

如图 2.3-6, 点 P 到直线 l 的距离, 就是向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的模.

设 $M(x, y)$ 是直线 l 上的任意一点, $\boldsymbol{n}$ 是与直线 l 的方向向量垂直的单位向量, 则 $\overrightarrow{PQ}$ 是 $\overrightarrow{PM}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 上的投影向量, $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PM} \cdot \boldsymbol{n}|$.

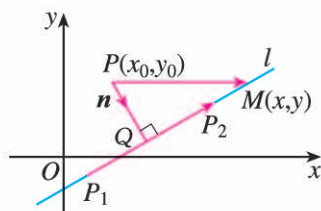


图 2.3-6

思考

如何利用直线 l 的方程得到与 l 的方向向量垂直的单位向量 $\boldsymbol{n}$?

设 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 是直线 $l: Ax + By + C = 0$ 上的任意两点, 则 $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ 是直线 l 的方向向量. 把 $Ax_1 + By_1 + C = 0$, $Ax_2 + By_2 + C = 0$ 两式相减, 得 $A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0$. 由平面向量的数量积运算可知, 向量 (A, B) 与向量 $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ 垂直. 向量 $\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}(A, B)$ 就是与直线 l 的方向向量垂直

的一个单位向量. 我们取 $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}(A, B)$, 从而

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PM} \cdot \boldsymbol{n} &= (x - x_0, y - y_0) \cdot \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}(A, B) \\ &= \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}[A(x - x_0) + B(y - y_0)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}(Ax + By - Ax_0 - By_0).\end{aligned}$$

因为点 $M(x, y)$ 在直线 l 上, 所以 $Ax + By + C = 0$. 所以 $Ax + By = -C$. 代入上式, 得

$$\overrightarrow{PM} \cdot \boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}(-Ax_0 - By_0 - C).$$

因此

$$|PQ| = |\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PM} \cdot \boldsymbol{n}| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

思考

比较上述两种方法, 第一种方法从定义出发, 把问题转化为求两点间的距离, 通过代数运算得到结果, 思路自然; 第二种方法利用向量投影, 通过向量运算求出结果, 简化了运算. 除了上述两种方法, 你还有其他推导方法吗?

例 5 求点 $P(-1, 2)$ 到直线 $l: 3x=2$ 的距离.

分析: 将直线 l 的方程写成 $3x-2=0$, 再用点到直线的距离公式求解.

解: 点 $P(-1, 2)$ 到直线 $l: 3x-2=0$ 的距离

$$d = \frac{|3 \times (-1) - 2|}{\sqrt{3^2 + 0^2}} = \frac{5}{3}.$$

例 6 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点分别是 $A(1, 3)$, $B(3, 1)$, $C(-1, 0)$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

分析: 由三角形面积公式可知, 只要利用距离公式求出边 AB 的长和边 AB 上的高即可.

解: 如图 2.3-7, 设边 AB 上的高为 h , 则

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |AB| h.$$

$$|AB| = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2}.$$

边 AB 上的高 h 就是点 C 到直线 AB 的距离.

边 AB 所在直线 l 的方程为

$$\frac{y-3}{1-3} = \frac{x-1}{3-1},$$

即 $x+y-4=0$.

点 $C(-1, 0)$ 到直线 $l: x+y-4=0$ 的距离

$$h = \frac{|-1+0-4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{因此, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{5}{\sqrt{2}} = 5.$$

直线 l 有什么特性? 由此你能给出简便解法吗?

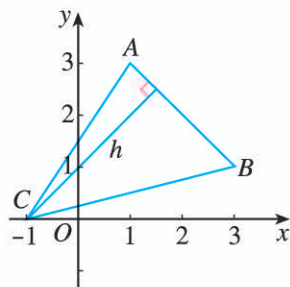


图 2.3-7

你还有其他解法吗?

练习

1. 求原点到下列直线的距离:

(1) $l: 3x+2y-26=0$; (2) $l: x=y$.

2. 求下列点到直线的距离:

(1) $A(-2, 3)$, $l: 3x+4y+3=0$;

(2) $B(1, 0)$, $l: \sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0$;

(3) $C(1, -2)$, $l: 4x+3y=0$.

3. 已知点 $P(-1, 2)$ 到直线 $l: 4x-3y+C=0$ 的距离为 1, 求 C 的值.

2.3.4 两条平行直线间的距离

前面我们已经得到了两点间的距离公式、点到直线的距离公式. 关于平面上的距离问题, 两条平行直线间的距离也是值得研究的.

两条平行直线间的距离是指夹在这两条平行直线间的公垂线段的长.

思考

已知两条平行直线 l_1, l_2 的方程, 如何求 l_1 与 l_2 间的距离?

根据两条平行直线间距离的含义, 在直线 l_1 上任取一点 $P(x_0, y_0)$, 点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 l_2 的距离就是直线 l_1 与直线 l_2 间的距离. 这样, 求两条平行直线间的距离就转化为求点到直线的距离.

例 7 已知两条平行直线 $l_1: 2x-7y-8=0, l_2: 6x-21y-1=0$, 求 l_1 与 l_2 间的距离.

分析: 在 l_1 上选取一点, 如 l_1 与坐标轴的交点, 用点到直线的距离公式求这点到 l_2 的距离, 即 l_1 与 l_2 间的距离.

解: 先求 l_1 与 x 轴的交点 A 的坐标. 容易知道, 点 A 的坐标为 $(4, 0)$.

点 A 到直线 l_2 的距离

$$d = \frac{|6 \times 4 - 21 \times 0 - 1|}{\sqrt{6^2 + 21^2}} = \frac{23}{3\sqrt{53}} = \frac{23}{159}\sqrt{53},$$

所以 l_1 与 l_2 间的距离为 $\frac{23}{159}\sqrt{53}$.



如何取点, 可使计算简单?

例 8 求证: 两条平行直线 $Ax+By+C_1=0$ 与 $Ax+By+C_2=0$ 间的距离为

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

分析: 两条平行直线间的距离即为这两条平行直线中的一条直线上的一点到另一条直线的距离.

证明: 在直线 $Ax+By+C_1=0$ 上任取一点 $P(x_0, y_0)$, 点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $Ax+By+C_2=0$ 的距离就是这两条平行直线间的距离, 即

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

因为点 $P(x_0, y_0)$ 在直线 $Ax+By+C_1=0$ 上, 所以 $Ax_0 + By_0 + C_1 = 0$, 即 $Ax_0 + By_0 = -C_1$, 因此

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-C_1 + C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

练习

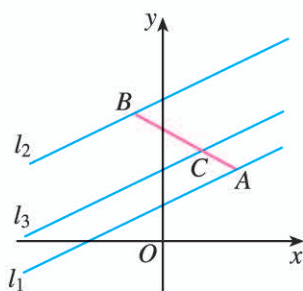
1. 求下列两条平行直线间的距离:

(1) $l_1: 2x+3y-8=0$, $l_2: 2x+3y+18=0$;

(2) $l_1: 3x+4y=10$, $l_2: 3x+4y=0$.

2. 已知两条平行直线 $l_1: 3x-4y+6=0$ 与 $l_2: 3x-4y+C=0$ 间的距离为 3, 求 C 的值.

3. 如图, 已知直线 $l_1: x-2y+1=0$ 与直线 $l_2: x-2y+4=0$, 在 l_1 上任取一点 A , 在 l_2 上任取一点 B , 连接 AB , 取 AB 的靠近点 A 的三等分点 C , 过点 C 作 l_1 的平行线 l_3 . 求 l_1 与 l_3 间的距离.



(第 3 题)

习题 2.3



复习巩固

1. 判断下列各对直线的位置关系. 如果相交, 求出交点的坐标:

(1) $l_1: 2x-y+7=0$, $l_2: x+y=1$;

(2) $l_1: x-3y-10=0$, $l_2: y=\frac{x+5}{3}$;

(3) $l_1: 3x-5y+10=0$, $l_2: 9x-15y+30=0$.

2. 求满足下列条件的直线 l 的方程:

(1) 经过两条直线 $2x-3y+10=0$ 和 $3x+4y-2=0$ 的交点, 且垂直于直线 $3x-2y+4=0$;

(2) 经过两条直线 $2x+y-8=0$ 和 $x-2y+1=0$ 的交点, 且平行于直线 $4x-3y-7=0$.

3. 已知 $A(1, 2)$, $B(2, 0)$, $M(1, 0)$, $N(-4, 0)$, $P(0, 3)$, $Q(-1, 1)$ 六个点, 线段 AB , MN , PQ 能围成一个三角形吗? 为什么?

4. 已知 $P(a, 2)$, $Q(-2, -3)$, $M(1, 1)$ 三点, 且 $|PQ|=|PM|$, 求 a 的值.

5. (1) 求在 x 轴上与点 $A(5, 12)$ 的距离为 13 的点的坐标;

(2) 已知点 P 的横坐标是 7, 点 P 与点 $N(-1, 5)$ 间的距离等于 10, 求点 P 的纵坐标.

6. 求点 $P(-5, 7)$ 到直线 $12x+5y-3=0$ 的距离.

7. 求两条平行直线 $3x-2y-1=0$ 与 $3x-2y+1=0$ 间的距离.

8. $\square ABCD$ 的一组对边 AB 和 CD 所在直线的方程分别是 $6x+8y-3=0$ 与 $6x+8y+5=0$, 过 $\square ABCD$ 的两条对角线的交点作与 AB 所在直线的平行线 l , 求 l 与 CD 所在直线的距离.



综合运用

9. 三条直线 $ax+2y+8=0$, $4x+3y=10$ 与 $2x-y=10$ 相交于一点, 求 a 的值.

10. 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 $A(5, 1)$, 边 AB 上的中线 CM 所在直线方程为 $2x-y-5=0$, 边 AC 上的高 BH 所在直线方程为 $x-2y-5=0$. 求: (1) 顶点 C 的坐标; (2) 直线 BC 的方程.

11. 在 x 轴上求一点 P , 使以 $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ 和 P 为顶点的三角形的面积为 10.

12. 已知 AO 是 $\triangle ABC$ 边 BC 的中线, 用坐标法证明 $|AB|^2 + |AC|^2 = 2(|AO|^2 + |OC|^2)$.
13. 已知点 $A(a, 6)$ 到直线 $3x - 4y = 2$ 的距离 d 分别为下列各值: (1) $d = 4$; (2) $d > 4$, 求 a 的取值范围.
14. 已知 $A(-3, -4)$, $B(6, 3)$ 两点到直线 $l: ax + y + 1 = 0$ 的距离相等, 求 a 的值.
15. $\square ABCD$ 的四条边所在直线的方程分别是 $l_1: x - 4y + 5 = 0$, $l_2: 2x + y - 8 = 0$, $l_3: x - 4y + 14 = 0$, $l_4: 2x + y + 1 = 0$, 求 $\square ABCD$ 的面积.

拓展探索

16. 已知 λ 为任意实数, 当 λ 变化时, 方程

$$3x + 4y - 2 + \lambda(2x + y + 2) = 0$$

表示什么图形? 图形有何特点?

17. 已知 $0 < x < 1$, $0 < y < 1$.

(1) 求证: $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (1-y)^2} + \sqrt{(1-x)^2 + y^2} + \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2} \geq 2\sqrt{2}$, 并求使等式成立的条件.

(2) 说明上述不等式的几何意义.

阅读与思考

笛卡儿与解析几何

解析几何的创立适应了 17 世纪科学技术发展的迫切需要. 法国数学家笛卡儿 (Descartes, 1596—1650) 是解析几何的创始人之一. 他对当时的几何方法和代数方法进行比较, 分析了它们各自的优缺点. 他认为, 没有任何东西比几何图形更容易印入人脑, 用图形表达事物非常有益. 但他对欧几里得几何中许多定理的证明需要某种奇巧的想法深感不安, 他还批评古希腊人的几何过



笛卡儿

多地依赖图形. 他看到了代数的力量, 认为代数在提供广泛的方法论方面高于欧几里得的几何学. 他认为, 代数具有一般性, 例如用字母代替数时, 可以代表各种数: 正数、负数和 0; 代数中的公式可以使解题过程机械化; 代数具有作为一门普遍的科学方法的潜力.

笛卡儿的中心思想是使代数和几何结合起来. 他说: “我决心放弃那个仅仅是抽象的几何, 这就是说, 不再去考虑那些仅仅是用来练习思想的问题. 我这样做, 是为了研究另一种几何, 即目的在于解释自然现象的几何.”

笛卡儿曾计划写一本书《思想的指导法则》，在书中他大胆地提出了一个解决一切问题的方案：把一切问题归结为数学问题，把一切数学问题归结为代数问题，把一切代数问题归结为方程，最后得到关于一个未知数的方程。可能不久他自己就发现这个设想过于大胆，根本无法实现，这本书没有写完就搁下了（在他去世后人们将它出版）。他的这个方案虽然失败了，但确有很多问题可以用列方程的方法来解。

1637年笛卡儿发表了《更好地指导推理和寻找科学真理的方法论》，这是一本哲学的经典著作，包含了三个附录，《几何学》就是其中之一。《几何学》是笛卡儿所写的唯一一本数学书。笛卡儿在《几何学》中引入了坐标方法和用方程表示曲线的思想。于是后人就把这本《几何学》的发表作为解析几何创立的标志。

笛卡儿最初所使用的坐标系中，两条坐标轴的夹角不要求一定是直角，而且 y 轴并没有明显地出现。至于“坐标”“坐标系”“横坐标”“纵坐标”等名词，也都是后来人们逐渐使用的。虽然笛卡儿当初的坐标系还不够完善，但是笛卡儿当初迈出的第一步具有决定意义，所以人们仍然把后来的直角坐标系，叫做笛卡儿直角坐标系。

差不多与笛卡儿同时，另一位法国数学家费马（Fermat, 1601—1665）在自己的研究中也独立地形成了用方程表示曲线的思想。因此，费马和笛卡儿同为解析几何的创始人。



费马

解析几何的创立在数学发展史上具有划时代的意义，是数学发展史上的一个里程碑。它促进了微积分的创立，从此数学进入了变量数学的新时期。正如恩格斯在《自然辩证法》一书中所指出的：“数学中的转折点是笛卡儿的变数，有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了。”

解析几何的创立提供了研究几何问题的一种新方法，借助于坐标系，把几何问题转化为代数问题来研究。这种方法具有一般性，它沟通了数学内部数与形、代数与几何两大学科之间的联系。从此代数和几何互相汲取新鲜的活力，得到迅速的发展。

2.4 圆的方程

多边形和圆是平面几何中的两类基本图形. 建立直线的方程后, 我们可以运用它研究多边形这些“直线形”, 解决边所在直线的平行或垂直、边与边的交点以及点到线段所在直线的距离等问题. 类似地, 为了研究圆的有关性质, 解决与圆有关的问题, 我们首先需要建立圆的方程.

2.4.1 圆的标准方程

类似于直线方程的建立过程, 为建立圆的方程, 我们首先考虑确定一个圆的几何要素.

思考

在平面直角坐标系中, 如何确定一个圆呢?

我们知道, 圆是平面上到定点的距离等于定长的点的集合. 在平面直角坐标系中, 如果一个圆的圆心坐标和半径确定了, 圆就唯一确定了. 由此, 我们可以建立圆上点的坐标应满足的关系式, 进而得到圆的方程.

如图 2.4-1, 在平面直角坐标系中, $\odot A$ 的圆心 A 的坐标为 (a, b) , 半径为 r , $M(x, y)$ 为圆上任意一点, $\odot A$ 就是以下点的集合

$$P = \{M \mid |MA| = r\}.$$

根据两点间的距离公式, 点 M 的坐标 (x, y) 满足的条件可以表示为

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r,$$

两边平方, 得

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \quad (1)$$

由上述过程可知, 若点 $M(x, y)$ 在 $\odot A$ 上, 点 M 的坐标就满足方程(1); 反过来, 若点 M 的坐标 (x, y) 满足方程(1), 就说明点 M 与圆心 A 间的距离为 r , 点 M 就在 $\odot A$ 上. 这时, 我们把方程(1)称为圆心为 $A(a, b)$, 半径为 r 的**圆的标准方程** (standard equation of circle).

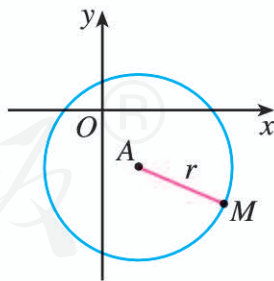


图 2.4-1

圆心在坐标原点, 半径为 r 的圆的标准方程是什么?

例 1 求圆心为 $A(2, -3)$, 半径为 5 的圆的标准方程, 并判断点 $M_1(5, -7)$, $M_2(-2, -1)$ 是否在这个圆上.

分析: 根据点的坐标与圆的方程的关系, 只要判断一个点的坐标是否满足圆的方程, 就可以得到这个点是否在圆上.

解: 圆心为 $A(2, -3)$, 半径为 5 的圆的标准方程是

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25.$$

把点 $M_1(5, -7)$ 的坐标代入方程 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$ 的左边, 得 $(5-2)^2 + (-7+3)^2 = 25$, 左右两边相等, 点 M_1 的坐标满足圆的方程, 所以点 M_1 在这个圆上.

把点 $M_2(-2, -1)$ 的坐标代入方程 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$ 的左边, 得 $(-2-2)^2 + (-1+3)^2 = 20$, 左右两边不相等, 点 M_2 的坐标不满足圆的方程, 所以点 M_2 不在这个圆上 (图 2.4-2).

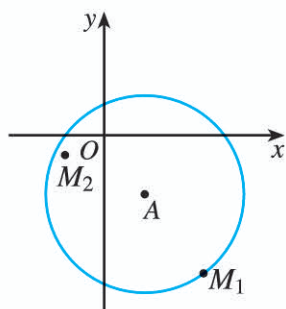


图 2.4-2

探究

点 $M_0(x_0, y_0)$ 在圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 内的条件是什么? 在圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 外的条件又是什么?

例 2 $\triangle ABC$ 的三个顶点分别是 $A(5, 1)$, $B(7, -3)$, $C(2, -8)$, 求 $\triangle ABC$ 的外接圆的标准方程.

分析: 不在同一条直线上的三个点可以确定一个圆, 三角形有唯一的外接圆. 显然已知的三个点不在同一条直线上. 只要确定了 a, b, r , 圆的标准方程就确定了.

解: 设所求的方程是

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \quad ①$$

因为 $A(5, 1)$, $B(7, -3)$, $C(2, -8)$ 三点都在圆上, 所以它们的坐标都满足方程①. 于是

$$\begin{cases} (5-a)^2 + (1-b)^2 = r^2, \\ (7-a)^2 + (-3-b)^2 = r^2, \\ (2-a)^2 + (-8-b)^2 = r^2, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - 10a - 2b + 26 = r^2, \\ a^2 + b^2 - 14a + 6b + 58 = r^2, \\ a^2 + b^2 - 4a + 16b + 68 = r^2. \end{cases}$$

$\triangle ABC$ 的外接圆的圆心是 $\triangle ABC$ 的外心, 即 $\triangle ABC$ 三边垂直平分线的交点.

观察上面的式子,我们发现,三式两两相减,可以消去 a^2, b^2, r^2 , 得到关于 a, b 的二元一次方程组

$$\begin{cases} a-2b=8, \\ a+b=-1. \end{cases}$$

解此方程组,得

$$\begin{cases} a=2, \\ b=-3, \end{cases}$$

代入 $(5-a)^2+(1-b)^2=r^2$, 得 $r^2=25$.

所以, $\triangle ABC$ 的外接圆的标准方程是

$$(x-2)^2+(y+3)^2=25.$$

例 3 已知圆心为 C 的圆经过 $A(1, 1), B(2, -2)$ 两点, 且圆心 C 在直线 $l: x-y+1=0$ 上, 求此圆的标准方程.

分析: 设圆心 C 的坐标为 (a, b) . 由已知条件可知, $|CA|=|CB|$, 且 $a-b+1=0$. 由此可求出圆心坐标和半径.

另外, 因为线段 AB 是圆的一条弦, 根据平面几何知识, AB 的中点与圆心 C 的连线垂直于 AB , 由此可得到另一种解法.

解法 1: 设圆心 C 的坐标为 (a, b) . 因为圆心 C 在直线 $l: x-y+1=0$ 上, 所以

$$a-b+1=0. \quad ①$$

因为 A, B 是圆上两点, 所以 $|CA|=|CB|$.

根据两点间距离公式, 有

$$\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}=\sqrt{(a-2)^2+(b+2)^2},$$

即

$$a-3b-3=0. \quad ②$$

由①②可得 $a=-3, b=-2$. 所以圆心 C 的坐标是 $(-3, -2)$.

圆的半径

$$r=|AC|=\sqrt{(1+3)^2+(1+2)^2}=5.$$

所以, 所求圆的标准方程是

$$(x+3)^2+(y+2)^2=25.$$

解法 2: 如图 2.4-3, 设线段 AB 的中点为 D . 由 A, B 两点的坐标为 $(1, 1), (2, -2)$, 可得点 D 的坐标为 $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$, 直线 AB 的斜率为 $k_{AB}=\frac{-2-1}{2-1}=-3$.

因此, 线段 AB 的垂直平分线 l' 的方程是 $y+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}(x-\frac{3}{2})$, 即

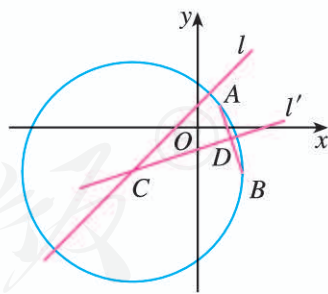


图 2.4-3

$$x-3y-3=0.$$

由垂径定理可知, 圆心 C 也在线段 AB 的垂直平分线上, 所以它的坐标是方程组

$$\begin{cases} x-3y-3=0, \\ x-y+1=0 \end{cases}$$

的解.

解这个方程组, 得

$$\begin{cases} x=-3, \\ y=-2. \end{cases}$$

所以圆心 C 的坐标是 $(-3, -2)$.

圆的半径

$$r=|AC|=\sqrt{(1+3)^2+(1+2)^2}=5.$$

所以, 所求圆的标准方程是

$$(x+3)^2+(y+2)^2=25.$$

练习

1. 写出下列圆的标准方程:

(1) 圆心为 $C(-3, 4)$, 半径是 $\sqrt{5}$;

(2) 圆心为 $C(-8, 3)$, 且经过点 $M(-5, -1)$.

2. 已知圆的标准方程是 $(x-3)^2+(y+2)^2=16$, 借助计算工具计算, 判断下列各点在圆上、圆外, 还是在圆内.

(1) $M_1(4.30, -5.72)$;

(2) $M_2(5.70, 1.08)$;

(3) $M_3(3, -6)$.

3. 已知 $P_1(4, 9)$, $P_2(6, 3)$ 两点, 求以线段 P_1P_2 为直径的圆的标准方程, 并判断点 $M(6, 9)$, $N(3, 3)$, $Q(5, 3)$ 在圆上、圆内, 还是在圆外.

4. 已知 $\triangle AOB$ 的三个顶点分别是点 $A(4, 0)$, $O(0, 0)$, $B(0, 3)$, 求 $\triangle AOB$ 的外接圆的标准方程.

2.4.2 圆的一般方程

思考

我们知道, 方程 $(x-1)^2+(y+2)^2=4$ 表示以 $(1, -2)$ 为圆心, 2 为半径的圆. 可以将此方程变形为 $x^2+y^2-2x+4y+1=0$.

一般地, 圆的标准方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 可以变形为

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \quad (2)$$

的形式. 反过来, 形如(2)的方程一定能通过恒等变形变为圆的标准方程吗?

例如, 对于方程 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 = 0$, 对其进行配方, 得 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = -1$, 因为任意一个点的坐标 (x, y) 都不满足这个方程, 所以这个方程不表示任何图形. 所以, 形如(2)的方程不一定能通过恒等变形变为圆的标准方程. 这表明, 形如(2)的方程不一定是圆的方程.

探究

方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 中的 D, E, F 满足什么条件时, 这个方程表示圆?

将方程(2)的左边配方, 并把常数项移到右边, 得

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}. \quad ①$$

(1) 当 $D^2 + E^2 - 4F > 0$ 时, 比较方程①和圆的标准方程, 可以看出方程(2)表示以 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ 为圆心, $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$ 为半径的圆;

(2) 当 $D^2 + E^2 - 4F = 0$ 时, 方程(2)只有实数解 $x = -\frac{D}{2}, y = -\frac{E}{2}$, 它表示一个点 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$;

(3) 当 $D^2 + E^2 - 4F < 0$ 时, 方程(2)没有实数解, 它不表示任何图形.

因此, 当 $D^2 + E^2 - 4F > 0$ 时, 方程(2)表示一个圆. 我们把方程(2)叫做**圆的一般方程** (general equation of circle).

思考

圆的标准方程与圆的一般方程各有什么特点?

例4 求过三点 $O(0, 0), M_1(1, 1), M_2(4, 2)$ 的圆的方程, 并求这个圆的圆心坐标和半径.

分析: 将点 O, M_1, M_2 的坐标分别代入圆的一般方程, 可得一个三元一次方程组, 解方程组即可求出圆的方程.

解: 设圆的方程是

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad ①$$

因为 O, M_1, M_2 三点都在圆上, 所以它们的坐标都是方程①的解. 把它们的坐标依次代入方程①, 得到关于 D, E, F 的一个三元一次方程组

$$\begin{cases} F = 0, \\ D + E + F + 2 = 0, \\ 4D + 2E + F + 20 = 0. \end{cases}$$

解这个方程组, 得

$$\begin{cases} D=-8, \\ E=6, \\ F=0. \end{cases}$$

所以, 所求圆的方程是

$$x^2+y^2-8x+6y=0.$$

由前面的讨论可知, 所求圆的圆心坐标是 $(4, -3)$,

$$\text{半径 } r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}=5.$$

?

与例 2 的方法比较, 你有什么体会?

求圆的方程常用待定系数法, 其大致步骤是:

- (1) 根据题意, 选择标准方程或一般方程;
- (2) 根据条件列出关于 a, b, r 或 D, E, F 的方程组;
- (3) 解出 a, b, r 或 D, E, F , 得到标准方程或一般方程.

例 5 已知线段 AB 的端点 B 的坐标是 $(4, 3)$, 端点 A 在圆 $(x+1)^2+y^2=4$ 上运动, 求线段 AB 的中点 M 的轨迹方程.

分析: 如图 2.4-4, 点 A 运动引起点 M 运动, 而点 A 在已知圆上运动, 点 A 的坐标满足方程 $(x+1)^2+y^2=4$. 建立点 M 与点 A 坐标之间的关系, 就可以利用点 A 的坐标所满足的关系式得到点 M 的坐标满足的关系式, 求出点 M 的轨迹方程.

解: 设点 M 的坐标是 (x, y) , 点 A 的坐标是 (x_0, y_0) . 由于点 B 的坐标是 $(4, 3)$, 且 M 是线段 AB 的中点, 所以

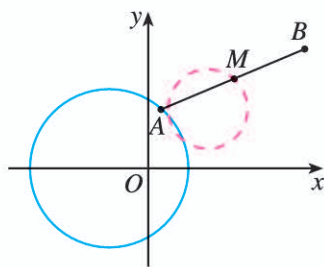


图 2.4-4

$$x = \frac{x_0+4}{2}, y = \frac{y_0+3}{2}.$$

于是有

$$x_0 = 2x - 4, y_0 = 2y - 3. \quad ①$$

因为点 A 在圆 $(x+1)^2+y^2=4$ 上运动, 所以点 A 的坐标满足圆的方程, 即

$$(x_0+1)^2+y_0^2=4. \quad ②$$

把①代入②, 得

$$(2x-4+1)^2+(2y-3)^2=4,$$

整理, 得

点 M 的轨迹方程是指点 M 的坐标 (x, y) 满足的关系式. 轨迹是指点在运动变化过程中形成的图形. 在解析几何中, 我们常常把图形看作点的轨迹 (集合).

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 1.$$

这就是点 M 的轨迹方程, 它表示以 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 为圆心, 半径为 1 的圆.

练习

1. 求下列各圆的圆心坐标和半径:

(1) $x^2 + y^2 - 6x = 0$; (2) $x^2 + y^2 + 2by = 0$;

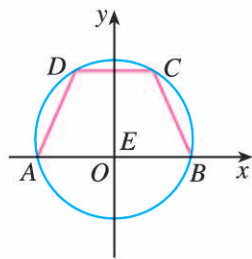
(3) $x^2 + y^2 - 2ax - 2\sqrt{3}ay + 3a^2 = 0$.

2. 判断下列方程分别表示什么图形, 并说明理由:

(1) $x^2 + y^2 = 0$; (2) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 6 = 0$;

(3) $x^2 + y^2 + 2ax - b^2 = 0$.

3. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB=6$, $CD=3$, 且 $AB \parallel CD$, $AD=BC$, AB 与 CD 间的距离为 3. 求等腰梯形 $ABCD$ 的外接圆的方程, 并求这个圆的圆心坐标和半径.



(第 3 题)

习题 2.4



复习巩固

1. 求下列各圆的圆心坐标和半径, 并画出它们的图形:

(1) $x^2 + y^2 - 2x - 5 = 0$; (2) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$;

(3) $x^2 + y^2 + 2ax = 0$; (4) $x^2 + y^2 - 2by - 2b^2 = 0$.

2. 求下列各圆的方程, 并画出图形:

(1) 圆心为点 $C(8, -3)$, 且过点 $A(5, 1)$;

(2) 过 $A(-1, 5)$, $B(5, 5)$, $C(6, -2)$ 三点.

3. 已知圆 C 经过原点和点 $A(2, 1)$, 并且圆心在直线 $l: x - 2y - 1 = 0$ 上, 求圆 C 的标准方程.

4. 圆 C 的圆心在 x 轴上, 并且过 $A(-1, 1)$ 和 $B(1, 3)$ 两点, 求圆 C 的方程.



综合运用

5. 已知圆的一条直径的端点分别是 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 求证此圆的方程是

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0.$$

6. 平面直角坐标系中有 $A(0, 1)$, $B(2, 1)$, $C(3, 4)$, $D(-1, 2)$ 四点, 这四点是否在同一个圆上? 为什么?

7. 已知等腰三角形 ABC 的一个顶点为 $A(4, 2)$, 底边的一个端点为 $B(3, 5)$, 求底边的另一个端点 C 的轨迹方程, 并说明它是什么图形.

8. 长为 $2a$ 的线段 AB 的两个端点 A 和 B 分别在 x 轴和 y 轴上滑动, 求线段 AB 的中点的轨迹方程, 并说明轨迹的形状.



拓广探索

9. 已知动点 M 与两个定点 $O(0, 0)$, $A(3, 0)$ 的距离的比为 $\frac{1}{2}$, 求动点 M 的轨迹方程, 并说明轨迹的形状.

10. 在平面直角坐标系中, 如果点 P 的坐标 (x, y) 满足

$$\begin{cases} x = a + r \cos \theta, \\ y = b + r \sin \theta, \end{cases}$$

其中 θ 为参数. 证明: 点 P 的轨迹是圆心为 (a, b) , 半径为 r 的圆.



阅读与思考

坐标法与数学机械化

笛卡儿开创了解析几何思想方法的先河. 解析几何坐标法的形成、发展和完善, 使几何问题的求解或求证能通过坐标转化为代数方程求解. 同时坐标法使计算机应用到几何定理的证明中成为可能.

明确提出机器可以成为推理工具的思想, 要追溯到 17 世纪德国数学家莱布尼茨 (Leibniz, 1646—1716, 微积分创始人之一). 他受笛卡儿思想的启发, 认为笛卡儿创立的解析几何, 目的是将几何推理转化为计算. 遗憾的是, 由于当时的条件限制, 计算仅仅是手工操作 (手摇计算机), 无法进行大量复杂的计算, 所以用机器实现几何定理证明的想法无法实现.

20 世纪以后, 计算机迅速发展. 计算机的发明使一些数学家又开始探讨几何定理证明机械化的可能性. 1950 年, 波兰数学家塔斯基得到一个引人注目的结论: 一切初等几何范畴中的命题都可以用机械方法判定. 由于他的判定方法太复杂, 在实践中没有太大的进展. 1959 年, 美籍华裔数学家王浩 (1921—1995) 在这方面做出了鼓舞人心的工作, 他在计算机上只用了 9 分钟就证明了《数学原理》(罗素和怀特海著) 中的 350 多个命题, 并第一次明确提出了“走向数学的机械化”的口号.

20 世纪 70 年代以后, 我国著名数学家吴文俊在几何定理机器证明上作出了重大贡献, 并创立了“吴方法”. 吴文俊是我国最具国际影响的数学家之一. 他在拓扑学、自动推理、机器证明、代数几何、中国数学史、对策论等研究领域均

有杰出的贡献. 曾获得首届国家最高科学技术奖(2000年)、首届国家自然科学一等奖(1956年)、首届求是杰出科学家奖(1994年)、邵逸夫数学奖(2006年)、国际自动推理最高奖——埃尔布朗自动推理杰出成就奖(1997年)等. “文华逾九章, 拓扑公式彪史册. 俊杰胜十书, 机器证明誉寰球.” 是对他一生工作的高度概括.



吴文俊(1919—2017), 中国科学院院士, 中国科学院数学与系统科学研究院研究员

吴文俊机器证明的思想, 主要是从笛卡儿的坐标法和中国古代解方程的计算方法而来的. 他认为, 欧氏几何体系的特点是纯粹在空间形式间推理, 或者说在图形之间, 或者是把数量关系归之于空间形式, 或者干脆排除数量关系. 另一个体系刚好与之相反, 是把空间形式转化成数量关系来处理. 这种考虑方式就是中国的传统, 早在11世纪左右就已产生, 当时引进的概念叫天元、地元等, 用现在的符号就相当于引进了 x , y 等. 用天元、地元表示某一个几何事实, 那么几何对象之间的相互关系就表示成天元、地元之间的一种方程(即 x , y 之间的一种方程), 即17世纪解析几何的坐标法.

吴文俊认为, 欧氏几何体系是非机械化的, 把空间形式数量化是机械化的. 吴文俊说: “我从事几何定理证明时, 首先取适当的坐标, 于是几何定理的假设与终结通常都成为多项式方程, 称之为假设方程与终结方程. 满足定理假设的几何图象, 就相当于假设方程组的一个解答或零点. 要证明定理成立, 就是要证明假设方程的零点也使终结多项式为零.” 由于计算机的发展与众多数学家(特别是以吴文俊为首的一批中国数学家)的努力, 在1976年与1977年之交, 几何定理机器证明的梦想终于实现了. 提出用计算机证明几何定理的“吴方法”, 被认为是自动推理领域的先驱性工作. 进入20世纪80年代以后, 吴文俊和他的同行把几何定理机器证明的方法发展成为数学机械化方法.

请你查阅有关资料, 进一步了解吴文俊的事迹, 了解我国数学家在数学机械化方面的卓越贡献.

2.5 直线与圆、圆与圆的位置关系

在平面几何中，我们研究过直线与圆这两类图形的位置关系. 前面我们学习了直线的方程、圆的方程，以及用方程研究两条直线的位置关系. 下面我们类比用方程研究两条直线位置关系的方法，利用直线和圆的方程，通过定量计算研究直线与圆、圆与圆的位置关系.

2.5.1 直线与圆的位置关系

我们知道，直线与圆有三种位置关系：

- (1) 直线与圆相交，有两个公共点；
- (2) 直线与圆相切，只有一个公共点；
- (3) 直线与圆相离，没有公共点.

思考

在初中，我们怎样判断直线与圆的位置关系？根据上述定义，如何利用直线和圆的方程判断它们之间的位置关系？

下面，我们通过具体例子进行研究.

例 1 已知直线 $l: 3x + y - 6 = 0$ 和圆心为 C 的圆 $x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$ ，判断直线 l 与圆 C 的位置关系；如果相交，求直线 l 被圆 C 所截得的弦长.

分析：思路 1：将判断直线 l 与圆 C 的位置关系转化为判断由它们的方程组成的方程组有无实数解、有几个实数解；若相交，可以由方程组解得两交点的坐标，利用两点间的距离公式求得弦长.

思路 2：依据圆心到直线的距离与半径的关系，判断直线与圆的位置关系；若相交，则可利用勾股定理求得弦长.

解法 1： 联立直线 l 与圆 C 的方程，得

$$\begin{cases} 3x + y - 6 = 0, & \text{①} \\ x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0. & \text{②} \end{cases}$$

消去 y ，得 $x^2 - 3x + 2 = 0$ ，解得 $x_1 = 2$ ， $x_2 = 1$.

所以, 直线 l 与圆 C 相交, 有两个公共点.

把 $x_1=2, x_2=1$ 分别代入方程①, 得 $y_1=0, y_2=3$.

所以, 直线 l 与圆 C 的两个交点是 $A(2, 0), B(1, 3)$.

因此 $|AB| = \sqrt{(1-2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{10}$.

解法 2: 圆 C 的方程 $x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$ 可化为 $x^2 + (y-1)^2 = 5$, 因此圆心 C 的坐标为 $(0, 1)$, 半径为 $\sqrt{5}$, 圆心 $C(0, 1)$ 到直线 l 的距离

$$d = \frac{|3 \times 0 + 1 - 6|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{10}} < \sqrt{5}.$$

所以, 直线 l 与圆 C 相交, 有两个公共点.

如图 2.5-1, 由垂径定理, 得 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{10}$.

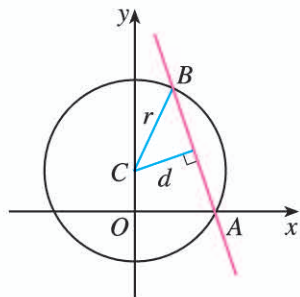


图 2.5-1

通过上述解法我们发现, 在平面直角坐标系中, 要判断直线 $l: Ax + By + C = 0$ 与圆 $C: (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 的位置关系, 可以联立它们的方程, 通过判定方程组

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \end{cases}$$

的解的个数, 得出直线与圆的公共点的个数, 进而判断直线与圆的位置关系. 若相交, 可以由方程组解得两交点坐标, 利用两点间的距离公式求得弦长.

我们还可以根据圆的方程求得圆心坐标与半径 r , 从而求得圆心到直线的距离 d , 通过比较 d 与 r 的大小, 判断直线与圆的位置关系. 若相交, 则可利用勾股定理求得弦长.

适当地利用已知图形的几何性质, 有助于简化计算.

思考

与初中的方法比较, 你认为用方程判断直线与圆的位置关系有什么优点? 例 1 中两种解法的差异是什么?

例 2 过点 $P(2, 1)$ 作圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 的切线 l , 求切线 l 的方程.

分析: 如图 2.5-2, 容易知道, 点 $P(2, 1)$ 位于圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ 外, 经过圆外一点有两条直线与这个圆相切. 我们设切线方程为 $y - 1 = k(x - 2)$, k 为斜率. 由直线与圆相切可求出 k 的值.

解法 1: 设切线 l 的斜率为 k , 则切线 l 的方程为 $y - 1 = k(x - 2)$, 即 $kx - y + 1 - 2k = 0$.

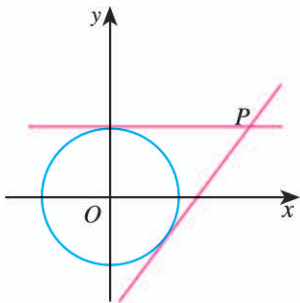


图 2.5-2

由圆心 $(0, 0)$ 到切线 l 的距离等于圆的半径 1, 得

$$\frac{|1-2k|}{\sqrt{k^2+1}}=1,$$

解得 $k=0$ 或 $\frac{4}{3}$.

因此, 所求切线 l 的方程为 $y=1$, 或 $4x-3y-5=0$.

解法 2: 设切线 l 的斜率为 k , 则切线 l 的方程为 $y-1=k(x-2)$.

因为直线 l 与圆相切, 所以方程组

$$\begin{cases} y-1=k(x-2), \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

只有一组解.

消元, 得

$$(k^2+1)x^2+(2k-4k^2)x+4k^2-4k=0. \quad \textcircled{1}$$

因为方程①只有一个解, 所以

$$\Delta=4k^2(1-2k)^2-16k(k^2+1)(k-1)=0,$$

解得 $k=0$ 或 $\frac{4}{3}$.

所以, 所求切线 l 的方程为 $y=1$, 或 $4x-3y-5=0$.

练习

1. 判断下列各组直线 l 与圆 C 的位置关系:

(1) $l: x-y+1=0$, 圆 $C: x^2+y^2=3$;

(2) $l: 3x+4y+2=0$, 圆 $C: x^2+y^2-2x=0$;

(3) $l: x+y+3=0$, 圆 $C: x^2+y^2+2y=0$.

2. 已知直线 $4x+3y-35=0$ 与圆心在原点的圆 C 相切, 求圆 C 的方程.

3. 判断直线 $2x-y+2=0$ 与圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ 的位置关系; 如果相交, 求直线被圆截得的弦长.

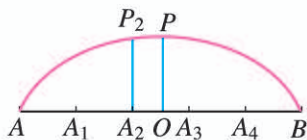


图 2.5-3

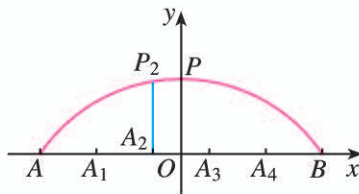


图 2.5-4

例 3 图 2.5-3 是某圆拱形桥一孔圆拱的示意图. 圆拱跨度 $AB=20$ m, 拱高 $OP=4$ m, 建造时每间隔 4 m 需要用一根支柱支撑, 求支柱 A_2P_2 的高度 (精确到 0.01 m).

分析：建立如图 2.5-4 所示的直角坐标系，要得到支柱 A_2P_2 的高度，只需求出点 P_2 的纵坐标.

解：建立如图 2.5-4 所示的直角坐标系，使线段 AB 所在直线为 x 轴， O 为坐标原点，圆心在 y 轴上. 由题意，点 P, B 的坐标分别为 $(0, 4), (10, 0)$. 设圆心坐标是 $(0, b)$ ，圆的半径是 r ，那么圆的方程是

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

下面确定 b 和 r 的值.

因为 P, B 两点都在圆上，所以它们的坐标 $(0, 4), (10, 0)$ 都满足方程 $x^2 + (y - b)^2 = r^2$. 于是，得到方程组

$$\begin{cases} 0^2 + (4 - b)^2 = r^2, \\ 10^2 + (0 - b)^2 = r^2. \end{cases}$$

解得

$$b = -10.5, r^2 = 14.5^2.$$

所以，圆的方程是

$$x^2 + (y + 10.5)^2 = 14.5^2.$$

把点 P_2 的横坐标 $x = -2$ 代入圆的方程，得

$$(-2)^2 + (y + 10.5)^2 = 14.5^2,$$

即 $y + 10.5 = \sqrt{14.5^2 - (-2)^2}$ (P_2 的纵坐标 $y > 0$ ，平方根取正值). 所以

$$y = \sqrt{14.5^2 - (-2)^2} - 10.5 \approx 14.36 - 10.5 = 3.86 \text{ (m)}.$$

答：支柱 A_2P_2 的高度约为 3.86 m.

?

点 O 是圆拱所在圆的圆心吗?

思考

如果不建立平面直角坐标系，你能解决这个问题吗？由此比较综合法和坐标法的特点.

例 4 一个小岛的周围有环岛暗礁，暗礁分布在以小岛中心为圆心，半径为 20 km 的圆形区域内. 已知小岛中心位于轮船正西 40 km 处，港口位于小岛中心正北 30 km 处. 如果轮船沿直线返港，那么它是否会有触礁危险？

分析：先画出示意图，了解小岛中心、轮船、港口的方位和距离. 如图 2.5-5，根据题意，建立适当的平面直角坐标系，求出暗礁所在区域的边缘圆的方程，以及轮船返港直线的方程，利用方程判断直线与圆的位置关系，进而确定轮船是否有触礁危险.

解：以小岛的中心为原点 O ，东西方向为 x 轴，建立

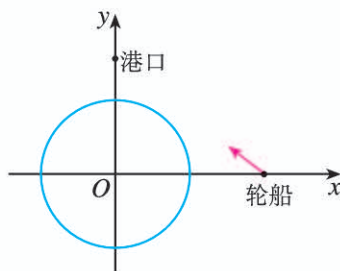


图 2.5-5

如图 2.5-5 所示的直角坐标系. 为了运算的简便, 我们取 10 km 为单位长度, 则港口所在位置的坐标为 (0, 3), 轮船所在位置的坐标为 (4, 0).

这样, 受暗礁影响的圆形区域的边缘所对应的圆的方程为

$$x^2 + y^2 = 4;$$

轮船航线所在直线 l 的方程为

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1, \text{ 即 } 3x + 4y - 12 = 0.$$

联立直线 l 与圆 O 的方程, 得

$$\begin{cases} 3x + 4y - 12 = 0, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

消去 y , 得

$$25x^2 - 72x + 80 = 0.$$

由 $\Delta = (-72)^2 - 4 \times 25 \times 80 < 0$, 可知方程组无解.

所以直线 l 与圆 O 相离, 轮船沿直线返港不会有触礁危险.

思考

你还能用其他方法解决上述问题吗?

用坐标法解决几何问题时, 先用坐标和方程表示相应的几何元素: 点、直线、圆, 将几何问题转化为代数问题; 然后通过代数运算解决代数问题; 最后解释代数运算结果的几何含义, 得到几何问题的结论. 这就是用坐标法解决平面几何问题的“三步曲”:

第一步: 建立适当的平面直角坐标系, 用坐标和方程表示问题中的几何要素, 如点、直线、圆, 把平面几何问题转化为代数问题;

第二步: 通过代数运算, 解决代数问题;

第三步: 把代数运算的结果“翻译”成几何结论.

比较坐标法与向量法, 它们在解决几何问题时, 有什么异同点?

练习

1. 赵州桥的跨度是 37.4 m, 圆拱高约为 7.2 m. 求这座圆拱桥的拱圆的方程.
2. 某圆拱桥的水面跨度 20 m, 拱高 4 m. 现有一船, 宽 10 m, 水面上高 3 m, 这条船能否从桥下通过?
3. 在一个平面上, 机器人从与点 $C(5, -3)$ 的距离为 9 的地方绕点 C 顺时针而行, 在行进过程中保持与点 C 的距离不变. 它在行进过程中到过点 $A(-10, 0)$ 与 $B(0, 12)$ 的直线的最近距离和最远距离分别是多少?



(第 1 题)

2.5.2 圆与圆的位置关系

前面我们运用直线的方程、圆的方程，研究了直线与圆的位置关系。现在我们类比上述研究方法，运用圆的方程，通过定量计算研究圆与圆的位置关系。

我们知道，两个圆之间存在以下三种位置关系：

- (1) 两圆相交，有两个公共点；
- (2) 两圆相切，包括外切与内切，只有一个公共点；
- (3) 两圆相离，包括外离与内含，没有公共点。

思考

类比运用直线和圆的方程，研究直线与圆的位置关系的方法，如何利用圆的方程，判断它们之间的位置关系？

例 5 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 + 2x + 8y - 8 = 0$ ，圆 $C_2: x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0$ ，试判断圆 C_1 与圆 C_2 的位置关系。

分析：思路 1：圆 C_1 与圆 C_2 的位置关系由它们有几个公共点确定，而它们有几个公共点又由它们的方程所组成的方程组有几组实数解确定；

思路 2：借助图形，可以依据圆心距与两半径的和 $r_1 + r_2$ 或两半径的差的绝对值 $|r_1 - r_2|$ 的大小关系，判断两圆的位置关系。

解法 1：将圆 C_1 与圆 C_2 的方程联立，得到方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 8y - 8 = 0, \\ x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{matrix}$$

① - ②，得

$$x + 2y - 1 = 0, \quad \textcircled{3}$$

由③，得

$$y = \frac{1-x}{2}.$$

把上式代入①，并整理，得

$$x^2 - 2x - 3 = 0. \quad \textcircled{4}$$

方程④的根的判别式

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0,$$

所以，方程④有两个不相等的实数根 x_1, x_2 。把 x_1, x_2 分别代入方程③，得到 y_1, y_2 。

因此圆 C_1 与圆 C_2 有两个公共点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，这两个圆相交。

画出圆 C_1 与圆 C_2 以及方程③表示的直线，你发现了什么？你能说明为什么吗？

本题只要判断圆 C_1 与圆 C_2 是否有公共点，并不需求出公共点的坐标，因此不必解方程④，具体求出两个实数根。

解法 2: 把圆 C_1 的方程化成标准方程, 得

$$(x+1)^2 + (y+4)^2 = 25,$$

圆 C_1 的圆心是 $(-1, -4)$, 半径 $r_1 = 5$.

把圆 C_2 的方程化成标准方程, 得

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 10,$$

圆 C_2 的圆心是 $(2, 2)$, 半径 $r_2 = \sqrt{10}$.

圆 C_1 与圆 C_2 的圆心距为

$$\sqrt{(-1-2)^2 + (-4-2)^2} = 3\sqrt{5}.$$

圆 C_1 与圆 C_2 的两半径之和 $r_1 + r_2 = 5 + \sqrt{10}$, 两半径长之差 $r_1 - r_2 = 5 - \sqrt{10}$.

因为 $5 - \sqrt{10} < 3\sqrt{5} < 5 + \sqrt{10}$, 即 $r_1 - r_2 < 3\sqrt{5} < r_1 + r_2$, 所以圆 C_1 与圆 C_2 相交 (图 2.5-6), 它们有两个公共点 A, B .

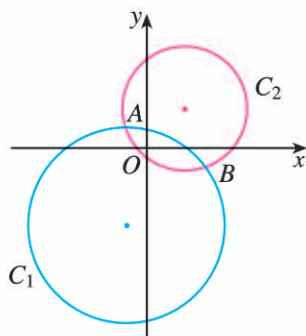


图 2.5-6

思考

在解法 1 中, 如果两圆方程联立消元后得到的方程的 $\Delta = 0$, 它说明什么? 你能据此确定两圆是内切还是外切吗? 如何判断两圆是内切还是外切呢?

当 $\Delta < 0$ 时, 两圆是什么位置关系?

例 6 已知圆 O 的直径 $AB = 4$, 动点 M 与点 A 的距离是它与点 B 的距离的 $\sqrt{2}$ 倍. 试探究点 M 的轨迹, 并判断该轨迹与圆 O 的位置关系.

分析: 我们可以通过建立适当的平面直角坐标系, 求得满足条件的动点 M 的轨迹方程, 从而得到点 M 的轨迹; 通过研究它的轨迹方程与圆 O 方程的关系, 判断这个轨迹与圆 O 的位置关系.

解: 如图 2.5-7, 以线段 AB 的中点 O 为原点, AB 所在直线为 x 轴, 线段 AB 的垂直平分线为 y 轴, 建立平面直角坐标系. 由 $AB = 4$, 得 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$.

设点 M 的坐标为 (x, y) , 由 $|MA| = \sqrt{2} |MB|$, 得

$$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{(x-2)^2 + y^2},$$

化简, 得 $x^2 - 12x + y^2 + 4 = 0$, 即 $(x-6)^2 + y^2 = 32$.

所以点 M 的轨迹是以 $P(6, 0)$ 为圆心, 半径为 $4\sqrt{2}$ 的一个圆 (图 2.5-7).

因为两圆的圆心距为 $|PO| = 6$, 两圆的半径分别为 $r_1 = 2$, $r_2 = 4\sqrt{2}$, 又 $r_2 - r_1 < |PO| < r_2 + r_1$, 所以点 M 的轨迹与圆 O 相交.

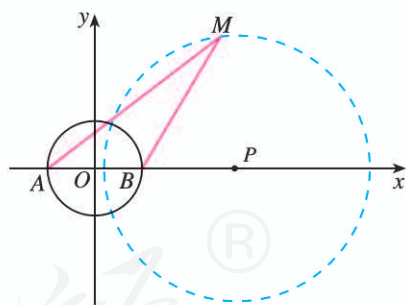


图 2.5-7

如果把本例中的“ $\sqrt{2}$ 倍”改为“ $k (k > 0)$ 倍”, 你能分析并解决这个问题吗?

练习

1. 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 = 4$, 圆 $C_2: x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$, 判断圆 C_1 与圆 C_2 的位置关系.
2. 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$, 圆 $C_2: x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$, 证明圆 C_1 与圆 C_2 相交, 并求圆 C_1 与圆 C_2 的公共弦所在直线的方程.

习题 2.5



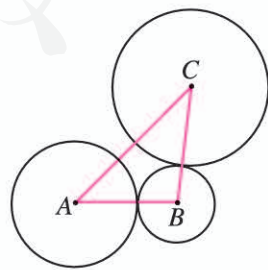
复习巩固

1. 判断直线 $4x - 3y = 50$ 与圆 $x^2 + y^2 = 100$ 的位置关系. 如果有公共点, 求出公共点的坐标.
2. 求下列条件确定的圆的方程, 并画出它们的图形:
 - (1) 圆心为 $M(3, -5)$, 且与直线 $x - 7y + 2 = 0$ 相切;
 - (2) 圆心在直线 $y = x$ 上, 半径为 2, 且与直线 $y = 6$ 相切;
 - (3) 半径为 $\sqrt{13}$, 且与直线 $2x - 3y + 6 = 0$ 相切于点 $(3, 4)$.
3. 求直线 $l: 3x - y - 6 = 0$ 被圆 $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ 截得的弦 AB 的长.
4. 求圆心在直线 $3x - y = 0$ 上, 与 x 轴相切, 且被直线 $x - y = 0$ 截得的弦长为 $2\sqrt{7}$ 的圆的方程.
5. 求与圆 $C: x^2 + y^2 - x + 2y = 0$ 关于直线 $l: x - y + 1 = 0$ 对称的圆的方程.
6. 正方形 $ABCD$ 的边长为 a , 在边 BC 上取线段 $BE = \frac{a}{3}$, 在边 DC 的延长线上取 $CF = \frac{a}{2}$. 试证明: 直线 AE 与 BF 的交点 M 位于正方形 $ABCD$ 的外接圆上.
7. 求经过点 $M(2, -2)$ 以及圆 $x^2 + y^2 - 6x = 0$ 与 $x^2 + y^2 = 4$ 交点的圆的方程.



综合运用

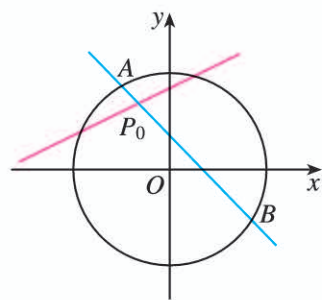
8. 求圆心在直线 $x - y - 4 = 0$ 上, 并且经过圆 $x^2 + y^2 + 6x - 4 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 + 6y - 28 = 0$ 的交点的圆的方程.
9. 求圆 $x^2 + y^2 - 4 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 12 = 0$ 的公共弦的长.
10. 求经过点 $M(3, -1)$, 且与圆 $C: x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$ 相切于点 $N(1, 2)$ 的圆的方程.
11. 如图, 某台机器的三个齿轮, A 与 B 啮合, C 与 B 也啮合. 若 A 轮的直径为 200 cm, B 轮的直径为 120 cm, C 轮的直径为 250 cm, 且 $\angle A = 45^\circ$. 试建立适当的坐标系, 用坐标法求出 A, C 两齿轮的中心距离 (精确到 1 cm).
12. 已知 $A(-2, -2)$, $B(-2, 6)$, $C(4, -2)$ 三点, 点 P 在圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上运动, 求 $|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2$ 的最大值和最小值.



(第 11 题)

 拓广探索

13. 已知圆 $x^2+y^2=4$, 直线 $l: y=x+b$. b 为何值时, 圆上恰有三个点到直线 l 的距离都等于 1?
14. 如图, 圆 $x^2+y^2=8$ 内有一点 $P_0(-1, 2)$, AB 为过点 P_0 且倾斜角为 α 的弦.
- (1) 当 $\alpha=135^\circ$ 时, 求 AB 的长.
 - (2) 是否存在弦 AB 被点 P_0 平分? 若存在, 写出直线 AB 的方程; 若不存在, 请说明理由.
15. 已知点 $P(-2, -3)$ 和以点 Q 为圆心的圆 $(x-4)^2+(y-2)^2=9$.
- (1) 画出以 PQ 为直径, 点 Q' 为圆心的圆, 再求出圆 Q' 的方程;
 - (2) 设圆 Q 与圆 Q' 相交于 A, B 两点, 直线 PA, PB 是圆 Q 的切线吗? 为什么?
 - (3) 求直线 AB 的方程.

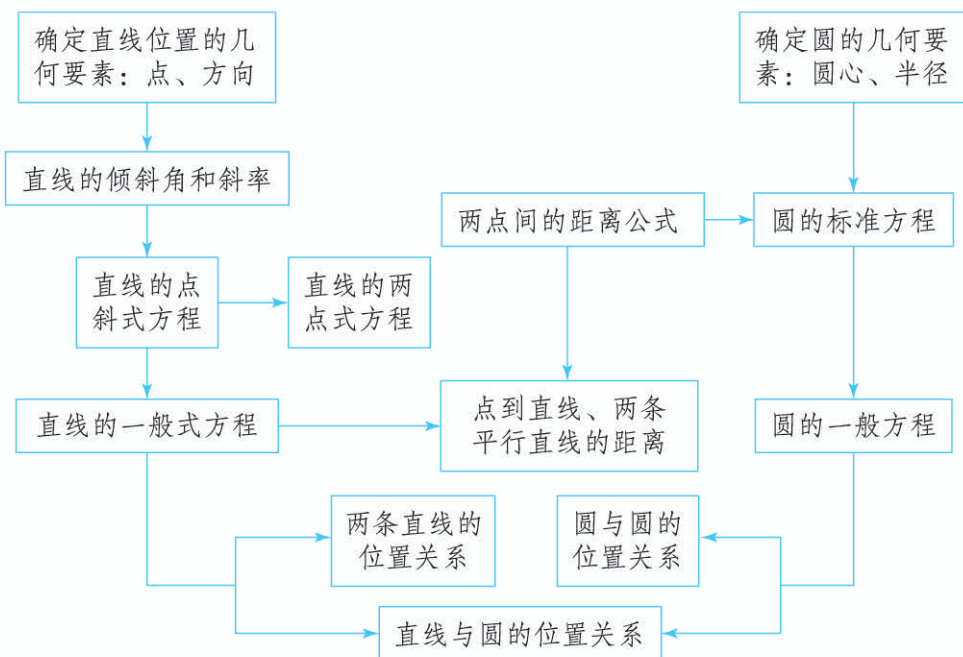


(第 14 题)

人教版®

小结

一、本章知识结构



二、回顾与思考

本章在平面直角坐标系中探究确定直线、圆的几何要素，并利用坐标表示这些几何要素，进而得到直线、圆上的点的坐标所满足的关系式，建立直线的方程、圆的方程；通过它们的方程，用代数方法研究有关几何问题，包括两条直线的位置关系，特别是两条直线的平行与垂直，两条直线的交点坐标，各种距离问题，以及直线与圆、圆与圆的位置关系等。在研究和解决这些问题的过程中，我们可以不断体会解析几何的基本思想方法——坐标法。

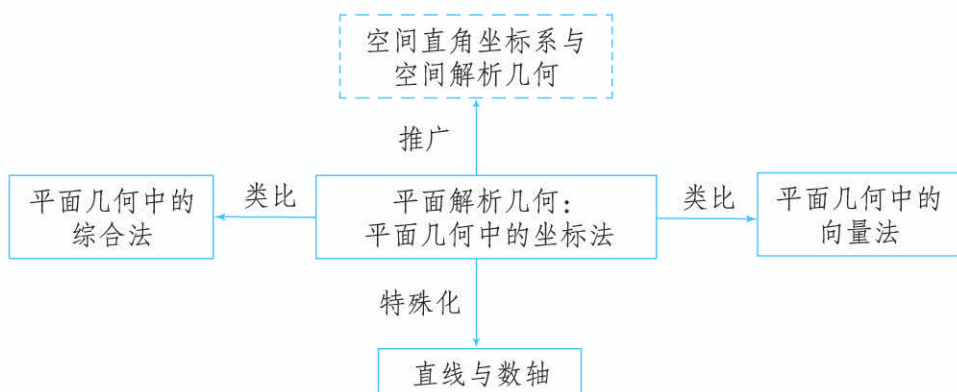
坐标法是研究和解决几何问题的重要方法，它建立了几何与代数间的联系，体现了数形结合的思想方法。用坐标法解决平面几何问题的“三部曲”是：

第一步：建立适当的平面直角坐标系，用坐标和方程表示问题中的几何要素，把平面几何问题转化为代数问题；

第二步：通过代数运算，解决代数问题；

第三步：把代数运算的结果“翻译”成几何结论。

坐标法、综合法、向量法都是研究平面图形的重要方法。这些方法可以推广到空间中。



请你带着下面的问题，复习一下全章内容吧！

1. 在直角坐标系中，我们是如何探索确定直线位置的几何要素的？它与平面几何中确定直线位置的几何要素有什么差异？
2. 直线的倾斜程度、倾斜角、斜率三者之间有什么关系？如何用直线上两点的坐标表示这条直线的斜率？直线的方向向量在刻画直线的倾斜角、斜率方面有什么作用？
3. 你能叙述直线点斜式方程的建立过程吗？
4. 写出直线的点斜式、斜截式、两点式、截距式方程，并指出这些方程中字母系数的几何意义。有人说，直线方程的其他形式都是点斜式方程的“推论”，对此你有什么看法？
5. 你能写出两点间距离公式、点到直线的距离公式吗？比较用坐标法和向量法推导点到直线的距离公式的过程，你有何体会？
6. 圆的方程有哪几种形式？你能说出它们各自的特点吗？
7. 位置关系是图形间的一种重要关系。直线与直线、直线与圆、圆与圆各有哪些位置关系？我们是如何通过方程来研究这些位置关系的？你能说说用方程研究图形位置关系的基本思路与具体步骤吗？
8. 坐标法是研究和解决平面几何问题的重要方法。你能举例说明用坐标法解决平面几何问题“三步曲”中的第一步、第二步和第三步的具体含义吗？
9. 数形结合是重要的数学思想方法。坐标系把图形性质与代数运算有机结合起来，由此产生了解析几何这门学科。我们常说，两点间的距离公式是勾股定理的坐标表示。用“数”表示“形”，用“形”解释“数”，在解析几何的学习中经常遇到，你还能举出这方面的一些例子吗？

复习参考题 2



复习巩固

1. 选择题.

(1) 直线 $3x+2y-1=0$ 的一个方向向量是 ().

- (A) $(2, -3)$ (B) $(2, 3)$ (C) $(-3, 2)$ (D) $(3, 2)$

(2) 设直线 l 的方程为 $x-y\sin\theta+2=0$, 则直线 l 的倾斜角 α 的范围是 ().

- (A) $[0, \pi]$ (B) $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ (C) $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ (D) $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$

(3) 与直线 $3x-4y+5=0$ 关于 x 轴对称的直线的方程为 ().

- (A) $3x+4y-5=0$ (B) $3x+4y+5=0$

- (C) $3x-4y+5=0$ (D) $3x-4y-5=0$

2. 已知下列各组中的两个方程表示的直线平行, 求 a 的值:

(1) $2x+3y=a$, $4x+6y-3=0$;

(2) $x+2ay-1=0$, $(3a-1)x-ay-1=0$;

(3) $x+(1+a)y=2-a$, $2ax+4y=-16$.

3. 已知下列各组中的两个方程表示的直线垂直, 求 a 的值:

(1) $4ax+y=1$, $(1-a)x+y=-1$;

(2) $2x+ay=2$, $ax+2y=1$;

(3) $(3a+2)x+(1-4a)y+8=0$, $(5a-2)x+(a+4)y-7=0$.

4. 求平行于直线 $x-y-2=0$, 且与它的距离为 $2\sqrt{2}$ 的直线的方程.

5. 已知平行四边形的两条边所在直线的方程分别是 $x+y-1=0$, $3x-y+4=0$, 且它的对角线的交点是 $M(3, 3)$, 求这个平行四边形其他两边所在直线的方程.

6. 求下列各圆的方程:

(1) 圆心为 $M(-5, 3)$, 且过点 $A(-8, -1)$;

(2) 过 $A(-2, 4)$, $B(-1, 3)$, $C(2, 6)$ 三点;

(3) 圆心在直线 $3x+y-5=0$ 上, 且经过原点和点 $(3, -1)$.

7. m 为何值时, 方程 $x^2+y^2-4x+2my+2m^2-2m+1=0$ 表示圆? 并求半径最大时圆的方程.

8. 判断圆 $x^2+y^2-6x+4y+12=0$ 与圆 $x^2+y^2-14x-2y+14=0$ 是否相切.



综合运用

9. 若函数 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 及 $x=b$ 之间的一段图象可以近似地看作线段, 且 $a \leq c \leq b$, 求证:

$$f(c) \approx f(a) + \frac{c-a}{b-a} [f(b)-f(a)].$$

10. 求点 $P(-2, -1)$ 到直线 $l: (1+3\lambda)x+(1+\lambda)y-2-4\lambda=0$ (λ 为任意实数) 的距离的最大值.

11. 过点 $P(3, 0)$ 有一条直线 l , 它夹在两条直线 $l_1: 2x-y-2=0$ 与 $l_2: x+y+3=0$ 之间的线段恰被点 P 平分, 求直线 l 的方程.

12. 已知直线 $l: x-2y-8=0$ 和 $A(-2, 0)$, $B(2, 4)$ 两点, 若直线 l 上存在点 P 使得 $|PA|+|PB|$ 最小, 求点 P 的坐标.
13. 求圆 $x^2+y^2-10x-10y=0$ 与圆 $x^2+y^2-6x+2y-40=0$ 的公共弦长.
14. 已知圆 $x^2+y^2=4$ 与圆 $x^2+y^2+4x-4y+4=0$ 关于直线 l 对称, 求直线 l 的方程.
15. 求与圆 $C: (x+2)^2+(y-6)^2=1$ 关于直线 $3x-4y+5=0$ 对称的圆的方程.
16. 求圆心在直线 $y=-2x$ 上, 并且经过点 $A(2, -1)$, 与直线 $x+y=1$ 相切的圆的方程.



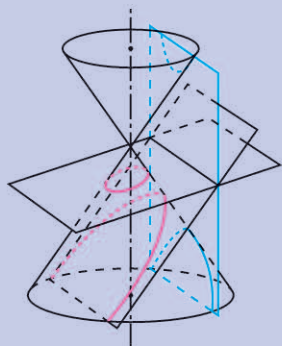
拓广探索

17. 如果四边形一组对边的平方和等于另一组对边的平方和, 那么它的对角线具有什么关系? 为什么?
18. 求由曲线 $x^2+y^2=|x|+|y|$ 围成的图形的面积.
19. 一条光线从点 $A(-2, 3)$ 射出, 经 x 轴反射后, 与圆 $C: (x-3)^2+(y-2)^2=1$ 相切, 求反射后光线所在直线的方程.
20. 已知圆 $C: (x-1)^2+(y-2)^2=25$, 直线 $l: (2m+1)x+(m+1)y-7m-4=0$.
- (1) 求证: 直线 l 恒过定点.
- (2) 直线 l 被圆 C 截得的弦何时最长、何时最短? 并求截得的弦长最短时 m 的值以及最短弦长.

人教版®

第三章

圆锥曲线的方程



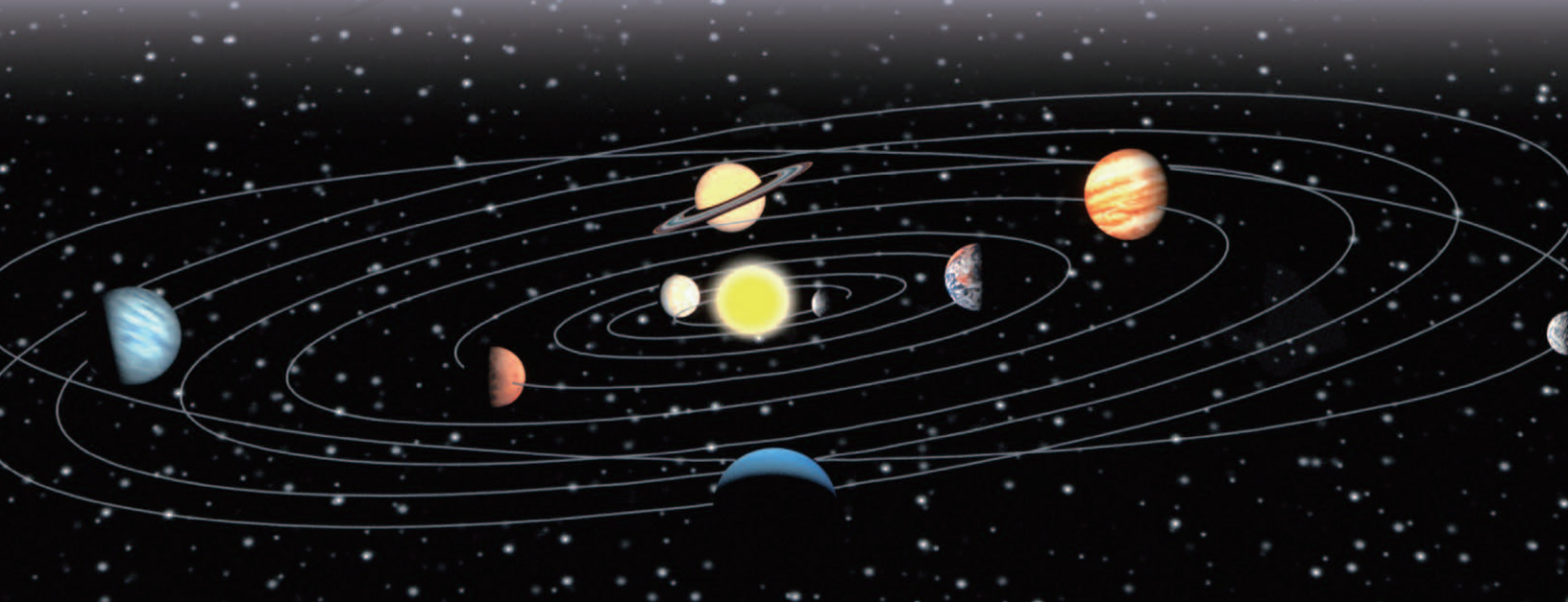
我们知道，用一个垂直于圆锥的轴的平面截圆锥，截口曲线（截面与圆锥侧面的交线）是一个圆。如果改变圆锥的轴与截平面所成的角，那么会得到怎样的曲线呢？

如图，用一个不垂直于圆锥的轴的平面截圆锥，当圆锥的轴与截面所成的角不同时，可以得到不同的截口曲线，它们分别是椭圆、抛物线和双曲线。我们通常把椭圆、抛物线、双曲线统称为**圆锥曲线**（conic sections）。

圆锥曲线与科研、生产以及人类生活有着紧密的关系。如行星绕太阳运行的轨道是椭圆，发电厂冷却塔的外形线是双曲线，探照灯反射镜面、卫星接收天线是抛物线绕其对称轴旋转所成的抛物面……为什么圆锥曲线有如此广泛的应用呢？我们可以从它们的几何特征及其性质中找到答案。

圆锥曲线的发现与研究始于古希腊。当时人们用纯几何的方法研究这些与圆密切相关的曲线，它们的几何性质是圆的几何性质的自然推广。17 世纪，笛卡儿发明了坐标系，人们开始借助坐标系，运用代数方法研究圆锥曲线。

本章我们继续采用坐标法，在探究圆锥曲线几何特征的基础上，建立它们的方程，通过方程研究它们的性质，并解决与圆锥曲线有关的几何问题和实际问题，进一步感受数形结合的思想方法，体会坐标法的魅力与威力。



3.1 椭圆

椭圆是圆锥曲线的一种，具有丰富的几何性质，在科研、生产和人类生活中具有广泛的应用. 那么，椭圆到底有怎样的几何特征？我们该如何利用这些特征建立椭圆的方程，从而为研究椭圆的几何性质奠定基础？

3.1.1 椭圆及其标准方程

探究

取一条定长的细绳，把它的两端都固定在图板的同一点，套上铅笔，拉紧绳子，移动笔尖，这时笔尖（动点）画出的轨迹是一个圆. 如果把细绳的两端拉开一段距离，分别固定在图板的两点 F_1, F_2 （图 3.1-1），套上铅笔，拉紧绳子，移动笔尖，画出的轨迹是什么曲线？

在这一过程中，移动的笔尖（动点）满足的几何条件是什么？

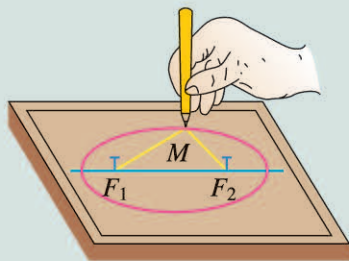


图 3.1-1

把细绳的两端拉开一段距离，笔尖移动的过程中，细绳的长度保持不变，即笔尖到两个定点的距离的和等于常数.

我们把平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离的和等于常数（大于 $|F_1F_2|$ ）的点的轨迹叫做**椭圆**（ellipse）. 这两个定点叫做椭圆的**焦点**（focus），两焦点间的距离叫做椭圆的**焦距**（focus distance），焦距的一半称为半焦距.

由椭圆的定义可知，上述移动的笔尖（动点）画出的轨迹是椭圆.

下面我们根据椭圆的几何特征，选择适当的坐标系，建立椭圆的方程.

思考

观察椭圆的形状，你认为怎样建立坐标系可能使所得的椭圆方程形式简单？

观察我们画出的图形，可以发现椭圆具有对称性，而且过两个焦点的直线是它的对称

轴, 所以我们以经过椭圆两焦点 F_1, F_2 的直线为 x 轴, 线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴, 建立平面直角坐标系 Oxy , 如图 3.1-2 所示.

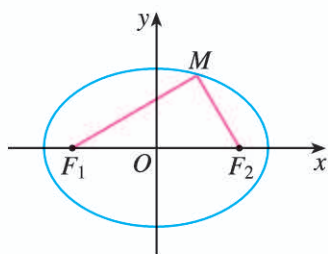


图 3.1-2

设 $M(x, y)$ 是椭圆上任意一点, 椭圆的焦距为 $2c (c > 0)$, 那么焦点 F_1, F_2 的坐标分别为 $(-c, 0), (c, 0)$. 根据椭圆的定义, 设点 M 与焦点 F_1, F_2 的距离的和等于 $2a$.

由椭圆的定义可知, 椭圆可看作点集

$$P = \{M \mid |MF_1| + |MF_2| = 2a\}.$$

因为

$$|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad |MF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

所以

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \quad ①$$

为了化简方程①, 我们将其左边的一个根式移到右边, 得

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \quad ②$$

对方程②两边平方, 得

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

整理, 得

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \quad ③$$

对方程③两边平方, 得

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2.$$

整理, 得

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \quad ④$$

将方程④两边同除以 $a^2(a^2 - c^2)$, 得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \quad ⑤$$

由椭圆的定义可知, $2a > 2c > 0$, 即 $a > c > 0$, 所以 $a^2 - c^2 > 0$.

思考

观察图 3.1-3, 你能从中找出表示 $a, c, \sqrt{a^2 - c^2}$ 的线段吗?

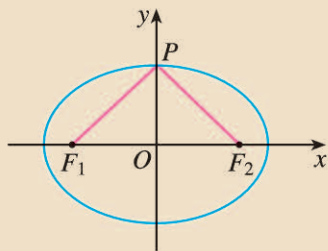


图 3.1-3

由图 3.1-3 可知, $|PF_1| = |PF_2| = a$, $|OF_1| = |OF_2| = c$, $|PO| = \sqrt{a^2 - c^2}$. 令 $b = |PO| = \sqrt{a^2 - c^2}$, 那么方程 ⑤ 就是

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0). \quad ⑥$$

由于方程②③的两边都是非负实数, 因此方程①到方程⑥的变形都是同解变形. 这样, 椭圆上任意一点的坐标 (x, y) 都满足方程⑥; 反之, 以方程⑥的解为坐标的点 (x, y) 与椭圆的两个焦点 $(c, 0)$, $(-c, 0)$ 的距离之和为 $2a$, 即以方程⑥的解为坐标的点都在椭圆上. 我们称方程⑥是椭圆的方程, 这个方程叫做**椭圆的标准方程**. 它表示焦点在 x 轴上, 两个焦点分别是 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ 的椭圆, 这里 $c^2 = a^2 - b^2$.

思考

如图 3.1-4, 如果焦点 F_1, F_2 在 y 轴上, 且 F_1, F_2 的坐标分别为 $(0, -c)$, $(0, c)$, a, b 的意义同上, 那么椭圆的方程是什么?

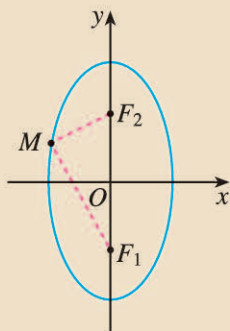


图 3.1-4

容易知道, 此时椭圆的方程是

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0),$$

这个方程也是椭圆的标准方程.

例 1 已知椭圆的两个焦点坐标分别是 $(-2, 0)$, $(2, 0)$, 并且经过点 $(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$, 求它的标准方程.

解: 由于椭圆的焦点在 x 轴上, 所以设它的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$.

由椭圆的定义知 $c = 2$,

$$2a = \sqrt{\left(\frac{5}{2} + 2\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 2\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = 2\sqrt{10},$$

所以 $a = \sqrt{10}$.

所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 10 - 4 = 6$.

所以, 所求椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{6} = 1.$$

你还能用其他方法求它的标准方程吗? 试比较不同方法的特点.

例 2 如图 3.1-5, 在圆 $x^2+y^2=4$ 上任取一点 P , 过点 P 作 x 轴的垂线段 PD , D 为垂足. 当点 P 在圆上运动时, 线段 PD 的中点 M 的轨迹是什么? 为什么? (当点 P 经过圆与 x 轴的交点时, 规定点 M 与点 P 重合.)

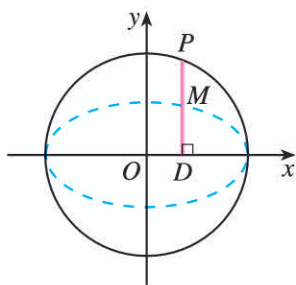


图 3.1-5

分析: 点 P 在圆 $x^2+y^2=4$ 上运动, 点 P 的运动引起点 M 运动. 我们可以由 M 为线段 PD 的中点得到点 M 与点 P 坐标之间的关系式, 并由点 P 的坐标满足圆的方程得到点 M 的坐标所满足的方程.

解: 设点 M 的坐标为 (x, y) , 点 P 的坐标为 (x_0, y_0) , 则点 D 的坐标为 $(x_0, 0)$. 由点 M 是线段 PD 的中点, 得

$$x = x_0, \quad y = \frac{y_0}{2}.$$

因为点 $P(x_0, y_0)$ 在圆 $x^2+y^2=4$ 上, 所以

$$x_0^2 + y_0^2 = 4.$$

把 $x_0 = x, y_0 = 2y$ 代入方程①, 得

$$x^2 + 4y^2 = 4,$$

即

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

所以点 M 的轨迹是椭圆.

寻求点 M 的坐标 (x, y) 中 x, y 与 x_0, y_0 之间的关系, 然后消去 x_0, y_0 , 得到点 M 的轨迹方程. 这是解析几何中求点的轨迹方程常用的方法.

利用信息技术, 可以更方便地探究点 M 的轨迹的形状.

思考

由例 2 我们发现, 可以由圆通过“压缩”得到椭圆. 你能由圆通过“拉伸”得到椭圆吗? 如何“拉伸”? 由此你能发现椭圆与圆之间的关系吗?

例 3 如图 3.1-6, 设 A, B 两点的坐标分别为 $(-5, 0), (5, 0)$. 直线 AM, BM 相交于点 M , 且它们的斜率之积是 $-\frac{4}{9}$, 求点 M 的轨迹方程.

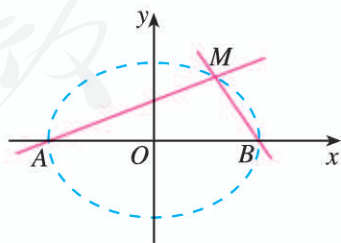


图 3.1-6

分析: 设点 M 的坐标为 (x, y) , 那么直线 AM, BM 的斜率就可用含 x, y 的关系式分别表示. 由直线 AM, BM 的斜率之积是 $-\frac{4}{9}$, 可得出 x, y 之间的关系式, 进而得到点 M 的轨迹方程.

解: 设点 M 的坐标为 (x, y) , 因为点 A 的坐标是 $(-5, 0)$, 所以直线 AM 的斜率

$$k_{AM} = \frac{y}{x+5} \quad (x \neq -5).$$

同理, 直线 BM 的斜率

$$k_{BM} = \frac{y}{x-5} \quad (x \neq 5).$$

由已知, 有

$$\frac{y}{x+5} \times \frac{y}{x-5} = -\frac{4}{9} \quad (x \neq \pm 5),$$

化简, 得点 M 的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{100}{9}} = 1 \quad (x \neq \pm 5).$$

点 M 的轨迹是除去 $(-5, 0), (5, 0)$ 两点的椭圆.

运用信息技术, 可以探究点 M 的轨迹形状.

练习

- 如果椭圆 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ 上一点 P 与焦点 F_1 的距离等于 6, 那么点 P 与另一个焦点 F_2 的距离是_____.
- 求适合下列条件的椭圆的标准方程:
 - $a=4, b=1$, 焦点在 x 轴上;
 - $a=4, c=\sqrt{15}$, 焦点在 y 轴上;
 - $a+b=10, c=2\sqrt{5}$.
- 经过椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的右焦点 F_2 作垂直于 x 轴的直线 AB , 交椭圆于 A, B 两点, F_1 是椭圆的左焦点.
 - 求 $\triangle AF_1B$ 的周长;
 - 如果 AB 不垂直于 x 轴, $\triangle AF_1B$ 的周长有变化吗? 为什么?
- 已知 A, B 两点的坐标分别是 $(-1, 0), (1, 0)$, 直线 AM, BM 相交于点 M , 且直线 AM 的斜率与直线 BM 的斜率的商是 2, 点 M 的轨迹是什么? 为什么?

3.1.2 椭圆的简单几何性质

与利用直线的方程、圆的方程研究它们的几何性质一样, 我们利用椭圆的标准方程研究椭圆的几何性质, 包括椭圆的范围、形状、大小、对称性和特殊点等.

下面, 我们用椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$ 来研究椭圆的几何性质.

通过对曲线的范围、对称性及特殊点的讨论, 可以从整体上把握曲线的形状、大小和位置. 所以, 本章对几种圆锥曲线都是从范围、对称性、顶点及其他特性等方面研究它们的几何性质.

观察

观察椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的形状, 你能从图上看出它的范围吗? 它具有怎样的对称性? 椭圆上哪些点比较特殊?

1. 范围

思考

观察图 3.1-7, 容易看出椭圆上的点都在一个特定的矩形内, 你能利用方程 (代数方法) 确定出它的具体边界吗?

由方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 可知

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \geq 0,$$

所以, 椭圆上点的横坐标都适合不等式

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} &\leq 1, \\ -a &\leq x \leq a. \end{aligned}$$

即

同理有

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} &\leq 1, \\ -b &\leq y \leq b. \end{aligned}$$

即

这说明椭圆位于直线 $x = \pm a$ 和 $y = \pm b$ 围成的矩形框里 (图 3.1-7).

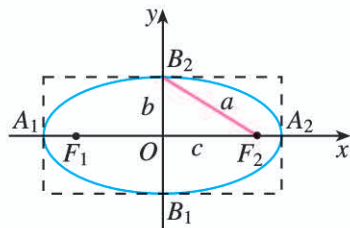


图 3.1-7

用代数方法研究曲线的范围, 就是利用方程确定曲线上点的横、纵坐标的取值范围.

2. 对称性

探究

观察椭圆的形状, 可以发现椭圆既是轴对称图形, 又是中心对称图形. 如何利用方程说明椭圆的对称性?

在椭圆的标准方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 中, 以 $-y$ 代 y , 方程不变. 这说明当点

$P(x, y)$ 在椭圆上时, 它关于 x 轴的对称点 $P_1(x, -y)$ 也在椭圆上, 所以椭圆关于 x 轴对称. 同理, 以 $-x$ 代 x , 方程也不变, 这说明如果点 $P(x, y)$ 在椭圆上, 那么它关于 y 轴的对称点 $P_2(-x, y)$ 也在椭圆上, 所以椭圆关于 y 轴对称. 以 $-x$ 代 x , 以 $-y$ 代 y ,

方程也不变,这说明当点 $P(x, y)$ 在椭圆上时,它关于原点的对称点 $P_3(-x, -y)$ 也在椭圆上,所以椭圆关于原点对称.

综上,椭圆关于 x 轴、 y 轴都是对称的.这时,坐标轴是椭圆的对称轴,原点是椭圆的对称中心,椭圆的对称中心叫做**椭圆的中心**.

3. 顶点

研究曲线上某些特殊点的位置,可以确定曲线的位置.

思考

你认为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 上哪些点比较特殊?为什么?如何得到这些点的坐标?

在椭圆的标准方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 中,令 $x=0$,得 $y=\pm b$. 因此 $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ 是椭圆与 y 轴的两个交点.同理,令 $y=0$,得 $x=\pm a$. 因此 $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ 是椭圆与 x 轴的两个交点.因为 x 轴、 y 轴是椭圆的对称轴,所以椭圆与它的对称轴有四个交点,这四个交点叫做**椭圆的顶点** (图 3.1-8).

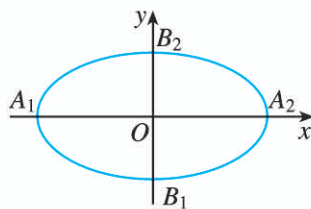


图 3.1-8

线段 A_1A_2 , B_1B_2 分别叫做**椭圆的长轴**和**短轴**,它们的长分别等于 $2a$ 和 $2b$, a 和 b 分别叫做椭圆的长半轴长和短半轴长.

4. 离心率

思考

观察图 3.1-9,我们发现,不同形状的椭圆的扁平程度不同,相同形状的椭圆的扁平程度相同.扁平程度是椭圆的重要形状特征,你能用适当的量定量刻画椭圆的扁平程度吗?

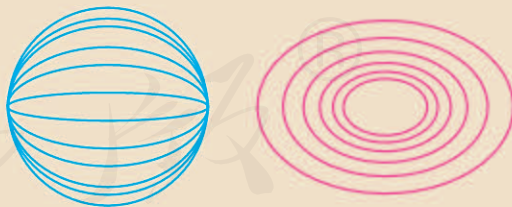


图 3.1-9

如图 3.1-10,椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的长半轴长为 a ,半焦距为 c .利用信息技术,保持长半轴长 a 不变,改变椭圆的半焦距 c ,可以发现, c 越接近 a ,椭圆越扁平.类似地,保持 c 不变,改变 a 的大小,则 a 越接近 c ,椭圆越扁平;而当 a, c 扩大或缩小相同倍数时,椭圆的形状不变.

这样,利用 c 和 a 这两个量,可以刻画椭圆的扁平程度.

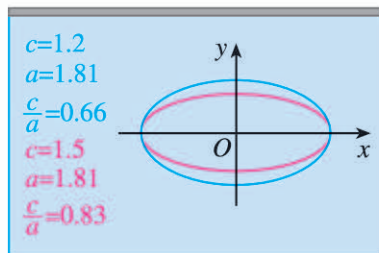


图 3.1-10

我们把椭圆的焦距与长轴长的比 $\frac{c}{a}$ 称为椭圆的**离心率**^①,

用 e 表示,即 $e=\frac{c}{a}$.

因为 $a>c>0$,所以 $0<e<1$. e 越接近1, c 越接近 a , $b=\sqrt{a^2-c^2}$ 就越小,因此椭圆越扁平;反之, e 越接近0, c 越接近0, b 越接近 a ,这时椭圆就越接近于圆.

当且仅当 $a=b$ 时, $c=0$,这时两个焦点重合,图形变为圆,它的方程为

$$x^2+y^2=a^2.$$

你能运用三角函数的知识解释,为什么 $e=\frac{c}{a}$ 越大,椭圆越扁平? $e=\frac{c}{a}$ 越小,椭圆越接近于圆吗?

例4 求椭圆 $16x^2+25y^2=400$ 的长轴和短轴的长、离心率、焦点和顶点的坐标.

解: 把原方程化成标准方程,得

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1,$$

于是 $a=5$, $b=4$, $c=\sqrt{25-16}=3$.

因此,椭圆的长轴和短轴的长分别是 $2a=10$ 和 $2b=8$,离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$,两个焦点坐标分别是 $F_1(-3, 0)$ 和 $F_2(3, 0)$,四个顶点坐标分别是 $A_1(-5, 0)$, $A_2(5, 0)$, $B_1(0, -4)$ 和 $B_2(0, 4)$.

练习

1. 你能用圆规作出图中椭圆焦点的位置吗? 你的依据是什么?

2. 求下列椭圆的焦点坐标:

(1) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$;

(2) $2x^2+y^2=8$.

3. 求适合下列条件的椭圆的标准方程:

(1) 焦点在 x 轴上, $a=6$, $e=\frac{1}{3}$; (2) 焦点在 y 轴上, $c=3$, $e=\frac{3}{5}$.

(第1题)

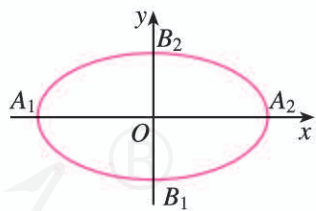
4. 求适合下列条件的椭圆的标准方程:

(1) 经过 $P(-3, 0)$, $Q(0, -2)$ 两点; (2) 长轴长等于20, 离心率等于 $\frac{3}{5}$.

5. 比较下列每组中椭圆的形状, 哪一个更接近于圆? 为什么?

(1) $9x^2+y^2=36$ 与 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$;

(2) $x^2+9y^2=36$ 与 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{10}=1$.



① 随着学习的深入你将体会到, 虽然 $\frac{b}{a}$ 也能刻画椭圆的扁平程度, 但 $\frac{c}{a}$ 中 a, c 是确定圆锥曲线的基本量, 不仅能有效刻画两个焦点离开中心的程度, 而且还蕴含着圆锥曲线几何特征的统一性.

例 5 如图 3.1-11, 一种电影放映灯的反射镜面是旋转椭圆面(椭圆绕其对称轴旋转一周形成的曲面)的一部分. 过对称轴的截面 BAC 是椭圆的一部分, 灯丝位于椭圆的一个焦点 F_1 上, 片门位于另一个焦点 F_2 上. 由椭圆一个焦点 F_1 发出的光线, 经过旋转椭圆面反射后集中到另一个焦点 F_2 . 已知 $BC \perp F_1F_2$, $|F_1B| = 2.8 \text{ cm}$, $|F_1F_2| = 4.5 \text{ cm}$. 试建立适当的平面直角坐标系, 求截面 BAC 所在椭圆的方程(精确到 0.1 cm).

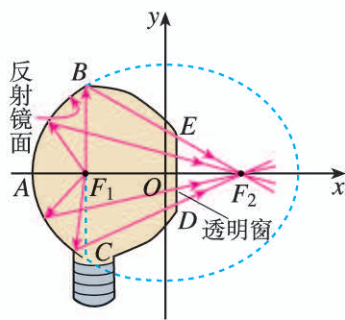


图 3.1-11

解: 建立如图 3.1-11 所示的平面直角坐标系, 设所求椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0).$$

在 $\text{Rt}\triangle BF_1F_2$ 中,

$$|F_2B| = \sqrt{|F_1B|^2 + |F_1F_2|^2} = \sqrt{2.8^2 + 4.5^2}.$$

由椭圆的性质知, $|F_1B| + |F_2B| = 2a$, 所以

$$a = \frac{1}{2}(|F_1B| + |F_2B|) = \frac{1}{2}(2.8 + \sqrt{2.8^2 + 4.5^2}) \approx 4.1;$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4.1^2 - 2.25^2} \approx 3.4.$$

所以, 所求的椭圆方程为

$$\frac{x^2}{4.1^2} + \frac{y^2}{3.4^2} = 1.$$

例 6 动点 $M(x, y)$ 与定点 $F(4, 0)$ 的距离和 M 到定直线 $l: x = \frac{25}{4}$ 的距离的比是常数 $\frac{4}{5}$, 求动点 M 的轨迹.

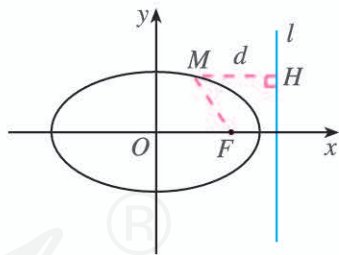


图 3.1-12

解: 如图 3.1-12, 设 d 是点 M 到直线 $l: x = \frac{25}{4}$ 的距离, 根据题意, 动点 M 的轨迹就是集合

$$P = \left\{ M \mid \frac{|MF|}{d} = \frac{4}{5} \right\}.$$

由此得

$$\frac{\sqrt{(x-4)^2 + y^2}}{\left| \frac{25}{4} - x \right|} = \frac{4}{5}.$$

将上式两边平方, 并化简, 得

$$9x^2 + 25y^2 = 225,$$

即

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

所以, 点 M 的轨迹是长轴、短轴长分别为 10, 6 的椭圆.

例 7 如图 3.1-13, 已知直线 $l: 4x - 5y + m = 0$ 和椭圆 $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. m 为何值时, 直线 l 与椭圆 C : (1) 有两个公共点? (2) 有且只有一个公共点? (3) 没有公共点?

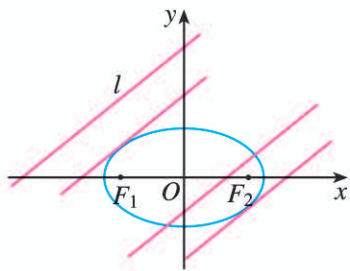


图 3.1-13

分析: 直线 l 与椭圆 C 的公共点的个数与方程组

$$\begin{cases} 4x - 5y + m = 0, \\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$$

解的个数相对应. 所以, 我们可以通过判断上述方程组解的情况得到问题的解答.

解: 由方程组

$$\begin{cases} 4x - 5y + m = 0, \\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$$

消去 y , 得

$$25x^2 + 8mx + m^2 - 225 = 0. \quad \text{①}$$

方程①的根的判别式

$$\Delta = 64m^2 - 4 \times 25 \times (m^2 - 225) = 36 \times (25^2 - m^2).$$

由 $\Delta > 0$, 得 $-25 < m < 25$. 此时方程①有两个不相等的实数根, 直线 l 与椭圆 C 有两个不同的公共点.

由 $\Delta = 0$, 得 $m_1 = 25$, $m_2 = -25$. 此时方程①有两个相等的实数根, 直线 l 与椭圆 C 有且只有一个公共点.

由 $\Delta < 0$, 得 $m < -25$, 或 $m > 25$. 此时方程①没有实数根, 直线 l 与椭圆 C 没有公共点.

练习

1. 求下列直线与椭圆的交点坐标:

$$(1) 3x + 10y - 25 = 0, \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1; \quad (2) 3x - y + 2 = 0, \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

2. 经过椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的左焦点 F_1 作倾斜角为 60° 的直线 l , 直线 l 与椭圆相交于 A, B 两点, 求线段 AB 的长.

习题 3.1



复习巩固

1. 如果点 $M(x, y)$ 在运动过程中, 总满足关系式

$$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} + \sqrt{x^2 + (y+3)^2} = 10,$$

那么点 M 的轨迹是什么曲线? 为什么? 写出它的方程.

2. 写出适合下列条件的椭圆的标准方程:

(1) 焦点坐标分别为 $(0, -4)$, $(0, 4)$, $a=5$;

(2) $a+c=10$, $a-c=4$.

3. 求下列椭圆的长轴和短轴长、离心率、焦点坐标、顶点坐标, 并画出图形:

(1) $x^2 + 4y^2 = 16$; (2) $9x^2 + y^2 = 81$.

4. 求适合下列条件的椭圆的标准方程:

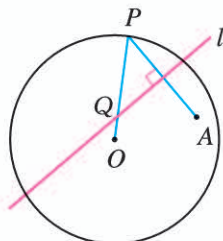
(1) 经过 $P(-2\sqrt{2}, 0)$, $Q(0, \sqrt{5})$ 两点;

(2) 长轴长是短轴长的 3 倍, 且经过点 $P(3, 0)$;

(3) 焦距是 8, 离心率等于 0.8.

5. 已知 P 是椭圆 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上的一点, 且以点 P 及焦点 F_1, F_2 为顶点的三角形的面积等于 1, 求点 P 的坐标.

6. 如图, 圆 O 的半径为定长 r , A 是圆 O 内一个定点, P 是圆 O 上任意一点. 线段 AP 的垂直平分线 l 和半径 OP 相交于点 Q , 当点 P 在圆上运动时, 点 Q 的轨迹是什么? 为什么?



(第 6 题)

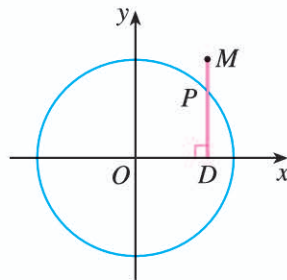
7. 彗星“紫金山一号”是南京紫金山天文台发现的, 它的运行轨道是以太阳为一个焦点的椭圆. 测得轨道的近日点 (距离太阳最近的点) 距太阳中心 1.486 天文单位, 远日点 (距离太阳最远的点) 距太阳中心 5.563 天文单位 (1 天文单位是太阳到地球的平均距离, 约 1.5×10^8 km), 且近日点、远日点及太阳中心在同一条直线上, 求轨道的方程.

8. 点 M 与定点 $F(2, 0)$ 的距离和它到定直线 $x=8$ 的距离的比是 $1:2$, 求点 M 的轨迹方程, 并说明轨迹是什么图形.



综合运用

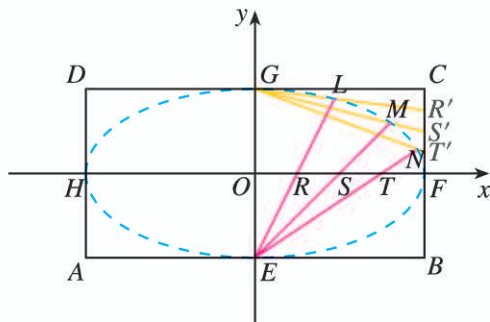
9. 如图, $DP \perp x$ 轴, 垂足为 D , 点 M 在 DP 的延长线上, 且 $\frac{|DM|}{|DP|} = \frac{3}{2}$. 当点 P 在圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上运动时, 求点 M 的轨迹方程, 并说明轨迹的形状.



(第 9 题)

10. 一动圆与圆 $x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0$ 外切, 同时与圆 $x^2 + y^2 - 6x - 91 = 0$ 内切, 求动圆圆心的轨迹方程, 并说明它是什么曲线.

11. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $|AB|=2a$, $|BC|=2b$ ($a>b>0$). E, F, G, H 分别是矩形四条边的中点, R, S, T 是线段 OF 的四等分点, R', S', T' 是线段 CF 的四等分点. 证明直线 ER 与 GR' 、 ES 与 GS' 、 ET 与 GT' 的交点 L, M, N 都在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a>b>0$) 上.



(第 11 题)

12. 已知地球运行的轨道是长半轴长 $a=1.50 \times 10^8$ km, 离心率 $e=0.0192$ 的椭圆, 且太阳在这个椭圆的一个焦点上, 求地球到太阳的最大和最小距离.

拓展探索

13. 已知椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, 直线 $l: 4x - 5y + 40 = 0$. 椭圆上是否存在一点, 使得:
- (1) 它到直线 l 的距离最小? 最小距离是多少?
 - (2) 它到直线 l 的距离最大? 最大距离是多少?
14. 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, 一组平行直线的斜率是 $\frac{3}{2}$.
- (1) 这组直线何时与椭圆有两个公共点?
 - (2) 当它们与椭圆有两个公共点时, 证明这些直线被椭圆截得的线段的中点在同一条直线上.

信息技术应用

用信息技术探究点的轨迹：椭圆

如图 1, F 是定点, l 是不经过点 F 的定直线, 动点 M 与定点 F 的距离和 M 到定直线 l 的距离的比 e 是小于 1 的常数. 用信息技术软件 (如《GeoGebra》) 画出动点 M 的轨迹, 观察这个轨迹, 可以发现它是一个椭圆.

在 $0 < e < 1$ 的范围内, 改变 e 的大小, 或改变点 F 与直线 l 的相对位置, 可以发现动点 M 的轨迹仍然是一个椭圆.

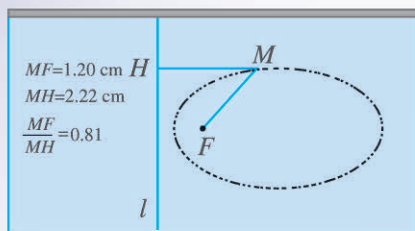


图 1

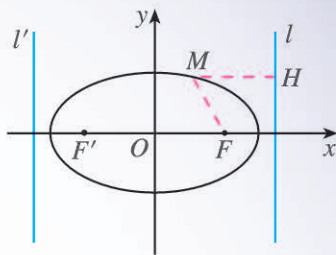


图 2

在平面直角坐标系中，我们可以把上述问题叙述为：

若点 $M(x, y)$ 与定点 $F(c, 0)$ (或 $F'(-c, 0)$) 的距离和它到定直线 $l: x = \frac{a^2}{c}$ (或 $l': x = -\frac{a^2}{c}$) 的距离的比是常数 $\frac{c}{a}$ ($0 < c < a$)，则点 M 的轨迹是一个椭圆 (图 2)，这是从另一个角度给出了椭圆的定义. 这里定点 $F(c, 0)$ 是椭圆的一个焦点，直线 $l: x = \frac{a^2}{c}$ 称为相应于焦点 F 的准线；定点 $F'(-c, 0)$ 是椭圆的另一个焦点，直线 $l': x = -\frac{a^2}{c}$ 称为相应于焦点 F' 的准线.

在推导椭圆标准方程时，我们曾得到

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \quad ①$$

如果把①式变形为

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{\frac{a^2}{c} - x} = \frac{c}{a}, \quad ②$$

则②式的几何意义就是动点 $M(x, y)$ 与定点 $F(c, 0)$ 的距离和动点 M 到定直线 $l: x = \frac{a^2}{c}$ 的距离的比是常数 $\frac{c}{a}$.

思考：在推导椭圆标准方程时作怎样的变形就可以得到点 $M(x, y)$ 与定点 $F(-c, 0)$ 的距离和动点 M 到定直线 $l': x = -\frac{a^2}{c}$ 的距离的比是常数 $\frac{c}{a}$?

对上述过程你有什么体会？

3.2 双曲线

双曲线也是具有广泛应用的一种圆锥曲线，如发电厂冷却塔的外形、通过声音时差测定位等都要用到双曲线的性质. 本节我们将类比椭圆的研究方法研究双曲线的有关问题.

3.2.1 双曲线及其标准方程

我们知道，平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离的和等于常数（大于 $|F_1F_2|$ ）的点的轨迹是椭圆. 一个自然的问题是：平面内与两个定点的距离的差等于常数的点的轨迹是什么？下面我们先利用信息技术探究一下.

探究

如图 3.2-1，在直线 l 上取两个定点 A, B ， P 是直线 l 上的动点. 在平面内，取定点 F_1, F_2 ，以点 F_1 为圆心、线段 PA 为半径作圆，再以 F_2 为圆心、线段 PB 为半径作圆.

我们知道，当点 P 在线段 AB 上运动时，如果 $||PA|-|PB|| < |F_1F_2| < |AB|$ ，那么两圆相交，其交点的轨迹是椭圆.

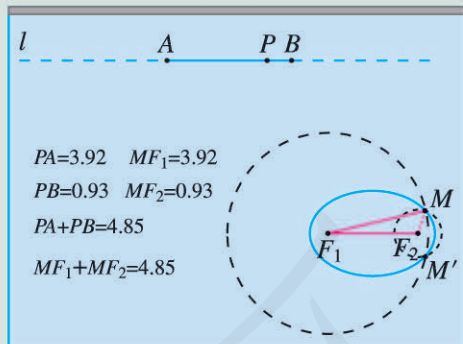


图 3.2-1

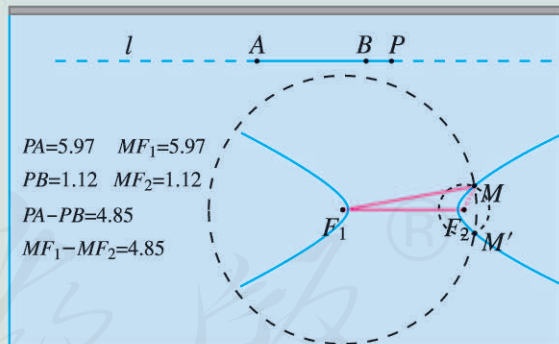


图 3.2-2

如图 3.2-2，在 $|AB| < |F_1F_2| < |PA| + |PB|$ 的条件下，让点 P 在线段 AB 外运动，这时动点 M 满足什么几何条件？两圆交点的轨迹是什么形状？

我们发现，在 $|AB| < |F_1F_2| < |PA| + |PB|$ 的条件下，点 P 在线段 AB 外运动时，当点 M 靠近定点 F_1 时， $|MF_2| - |MF_1| = |AB|$ ；当点 M 靠近定点 F_2 时， $|MF_1| - |MF_2| = |AB|$. 总之，点 M 与两个定点 F_1, F_2 距离的差的绝对值 $|AB|$ 是一个常数 ($|AB| < |F_1F_2|$). 这时，两圆交点的轨迹是不同于椭圆的曲线，它分左右两支.

一般地, 我们把平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离的差的绝对值等于非零常数 (小于 $|F_1F_2|$) 的点的轨迹叫做**双曲线** (hyperbola). 这两个定点叫做双曲线的**焦点**, 两焦点间的距离叫做双曲线的**焦距**.

探究

类比求椭圆标准方程的过程, 我们如何建立适当的坐标系, 得出双曲线的方程?

观察我们画出的双曲线, 发现它也具有对称性, 而且直线 F_1F_2 是它的一条对称轴, 所以我们取经过两焦点 F_1 和 F_2 的直线为 x 轴, 线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴, 建立如图 3.2-3 所示的平面直角坐标系 Oxy . 设 $M(x, y)$ 是双曲线上任意一点, 双曲线的焦距为 $2c(c>0)$, 那么, 焦点 F_1, F_2 的坐标分别是 $(-c, 0), (c, 0)$, 又设 $||MF_1| - |MF_2|| = 2a$ (a 为大于 0 的常数, $a < c$).

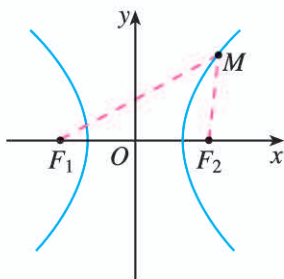


图 3.2-3

由双曲线的定义, 双曲线就是下列点的集合:

$$P = \{M \mid ||MF_1| - |MF_2|| = 2a, 0 < 2a < |F_1F_2|\}.$$

因为

$$|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$|MF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

所以

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \quad ①$$

类比椭圆标准方程的化简过程, 化简①, 得

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2),$$

两边同除以 $a^2(c^2 - a^2)$, 得

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

由双曲线的定义知, $2c > 2a$, 即 $c > a$, 所以 $c^2 - a^2 > 0$.

类比椭圆标准方程的建立过程, 令 $b^2 = c^2 - a^2$, 其中 $b > 0$, 代入上式, 得

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0). \quad ②$$

你能在 y 轴上找一点 B , 使得 $|OB| = b$ 吗?

从上述过程可以看到, 双曲线上任意一点的坐标 (x, y) 都是方程②的解; 以方程②的解为坐标的点 (x, y) 与双曲线的两个焦点 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ 的距离之差的绝对值都为 $2a$, 即以方程②的解为坐标的点都在双曲线上. 我们称方程②是双曲线的方程, 这个方程叫做**双曲线的标准方程**. 它表示焦点在 x 轴上, 焦点分别是 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ 的双曲线, 这里 $c^2 = a^2 + b^2$.

思考

类比焦点在 y 轴上的椭圆标准方程，焦点在 y 轴上的双曲线的标准方程是什么？

如图 3.2-4，双曲线的焦距为 $2c$ ，焦点分别是 $F_1(0, -c)$ ， $F_2(0, c)$ ， a, b 的意义同上，这时双曲线的方程是

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0),$$

这个方程也是双曲线的标准方程。

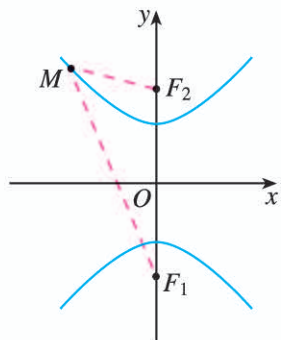


图 3.2-4

例 1 已知双曲线的两个焦点分别为 $F_1(-5, 0)$ ， $F_2(5, 0)$ ，双曲线上一点 P 与 F_1, F_2 的距离差的绝对值等于 6，求双曲线的标准方程。

解：因为双曲线的焦点在 x 轴上，所以设它的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0).$$

由 $2c=10$ ， $2a=6$ ，得 $c=5$ ，又 $a=3$ ，因此 $b^2=5^2-3^2=16$ 。

所以，双曲线的标准方程为

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

例 2 已知 A, B 两地相距 800 m，在 A 地听到炮弹爆炸声比在 B 地晚 2 s，且声速为 340 m/s，求炮弹爆炸点的轨迹方程。

分析：先根据题意判断轨迹的形状。由声速及 A, B 两处听到炮弹爆炸声的时间差，可知 A, B 两处与爆炸点的距离的差为定值，所以爆炸点在以 A, B 为焦点的双曲线上。因为爆炸点离 A 处比离 B 处远，所以爆炸点应在靠近 B 处的双曲线的一支上。

解：如图 3.2-5，建立平面直角坐标系 Oxy ，使 A, B 两点在 x 轴上，并且原点 O 与线段 AB 的中点重合。

设炮弹爆炸点 P 的坐标为 (x, y) ，则

$$|PA| - |PB| = 340 \times 2 = 680,$$

即 $2a=680$ ， $a=340$ 。

又 $|AB|=800$ ，所以 $2c=800$ ， $c=400$ ， $b^2=c^2-a^2=44\,400$ 。

因为 $|PA| - |PB| = 680 > 0$ ，所以点 P 的轨迹是双曲线的右支，因此 $x \geq 340$ 。

所以，炮弹爆炸点的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{115\,600} - \frac{y^2}{44\,400} = 1 \quad (x \geq 340).$$

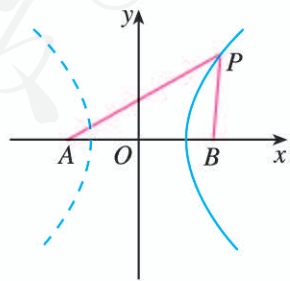


图 3.2-5

利用两个不同的观测点 A, B 测得同一点 P 发出信号的时间差, 可以确定点 P 所在双曲线的方程. 如果再增设一个观测点 C , 利用 B, C (或 A, C) 两处测得的点 P 发出信号的时间差, 就可以确定点 P 所在另一双曲线的方程. 解这两个方程组成的方程组, 就能确定点 P 的准确位置, 这是双曲线的一个重要应用.

探究

如图 3.2-6, 点 A, B 的坐标分别是 $(-5, 0), (5, 0)$, 直线 AM, BM 相交于点 M , 且它们的斜率之积是 $\frac{4}{9}$, 试求点 M 的轨迹方程, 并由点 M 的轨迹方程判断轨迹的形状, 与 3.1 例 3 比较, 你有什么发现?

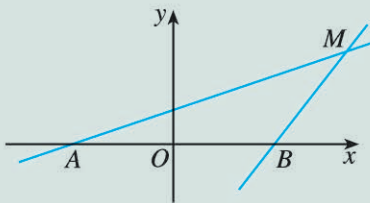


图 3.2-6

练习

- 求适合下列条件的双曲线的标准方程:
 - 焦点在 x 轴上, $a=4, b=3$;
 - 焦点在 x 轴上, 经过点 $(-\sqrt{2}, -\sqrt{3}), (\frac{\sqrt{15}}{3}, \sqrt{2})$;
 - 焦点为 $(0, -6), (0, 6)$, 且经过点 $(2, -5)$.
- 求证: 双曲线 $x^2 - 15y^2 = 15$ 与椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的焦点相同.
- 已知方程 $\frac{x^2}{2+m} - \frac{y^2}{m+1} = 1$ 表示双曲线, 求 m 的取值范围.
- 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{12} = 1$ ($a > 0$) 的两个焦点分别是 F_1 与 F_2 , 焦距为 8; M 是双曲线上的一点, 且 $|MF_1| = 5$, 求 $|MF_2|$ 的值.

3.2.2 双曲线的简单几何性质

思考

类比对椭圆几何性质的研究, 你认为应该研究双曲线

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0) \quad ①$$

的哪些几何性质? 如何研究这些性质?

1. 范围

类比研究椭圆范围的方法, 观察双曲线, 我们发现双曲线上点的横坐标的范围是 $x \leq -a$, 或 $x \geq a$, 纵坐标的范围是 $y \in \mathbf{R}$ (图 3.2-7).

下面利用双曲线的方程求出它的范围.

由方程①可得

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1,$$

于是, 双曲线上点的坐标 (x, y) 都适合不等式 $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$, $y \in \mathbf{R}$, 即

$$x^2 \geq a^2, y \in \mathbf{R}.$$

所以 $x \leq -a$, 或 $x \geq a$; $y \in \mathbf{R}$.

这说明双曲线位于直线 $x = -a$ 及其左侧和直线 $x = a$ 及其右侧的区域.

2. 对称性

类比研究椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 对称性的方法, 容易得到, 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 关于 x 轴、 y 轴和原点都是对称的. 这时, 坐标轴是双曲线的对称轴, 原点是双曲线的对称中心. 双曲线的对称中心叫做**双曲线的中心**.

3. 顶点

类比求椭圆顶点的方法, 在方程①中, 令 $y = 0$, 得 $x = \pm a$, 因此双曲线和 x 轴有两个交点 $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$. 因为 x 轴是双曲线的对称轴, 所以双曲线和它的对称轴有两个交点, 它们叫做**双曲线的顶点**.

令 $x = 0$, 得 $y^2 = -b^2$, 这个方程没有实数解, 说明双曲线和 y 轴没有公共点, 但我们也把 $B_1(0, -b)$, $B_2(0, b)$ 两点画在 y 轴上 (图 3.2-8).

线段 A_1A_2 叫做**双曲线的实轴**, 它的长等于 $2a$, a 叫做双曲线的实半轴长; 线段 B_1B_2 叫做**双曲线的虚轴**, 它的长等于 $2b$, b 叫做双曲线的虚半轴长.

4. 渐近线

探究

利用信息技术画出双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ 和两条直线 $\frac{x}{3} \pm \frac{y}{2} = 0$ (图 3.2-9). 在双曲线

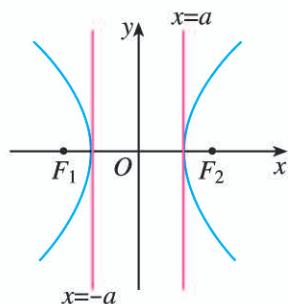


图 3.2-7

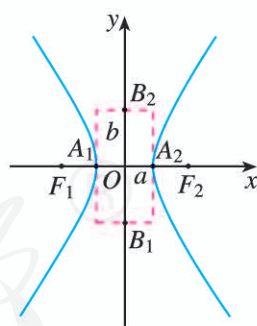


图 3.2-8

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的右支上取一点 M ，测量点 M 的横坐标 x_M 以及它到直线 $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 0$ 的距离 d 。沿曲线向右上方拖动点 M ，观察 x_M 与 d 的大小关系，你发现了什么？

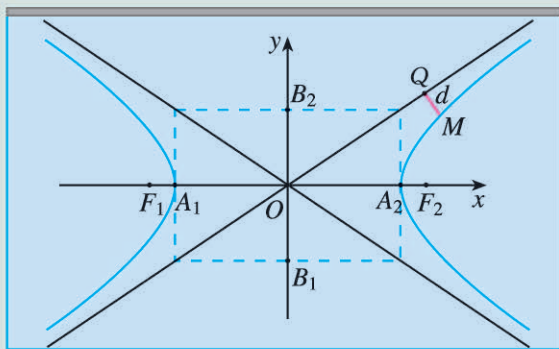


图 3.2-9

可以发现，点 M 的横坐标 x_M 越来越大， d 越来越小，但是 d 始终不等于 0。

实际上，经过两点 A_1, A_2 作 y 轴的平行线 $x = \pm 3$ ，经过两点 B_1, B_2 作 x 轴的平行线 $y = \pm 2$ ，四条直线围成一个矩形（图 3.2-9），矩形的两条对角线所在直线的方程是 $\frac{x}{3} \pm \frac{y}{2} = 0$ 。可以发现，双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ 的两支向外延伸时，与两条直线 $\frac{x}{3} \pm \frac{y}{2} = 0$ 逐渐接近，但永远不相交。

一般地，双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的两支向外延伸时，与两条直线 $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ 逐渐接近，我们把这两条直线叫做**双曲线的渐近线**。实际上，双曲线与它的渐近线无限接近，但永远不相交。

在双曲线方程 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 中，如果 $a = b$ ，那么方程变为 $x^2 - y^2 = a^2$ ，此时双曲线的实轴和虚轴的长都等于 $2a$ 。这时，四条直线 $x = \pm a, y = \pm a$ 围成正方形，渐近线方程为 $y = \pm x$ ，它们互相垂直，并且平分双曲线的实轴和虚轴所成的角。实轴和虚轴等长的双曲线叫做**等轴双曲线**。

5. 离心率

与椭圆类似，双曲线的焦距与实轴长的比 $\frac{c}{a}$ ，叫做**双曲线的离心率**。因为 $c > a > 0$ ，所以双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a} > 1$ 。

思考

椭圆的离心率刻画了椭圆的扁平程度，双曲线的离心率刻画双曲线的什么几何特征？

用双曲线渐近线的斜率能刻画双曲线的“张口”大小吗？它与用离心率刻画“张口”大小有什么联系和区别？

双曲线的离心率刻画了双曲线的“张口”大小.

例 3 求双曲线 $9y^2 - 16x^2 = 144$ 的实半轴长和虚半轴长、焦点坐标、离心率、渐近线方程.

解: 把双曲线的方程 $9y^2 - 16x^2 = 144$ 化为标准方程

$$\frac{y^2}{4^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1.$$

由此可知, 实半轴长 $a=4$, 虚半轴长 $b=3$; $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$, 焦点坐标是 $(0, -5), (0, 5)$; 离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$; 渐近线方程为 $y=\pm\frac{4}{3}x$.

练习

1. 求下列双曲线的实轴和虚轴的长、顶点和焦点的坐标以及离心率:

(1) $x^2 - 8y^2 = 32$; (2) $9x^2 - y^2 = 81$;

(3) $x^2 - y^2 = -4$; (4) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = -1$.

2. 求符合下列条件的双曲线的标准方程:

(1) 顶点在 x 轴上, 两顶点间的距离是 8, $e=\frac{5}{4}$;

(2) 焦点在 y 轴上, 焦距是 16, $e=\frac{4}{3}$.

3. 对称轴都在坐标轴上的等轴双曲线的一个焦点是 $F_1(-6, 0)$, 求双曲线的标准方程和渐近线方程.

4. 双曲线的渐近线方程是 $y=\pm 2x$, 虚轴长为 4, 求双曲线的标准方程.

例 4 双曲线型冷却塔的外形, 是双曲线的一部分绕其虚轴旋转所成的曲面 (图 3.2-10 (1)). 它的最小半径为 12 m, 上口半径为 13 m, 下口半径为 25 m, 高为 55 m. 试建立适当的坐标系, 求出此双曲线的方程 (精确到 1 m).

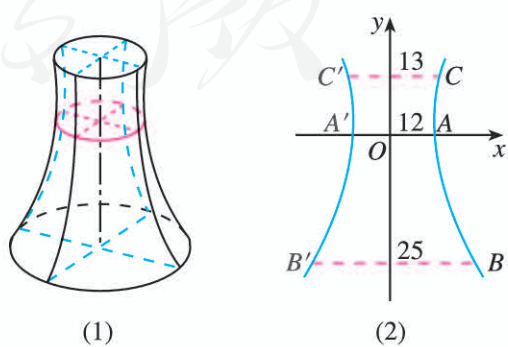


图 3.2-10

解: 根据双曲线的对称性, 在冷却塔的轴截面所在平面建立如图 3.2-10 (2) 所示的直角坐标系 Oxy , 使小圆的直径 AA' 在 x 轴上, 圆心与原点重合. 这时, 上、下口的直

径 CC' , BB' 都平行于 x 轴, 且 $|CC'| = 13 \times 2$, $|BB'| = 25 \times 2$.

设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$), 点 C 的坐标为 $(13, y)$, 则点 B 的坐标为 $(25, y-55)$.

因为直径 AA' 是实轴, 所以 $a = 12$. 又 B, C 两点都在双曲线上, 所以

$$\begin{cases} \frac{25^2}{12^2} - \frac{(y-55)^2}{b^2} = 1, \\ \frac{13^2}{12^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \end{cases} \quad \text{①}$$

$$\frac{13^2}{12^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad \text{②}$$

由方程②, 得 $y = \frac{5b}{12}$ (负值舍去). 代入方程①, 得

$$\frac{25^2}{12^2} - \frac{\left(\frac{5b}{12} - 55\right)^2}{b^2} = 1.$$

化简得

$$19b^2 + 275b - 18\,150 = 0. \quad \text{③}$$

解方程③, 得

$$b \approx 25 \text{ (负值舍去).}$$

因此所求双曲线的方程为

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{625} = 1.$$

例 5 动点 $M(x, y)$ 与定点 $F(4, 0)$ 的距离和它到定直线 $l: x = \frac{9}{4}$ 的距离的比是常数 $\frac{4}{3}$, 求动点 M 的轨迹.

解: 设 d 是点 M 到直线 l 的距离, 根据题意, 动点 M 的轨迹就是点的集合

$$P = \left\{ M \mid \frac{|MF|}{d} = \frac{4}{3} \right\},$$

由此得

$$\frac{\sqrt{(x-4)^2 + y^2}}{\left| x - \frac{9}{4} \right|} = \frac{4}{3}.$$

将上式两边平方, 并化简, 得

$$7x^2 - 9y^2 = 63,$$

即

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1.$$

所以, 点 M 的轨迹是焦点在 x 轴上, 实轴长为 6、虚轴长为 $2\sqrt{7}$ 的双曲线 (图 3.2-11).

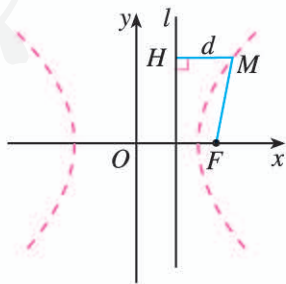


图 3.2-11

思考

将例 5 与椭圆一节中的例 6 比较,你有什么发现?

例 6 如图 3.2-12, 过双曲线 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$ 的右焦点 F_2 , 倾斜角为 30° 的直线交双曲线于 A, B 两点, 求 $|AB|$.

解: 由双曲线的标准方程可知, 双曲线的焦点分别为 $F_1(-3, 0), F_2(3, 0)$.

因为直线 AB 的倾斜角是 30° , 且经过右焦点 F_2 , 所以直线 AB 的方程为

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-3). \quad ①$$

由 $\begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-3), \\ \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1 \end{cases}$ 消去 y , 得

$$5x^2 + 6x - 27 = 0.$$

解方程, 得

$$x_1 = -3, x_2 = \frac{9}{5}.$$

将 x_1, x_2 的值分别代入①, 得

$$y_1 = -2\sqrt{3}, y_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

于是, A, B 两点的坐标分别为 $(-3, -2\sqrt{3}), (\frac{9}{5}, -\frac{2\sqrt{3}}{5})$.

所以

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{\left(-3 - \frac{9}{5}\right)^2 + \left(-2\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2} \\ &= \frac{16\sqrt{3}}{5}. \end{aligned}$$

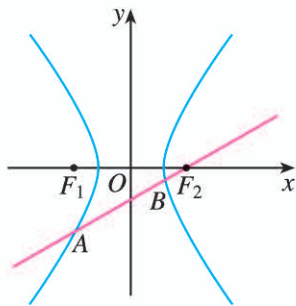


图 3.2-12

练习

1. 已知 A, B 两点的坐标分别是 $(-6, 0), (6, 0)$, 直线 AM, BM 相交于点 M , 且它们的斜率之积是 $\frac{2}{9}$. 求点 M 的轨迹方程, 并判断轨迹的形状.

2. 求下列直线和双曲线的交点坐标:

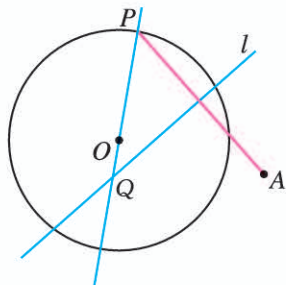
$$(1) 2x - y - 10 = 0, \quad \frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1; \quad (2) 4x - 3y - 16 = 0, \quad \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

3. 直线 $y = \frac{2}{3}x$ 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{8} = 1$ ($a > 0$) 相交于 A, B 两点, 且 A, B 两点的横坐标之积为 -9 , 求离心率 e .

习题 3.2

复习巩固

- 双曲线 $4x^2 - y^2 + 64 = 0$ 上一点 P 与它的一个焦点的距离等于 1, 那么点 P 与另一个焦点的距离等于_____.
- 求适合下列条件的双曲线的标准方程:
 - 焦点在 x 轴上, $a = 2\sqrt{5}$, 经过点 $A(-5, 2)$;
 - 经过 $A(-7, -6\sqrt{2})$, $B(2\sqrt{7}, 3)$ 两点.
- 已知下列双曲线的方程, 求它的焦点坐标、离心率和渐近线方程:
 - $16x^2 - 9y^2 = 144$;
 - $16x^2 - 9y^2 = -144$.
- 求适合下列条件的双曲线的标准方程:
 - 焦点在 x 轴上, 实轴长是 10, 虚轴长是 8;
 - 焦点在 y 轴上, 焦距是 10, 虚轴长是 8;
 - 离心率 $e = \sqrt{2}$, 经过点 $M(-5, 3)$.
- 如图, 圆 O 的半径为定长 r , A 是圆 O 外一个定点, P 是圆 O 上任意一点. 线段 AP 的垂直平分线 l 与直线 OP 相交于点 Q , 当点 P 在圆 O 上运动时, 点 Q 的轨迹是什么? 为什么?
- 求经过点 $A(3, -1)$, 并且对称轴都在坐标轴上的等轴双曲线的标准方程.



(第 5 题)

综合运用

- m, n 为何值时, 方程 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} = 1$ 表示下列曲线:
 - 圆;
 - 椭圆;
 - 双曲线?
- 求与椭圆 $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$ 有公共焦点, 且离心率 $e = \frac{5}{4}$ 的双曲线的方程.
- 相距 1 400 m 的 A, B 两个哨所, 听到炮弹爆炸声的时间相差 3 s, 已知声速是 340 m/s, 问炮弹爆炸点在怎样的曲线上, 并求出曲线的方程.
- 设动点 M 与定点 $F(c, 0)$ ($c > 0$) 的距离和 M 到定直线 $l: x = \frac{a^2}{c}$ 的距离的比是 $\frac{c}{a}$ ($a < c$), 求动点 M 的轨迹方程, 并说明轨迹的形状.

11. M 是一个动点, MA 与直线 $y=x$ 垂直, 垂足 A 位于第一象限, MB 与直线 $y=-x$ 垂直, 垂足 B 位于第四象限. 若四边形 $OAMB$ (O 为原点) 的面积为 3, 求动点 M 的轨迹方程.
12. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率分别为 e_1, e_2 , 双曲线的渐近线的斜率小于 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 求 e_1 和 e_2 的取值范围.

拓广探索

13. 已知双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$, 过点 $P(1, 1)$ 的直线 l 与双曲线相交于 A, B 两点, P 能否是线段 AB 的中点? 为什么?
14. 已知双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ 与直线 $l: y = kx + m$ ($k \neq \pm 2$) 有唯一的公共点 M , 过点 M 且与 l 垂直的直线分别交 x 轴、 y 轴于 $A(x, 0), B(0, y)$ 两点. 当点 M 运动时, 求点 $P(x, y)$ 的轨迹方程, 并说明轨迹是什么曲线. 如果推广到一般双曲线, 能得到什么相应的结论?

探究与发现

为什么 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线

前面我们利用信息技术, 直观地得到了直线 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线, 下面我们给出证明.

如图 1, 在第一象限内, 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的方程可写为 $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ ($x > a$). 设 $M(x, y)$ 是其图象上的点, $N(x, Y)$ 是直线 $y = \frac{b}{a}x$ 上的点, 且与 $M(x, y)$ 有相同的横坐标, 则 $Y = \frac{b}{a}x$.

$$\text{因为 } y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}x\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2} < \frac{b}{a}x = Y,$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } |MN| &= Y - y = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) \\ &= \frac{b}{a} \cdot \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \end{aligned}$$

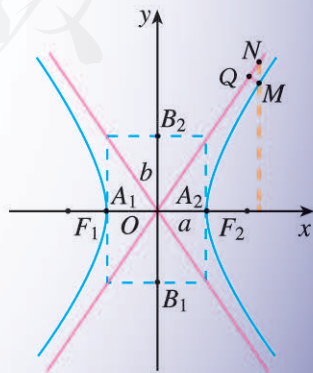


图 1

$$= \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

设 $|MQ|$ 是点 M 到直线 $y = \frac{b}{a}x$ 的距离, 则 $|MQ| < |MN|$.

当 x 逐渐增大时, $|MN|$ 逐渐减小, x 无限增大时, $|MN|$ 无限接近于 0, $|MQ|$ 也无限接近于 0. 也就是说, 双曲线在第一象限向右上方延伸时, 是从射线 ON (O 为原点) 的下方逐渐接近于射线 ON , 但与射线 ON 永远不相交.

根据双曲线的对称性, 在其他象限内, 也有类似的结论.

另外, 我们也可直接计算 $|MQ|$, 证明当 x 无限增大时, $|MQ|$ 无限接近于 0.

人教版®

3.3 抛物线

通过前面的学习可以发现, 如果动点 M 到定点 F 的距离与 M 到定直线 l (不过点 F) 的距离之比为 k , 当 $0 < k < 1$ 时, 点 M 的轨迹为椭圆; 当 $k > 1$ 时, 点 M 的轨迹为双曲线. 一个自然的问题是: 当 $k = 1$ 时, 即动点 M 到定点 F 的距离与它到定直线 l 的距离相等时, 点 M 的轨迹会是什么形状? 下面我们就来研究这个问题.

3.3.1 抛物线及其标准方程

探究

利用信息技术作图. 如图 3.3-1, F 是定点, l 是不经过点 F 的定直线, H 是直线 l 上任意一点, 过点 H 作 $MH \perp l$, 线段 FH 的垂直平分线 m 交 MH 于点 M . 拖动点 H , 点 M 随之运动, 你能发现点 M 满足的几何条件吗? 它的轨迹是什么形状?

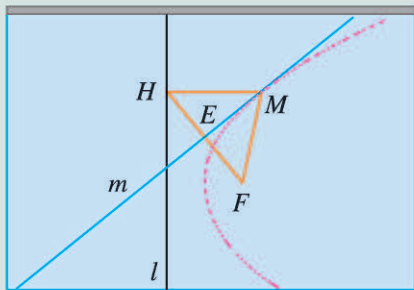


图 3.3-1

可以发现, 在点 M 随着点 H 运动的过程中, 始终有 $|MF| = |MH|$, 即点 M 与定点 F 的距离等于它到定直线 l 的距离, 点 M 的轨迹形状与二次函数的图象相似.

我们把平面内与一个定点 F 和一条定直线 l (l 不经过点 F) 的距离相等的点的轨迹叫做**抛物线** (parabola). 点 F 叫做**抛物线的焦点**, 直线 l 叫做**抛物线的准线**.

思考

比较椭圆、双曲线标准方程的建立过程, 你认为如何建立坐标系, 可能使所求抛物线的方程形式简单?

根据抛物线的几何特征, 如图 3.3-2, 我们取经过点 F 且垂直于直线 l 的直线为 x 轴, 垂足为 K , 并使原点与线段 KF 的中点重合, 建立平面直角坐标系 Oxy . 设 $|KF| = p$ ($p > 0$), 那么焦点 F 的坐标为 $(\frac{p}{2}, 0)$, 准线 l 的方程为 $x = -\frac{p}{2}$.

设 $M(x, y)$ 是抛物线上任意一点, 点 M 到准线 l 的距离为 d . 由抛物线的定义,

抛物线是点的集合

$$P = \{M \mid |MF| = d\}.$$

$$\text{因为 } |MF| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \quad d = \left|x + \frac{p}{2}\right|,$$

所以

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

将上式两边平方并化简，得

$$y^2 = 2px \quad (p > 0). \tag{①}$$

从上述过程可以看到，抛物线上任意一点的坐标 (x, y) 都是方程①的解，以方程①的解为坐标的点 (x, y) 与抛物线的焦点 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ 的距离和它到准线 $x = -\frac{p}{2}$ 的距离相等，即以方程①的解为坐标的点都在抛物线上. 我们把方程①叫做**抛物线的标准方程**. 它表示焦点在 x 轴正半轴上，焦点是 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ ，准线是 $x = -\frac{p}{2}$ 的抛物线.

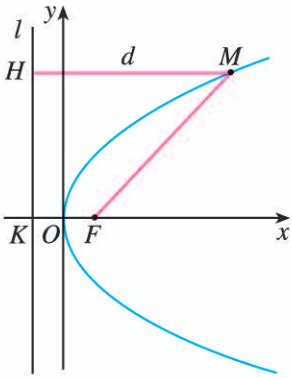


图 3.3-2

探究

在建立椭圆、双曲线的标准方程时，选择不同的坐标系我们得到了不同形式的标准方程. 抛物线的标准方程有哪些不同的形式？请探究之后填写下表.

图形	标准方程	焦点坐标	准线方程
	$y^2 = 2px \quad (p > 0)$	$\left(\frac{p}{2}, 0\right)$	$x = -\frac{p}{2}$

思考

你能说明二次函数 $y=ax^2 (a \neq 0)$ 的图象为什么是抛物线吗？指出它的焦点坐标、准线方程.

例 1 (1) 已知抛物线的标准方程是 $y^2=6x$, 求它的焦点坐标和准线方程;
(2) 已知抛物线的焦点是 $F(0, -2)$, 求它的标准方程.

解: (1) 因为 $p=3$, 抛物线的焦点在 x 轴正半轴上, 所以它的焦点坐标是 $(\frac{3}{2}, 0)$, 准线方程是 $x=-\frac{3}{2}$.

(2) 因为抛物线的焦点在 y 轴负半轴上, 且 $\frac{p}{2}=2$, $p=4$, 所以抛物线的标准方程是 $x^2=-8y$.

例 2 一种卫星接收天线如图 3.3-3 左图所示, 其曲面与轴截面的交线为抛物线. 在轴截面内的卫星波束呈近似平行状态射入形为抛物线的接收天线, 经反射聚集到焦点处, 如图 3.3-3 (1). 已知接收天线的口径 (直径) 为 4.8 m, 深度为 1 m. 试建立适当的坐标系, 求抛物线的标准方程和焦点坐标.

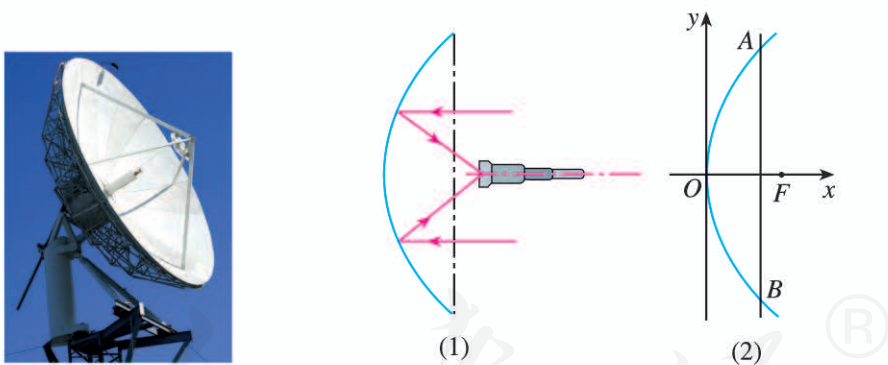


图 3.3-3

解: 如图 3.3-3 (2), 在接收天线的轴截面所在平面内建立直角坐标系, 使接收天线的顶点 (即抛物线的顶点) 与原点重合, 焦点在 x 轴上.

设抛物线的标准方程是 $y^2=2px (p>0)$. 由已知条件得, 点 A 的坐标是 $(1, 2.4)$, 代入方程, 得

$$2.4^2=2p \times 1,$$

即 $p=2.88$.

所以, 所求抛物线的标准方程是 $y^2=5.76x$, 焦点坐标是 $(1.44, 0)$.

练习

1. 根据下列条件写出抛物线的标准方程:

- (1) 焦点是 $F(3, 0)$; (2) 准线方程是 $x = -\frac{1}{4}$; (3) 焦点到准线的距离是 2.

2. 求下列抛物线的焦点坐标和准线方程:

- (1) $y^2 = 20x$; (2) $x^2 = \frac{1}{2}y$; (3) $2y^2 + 5x = 0$; (4) $x^2 + 8y = 0$.

3. 填空.

- (1) 抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上一点 M 与焦点间的距离是 a ($a > \frac{p}{2}$), 则点 M 到准线的距离是 _____, 点 M 的横坐标是 _____;
- (2) 抛物线 $y^2 = 12x$ 上与焦点的距离等于 9 的点的坐标是 _____.

探究与发现

为什么二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象是抛物线

我们知道, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象是抛物线. 经过本节的学习我们知道, 抛物线是平面内与一个定点 F 和一条定直线 l (l 不经过点 F) 的距离相等的点的轨迹. 因此, 只要能说明二次函数的图象符合抛物线的几何特征, 就解决了为什么二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象是抛物线的问题. 由抛物线与其方程之间的关系可知, 如果能用适当的方式将 $y = ax^2 + bx + c$ 转化为抛物线标准方程的形式, 那么就可以说明二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象是抛物线.

按照这种思路, 我们对 $y = ax^2 + bx + c$ 的右边配方, 得

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

由函数图象平移的性质可以知道, 沿向量 $m = \left(\frac{b}{2a}, -\frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ 平移函数 $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ 的图象 (图 1), 除了位置外, 函数图象不

发生任何变化. 平移后的图象对应的函数解析式为

$y = ax^2$, 即 $x^2 = \frac{1}{a}y$, 这个方程表示的曲线是顶点为原点, 焦点为 $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ 的抛物线.

因此, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象是一条抛物线.

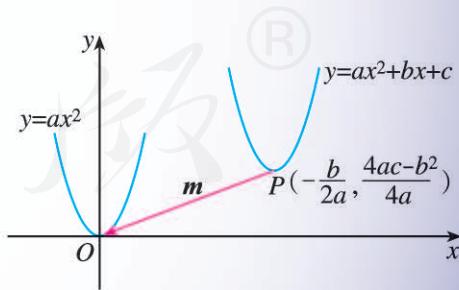


图 1

3.3.2 抛物线的简单几何性质

思考

类比用方程研究椭圆、双曲线几何性质的过程与方法,你认为应研究抛物线

$$y^2=2px \quad (p>0) \quad ①$$

的哪些几何性质?如何研究这些性质?

1. 范围

因为 $p>0$, 由方程①可知, 对于抛物线上的点 $M(x, y)$, $x \geq 0$, $y \in \mathbf{R}$, 当 $x>0$ 时, 抛物线在 y 轴的右侧, 开口方向与 x 轴的正方向相同; 当 x 的值增大时, $|y|$ 的值也增大, 这说明抛物线向右上方和右下方无限延伸.

2. 对称性

以 $-y$ 代 y , 方程①不变, 所以抛物线关于 x 轴对称. 我们把抛物线的对称轴叫做**抛物线的轴**.

3. 顶点

抛物线和它的轴的交点叫做**抛物线的顶点**. 在方程①中, 当 $x=0$ 时, $y=0$, 因此抛物线的顶点就是原点.

4. 离心率

抛物线上的点 M 与焦点 F 的距离和点 M 到准线的距离 d 的比 $\frac{|MF|}{d}$, 叫做**抛物线的离心率**, 用 e 表示. 由抛物线的定义可知, $e=1$.

例 3 已知抛物线关于 x 轴对称, 它的顶点在原点, 并且经过点 $M(2, -2\sqrt{2})$, 求它的标准方程.

解: 因为抛物线关于 x 轴对称, 它的顶点在原点, 并且经过点 $M(2, -2\sqrt{2})$, 所以可设它的标准方程为

$$y^2=2px \quad (p>0).$$

因为点 M 在抛物线上, 所以

$$(-2\sqrt{2})^2=2p \times 2,$$

解得 $p=2$.

因此, 所求抛物线的标准方程是

$$y^2=4x.$$

思考

顶点在原点，对称轴是坐标轴，并且经过点 $M(2, -2\sqrt{2})$ 的抛物线有几条？求出这些抛物线的标准方程。

例 4 斜率为 1 的直线 l 经过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F ，且与抛物线相交于 A, B 两点，求线段 AB 的长。

分析：由抛物线的方程可以得到它的焦点坐标，又直线 l 的斜率为 1，所以可以求出直线 l 的方程；与抛物线的方程联立，可以求出 A, B 两点的坐标；利用两点间的距离公式可以求出 $|AB|$ 。这种方法思路直接，具有一般性。请你用此方法求 $|AB|$ 。

下面介绍另外一种方法——数形结合的方法。

在图 3.3-4 中，设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 。由抛物线的定义可知， $|AF|$ 等于点 A 到准线的距离 $|AA'|$ 。由 $p=2, \frac{p}{2}=1$ ，得 $|AA'|=x_1+\frac{p}{2}=x_1+1$ ，于是 $|AF|=x_1+1$ 。同理， $|BF|=|BB'|=x_2+\frac{p}{2}=x_2+1$ ，于是得

$$|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+p=x_1+x_2+2.$$

由此可见，只要求出点 A, B 的横坐标之和 x_1+x_2 ，就可以求出 $|AB|$ 。

解：由题意可知， $p=2, \frac{p}{2}=1$ ，焦点 F 的坐标为 $(1, 0)$ ，准线方程为 $x=-1$ 。如图 3.3-4，设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ， A, B 两点到准线的距离分别为 d_A, d_B 。由抛物线的定义，可知

$$|AF|=d_A=x_1+1, |BF|=d_B=x_2+1,$$

于是

$$|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+2.$$

因为直线 l 的斜率为 1，且过焦点 $F(1, 0)$ ，所以直线 l 的方程为

$$y=x-1. \quad \text{①}$$

将①代入方程 $y^2=4x$ ，得 $(x-1)^2=4x$ ，化简，得

$$x^2-6x+1=0.$$

所以

$$x_1+x_2=6,$$

$$|AB|=x_1+x_2+2=8.$$

所以，线段 AB 的长是 8。

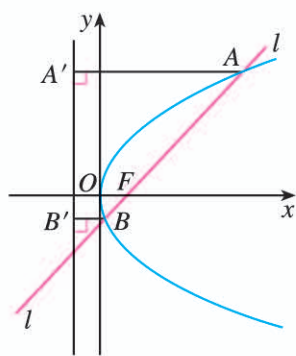


图 3.3-4

如果直线 l 不经过焦点 F ， $|AB|$ 还等于 x_1+x_2+2 吗？

练习

1. 求适合下列条件的抛物线的标准方程:

- (1) 关于 x 轴对称, 并且经过点 $M(5, -4)$;
- (2) 关于 y 轴对称, 准线经过点 $E(5, -5)$;
- (3) 准线在 y 轴的右侧, 顶点到准线的距离是 4;
- (4) 焦点 F 在 y 轴负半轴上, 经过横坐标为 16 的点 P , 且 FP 平行于准线.

2. 在同一坐标系中画出下列抛物线, 观察它们开口的大小, 并说明抛物线开口大小与方程中 x 的系数的关系:

- (1) $y^2 = \frac{1}{2}x$; (2) $y^2 = x$; (3) $y^2 = 2x$; (4) $y^2 = 4x$.

3. 过点 $M(2, 0)$ 作斜率为 1 的直线 l , 交抛物线 $y^2 = 4x$ 于 A, B 两点, 求 $|AB|$.

4. 垂直于 x 轴的直线交抛物线 $y^2 = 4x$ 于 A, B 两点, 且 $|AB| = 4\sqrt{3}$, 求直线 AB 的方程.

例 5 经过抛物线焦点 F 的直线交抛物线于 A, B 两点, 经过点 A 和抛物线顶点的直线交抛物线的准线于点 D , 求证: 直线 DB 平行于抛物线的对称轴.

分析: 我们用坐标法证明这个结论, 即通过建立抛物线及直线的方程, 运用方程研究直线 DB 与抛物线对称轴之间的位置关系. 建立如图 3.3-5 所示的直角坐标系, 只要证明点 D 的纵坐标与点 B 的纵坐标相等即可.

证明: 如图 3.3-5, 以抛物线的对称轴为 x 轴, 抛物线的顶点为原点, 建立平面直角坐标系 Oxy . 设抛物线的方程为

$$y^2 = 2px \quad (p > 0), \quad ①$$

点 A 的坐标为 $(\frac{y_0^2}{2p}, y_0)$ ($y_0 \neq 0$), 则直线 OA 的方程为

$$y = \frac{2p}{y_0}x, \quad ②$$

抛物线的准线方程是 $x = -\frac{p}{2}$. ③

联立②③, 可得点 D 的纵坐标为 $-\frac{p^2}{y_0}$.

因为焦点 F 的坐标是 $(\frac{p}{2}, 0)$, 当 $y_0^2 \neq p^2$ 时, 直线 AF 的方程为

$$y = \frac{2py_0}{y_0^2 - p^2} \left(x - \frac{p}{2} \right). \quad ④$$

联立①④, 消去 x , 可得 $y_0y^2 - (y_0^2 - p^2)y - y_0p^2 = 0$, 即 $(y - y_0)(y_0y + p^2) = 0$,

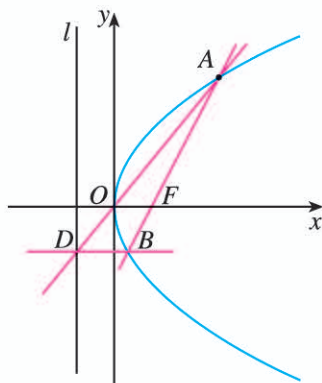


图 3.3-5

可得点 B 的纵坐标为 $-\frac{p^2}{y_0}$, 与点 D 的纵坐标相等, 于是

DB 平行于 x 轴.

当 $y_0^2 = p^2$ 时, 易知结论成立.

所以, 直线 DB 平行于抛物线的对称轴.

你还有其他证明方法吗?

例 6 如图 3.3-6, 已知定点 $B(a, -h)$, $BC \perp x$ 轴于点 C , M 是线段 OB 上任意一点, $MD \perp x$ 轴于点 D , $ME \perp BC$ 于点 E , OE 与 MD 相交于点 P , 求点 P 的轨迹方程.

解: 设点 $P(x, y)$, $M(x, m)$, 其中 $0 \leq x \leq a$, 则点 E 的坐标为 (a, m) .

由题意, 直线 OB 的方程为

$$y = -\frac{h}{a}x. \quad (1)$$

因为点 M 在 OB 上, 将点 M 的坐标代入①, 得

$$m = -\frac{h}{a}x, \quad (2)$$

所以点 P 的横坐标 x 满足②.

直线 OE 的方程为

$$y = \frac{m}{a}x, \quad (3)$$

因为点 P 在 OE 上, 所以点 P 的坐标 (x, y) 满足③.

将②代入③, 消去 m , 得

$$x^2 = -\frac{a^2}{h}y \quad (0 \leq x \leq a),$$

即点 P 的轨迹方程.

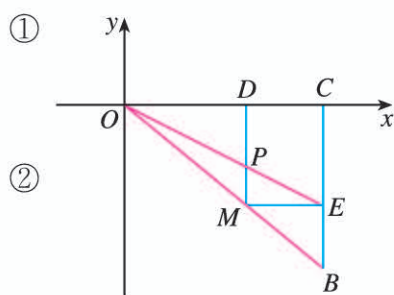


图 3.3-6

例 6 中, 设点 B 关于 y 轴的对称点为 A , 则方程

$$x^2 = -\frac{a^2}{h}y \quad (-a \leq x \leq a)$$

对应的轨迹是常见的抛物拱 AOB (图 3.3-7). 抛物拱在现实中有许多原型, 如桥拱 (图 3.3-8)、卫星接收天线等, 抛掷出的铅球在空中划过的轨迹也是抛物拱的一部分.

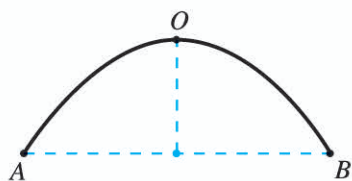


图 3.3-7



图 3.3-8

练习

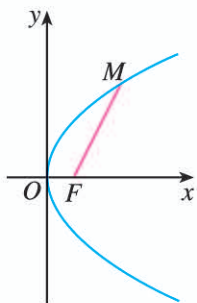
- 求适合下列条件的抛物线的标准方程：
 - 焦点 F 关于准线的对称点为 $M(0, -9)$ ；
 - 关于 y 轴对称，与直线 $y = -12$ 相交所得线段的长为 12；
 - 关于 x 轴对称，以焦点和准线上的两点为顶点的三角形是边长为 $2\sqrt{3}$ 的等边三角形.
- 点 $M(m, 4)$ 在抛物线 $y^2 = 24x$ 上， F 为焦点，直线 MF 与准线相交于点 N ，求 $|FN|$.
- 设抛物线 $x^2 = 2py$ ($p > 0$) 上的点 M 与焦点 F 的距离为 4，点 M 到 y 轴的距离为 $\sqrt{3}p$ ，求抛物线的方程和点 M 的坐标.
- 两条直线 $y = kx$ 和 $y = -kx$ 分别与抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 相交于不同于原点的 A, B 两点， k 为何值时，直线 AB 经过抛物线的焦点？
- 已知圆心在 y 轴上移动的圆经过点 $A(0, 5)$ ，且与 x 轴、 y 轴分别交于 $B(x, 0)$ ， $C(0, y)$ 两个动点，求点 $M(x, y)$ 的轨迹方程.

习题 3.3

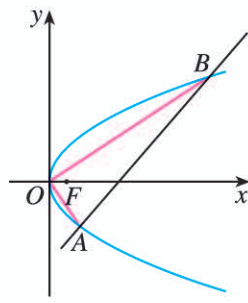


复习巩固

- 求下列抛物线的焦点坐标和准线方程：
 - $x^2 = 2y$;
 - $4x^2 + 3y = 0$;
 - $2y^2 + x = 0$;
 - $y^2 - 6x = 0$.
- 填空题.
 - 准线方程为 $x = 2$ 的抛物线的标准方程是_____；
 - 抛物线 $y^2 = 8x$ 上与焦点的距离等于 6 的点的坐标是_____.
- 抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上一点 M 与焦点 F 的距离 $|MF| = 2p$ ，求点 M 的坐标.
- 根据下列条件，求抛物线的标准方程，并画出图形：
 - 顶点在原点，对称轴是 x 轴，并且顶点与焦点的距离等于 6；
 - 顶点在原点，对称轴是 y 轴，并经过点 $P(-6, -3)$.
- 如图， M 是抛物线 $y^2 = 4x$ 上的一点， F 是抛物线的焦点，以 Fx 为始边、 FM 为终边的角 $\angle xFM = 60^\circ$ ，求 $|FM|$.



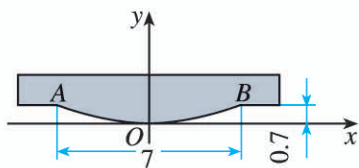
(第 5 题)



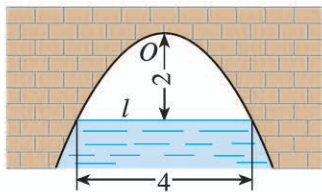
(第 6 题)

- 如图，直线 $y = x - 2$ 与抛物线 $y^2 = 2x$ 相交于 A, B 两点，求证： $OA \perp OB$.

7. 如图, 吊车梁的鱼腹部分 AOB 是抛物线的一段, 宽为 7 m, 高为 0.7 m. 根据图中的坐标系, 求这条抛物线的方程.



(第 7 题)



(第 8 题)

8. 图中是抛物线形拱桥, 当水面在 l 时, 拱顶离水面 2 m, 水面宽 4 m. 水面下降 1 m 后, 水面宽多少? (精确到 0.1 m)

综合运用

9. 从抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上各点向 x 轴作垂线段, 求垂线段的中点的轨迹方程, 并说明它是什么曲线.
10. 已知等边三角形的一个顶点位于原点, 另外两个顶点在抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上, 求这个等边三角形的边长.
11. 已知 A, B 两点的坐标分别是 $(-1, 0), (1, 0)$, 直线 AM, BM 相交于点 M , 且直线 AM 的斜率与直线 BM 的斜率的差是 2, 求点 M 的轨迹方程.

拓广探索

12. 已知抛物线的方程为 $y^2 = 4x$, 直线 l 绕其上一一点 $P(-2, 1)$ 旋转, 讨论直线 l 与抛物线 $y^2 = 4x$ 的公共点个数, 并回答下列问题:
- (1) 画出图形表示直线 l 与抛物线的各种位置关系, 从图中你发现直线 l 与抛物线只有一个公共点时是什么情况?
 - (2) $y^2 = 4x$ 与直线 l 的方程组成的方程组解的个数与公共点的个数是什么关系?
13. 设抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 从点 F 发出的光线经过抛物线上的点 M (不同于抛物线的顶点) 反射, 证明反射光线平行于抛物线的对称轴.



圆锥曲线的光学性质及其应用

椭圆、双曲线、抛物线这些圆锥曲线都有焦点. 焦点, 顾名思义, 就是光线的聚集点. 这说明圆锥曲线与光线有紧密的联系, 圆锥曲线具有丰富的光学性质.

我们知道, 当一束光线照到镜面时, 光线会依一定的规律反射, 即反射角等于入射角 (图 1). 当光照射到曲面时, 特别是由圆锥曲线绕其对称轴旋转而成的曲面时, 会有什么现象呢?

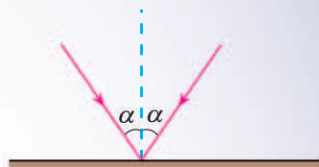


图 1

我们看生活中的一个实例: 一只很小的灯泡发出的光, 会分散地射向各方, 但把它装在圆柱形手电筒里, 经过适当调节, 就能射出一束比较强的平行光线, 这是为什么呢?

原来手电筒内, 在小灯泡后面有一个反光镜, 镜面的形状是一个由抛物线绕它的对称轴旋转所得到的曲面 (图 2), 这种曲面叫做抛物面. 抛物线有一条重要性质: 从焦点发出的光线, 经过抛物线上的一点反射后, 反射光线平行于抛物线的轴. 探照灯 (图 3) 也是利用这个原理设计的.

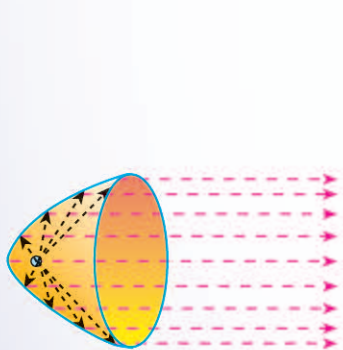


图 2

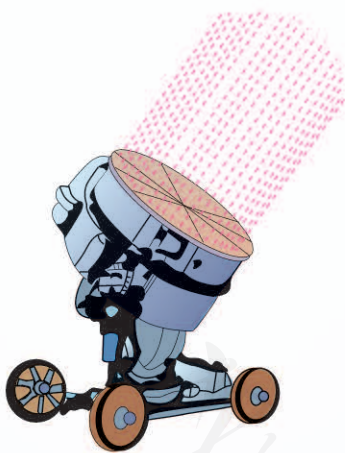


图 3



图 4

应用抛物线的这个性质, 也可以使一束平行于抛物线的轴的光线, 经过抛物面的反射集中于它的焦点. 人们应用这个原理, 设计了一种加热水和食物的太阳灶 (图 4). 在这种太阳灶上装有一个旋转抛物面形的反光镜, 当它的轴与太阳光线平行时, 太阳光线经过反射后集中于焦点处, 这一点的温度就会很高.

椭圆和双曲线的光学性质与抛物线不同. 从椭圆的一个焦点发出的光线, 经过椭圆反射后, 反射光线交于椭圆的另一个焦点上 (图 5); 从双曲线的一个焦点发出的光线, 经过双曲线反射后, 反射光线是散开的, 它们就好像是从另一个焦

点射出的一样（图 6）。椭圆、双曲线的光学性质也被人们广泛地应用于各种设计中。

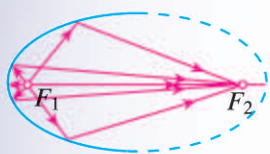


图 5

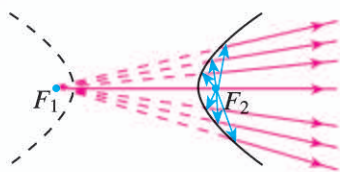


图 6

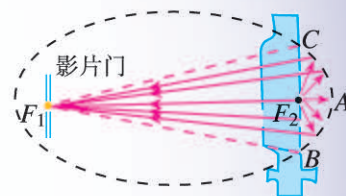


图 7

如图 7，胶片电影放映机的聚光灯有一个反射镜，它的形状是旋转椭圆面。为了使影片门（电影胶片通过的地方）处获得最强的光线，灯丝 F_2 与影片门 F_1 应位于椭圆的两个焦点处，这就是利用椭圆光学性质的一个实例。数字电影机采用数字光处理技术 DLP 的数字电影放映新模式，替代了传统胶片电影放映机胶片图像重现模式，实现了无胶片放映。

人教版®



解析几何的形成与发展

对数的发明、解析几何的创始和微积分的建立被马克思主义创始人之一的恩格斯并称为 17 世纪数学的三大成就. 解析几何的产生是科学发展的需要. 坐标系的引入, 使常量数学进入变量数学时代, 而变量进入数学正是近代数学的重要标志. 由于变量进入了数学, 我们可以研究运动与变化, 研究物体运动的轨迹. 解析几何可以定量描述物体的运动变化, 为研究物体的运动变化提供了方法和工具, 特别是为微积分的建立提供了重要支撑.

解析几何是如何形成和发展的? 在数学和人类社会的发展历史中起了什么作用? 请你按以下要求, 查阅与解析几何有关的文献, 自己选题, 写一篇数学小论文.

一、主题

1. 解析几何形成与发展的过程;
2. 解析几何对人类文明的主要贡献.

二、实施建议

1. 选题: 根据个人兴趣, 围绕主题, 初步确定选题范围;
2. 分组: 相近选题的 5~6 人为一个小组, 确定一名组长;
3. 分配任务: 根据个人的具体情况, 经小组共同商议, 由组长确定每人的具体任务;
4. 搜集资料: 针对具体的论文题目, 通过网络、书店、图书馆等多种途径搜集素材, 包括文字、图片、数据以及音像资料, 并记录相关资料;
5. 素材汇总: 用论文的形式展现小组的实践成果;
6. 在全班范围进行交流、讨论和总结.

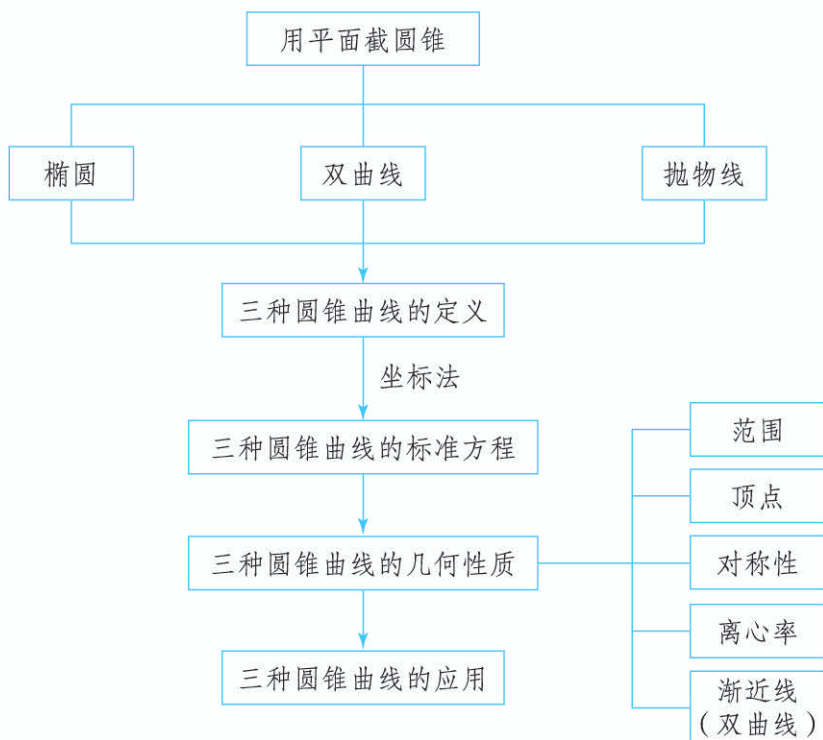
三、参考选题

1. 解析几何产生的背景;
2. 解析几何发展中的重要事件;
3. 对解析几何的形成与发展作出重要贡献的数学家;
4. 解析几何对人类文明进步的贡献.

* 标有 * 的内容为选学内容, 不作为考试要求.

小结

一、本章知识结构



二、回顾与思考

圆锥曲线有丰富的现实背景和广泛的实际应用，例如行星运行轨道、抛物运动轨迹、探照灯的镜面等。本章我们结合具体情境探索了椭圆、双曲线和抛物线的几何特征，利用确定三类圆锥曲线的几何要素（如定点、定直线等）合理地建立坐标系，用代数语言描述这些特征，得到相应的标准方程，通过方程研究了圆锥曲线的简单几何性质，并用圆锥曲线的方程解决了一些简单问题。

我们用 C 代表曲线，用 $f(x, y)=0$ 表示方程。通过本章的学习可以看到，只有当曲线 C 上任意一点的坐标都满足方程 $f(x, y)=0$ ，同时以方程 $f(x, y)=0$ 的解为坐标的点都在曲线 C 上，我们才称“曲线 C 是方程 $f(x, y)=0$ 的曲线”“方程 $f(x, y)=0$ 是曲线 C 的方程”。也只有在这样的条件下，才能通过研究方程 $f(x, y)=0$ 的性质得到曲线 C 的性质。利用坐标系建立曲线与方程的这种关系，是解析几何的基础，在今后的学习中可以进一步体会到。

通过本章的学习可以看到，用坐标法研究几何问题，首先要注意观察相应几何图形的特征，把握确定几何图形的要素，例如椭圆是平面内到两个定点的

距离之和等于定长的点的轨迹，这里“两个定点”“距离之和为定长”等就是确定椭圆的几何要素；然后再用坐标法解决，即利用几何特征合理建立坐标系，用坐标表示点，用方程表示几何要素的关系。在此基础上，利用方程研究曲线的性质。可以看到，解析几何中研究椭圆、双曲线、抛物线的过程和方法是一致的。这表明，用代数方法研究几何问题（如圆锥曲线的性质），其处理方法具有统一性。实际上，通过代数方法研究几何图形，不但有利于发现和证明图形的性质，而且这种解决问题的方式基本上是程序化的，这是解析几何的优势所在，是体现数形结合思想方法威力的典范，需要我们在学习中认真体会。

我们发现，用坐标法研究几何图形时，代数式的化简、方程的变形与等价转化等起着很重要的作用。例如，当我们把椭圆的方程化简为标准方程后，就能容易地看出椭圆的范围、对称性、顶点等，发现长轴、短轴、焦距之间的关系，并由此得到刻画椭圆扁平程度的离心率等。所以，学习解析几何需要较强的逻辑推理、数学运算等能力，同学们要给予特别关注。

在圆锥曲线的研究中，信息技术可以发挥很好的作用。例如，运用信息技术，可以方便地画出曲线；通过改变某些量（如椭圆的长轴的长、短轴的长或焦距等），可以帮助我们发现曲线的几何特征及其基本性质（变化中的不变性）等。研究圆锥曲线时，信息技术在发现问题、形成思想方法、获得结论等方面，都能发挥重要作用。

请你带着下面的问题，复习一下全章内容吧！

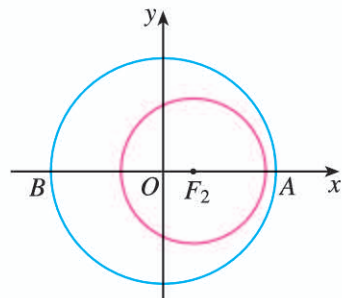
1. 你能说说用坐标法研究圆锥曲线的具体过程吗？
2. 在椭圆、双曲线、抛物线三类圆锥曲线的研究中，椭圆是研究的第一类圆锥曲线，对双曲线、抛物线的研究，我们采用的是类比的方法，你能说说具体的类比内容吗？
3. 椭圆、双曲线、抛物线的几何特征是什么？这些几何特征在研究圆锥曲线中有什么作用？
4. 圆锥曲线的几何性质主要包括哪些方面？如何用代数方法研究这些几何性质？
5. 圆锥曲线的“统一性”体现在哪些方面？你如何理解圆锥曲线的“统一性”？
6. 如何用直线与圆锥曲线的方程判断它们之间的位置关系？
7. 数形结合在圆锥曲线的研究中具有重要作用，你能举例说明吗？

复习参考题 3



复习巩固

- 如图,我国发射的第一颗人造地球卫星的运行轨道,是以地心(地球的中心) F_2 为一个焦点的椭圆. 已知它的近地点(离地面最近的点) A 距地面 439 km, 远地点(离地面最远的点) B 距地面 2 384 km, 并且 F_2, A, B 在同一直线上, 地球半径约为 6 371 km. 求: (1) 卫星运行的轨道方程(精确到 1 km); (2) 卫星轨道的离心率.



(第 1 题)

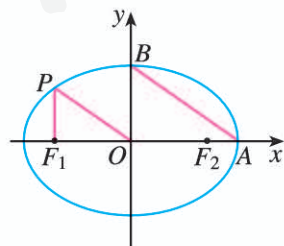
2. 选择题.

- 椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{25-k} + \frac{y^2}{9-k} = 1$ ($k < 9$) 的 ().
 (A) 长轴长相等 (B) 短轴长相等
 (C) 离心率相等 (D) 焦距相等
- 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 及圆 $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$ 都外切的圆的圆心在 ().
 (A) 椭圆上 (B) 双曲线的一支上
 (C) 抛物线上 (D) 圆上
- 当 α 从 0° 到 180° 变化时, 方程 $x^2 + y^2 \cos \alpha = 1$ 表示的曲线的形状怎样变化?
- 已知直线 $y = kx - 1$ 与双曲线 $x^2 - y^2 = 4$ 没有公共点, 求 k 的取值范围.
- 设抛物线的顶点为 O , 经过焦点且垂直于对称轴的直线交抛物线于 B, C 两点, 经过抛物线上一点 P 且垂直于轴的直线与轴交于点 Q . 求证: $|PQ|^2 = |BC| \cdot |OQ|$.
- 已知等边三角形的一个顶点位于抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点, 另外两个顶点在抛物线上, 求这个等边三角形的边长.



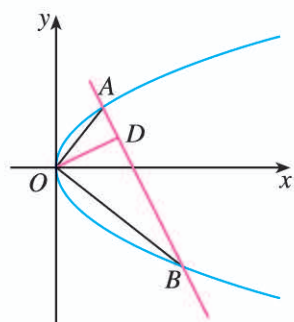
综合运用

- 已知 P 是椭圆 $16x^2 + 25y^2 = 1600$ 上的一点, 且在 x 轴上方, F_1, F_2 分别是椭圆的左、右焦点, 直线 PF_2 的斜率为 $-4\sqrt{3}$, 求 $\triangle PF_1F_2$ 的面积.
- 如图, 从椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 上一点 P 向 x 轴作垂线, 垂足恰为左焦点 F_1 . 又点 A 是椭圆与 x 轴正半轴的交点, 点 B 是椭圆与 y 轴正半轴的交点, 且 $AB \parallel OP$, $|F_1A| = \sqrt{10} + \sqrt{5}$, 求椭圆的方程.
- 已知 A, B 两点的坐标分别是 $(-1, 0), (1, 0)$. 直线 AM, BM 相交于点 M , 且它们的斜率之和是 2, 求点 M 的轨迹方程.



(第 8 题)

10. 如图, 已知直线与抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 交于 A, B 两点, 且 $OA \perp OB$, $OD \perp AB$ 交 AB 于点 D , 点 D 的坐标为 $(2, 1)$, 求 p 的值.



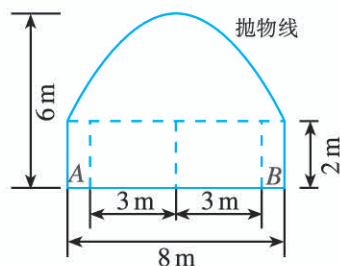
(第 10 题)

11. 已知 $\triangle ABC$ 的两个顶点 A, B 的坐标分别是 $(-5, 0), (5, 0)$, 且 AC, BC 所在直线的斜率之积等于 m ($m \neq 0$), 求顶点 C 的轨迹.

12. 在抛物线 $y^2 = 4x$ 上求一点 P , 使得点 P 到直线 $y = x + 3$ 的距离最短.

13. 当 m 变化时, 指出方程 $(m-1)x^2 + (3-m)y^2 = (m-1)(3-m)$ 表示的曲线的形状.

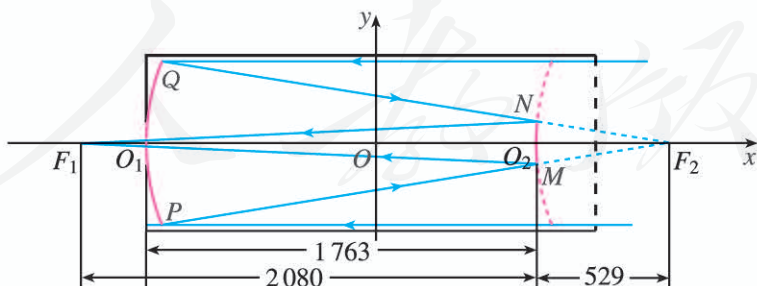
14. 如图, 一隧道内设双行线公路, 其截面由一个长方形和抛物线构成. 为保证安全, 要求行驶车辆顶部 (设为平顶) 与隧道顶部在竖直方向上高度之差至少要有 0.5 m. 已知行车道总宽度 $|AB| = 6$ (m), 那么车辆通过隧道的限制高度是多少米? (精确到 0.1 m)



(第 14 题)

拓展探索

15. 综合应用抛物线和双曲线的光学性质, 可以设计制造反射式天文望远镜. 这种望远镜的特点是, 镜筒可以很短而观察天体运动又很清楚. 例如, 某天文仪器厂设计制造的一种镜筒长为 2 m 的反射式望远镜, 其光学系统的原理如图 (中心截面示意图) 所示. 其中, 一个反射镜 PO_1Q 弧所在的曲线为抛物线, 另一个反射镜 MO_2N 弧所在的曲线为双曲线的一个分支. 已知 F_1, F_2 是双曲线的两个焦点, 其中 F_2 同时又是抛物线的焦点, 试根据图示尺寸 (单位: mm), 分别求抛物线和双曲线的方程.



(第 15 题)

16. 过抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点 F 作直线与抛物线交于 A, B 两点, 以 AB 为直径画圆, 观察它与抛物线的准线 l 的关系, 你能得到什么结论? 相应于椭圆、双曲线如何? 你能证明你的结论吗?

部分中英文词汇索引

中文	英文	页码
空间向量	space vector	2
模	modulus	2
零向量	zero vector	2
单位向量	unit vector	2
共线向量	collinear vectors	2
平行向量	parallel vectors	2
相等向量	equal vectors	3
方向向量	direction vector	4
共面向量	coplanar vectors	4
数量积	inner product	6
基底	base	12
基向量	base vectors	12
法向量	normal vector	28
倾斜角	angle of inclination	51
斜率	slope	53
点斜式	point slope form	60
截距	intercept	61
斜截式	slope intercept form	61
两点式	two-point form	62
截距式	intercept form	63
一般式	general form	65
圆的标准方程	standard equation of circle	82
圆的一般方程	general equation of circle	86
圆锥曲线	conic sections	104
椭圆	ellipse	105
焦点	focus	105
焦距	focus distance	105
双曲线	hyperbola	119
抛物线	parabola	130

后 记

本册教科书是人民教育出版社课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心依据教育部《普通高中数学课程标准（2017年版）》编写的，经国家教材委员会2019年审查通过。

本册教科书的编写，集中反映了我国十余年来普通高中课程改革的成果，吸取了2004年版《普通高中课程标准实验教科书·数学（A版）》的编写经验，凝聚了参与课改实验的教育专家、学科专家、教材编写专家、教研人员和一线教师，以及教材设计装帧专家的集体智慧。本册教科书的编写者还有李海东、张劲松等；本书插图绘制为王俊宏，为本书提供照片的有东方IC图片网（第104页一张图）等。

我们感谢2004年版《普通高中课程标准实验教科书·数学（A版）》的主编刘绍学，副主编钱珮玲、章建跃，以及所有编写人员。我们感谢所有对教科书的编写、出版、试教等提供过帮助与支持的同仁和社会各界朋友。

本册教科书出版之前，我们通过多种渠道与教科书选用作品（包括照片、画作）的作者进行了联系，得到了他们的大力支持。对此，我们表示衷心的感谢！恳请未联系到的作者与我们联系，以便及时支付稿酬。

我们真诚地希望广大教师、学生及家长在使用本册教科书的过程中提出宝贵意见。我们将集思广益，不断修订，使教科书趋于完善。

联系方式

电话：010-58758866

电子邮箱：jcfk@pep.com.cn

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心

2019年4月



PUTONG GAOZHONG JIAOKESHU
SHUXUE

人教版®



绿色印刷产品

9 787137 545968 >



9 787137 545968 >

定价：00.00 元