_1，B_1C_1，C_1D_1，D_1D，DA 各棱的中点.

（1）求证：$A_1C\perp$ 平面 $EFGHKL$；

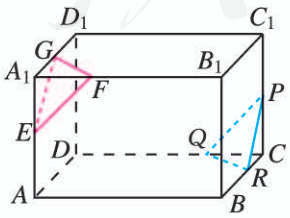
（2）求 DB_1 与平面 $EFGHKL$ 所成角的余弦值.

综合运用

11. 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$BC=CC_1=1$，E 是 CD 的中点．求证：$B_1E\perp$ 平面 AED_1.



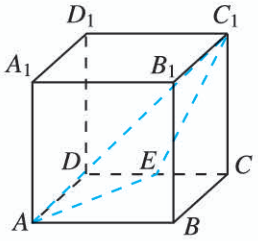
（第 11 题）



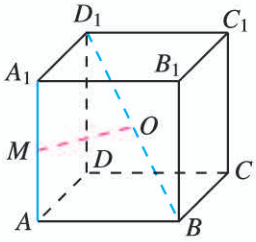
（第 12 题）

12. 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E，F，G 分别在棱 A_1A，A_1B_1，A_1D_1 上，$A_1E=A_1F=A_1G=1$；点 P，Q，R 分别在棱 CC_1，CD，CB 上，$CP=CQ=CR=1$．求证：平面 EFG // 平面 PQR.

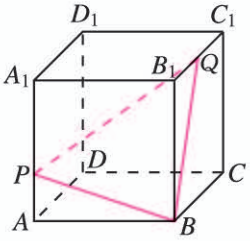
13. 如图，已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，E 为 CD 的中点，求点 D_1 到平面 AEC_1 的距离.



（第 13 题）



（第 14 题）



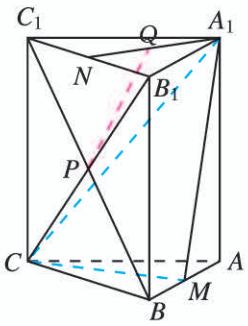
（第 15 题）

14. 如图，正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，M 是棱 AA_1 的中点，O 是 BD_1 的中点. 求证：OM 分别与异面直线 AA_1，BD_1 垂直，并求 OM 的长.

15. 如图，已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，Q 为 B_1C_1 的中点，点 P 在棱 AA_1 上，$AP:AA_1=1:3$. 求平面 $ABCD$ 与平面 BQP 夹角的余弦值.

拓广探索

16. 如图，在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，$AB=AC=2$，$AA_1=3$. M 是 AB 的中点，N 是 B_1C_1 的中点，P 是 BC_1 与 B_1C 的交点. 在线段 A_1N 上是否存在点 Q，使得 PQ//平面 A_1CM?



（第 16 题）

17. 在空间直角坐标系中，已知向量 $\boldsymbol{u}=(a,b,c)(abc\neq 0)$，点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，点 $P(x,y,z)$.

(1) 若直线 l 经过点 P_0，且以 $\boldsymbol{u}$ 为方向向量，P 是直线 l 上的任意一点，求证：$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$；

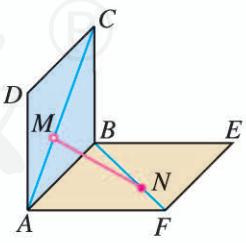
(2) 若平面 α 经过点 P_0，且以 $\boldsymbol{u}$ 为法向量，P 是平面 α 内的任意一点，求证：$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$.

18. 在如图所示的试验装置中，两个正方形框架 $ABCD$，$ABEF$ 的边长都是 1，且它们所在的平面互相垂直. 活动弹子 M，N 分别在正方形对角线 AC 和 BF 上移动，且 CM 和 BN 的长度保持相等，记 $CM=BN=a$ $(0<a<\sqrt{2})$.

(1) 求 MN 的长；

(2) a 为何值时，MN 的长最小?

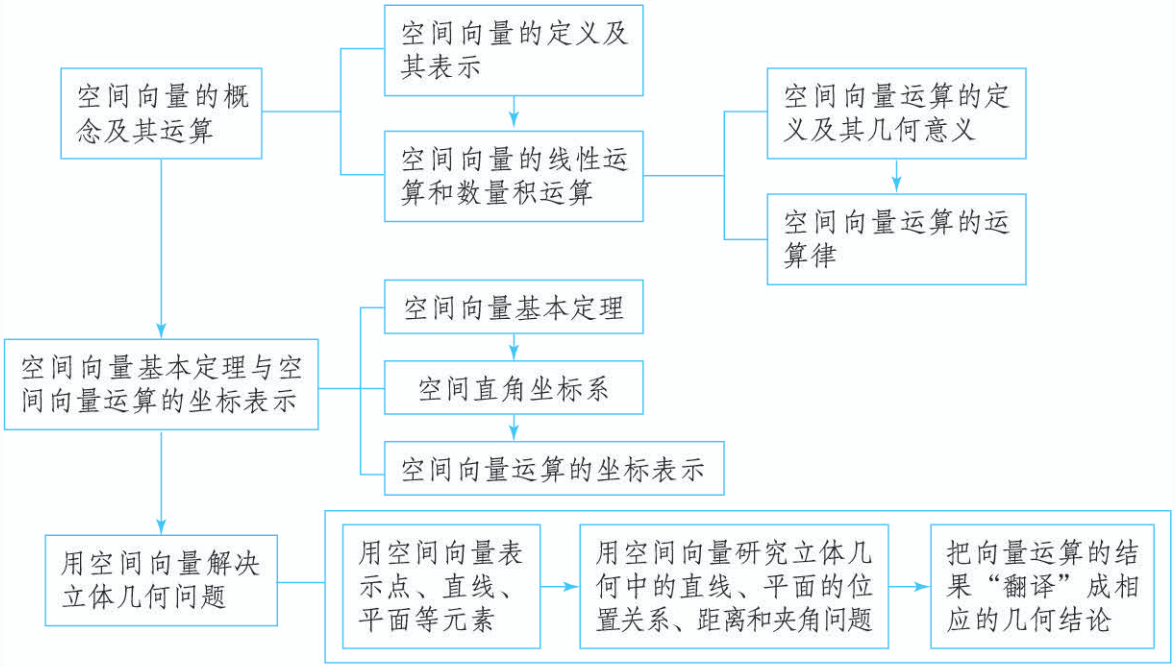
(3) 当 MN 的长最小时，求平面 MNA 与平面 MNB 夹角的余弦值.



（第 18 题）

小结

一、本章知识结构



二、回顾与思考

空间向量是研究空间图形的有力工具. 本章我们在必修课程学习平面向量的基础上，利用类比方法，学习空间向量的概念、运算（包括线性运算和数量积）、基本定理，并运用空间向量研究空间基本图形的平行、垂直等位置关系和距离、角度等度量问题.

向量是具有大小和方向的量，这一概念既适用于平面，也适用于空间. 平面内的向量都可以看作空间中的向量，因此空间向量的概念、表示和平面向量是一致的. 由于任意两个空间向量都可以平移到一个平面内，因此两个空间向量的运算可以看作两个平面向量的运算，它们的加法、数乘、数量积运算也是一致的.

空间向量为我们解决立体几何问题提供了新的工具. 向量让几何量带上了方向，并用统一的符号表示，因此向量运算既是几何的运算也是数的运算. 用空间向量解决立体几何问题，首先要用空间向量表示立体几何问题中涉及的几何元素，将几何问题转化为向量问题；然后通过空间向量的运算，研究空间图形之间的平行、垂直等位置关系以及距离、夹角等度量问题；最后将运算结果“翻译”成相应的几何结论，得到相应立体几何问题的解决. 这个“三步曲”，是立体几何中向量方法的具体化.

空间向量的加法、数乘、数量积等运算以及空间向量基本定理是用“向量法”解决立体几何问题的基础. 空间向量基本定理把空间任意一个向量表示成三个不共面向量的线性运算，在用空间向量解决立体几何问题的过程中，这种表示发挥了基础性的作用. 由空间向量基本定理，我们还可以进一步得到空间向量及其运算的坐标表示，从而将几何问题完全“代数化”，得到用空间向量解决立体几何问题的“坐标法”.

请你带着下面的问题，复习一下全章内容吧!

1. 空间向量由平面向量推广而来，空间向量与平面向量有许多共同性质. 如果我们把平面看成二维空间，把普通的空间看成三维空间，我们能不能把向量的概念推广到四维（例如由“长”“宽”“高”“时间”四个维度构成的空间）、五维等“空间”中去呢？它们是否也与平面向量、空间向量有许多共同的性质？

2. 因为向量可以用有向线段表示，所以我们用几何方式引入空间向量的运算法则，如向量加法的平行四边形法则. 在空间直角坐标系中，我们还可以把这种由几何方式引入的向量运算转化成代数运算（实数运算）. 对于这样的做法给空间向量运算带来的方便，你有什么体会？

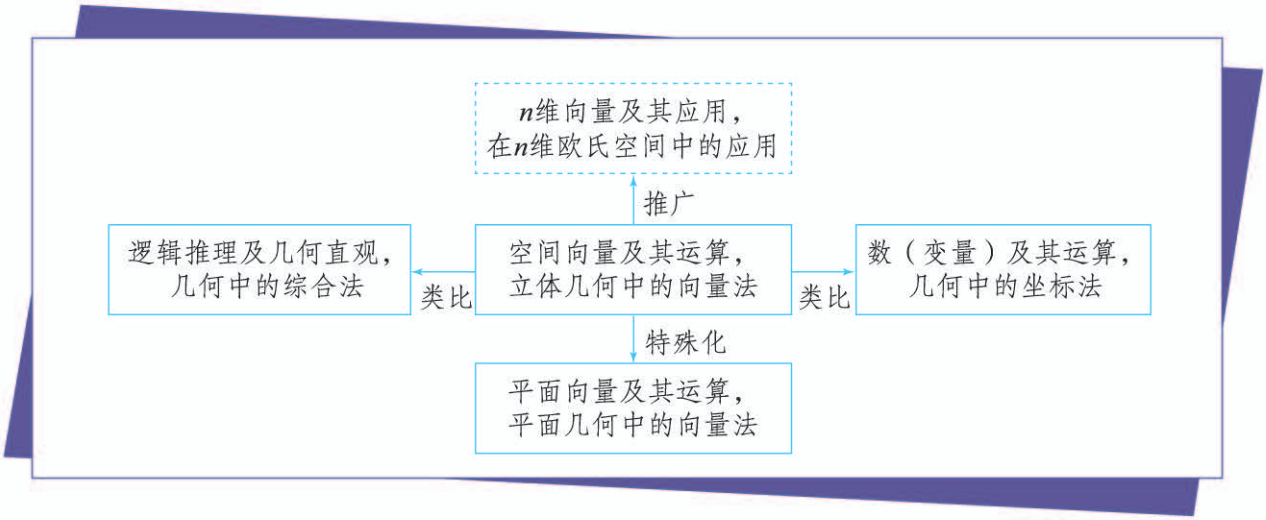
3. 同学们对数及其运算比较熟悉，向量虽然与数量不同，但是它也构成一个运算体系，我们要从“数、量与运算”发展的角度理解向量及其运算. 类比数的运算律，对于向量仍然成立的有哪些？不成立的有哪些？

4. 如何理解空间向量可以由三个不共面向量唯一表示？你认为应如何根据问题的条件选择空间的基底？

5. 利用空间向量解决立体几何问题，首先要用空间向量表示空间中的点、直线、平面这些基本几何元素. 在这一过程中，直线的方向向量和平面的法向量发挥了重要作用. 我们是如何利用直线的方向向量和平面的法向量表示直线和平面的？我们又是如何利用直线的方向向量和平面的法向量刻画空间直线、平面的平行和垂直关系的？

6. 距离和角度是立体几何中的基本度量. 本章我们如何把点到直线、点到平面、平行直线、平行平面间的距离转化为求投影向量长度？如何把直线与平面、平面与平面所成角的问题转化为直线的方向向量或平面的法向量之间的夹角？请结合具体实例谈谈你的体会.

7. 回顾本章学习过程，你对学习数学新知识、应用数学知识解决问题的思想方法有什么新认识？请结合下面的框图谈谈你的体会.

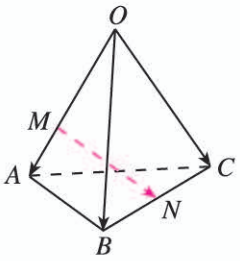


复习参考题 1

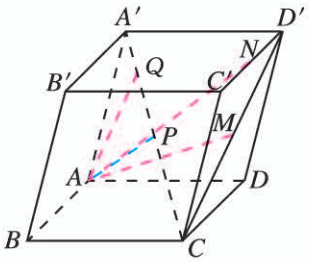
复习巩固

1. 如图，在四面体 $OABC$ 中，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$．点 M 在 OA 上，且 $OM=2MA$，N 为 BC 中点，则 $\overrightarrow{MN}$ 等于（　　）．

（A）$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$　（B）$-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$　（C）$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$　（D）$\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$



（第 1 题）

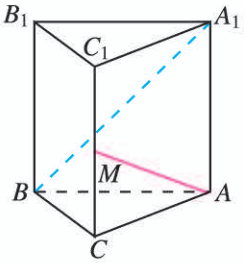


（第 2 题）

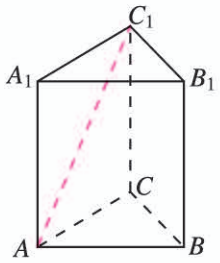
2. 如图，在平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$．$P$，$M$，$N$ 分别是 CA'，CD'，$C'D'$ 的中点，点 Q 在 CA' 上，且 $CQ:QA'=4:1$．用空间的一个基底 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 表示下列向量：

（1）$\overrightarrow{AP}$；　（2）$\overrightarrow{AM}$；　（3）$\overrightarrow{AN}$；　（4）$\overrightarrow{AQ}$．

3. 如图，在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$\angle ABC=90°$，$CB=1$，$CA=2$，$AA_1=\sqrt{6}$，M 是 CC_1 的中点．求证：$AM\perp BA_1$．



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 如图，正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的底面边长为 a，侧棱长为$\sqrt{2}a$.

（1）试建立适当的空间直角坐标系，并写出点 A，B，A_1，C_1 的坐标；

（2）求 AC_1 与侧面 ABB_1A_1 所成的角.

5. 已知空间三点 $A(0, 2, 3)$，$B(-2, 1, 6)$，$C(1, -1, 5)$.

（1）求以 AB，AC 为邻边的平行四边形的面积；

（2）若向量 $\boldsymbol{a}$ 分别与 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 垂直，且 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

6. 设空间两个单位向量 $\overrightarrow{OA}=(m, n, 0)$，$\overrightarrow{OB}=(0, n, p)$ 与向量 $\overrightarrow{OC}=(1, 1, 1)$ 的夹角都等于$\frac{\pi}{4}$，求 $\cos\angle AOB$ 的值.

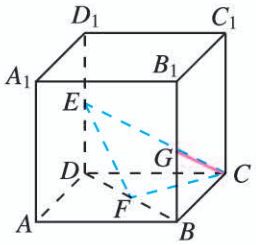
7. 正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的侧棱长为 2，底面边长为 1，M 是 BC 的中点. 在直线 CC_1 上求一点 N，使 $MN\perp AB_1$.

8. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F，G 分别是 DD_1，BD，BB_1 的中点.

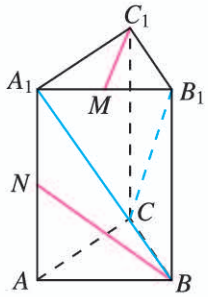
（1）求证：$EF\perp CF$；

（2）求 EF 与 CG 所成角的余弦值；

（3）求 CE 的长.



（第 8 题）



（第 9 题）

9. 如图，在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$CA=CB=1$，$\angle BCA=90^\circ$，$AA_1=2$，M，N 分别是 A_1B_1，A_1A 的中点.

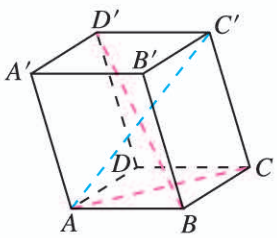
（1）求 BN 的长；

（2）求 $\cos\langle\overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{CB_1}\rangle$的值；

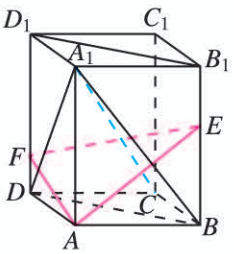
（3）求证：$A_1B\perp C_1M$.

综合运用

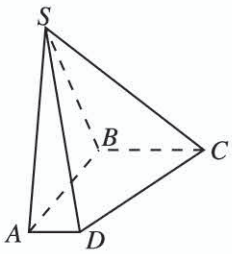
10. 如图，在平行六面体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 a 的正方形，侧棱 AA' 的长为 b，且 $\angle A'AB=\angle A'AD=120^\circ$. 求：（1）$AC'$ 的长；（2）直线 BD' 与 AC 所成角的余弦值.



（第 10 题）



（第 11 题）



（第 12 题）

11. 如图，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E，F 分别在 BB_1，DD_1 上，且 $AE\perp A_1B$，$AF\perp A_1D$.

（1）求证：$A_1C\perp$平面 AEF；

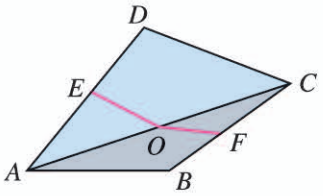
（2）当 $AB=4$，$AD=3$，$AA_1=5$ 时，求平面 AEF 与平面 D_1B_1BD 的夹角的余弦值.

12. 如图，在四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 满足 $AB\perp AD$，$AB\perp BC$，$SA\perp$底面 $ABCD$，且 $SA=AB=BC=1$，$AD=0.5$.

（1）求四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 的体积；

（2）求平面 SCD 与平面 SAB 的夹角的余弦值.

13. 如图，把正方形纸片 $ABCD$ 沿对角线 AC 折成直二面角，E，F 分别为 AD，BC 的中点，O 是原正方形 $ABCD$ 的中心，求折纸后 $\angle EOF$ 的大小.



（第 13 题）

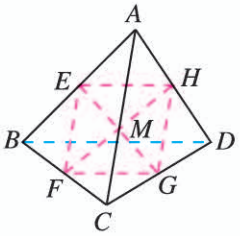
14. 在正四棱锥 $S\text{-}ABCD$ 中，O 为顶点 S 在底面内的射影，P 为侧棱 SD 的中点，且 $SO=OD$. 求直线 BC 与平面 PAC 所成的角.

15. 如图，在四面体 $ABCD$ 中，E，F，G，H 分别是 AB，BC，CD，DA 的中点.

（1）求证：E，F，G，H 四点共面；

（2）求证：BD // 平面 $EFGH$；

（3）设 M 是 EG 和 FH 的交点，求证：对空间任意一点 O，有 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$.



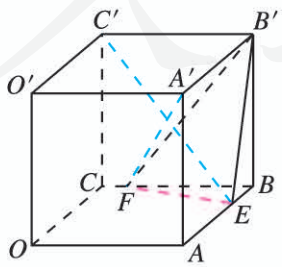
（第 15 题）

拓广探索

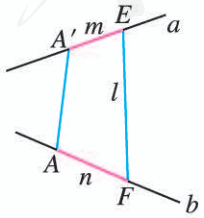
16. 如图，在棱长为 a 的正方体 $OABC\text{-}O'A'B'C'$ 中，E，F 分别是棱 AB，BC 上的动点，且 $AE=BF$.

（1）求证：$A'F\perp C'E$；

（2）当三棱锥 $B'\text{-}BEF$ 的体积取得最大值时，求平面 $B'EF$ 与平面 BEF 的夹角正切值.



（第 16 题）



（第 17 题）

17. 如图，两条异面直线 a，b 所成的角为 θ，在直线 a，b 上分别取点 A'，E 和点 A，F，使 $AA'\perp a$，且 $AA'\perp b$. 已知 $A'E=m$，$AF=n$，$EF=l$，求线段 AA' 的长.

第二章
直线和圆的方程

在以往的几何学习中，我们常常通过直观感知、操作确认、思辨论证、度量计算等方法研究几何图形的形状、大小和位置关系，这种方法通常称为综合法．本章我们采用坐标法研究几何图形的性质．坐标法是解析几何中最基本的研究方法．

解析几何是17世纪法国数学家笛卡儿和费马创立的，它的基本内涵和方法是：通过坐标系，把几何的基本元素——点和代数的基本对象——数（有序数对或数组）对应起来，在此基础上建立曲线（点的轨迹）的方程，从而把几何问题转化为代数问题，再通过代数方法研究几何图形的性质．解析几何的创立是数学发展史上的一个里程碑，数学从此进入变量数学时期，它为微积分的创建奠定了基础．

本章我们将在平面直角坐标系中，探索确定直线位置的几何要素，建立直线的方程，并通过直线的方程研究两条直线的位置关系、交点坐标以及点到直线的距离等．类似地，通过确定圆的几何要素，建立圆的方程，再通过圆的方程研究与圆相关的问题；最后应用直线和圆的方程解决一些实际问题．



2.1 直线的倾斜角与斜率

我们知道，点是构成直线的基本元素. 在平面直角坐标系中，可以用坐标表示点，那么，如何用坐标表示直线呢？为了用代数方法研究直线的有关问题，本节我们首先在平面直角坐标系中探索确定直线位置的几何要素，然后用代数方法把这些几何要素表示出来.

2.1.1 倾斜角与斜率

思考

确定一条直线的几何要素是什么？对于平面直角坐标系中的一条直线 l（图 2.1-1），如何利用坐标系确定它的位置？

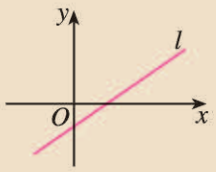


图 2.1-1

我们知道，两点确定一条直线，一点和一个方向也可以确定一条直线. 设 A，B 为直线上的两点，则 $\overrightarrow{AB}$ 就是这条直线的方向向量. 所以，两点确定一条直线可以归结为一点和一个方向确定一条直线. 在平面直角坐标系中，经过一点 P 可以作无数条直线 l_1，l_2，l_3，…，它们组成一个直线束（图 2.1-2），这些直线的区别是什么？

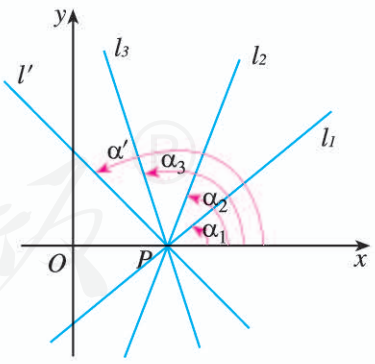


图 2.1-2

在平面直角坐标系中，我们规定水平直线的方向向右，其他直线向上的方向为这条直线的方向. 因此，这些直线的区别是它们的方向不同. 如何表示这些直线的方向？

我们看到，这些直线相对于 x 轴的倾斜程度不同，也就是它们与 x 轴所成的角不同. 因此，我们可以利用这样的角来表示这些直线的方向.

当直线 l 与 x 轴相交时，我们以 x 轴为基准，x 轴正向与直线 l 向上的方向之间所成的角 α 叫做直线 l 的**倾斜角**（angle of inclination）. 图 2.1-2 中直线 l_1 的倾斜角 α_1 为锐角，直线 l' 的倾斜角 α' 为钝角. 当直线 l 与 x 轴平行或重合时，我们规定它的倾斜角为 $0°$. 因此，直线的倾斜角 α 的取值范围为

$$0° \leqslant \alpha < 180°.$$

这样，在平面直角坐标系中，每一条直线都有一个确定的倾斜角，而且方向相同的直线，其倾斜程度相同，倾斜角相等；方向不同的直线，其倾斜程度不同，倾斜角不相等. 因此，我们可以用倾斜角表示平面直角坐标系中一条直线的倾斜程度，也就表示了直线的方向.

下面我们进一步研究刻画直线倾斜程度的方法.

设 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$（其中 $x_1 \neq x_2$）是直线 l 上的两点. 由两点确定一条直线可知，直线 l 由点 P_1，P_2 唯一确定. 所以，可以推断，直线 l 的倾斜角一定与 P_1，P_2 两点的坐标有内在联系.

探究

在平面直角坐标系中，设直线 l 的倾斜角为 α.

(1) 已知直线 l 经过 $O(0, 0)$，$P(\sqrt{3}, 1)$，α 与 O，P 的坐标有什么关系？

(2) 类似地，如果直线 l 经过 $P_1(-1, 1)$，$P_2(\sqrt{2}, 0)$，α 与 P_1，P_2 的坐标又有什么关系？

(3) 一般地，如果直线 l 经过两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，$x_1 \neq x_2$，那么 α 与 P_1，P_2 的坐标有怎样的关系？

下面我们利用向量法探究上述问题.

对于问题 (1)，如图 2.1-3 (1)，向量 $\overrightarrow{OP} = (\sqrt{3}, 1)$，且直线 OP 的倾斜角为 α. 由正切函数的定义，有

$$\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

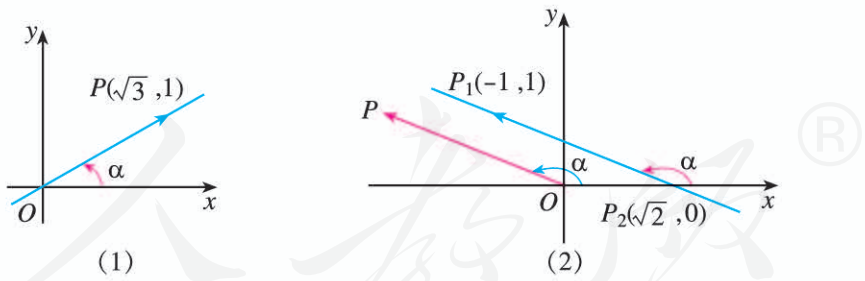


图 2.1-3

对于问题 (2)，如图 2.1-3 (2)，$\overrightarrow{P_2P_1} = (-1-\sqrt{2}, 1-0) = (-1-\sqrt{2}, 1)$. 平移向量 $\overrightarrow{P_2P_1}$ 到 $\overrightarrow{OP}$，则点 P 的坐标为 $(-1-\sqrt{2}, 1)$，且直线 OP 的倾斜角也是 α. 由正切函数的定义，有

$$\tan\alpha = \frac{1}{-1-\sqrt{2}} = 1-\sqrt{2}.$$

一般地，如图 2.1-4，当向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向向上时，$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1)$. 平移向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 到 $\overrightarrow{OP}$，则点 P 的坐标为 (x_2-x_1, y_2-y_1)，且直线 OP 的倾斜角也是 α，由正

切函数的定义，有

$$\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$



图 2.1-4

同样，当向量$\overrightarrow{P_2P_1}$的方向向上时，如图 2.1-5，$\overrightarrow{P_2P_1}=(x_1-x_2,\ y_1-y_2)$，也有

$$\tan\alpha=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$



图 2.1-5

思考

当直线 P_1P_2 与 x 轴平行或重合时，上述式子还成立吗？为什么？

综上可知，直线 l 的倾斜角 α 与直线 l 上的两点 $P_1(x_1,\ y_1)$，$P_2(x_2,\ y_2)$ $(x_1\neq x_2)$ 的坐标有如下关系：

$$\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \qquad ①$$

我们把一条直线的倾斜角 α 的正切值叫做这条直线的**斜率**（slope）．斜率常用小写字母 k 表示，即

$$k=\tan\alpha. \qquad ②$$

倾斜角是 90°的直线没有斜率，倾斜角不是 90°的直线都有斜率．例如，倾斜角 $\alpha=30°$时，这条直线的斜率

$$k=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

倾斜角 $\alpha=120°$时，这条直线的斜率

日常生活中常用“坡度”表示倾斜面的倾斜程度：坡度$=\frac{\text{铅直高度}}{\text{水平宽度}}$．当直线的倾斜角为锐角时，直线的斜率与坡度是类似的．

当直线的倾斜角由 0°逐渐增大到 180°时，其斜率如何变化？为什么？

$$k=\tan 120^\circ=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}.$$

由正切函数的单调性，倾斜角不同的直线，其斜率也不同. 因此，我们可以用斜率表示倾斜角不等于 90° 的直线相对于 x 轴的倾斜程度，进而表示直线的方向.

如果直线经过两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ $(x_1\neq x_2)$，那么由①②可得如下的斜率公式：

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

我们发现，在平面直角坐标系中，倾斜角和斜率分别从形和数两个角度刻画了直线相对于 x 轴的倾斜程度.

思考

(1) 已知直线上的两点 $A(a_1, a_2)$，$B(b_1, b_2)$，运用上述公式计算直线 AB 的斜率时，与 A，B 两点的顺序有关吗？

(2) 当直线平行于 y 轴，或与 y 轴重合时，上述公式还适用吗？为什么？

我们知道，直线 P_1P_2 上的向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 以及与它平行的非零向量都是直线的方向向量. 直线 P_1P_2 的方向向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标为

$$(x_2-x_1,\ y_2-y_1).$$

当直线 P_1P_2 与 x 轴不垂直时，$x_1\neq x_2$. 此时向量 $\frac{1}{x_2-x_1}\overrightarrow{P_1P_2}$ 也是直线 P_1P_2 的方向向量，且它的坐标为 $\frac{1}{x_2-x_1}(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$，即 $(1,\ \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1})=(1,\ k)$，其中 k 是直线 P_1P_2 的斜率. 因此，若直线 l 的斜率为 k，它的一个方向向量的坐标为 (x, y)，则 $k=\frac{y}{x}$.

例 1 如图 2.1-6，已知 $A(3, 2)$，$B(-4, 1)$，$C(0, -1)$，求直线 AB，BC，CA 的斜率，并判断这些直线的倾斜角是锐角还是钝角.

解： 直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\frac{1-2}{-4-3}=\frac{1}{7}$；

直线 BC 的斜率 $k_{BC}=\frac{-1-1}{0-(-4)}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$；

直线 CA 的斜率 $k_{CA}=\frac{2-(-1)}{3-0}=\frac{3}{3}=1$.

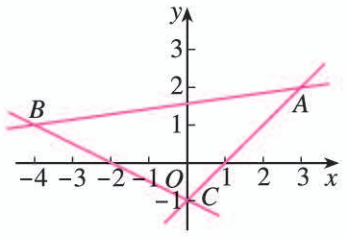


图 2.1-6

由 $k_{AB}>0$ 及 $k_{CA}>0$ 可知，直线 AB 与 CA 的倾斜角均为锐角；由 $k_{BC}<0$ 可知，直线 BC 的倾斜角为钝角.

练习

1. 已知下列直线的倾斜角，求直线的斜率：

(1) $\alpha=30°$；　(2) $\alpha=45°$；　(3) $\alpha=\frac{2\pi}{3}$；　(4) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$.

2. 已知下列直线的斜率，求直线的倾斜角：

(1) $k=0$；　(2) $k=\sqrt{3}$；　(3) $k=-\sqrt{3}$；　(4) $k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. 求经过下列两点的直线的斜率，并判断其倾斜角是锐角还是钝角：

(1) $C(18, 8)$，$D(4, -4)$；　(2) $P(0, 0)$，$Q(-1, 3)$.

4. 已知 a，b，c 是两两不等的实数，求经过下列两点的直线的倾斜角：

(1) $A(a, c)$，$B(b, c)$；

(2) $C(a, b)$，$D(a, c)$；

(3) $P(b, b+c)$，$Q(a, c+a)$.

5. 经过 $A(0, 2)$，$B(-1, 0)$ 两点的直线的方向向量为 $(1, k)$，求 k 的值.

2.1.2　两条直线平行和垂直的判定

为了在平面直角坐标系中用代数方法表示直线，我们从确定直线位置的几何要素出发，引入直线的倾斜角，再利用倾斜角与直线上点的坐标关系引入直线的斜率，从数的角度刻画了直线相对于 x 轴的倾斜程度，并导出了用直线上任意两点的坐标计算斜率的公式，从而把几何问题转化为代数问题. 下面，我们通过直线的斜率判断两条直线的位置关系.

思考

我们知道，平面中两条直线有两种位置关系：相交、平行. 当两条直线 l_1 与直线 l_2 平行时，它们的斜率 k_1 与 k_2 满足什么关系？

若没有特别说明，说“两条直线 l_1，l_2”时，指两条不重合的直线.

如图 2.1-7，若 $l_1 // l_2$，则 l_1 与 l_2 的倾斜角 α_1 与 α_2 相等，由 $\alpha_1=\alpha_2$，可得 $\tan\alpha_1=\tan\alpha_2$，即 $k_1=k_2$. 因此，

若 $l_1 // l_2$，则 $k_1=k_2$.

反之，当 $k_1=k_2$ 时，$\tan\alpha_1=\tan\alpha_2$，由倾斜角的取值范围及正切函数的单调性可知，$\alpha_1=\alpha_2$，因此 $l_1 // l_2$.

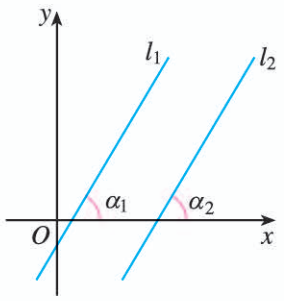


图 2.1-7

于是，对于斜率分别为 k_1，k_2 的两条直线 l_1，l_2，有

$$l_1 // l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2.$$

显然，当 $\alpha_1=\alpha_2=90°$ 时，直线的斜率不存在，此时 $l_1/\!/l_2$.

若直线 l_1，l_2 重合，此时仍然有 $k_1=k_2$. 用斜率证明三点共线时，常常用到这个结论.

例 2 已知 $A(2,3)$，$B(-4,0)$，$P(-3,1)$，$Q(-1,2)$，试判断直线 AB 与 PQ 的位置关系，并证明你的结论.

解： 如图 2.1-8，由已知可得

直线 BA 的斜率 $k_{BA}=\dfrac{3-0}{2-(-4)}=\dfrac{1}{2}$，

直线 PQ 的斜率 $k_{PQ}=\dfrac{2-1}{-1-(-3)}=\dfrac{1}{2}$.

因为 $k_{BA}=k_{PQ}$，所以直线 $AB/\!/PQ$.

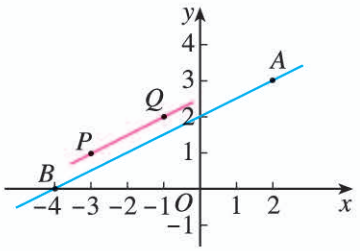


图 2.1-8

例 3 已知四边形 $ABCD$ 的四个顶点分别为 $A(0,0)$，$B(2,-1)$，$C(4,2)$，$D(2,3)$，试判断四边形 $ABCD$ 的形状，并给出证明.

解： 如图 2.1-9，由已知可得

AB 边所在直线的斜率 $k_{AB}=-\dfrac{1}{2}$，

CD 边所在直线的斜率 $k_{CD}=-\dfrac{1}{2}$，

BC 边所在直线的斜率 $k_{BC}=\dfrac{3}{2}$，

DA 边所在直线的斜率 $k_{DA}=\dfrac{3}{2}$.

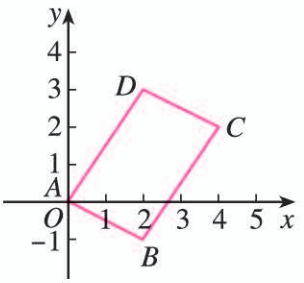


图 2.1-9

因为 $k_{AB}=k_{CD}$，$k_{BC}=k_{DA}$，所以 $AB/\!/CD$，$BC/\!/DA$.

因此四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

显然，当两条直线相交时，它们的斜率不相等；反之，当两条直线的斜率不相等时，它们相交. 在相交的位置关系中，垂直是最特殊的情形. 当直线 l_1，l_2 垂直时，它们的斜率除了不相等外，是否还有特殊的数量关系？

设两条直线 l_1，l_2 的斜率分别为 k_1，k_2，则直线 l_1，l_2 的方向向量分别是 $\boldsymbol{a}=(1,k_1)$，$\boldsymbol{b}=(1,k_2)$，于是

$$l_1\perp l_2\Leftrightarrow \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow 1\times1+k_1k_2=0，\text{即 } k_1k_2=-1.$$

也就是说，$l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1k_2=-1$.

当直线 l_1 或 l_2 的倾斜角为 $90°$ 时，若 $l_1\perp l_2$，则另一条直线的倾斜角为 $0°$；反之亦然.

由上我们得到，如果两条直线都有斜率，且它们互相垂直，那么它们的斜率之积等于

-1；反之，如果两条直线的斜率之积等于-1，那么它们互相垂直. 即

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1.$$

例 4 已知 $A(-6, 0)$，$B(3, 6)$，$P(0, 3)$，$Q(6, -6)$，试判断直线 AB 与 PQ 的位置关系.

解： 直线 AB 的斜率 $k_{AB} = \frac{2}{3}$，

直线 PQ 的斜率 $k_{PQ} = -\frac{3}{2}$.

因为 $k_{AB} k_{PQ} = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$，所以直线 $AB \perp PQ$.

例 5 已知 $A(5, -1)$，$B(1, 1)$，$C(2, 3)$ 三点，试判断$\triangle ABC$ 的形状.

分析： 如图 2.1-10，猜想 $AB \perp BC$，$\triangle ABC$ 是直角三角形.

解： 边 AB 所在直线的斜率 $k_{AB} = -\frac{1}{2}$，边 BC 所在直线的斜率 $k_{BC} = 2$.

由 $k_{AB} k_{BC} = -1$，得 $AB \perp BC$，即 $\angle ABC = 90°$.

所以$\triangle ABC$ 是直角三角形.

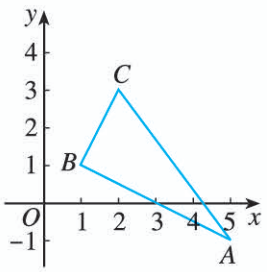


图 2.1-10

练习

1. 判断下列各对直线是否平行或垂直：

   (1) 经过 $A(2, 3)$，$B(-1, 0)$ 两点的直线 l_1，与经过点 $P(1, 0)$ 且斜率为 1 的直线 l_2；

   (2) 经过 $C(3, 1)$，$D(-2, 0)$ 两点的直线 l_3，与经过点 $M(1, -4)$ 且斜率为-5 的直线 l_4.

2. 试确定 m 的值，使过 $A(m, 1)$，$B(-1, m)$ 两点的直线与过 $P(1, 2)$，$Q(-5, 0)$ 两点的直线：

   (1) 平行；(2) 垂直.

习题 2.1

复习巩固

1. 已知直线斜率的绝对值等于 1，求直线的倾斜角.
2. 已知四边形 $ABCD$ 的四个顶点是 $A(2, 3)$，$B(1, -1)$，$C(-1, -2)$，$D(-2, 2)$，求四边形 $ABCD$ 的四条边所在直线的斜率.

3. m 为何值时，(1) 经过 $A(-m, 6)$，$B(1, 3m)$ 两点的直线的斜率是 12？

(2) 经过 $A(m, 2)$，$B(-m, -2m-1)$ 两点的直线的倾斜角是 $60°$？

4. 已知 $A(1, 2)$，$B(-1, 0)$，$C(3, 4)$ 三点，这三点是否在同一条直线上？为什么？

5. 判断下列不同的直线 l_1 与 l_2 是否平行：

(1) l_1 的斜率为 2，l_2 经过 $A(1, 2)$，$B(4, 8)$ 两点；

(2) l_1 经过 $P(3, 3)$，$Q(-5, 3)$ 两点，l_2 平行于 x 轴，但不经过 P，Q 两点；

(3) l_1 经过 $M(-1, 0)$，$N(-5, -2)$ 两点，l_2 经过 $R(-4, 3)$，$S(0, 5)$ 两点.

6. 判断下列直线 l_1 与 l_2 是否垂直：

(1) l_1 的斜率为 $-\frac{2}{3}$，l_2 经过点 $A(1, 1)$，$B\left(0, -\frac{1}{2}\right)$；

(2) l_1 的倾斜角为 $45°$，l_2 经过 $P(-2, -1)$，$Q(3, -6)$ 两点；

(3) l_1 经过 $M(1, 0)$，$N(4, -5)$ 两点，l_2 经过 $R(-6, 0)$，$S(-1, 3)$ 两点.

综合运用

7. 过 $A(m^2+2, m^2-3)$，$B(3-m-m^2, 2m)$ 两点的直线 l 的倾斜角为 $45°$，求 m 的值.

8. 经过点 $P(0, -1)$ 作直线 l，若直线 l 与连接 $A(1, -2)$，$B(2, 1)$ 两点的线段总有公共点，求直线 l 的倾斜角 α 与斜率 k 的取值范围，并说明理由.

9. 已知点 $M(2, 2)$ 和 $N(5, -2)$，点 P 在 x 轴上，且 $\angle MPN$ 为直角，求点 P 的坐标.

拓广探索

10. 已知四边形 $ABCD$ 的四个顶点是 $A(2, 2+2\sqrt{2})$，$B(-2, 2)$，$C(0, 2-2\sqrt{2})$，$D(4, 2)$，求证：四边形 $ABCD$ 为矩形.

人教版®

2.2 直线的方程

我们知道，给定一点和一个方向可以唯一确定一条直线. 这样，在平面直角坐标系中，给定一个点 $P_0(x_0, y_0)$ 和斜率 k（或倾斜角），就能唯一确定一条直线. 也就是说，这条直线上任意一点的坐标 (x, y) 与点 P_0 的坐标 (x_0, y_0) 和斜率 k 之间的关系是完全确定的. 那么，这一关系如何表示呢？下面我们就来研究这个问题.

2.2.1 直线的点斜式方程

如图 2.2-1，直线 l 经过点 $P_0(x_0, y_0)$，且斜率为 k. 设 $P(x, y)$ 是直线 l 上不同于点 P_0 的任意一点，因为直线 l 的斜率为 k，由斜率公式得

$$k=\frac{y-y_0}{x-x_0},$$

即

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

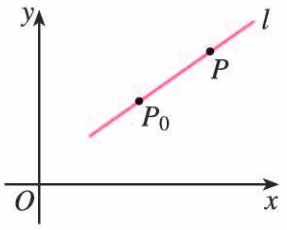


图 2.2-1

点 P_0 的坐标 (x_0, y_0) 满足关系式 $y-y_0=k(x-x_0)$ 吗？

由上述推导过程可知：

(1) 直线 l 上每一个点的坐标 (x, y) 都满足关系式 $y-y_0=k(x-x_0)$；反过来，我们还可以验证

(2) 坐标满足关系式 $y-y_0=k(x-x_0)$ 的每一个点都在直线 l 上.

事实上，若点 $P_1(x_1, y_1)$ 的坐标 x_1，y_1 满足关系式 $y-y_0=k(x-x_0)$，则

$$y_1-y_0=k(x_1-x_0).$$

当 $x_1=x_0$ 时，$y_1=y_0$，这时点 P_1 与 P_0 重合，显然有点 P_1 在直线 l 上；

当 $x_1\neq x_0$ 时，有 $k=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$，这表明过点 P_1，P_0 的直线 l_1 的斜率为 k. 因为直线 l，l_1 的斜率都为 k，且都过

建立直线的方程，就是利用确定直线位置的几何要素，建立直线上任意一点的横坐标 x，纵坐标 y 所满足的关系式.

点 P_0，所以它们重合．所以，点 P_1 在直线 l 上．

由（1）（2）可得：坐标满足关系式 $y-y_0=k(x-x_0)$ 的点一定在直线 l 上；直线 l 上任意一点的坐标一定满足关系式 $y-y_0=k(x-x_0)$．我们把方程

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

称为过点 $P_0(x_0, y_0)$，斜率为 k 的直线 l 的方程．

方程 $y-y_0=k(x-x_0)$ 由直线上一个定点 (x_0, y_0) 及该直线的斜率 k 确定，我们把它叫做直线的**点斜式方程**，简称**点斜式**（point slope form）．

思考

（1）当直线 l 的倾斜角为 0°时，直线 l 的方程是什么？为什么？

（2）当直线 l 的倾斜角为 90°时，直线 l 的方程如何表示？为什么？

当直线 l 的倾斜角为 0°时（图 2.2-2），$\tan 0°=0$，即 $k=0$，这时直线 l 与 x 轴平行或重合，直线 l 的方程是

$$y-y_0=0，即\ y=y_0.$$

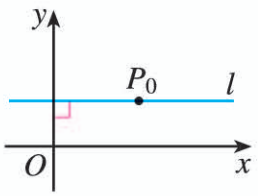


图 2.2-2

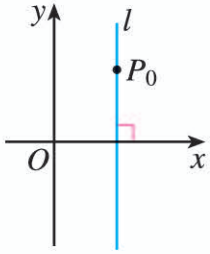


图 2.2-3

当直线 l 的倾斜角为 90°时（图 2.2-3），由于 $\tan 90°$无意义，直线没有斜率，这时直线 l 与 y 轴平行或重合，它的方程不能用点斜式表示．又因为这时直线 l 上每一点的横坐标都等于 x_0，所以它的方程是

$$x-x_0=0，即\ x=x_0.$$

例 1 直线 l 经过点 $P_0(-2, 3)$，且倾斜角 $\alpha=45°$，求直线 l 的点斜式方程，并画出直线 l．

解： 直线 l 经过点 $P_0(-2, 3)$，斜率 $k=\tan 45°=1$，代入点斜式方程得

$$y-3=x+2.$$

画图时，只需再找出直线 l 上的另一点 $P_1(x_1, y_1)$，例如，取 $x_1=-1$，则 $y_1=4$，得点 P_1 的坐标为 $(-1, 4)$，过 P_0，P_1 两点的直线即为所求，如图 2.2-4 所示．

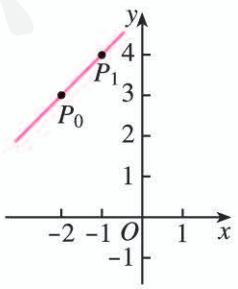


图 2.2-4

下面我们看点斜式的一种特殊情形：如果斜率为 k 的直线 l 过点 $P_0(0, b)$，这时 P_0 是直线 l 与 y 轴的交点，代入直线的点斜式方程，得

$$y-b=k(x-0),$$

即

$$y=kx+b.$$

我们把直线 l 与 y 轴的交点 $(0, b)$ 的纵坐标 b 叫做直线 l 在 y 轴上的**截距** (intercept). 这样，方程 $y=kx+b$ 由直线的斜率 k 与它在 y 轴上的截距 b 确定，我们把方程 $y=kx+b$ 叫做直线的**斜截式方程**，简称**斜截式** (slope intercept form). 其中，k 和 b 均有明显的几何意义：k 是直线的斜率，b 是直线在 y 轴上的截距.

截距是距离吗?

思考

方程 $y=kx+b$ 与我们学过的一次函数表达式类似. 我们知道，一次函数的图象是一条直线，你如何从直线方程的角度认识一次函数 $y=kx+b$? 你能说出一次函数 $y=2x-1$，$y=3x$ 及 $y=-x+3$ 图象的特点吗?

例 2 已知直线 l_1：$y=k_1x+b_1$，l_2：$y=k_2x+b_2$，试讨论：(1) $l_1/\!/l_2$ 的条件是什么? (2) $l_1\perp l_2$ 的条件是什么?

分析： 回顾前面用斜率判断两条直线平行、垂直的结论，可以发现 $l_1/\!/l_2$ 或 $l_1\perp l_2$ 时，k_1，k_2 与 b_1，b_2 应满足的关系.

解： (1) 若 $l_1/\!/l_2$，则 $k_1=k_2$，此时 l_1，l_2 与 y 轴的交点不同，即 $b_1\neq b_2$；反之，若 $k_1=k_2$，且 $b_1\neq b_2$，则 $l_1/\!/l_2$.

(2) 若 $l_1\perp l_2$，则 $k_1k_2=-1$；反之，若 $k_1k_2=-1$，则 $l_1\perp l_2$.

由例 2 我们得到，对于直线 l_1：$y=k_1x+b_1$，l_2：$y=k_2x+b_2$，

$$l_1/\!/l_2\Leftrightarrow k_1=k_2，且\ b_1\neq b_2；$$

$$l_1\perp l_2\Leftrightarrow k_1k_2=-1.$$

练习

1. 写出下列直线的点斜式方程：

(1) 经过点 $A(3, -1)$，斜率是 $\sqrt{2}$；

(2) 经过点 $B(-\sqrt{2}, 2)$，倾斜角是 $30°$；

(3) 经过点 $C(0, 3)$，倾斜角是 $0°$；

(4) 经过点 $D(-4, -2)$，倾斜角是 $\frac{2\pi}{3}$.

2. 填空题.

(1) 已知直线的点斜式方程是 $y-2=x-1$，那么此直线的斜率是____，倾斜角是____；

(2) 已知直线的点斜式方程是 $y+2=\sqrt{3}(x+1)$，那么此直线的斜率是____，倾斜角是____.

3. 写出下列直线的斜截式方程：

(1) 斜率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，在 y 轴上的截距是 -2；

(2) 斜率是 -2，在 y 轴上的截距是 4.

4. 判断下列各对直线是否平行或垂直：

(1) $l_1: y=\frac{1}{2}x+3$，$l_2: y=\frac{1}{2}x-2$；　　(2) $l_1: y=\frac{5}{3}x$，$l_2: y=-\frac{3}{5}x$.

2.2.2 直线的两点式方程

思考

已知直线 l 经过两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$（其中 $x_1\neq x_2$，$y_1\neq y_2$），因为两点确定一条直线，所以直线 l 是唯一确定的. 也就是说，对于直线 l 上的任意一点 $P(x, y)$，它的坐标与点 P_1，P_2 的坐标之间具有唯一确定的关系. 这一关系是什么呢?

由经过两点 P_1，P_2 的直线的斜率公式可以求出直线 l 的斜率，因此我们可以利用直线的点斜式方程来解决问题.

当 $x_1\neq x_2$ 时，经过两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 的直线的斜率 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. 任取 P_1，P_2 中的一点，例如，取点 $P_1(x_1, y_1)$，由直线的点斜式方程，得

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),$$

当 $y_2\neq y_1$ 时，上式可写为

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

不利用点斜式方程，你能求出两点式方程吗?

这就是经过两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$（其中 $x_1\neq x_2$，$y_1\neq y_2$）的直线的方程，我们把它叫做直线的**两点式方程**，简称**两点式**（two-point form）.

在 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 中，如果 $x_1=x_2$ 或 $y_1=y_2$，则直线 P_1P_2 没有两点式方程. 当 $x_1=x_2$ 时，直线 P_1P_2 垂直于 x 轴，直线方程为 $x-x_1=0$，即 $x=x_1$；当 $y_1=y_2$ 时，直线 P_1P_2 垂直于 y 轴，直线方程为 $y-y_1=0$，即 $y=y_1$.

例 3 如图 2.2-5，已知直线 l 与 x 轴的交点为 $A(a，0)$，与 y 轴的交点为 $B(0，b)$，其中 $a\neq0$，$b\neq0$. 求直线 l 的方程.

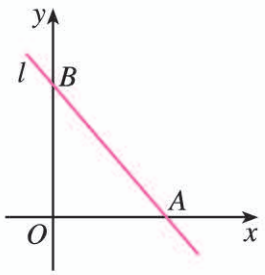


图 2.2-5

解：将两点 $A(a，0)$，$B(0，b)$ 的坐标代入两点式，得

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a},$$

即

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

我们把直线 l 与 x 轴的交点 $(a，0)$ 的横坐标 a 叫做直线 l 在 x 轴上的截距，此时直线 l 在 y 轴上的截距是 b. 方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 由直线 l 在两条坐标轴上的截距 a 与 b 确定，我们把方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 叫做直线的**截距式方程**，简称**截距式** (intercept form).

例 4 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点 $A(-5，0)$，$B(3，-3)$，$C(0，2)$，求边 BC 所在直线的方程，以及这条边上的中线 AM 所在直线的方程.

解：如图 2.2-6，过 $B(3，-3)$，$C(0，2)$ 的直线的两点式方程为

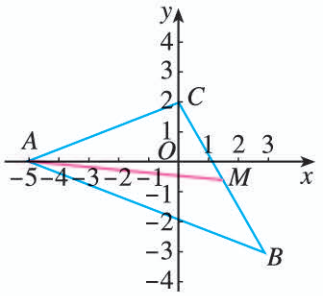


图 2.2-6

$$\frac{y-2}{-3-2}=\frac{x-0}{3-0},$$

整理得

$$5x+3y-6=0.$$

这就是边 BC 所在直线的方程.

边 BC 上的中线是顶点 A 与边 BC 中点 M 所连线段，由中点坐标公式，可得点 M 的坐标为

$$\left(\frac{3+0}{2}，\frac{-3+2}{2}\right),$$

即 $\left(\frac{3}{2}，-\frac{1}{2}\right)$.

过 $A(-5，0)$，$M\left(\frac{3}{2}，-\frac{1}{2}\right)$ 两点的直线方程为

$$\frac{y-0}{-\frac{1}{2}-0}=\frac{x+5}{\frac{3}{2}+5},$$

整理可得

$$x+13y+5=0.$$

这就是边 BC 上中线 AM 所在直线的方程.

直线的点斜式、斜截式、两点式、截距式方程都有明确的几何意义，都涉及确定直线位置的两个基本要素：两个点或一点和斜率. 这些直线的方程，形式不同但本质一致，都是对直线的定量刻画. 在对直线的定量刻画中，斜率处于核心地位. 点斜式方程是其他所有形式的方程的基础，其他所有形式的方程都是点斜式方程在一定条件下的变式.

另外，利用直线的斜率、两点式等，我们可以进一步理解平面几何中“两点确定一条直线”的含义. 事实上，对于直线 l 上的四个不同点 $P_i(x_i, y_i)$，$i=1, 2, 3, 4$，由 P_1，P_2 确定的直线方程与由 P_3，P_4 确定的直线方程是同一个方程，你能给出证明吗?

练习

1. 求经过下列两点的直线的两点式方程：

   (1) $P_1(2, 1)$，$P_2(0, -3)$；　　(2) $A(0, 5)$，$B(5, 0)$.

2. 根据下列条件求直线的截距式方程，并画出图形：

   (1) 在 x 轴、y 轴上的截距分别是 2，3；

   (2) 在 x 轴、y 轴上的截距分别是 -5，6.

3. 根据下列条件，求直线的方程：

   (1) 过点 (0，5)，且在两坐标轴上的截距之和为 2；

   (2) 过点 (5，0)，且在两坐标轴上的截距之差为 2.

2.2.3 直线的一般式方程

观察直线的点斜式、斜截式、两点式、截距式方程，我们发现，它们都是关于 x，y 的二元一次方程. 直线与二元一次方程是否都有这种关系呢? 下面我们探讨这个问题.

思考

(1) 平面直角坐标系中的任意一条直线都可以用一个关于 x，y 的二元一次方程表示吗?

(2) 任意一个关于 x，y 的二元一次方程都表示一条直线吗?

先看问题 (1). 任意一条直线 l，在其上任取一点 $P_0(x_0, y_0)$，当直线 l 的斜率为 k 时 (此时直线的倾斜角 $\alpha\neq 90^\circ$)，其方程为

$$y-y_0=k(x-x_0),$$

这是关于 x，y 的二元一次方程.

分类讨论时，常按 $\alpha\neq 90^\circ$ 和 $\alpha=90^\circ$ 分类，这样可以做到不重不漏.

当直线 l 的斜率不存在，即直线 l 的倾斜角 $\alpha=90°$ 时，直线的方程为

$$x-x_0=0,$$

上述方程可以认为是关于 x，y 的二元一次方程，因为此时方程中 y 的系数为 0.

方程 $y-y_0=k(x-x_0)$ 和 $x-x_0=0$ 都是二元一次方程，因此平面直角坐标系中的任意一条直线都可以用一个关于 x，y 的二元一次方程表示.

反之，对于任意一个二元一次方程

$$Ax+By+C=0\ (A，B\ 不同时为\ 0),$$

如果能把它化为直线方程的某种形式，那么我们就可以断定它表示一条直线.

当 $B\neq0$ 时，方程 $Ax+By+C=0$ 可变形为

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},$$

它表示过点 $\left(0，-\frac{C}{B}\right)$，斜率为 $-\frac{A}{B}$ 的直线.

当 $B=0$ 时，$A\neq0$，方程 $Ax+By+C=0$ 可变形为

$$x=-\frac{C}{A},$$

它表示过点 $\left(-\frac{C}{A}，0\right)$，且垂直于 x 轴的直线.

由上可知，关于 x，y 的二元一次方程都表示一条直线.

我们把关于 x，y 的二元一次方程

$$\boxed{Ax+By+C=0}$$

（其中 A，B 不同时为 0）叫做直线的**一般式方程**，简称**一般式**（general form）.

探究

在方程 $Ax+By+C=0$ 中，A，B，C 为何值时，方程表示的直线：

①平行于 x 轴？　②平行于 y 轴？　③与 x 轴重合？　④与 y 轴重合？

例 5　已知直线经过点 $A(6，-4)$，斜率为 $-\frac{4}{3}$，求直线的点斜式和一般式方程.

解：经过点 $A(6，-4)$，斜率为 $-\frac{4}{3}$ 的直线的点斜式方程是

$$y+4=-\frac{4}{3}(x-6),$$

化为一般式，得

$$4x+3y-12=0.$$

例 6　把直线 l 的一般式方程 $x-2y+6=0$ 化为斜截式，求出直线 l 的斜率以及它在 x 轴与 y 轴上的截距，并画出图形.

分析： 求直线 l 在 x 轴上的截距，即求直线 l 与 x 轴交点的横坐标，只要在直线 l 的方程中令 $y=0$ 即可得 x 的值.

解： 把直线 l 的一般式方程化为斜截式

$$y=\frac{1}{2}x+3.$$

因此，直线 l 的斜率 $k=\frac{1}{2}$，它在 y 轴上的截距是 3.

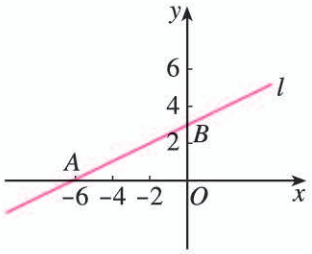


图 2.2-7

在直线 l 的方程 $x-2y+6=0$ 中，令 $y=0$，得

$$x=-6,$$

即直线 l 在 x 轴上的截距是 -6.

由上面可得直线 l 与 x 轴、y 轴的交点分别为

$$A(-6,\ 0),\ B(0,\ 3),$$

过 A，B 两点作直线，就得直线 l（图 2.2-7）.

在直角坐标系中画直线时，通常找出直线与两条坐标轴的交点，然后连接这两个点.

结合例 6，我们可以从几何角度看一个二元一次方程，即一个二元一次方程表示一条直线.

在代数中，我们研究了二元一次方程的解. 因为二元一次方程的每一组解都可以看成平面直角坐标系中一个点的坐标，所以这个方程的全体解组成的集合，就是坐标满足二元一次方程的全体点的集合，这些点的集合组成一条直线.

平面直角坐标系是把二元一次方程和直线联系起来的桥梁，这是笛卡儿的伟大贡献. 在平面直角坐标系中，任意一个二元一次方程是直角坐标平面上一条确定的直线；反之，直角坐标平面上的任意一条直线可以用一个确定的二元一次方程表示.

练习

1. 根据下列条件，写出直线的方程，并把它化为一般式：

（1）经过点 $A(8,\ -2)$，斜率是 $-\frac{1}{2}$；　　（2）经过点 $B(4,\ 2)$，平行于 x 轴；

（3）经过点 $P_1(3,\ -2)$，$P_2(5,\ -4)$；　　（4）在 x 轴、y 轴上的截距分别是 $\frac{3}{2}$，-3.

2. 求下列直线的斜率以及在 y 轴上的截距，并画出图形：

（1）$3x+y-5=0$；　（2）$\frac{x}{4}-\frac{y}{5}=1$；　（3）$x+2y=0$；　（4）$7x-6y+4=0$.

3. 已知直线 l 的方程是 $Ax+By+C=0$.

（1）当 $B\neq 0$ 时，直线 l 的斜率是多少？当 $B=0$ 时呢？

（2）系数 A，B，C 取什么值时，方程 $Ax+By+C=0$ 表示经过原点的直线？

习题 2.2

复习巩固

1. 写出满足下列条件的直线的方程：

   (1) 经过点 $A(8，-2)$，斜率是 $\frac{\sqrt{3}}{3}$；

   (2) 经过点 $B(-2，0)$，且与 x 轴垂直；

   (3) 斜率是 -4，在 y 轴上的截距是 7；

   (4) 经过 $A(-1，8)$，$B(4，-2)$ 两点；

   (5) 在 y 轴上的截距是 2，且与 x 轴平行；

   (6) 在 x 轴、y 轴上的截距分别是 4，-3.

2. 判断 $A(1，3)$，$B(5，7)$，$C(10，12)$ 三点是否共线，并说明理由.

3. 已知两点 $A(7，-4)$，$B(-5，6)$，求线段 AB 的垂直平分线的方程.

4. 已知$\triangle ABC$ 的三个顶点 $A(8，5)$，$B(4，-2)$，$C(-6，3)$，求经过两边 AB 和 AC 的中点的直线的方程.

5. 一根弹簧，挂 4 N 的物体时，长 20 cm. 在弹性限度内，所挂物体的重量每增加 1 N，弹簧就伸长 1.5 cm. 试写出弹簧的长度 l（单位：cm）与所挂物体重量 G（单位：N）之间关系的方程.

6. 菱形的两条对角线分别位于 x 轴和 y 轴上，其长度分别为 8 和 6，求菱形各边所在直线的方程.

7. 求经过点 $P(2，3)$，并且在两坐标轴上的截距相等的直线的方程.

8. 求满足下列条件的直线的方程：

   (1) 经过点 $A(3，2)$，且与直线 $4x+y-2=0$ 平行；

   (2) 经过点 $C(2，-3)$，且平行于过 $M(1，2)$ 和 $N(-1，-5)$ 两点的直线；

   (3) 经过点 $B(3，0)$，且与直线 $2x+y-5=0$ 垂直.

综合运用

9. $\triangle ABC$ 的三个顶点是 $A(4，0)$，$B(6，7)$，$C(0，3)$，求：

   (1) 边 BC 上的中线所在直线的方程；

   (2) 边 BC 上的高所在直线的方程；

   (3) 边 BC 的垂直平分线的方程.

10. 求直线 $Ax+By+C=0$（A，B 不同时为 0）的系数 A，B，C 分别满足什么关系时，这条直线有以下性质：

    (1) 与两条坐标轴都相交；　　(2) 只与 x 轴相交；

    (3) 只与 y 轴相交；　　(4) 是 x 轴所在的直线；

    (5) 是 y 轴所在的直线.

11. 设点 $P_0(x_0，y_0)$ 在直线 $Ax+By+C=0$ 上，求证：这条直线的方程还可以写成

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

12. 若直线 l 沿 x 轴向左平移 3 个单位长度，再沿 y 轴向上平移 1 个单位长度后，回到原来的位置. 试求直线 l 的斜率.

13. 一条光线从点 $P(6, 4)$ 射出，与 x 轴相交于点 $Q(2, 0)$，经 x 轴反射，求入射光线和反射光线所在直线的方程.

拓广探索

14. 已知直线 l_1，l_2 的方程分别是 l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$（A_1，B_1 不同时为 0），l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$（A_2，B_2 不同时为 0），且 $A_1A_2+B_1B_2=0$，求证：$l_1\perp l_2$.

15. 画出直线 l：$2x-y+3=0$，并在直线 l 外取若干点，将这些点的坐标代入 $2x-y+3$，求它的值；观察有什么规律，并把这个规律表示出来.

探究与发现

方向向量与直线的参数方程

除了直线的点斜式、斜截式、两点式、截距式、一般式方程，还有一种形式的直线方程与向量有紧密的联系，它由一个定点和这条直线的方向向量唯一确定，与直线的点斜式方程本质上是一致的.

如图 1，设直线 l 经过点 $P_0(x_0, y_0)$，$\boldsymbol{v}=(m, n)$ 是它的一个方向向量，$P(x, y)$ 是直线 l 上的任意一点，则向量 $\overrightarrow{P_0P}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 共线. 根据向量共线的充要条件，存在唯一的实数 t，使 $\overrightarrow{P_0P}=t\boldsymbol{v}$，即 $(x-x_0, y-y_0)=t(m, n)$，所以

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt. \end{cases} \quad ①$$

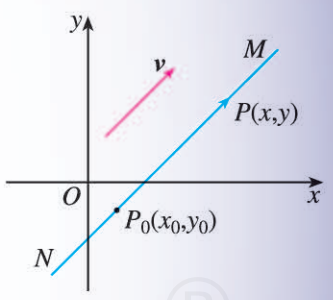


图 1

在①中，实数 t 是对应点 P 的参变数，简称参数. 由上可知，对于直线 l 上的任意一点 $P(x, y)$，存在唯一实数 t 使①成立；反之，对于参数 t 的每一个确定的值，由①可以确定直线 l 上的一个点 $P(x, y)$. 我们把①称为直线的参数方程.

从运动学角度看，$\overrightarrow{P_0P}=t\boldsymbol{v}$（$t>0$）可以看成质点 P 从点 P_0 出发，以速度 $\boldsymbol{v}=(m, n)$ 作匀速直线运动，经过时间 t 后的位移，因此，质点 P 的运动轨迹是射线 P_0M. 类似地，你能刻画射线 P_0N 吗？由以上讨论，你能说说方程①的运动学意义吗？

如果直线 l 与坐标轴不垂直，那么 $mn\neq0$，由①可得

$$\frac{x-x_0}{m}=t,\ \frac{y-y_0}{n}=t,$$

消去参数 t，得

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n},$$

即

$$y-y_0=\frac{n}{m}(x-x_0),$$

这样就得到直线 l 的点斜式方程.

从另外一个角度思考，因为直线 l 经过点 $P_0(x_0,\ y_0)$，且它的一个方向向量为 $\boldsymbol{v}=(m,\ n)$，所以直线 l 的斜率 $k=\frac{n}{m}$，所以直线 l 的方程为

$$y-y_0=\frac{n}{m}\ (x-x_0).$$

想一想，直线的参数方程 $\begin{cases}x=x_0+mt,\\ y=y_0+nt\end{cases}$ 中，$(m,\ n)$ 的几何意义是什么？

人教版®

2.3 直线的交点坐标与距离公式

在平面几何中，我们对直线作了定性研究．引入平面直角坐标系后，我们用二元一次方程表示直线，直线的方程就是相应直线上每一点的坐标所满足的一个关系式．这样，我们可以通过方程把握直线上的点，进而用代数方法对直线进行定量研究，例如求两条直线的交点坐标，平面内与点、直线相关的距离问题等．

2.3.1 两条直线的交点坐标

思考

已知两条直线

$$l_1：A_1x+B_1y+C_1=0，$$
$$l_2：A_2x+B_2y+C_2=0$$

相交，它们的交点坐标与直线 l_1，l_2 的方程有什么关系？你能由此得到求两条相交直线交点坐标的方法吗？

设这两条直线的交点为 P，则点 P 既在直线 l_1 上，也在直线 l_2 上．所以点 P 的坐标既满足直线 l_1 的方程 $A_1x+B_1y+C_1=0$，也满足直线 l_2 的方程 $A_2x+B_2y+C_2=0$，即点 P 的坐标是方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0，\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$$

的解．解这个方程组就可以得到这两条直线的交点坐标．

例 1 求下列两条直线的交点坐标，并画出图形：

$$l_1：3x+4y-2=0，$$
$$l_2：2x+y+2=0.$$

解： 解方程组

$$\begin{cases}3x+4y-2=0，\\2x+y+2=0，\end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x=-2, \\ y=2. \end{cases}$$

所以，l_1 与 l_2 的交点是 $M(-2, 2)$（图 2.3-1）.

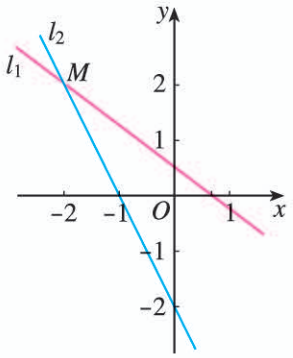


图 2.3-1

例 2 判断下列各对直线的位置关系．如果相交，求出交点的坐标：

（1）l_1：$x-y=0$，　　l_2：$3x+3y-10=0$；

（2）l_1：$3x-y+4=0$，　　l_2：$6x-2y-1=0$；

（3）l_1：$3x+4y-5=0$，　　l_2：$6x+8y-10=0$.

分析： 解直线 l_1，l_2 的方程组成的方程组，若方程组有唯一解，则 l_1 与 l_2 相交，此解就是交点的坐标；若方程组无解，则 $l_1 /\!/ l_2$；若方程组中的两个方程可化成同一个方程，则 l_1 与 l_2 重合.

解：（1）解方程组

$$\begin{cases} x-y=0, \\ 3x+3y-10=0, \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x=\dfrac{5}{3}, \\ y=\dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

所以，l_1 与 l_2 相交，交点是 $M\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$.

（2）解方程组

$$\begin{cases} 3x-y+4=0, & ① \\ 6x-2y-1=0, & ② \end{cases}$$

①×2−②得 $9=0$，矛盾，这个方程组无解，所以 l_1 与 l_2 无公共点，$l_1 /\!/ l_2$.

（3）解方程组

$$\begin{cases} 3x+4y-5=0, & ① \\ 6x+8y-10=0, & ② \end{cases}$$

①×2 得 $6x+8y-10=0$.

①和②可以化成同一个方程，即①和②表示同一条直线，l_1 与 l_2 重合.

思考

你能用直线的斜率判断上述各对直线的位置关系吗？比较用斜率判断和解方程组这两种方法，你有什么体会？

练习

1. 求下列两条直线的交点坐标，并画出图形：

（1）l_1：$2x+3y=12$，　　l_2：$x-2y=4$；

（2）l_1：$x=2$，　　l_2：$3x+2y-12=0$.

2. 判断下列各对直线的位置关系．如果相交，求出交点的坐标：

（1）l_1：$2x-3y=7$，　　l_2：$4x+2y=1$；

（2）l_1：$2x-6y+4=0$，　　l_2：$y=\frac{x}{3}+\frac{2}{3}$；

（3）l_1：$(\sqrt{2}-1)x+y=3$，　　l_2：$x+(\sqrt{2}+1)y=2$.

3. 直线 l 经过原点，且经过直线 $2x-2y-1=0$ 与直线 $6x-4y+1=0$ 的交点，求直线 l 的方程.

2.3.2　两点间的距离公式

我们知道，在各种几何量中，直线段的长度是最基本的．因此，在解析几何中，最基本的公式自然是用平面内两点的坐标表示这两点间距离的公式.

探究

如图 2.3-2，已知平面内两点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，如何求 P_1，P_2 间的距离 $|P_1P_2|$？

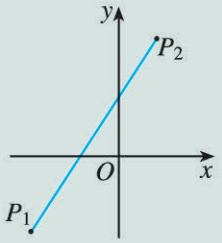


图 2.3-2

我们用平面向量的知识来解决．如图 2.3-3，由点 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，得 $\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$．于是，

$$|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

由此得到 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 两点间的距离公式

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

特别地，原点 $O(0, 0)$ 与任一点 $P(x, y)$ 间的距离

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

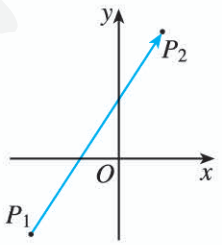


图 2.3-3

思考

你能利用 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 构造直角三角形，再用勾股定理推导两点间距离公式吗？与向量法比较，你有什么体会？

例 3 已知点 $A(-1, 2)$，$B(2, \sqrt{7})$，在 x 轴上求一点 P，使 $|PA|=|PB|$，并求 $|PA|$ 的值.

解： 设所求点为 $P(x, 0)$，则

$$|PA|=\sqrt{(x+1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{x^2+2x+5},$$

$$|PB|=\sqrt{(x-2)^2+(0-\sqrt{7})^2}=\sqrt{x^2-4x+11}.$$

由 $|PA|=|PB|$，得

$$x^2+2x+5=x^2-4x+11.$$

解得 $x=1$.

所以，所求点为 $P(1, 0)$，且

$$|PA|=\sqrt{(1+1)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{2}.$$

例 4 用坐标法证明：平行四边形两条对角线的平方和等于两条邻边的平方和的两倍.

分析： 首先要建立适当的平面直角坐标系，用坐标表示有关的量，然后进行代数运算，最后把代数运算的结果“翻译”成几何关系.

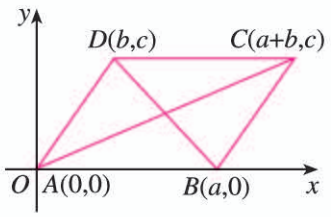


图 2.3-4

证明： 如图 2.3-4，四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 以顶点 A 为原点，边 AB 所在直线为 x 轴，建立如图所示的平面直角坐标系.

如何由平行四边形的性质，得到点 C 的坐标为 $(a+b, c)$？

在$\square ABCD$ 中，点 A 的坐标是 $(0, 0)$，设点 B 的坐标为 $(a, 0)$，点 D 的坐标为 (b, c)，由平行四边形的性质，得点 C 的坐标为 $(a+b, c)$.

由两点间的距离公式，得

$$|AC|^2=(a+b)^2+c^2,\quad |BD|^2=(b-a)^2+c^2,\quad |AB|^2=a^2,\quad |AD|^2=b^2+c^2.$$

所以

$$|AC|^2+|BD|^2=2(a^2+b^2+c^2),$$

$$|AB|^2+|AD|^2=a^2+b^2+c^2.$$

所以

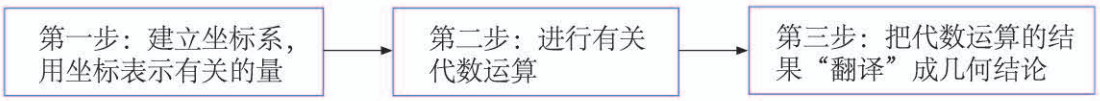
$$|AC|^2+|BD|^2=2(|AB|^2+|AD|^2),$$

即平行四边形两条对角线的平方和等于两条邻边的平方和的两倍.

思考

在“平面向量及其应用”的学习中，我们用“向量法”证明过这个命题. 你能回忆一下证明过程吗？比较“坐标法”和“向量法”，你有什么体会？

上述利用“坐标法”解决平面几何问题的基本步骤可以概括为



思考

根据例 4 的条件，你是否还有其他建立坐标系的方法？你能说说建立适当坐标系对证明的重要性吗？

练习

1. 求下列两点间的距离：

(1) $A(6, 0)$，$B(-2, 0)$；　　(2) $C(0, -4)$，$D(0, -1)$；

(3) $P(6, 0)$，$Q(0, -2)$；　　(4) $M(2, 1)$，$N(5, -1)$.

2. 已知 $A(a, -5)$ 与 $B(0, 10)$ 两点间的距离是 17，求 a 的值.

3. 用坐标法证明：直角三角形斜边的中点到三个顶点的距离相等.

2.3.3　点到直线的距离公式

探究

如图 2.3-5，已知点 $P(x_0, y_0)$，直线 $l: Ax+By+C=0$，如何求点 P 到直线 l 的距离？

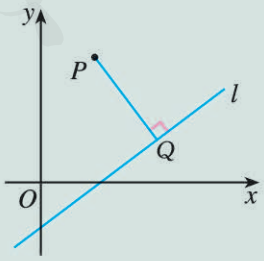


图 2.3-5

点 P 到直线 l 的距离，就是从点 P 到直线 l 的垂线段 PQ 的长度，其中 Q 是垂足(图 2.3-5). 因此，求出垂足 Q 的坐标，利用两点间的距离公式求出 $|PQ|$，就可以得到

点 P 到直线 l 的距离.

设 $A\neq0$，$B\neq0$. 由 $PQ\perp l$，以及直线 l 的斜率为 $-\dfrac{A}{B}$，可得 l 的垂线 PQ 的斜率为 $\dfrac{B}{A}$，因此，垂线 PQ 的方程为 $y-y_0=\dfrac{B}{A}(x-x_0)$，即 $Bx-Ay=Bx_0-Ay_0$.

解方程组

$$\begin{cases}Ax+By+C=0,\\ Bx-Ay=Bx_0-Ay_0,\end{cases} \tag{①}$$

得直线 l 与 PQ 的交点坐标，即垂足 Q 的坐标为

$$\left(\frac{B^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2},\ \frac{-ABx_0+A^2y_0-BC}{A^2+B^2}\right).$$

于是

$$\begin{aligned}|PQ|&=\sqrt{\left(\frac{B^2x_0-ABy_0-AC}{A^2+B^2}-x_0\right)^2+\left(\frac{-ABx_0+A^2y_0-BC}{A^2+B^2}-y_0\right)^2}\\&=\sqrt{\frac{(Ax_0+By_0+C)^2}{A^2+B^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.\end{aligned}$$

因此，点 $P(x_0,\ y_0)$ 到直线 l：$Ax+By+C=0$ 的距离

$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.}$$

可以验证，当 $A=0$，或 $B=0$ 时，上述公式仍然成立.

思考

上述方法中，我们根据点到直线距离的定义，将点到直线的距离转化为两点之间的距离，思路自然但运算量较大. 反思求解过程，你发现引起复杂运算的原因了吗？由此能否给出简化运算的方法？

在上述方法中，若设垂足 Q 的坐标为 $(x,\ y)$，则

$$|PQ|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}. \tag{②}$$

对于②式，你能给出它的几何意义吗？结合方程组①，能否直接求出 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$，进而求出 $|PQ|$ 呢？请你试一试！

探究

我们知道，向量是解决距离、角度问题的有力工具. 能否用向量方法求点到直线的距离？