

9. 小明的父母为了准备小明将来考入大学的学费, 于 2017 年元旦在某银行存入 10 000 元, 并在后续每一年的元旦都在该银行存入 1200 元, 直到 2022 年存入最后一笔钱为止. 如果银行的存款年利率为 2.75%, 且以复利计息, 那么小明的父母在 2023 年元旦将存款连本带利全部取出时, 能取到多少钱?

10. 任取一个正整数, 若是奇数, 就将该数乘 3 再加上 1; 若是偶数, 就将该数除以 2. 反复进行上述两种运算, 经过有限次步骤后, 必进入循环圈 $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. 这就是数学史上著名的“冰雹猜想”(又称“角谷猜想”等). 如取正整数 $m=6$, 根据上述运算法则得出 $6 \rightarrow 3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, 共需经过 8 个步骤变成 1 (简称为 8 步“雹程”).

现给出冰雹猜想的递推关系如下:

已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=m$ (m 为正整数), $a_{n+1}=\begin{cases} \frac{a_n}{2}, & \text{当 } a_n \text{ 为偶数时,} \\ 3a_n+1, & \text{当 } a_n \text{ 为奇数时.} \end{cases}$

(1) 当 $m=17$ 时, 试确定使得 $a_n=1$ 需要多少步雹程;

(2) 若 $a_8=1$, 求 m 所有可能的取值集合 M .

11. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_4=4S_2$, $a_{2n}=2a_n+1$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n=3^{n-1}$, 令 $c_n=a_nb_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

12. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_{n+1}=2S_n+2$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 在 a_n 与 a_{n+1} 之间插入 n 个数, 使这 $n+2$ 个数组成一个公差为 d_n 的等差数列, 在数列 $\{d_n\}$ 中是否存在 3 项 d_m, d_k, d_p (其中 m, k, p 成等差数列) 成等比数列? 若存在, 求出这样的 3 项; 若不存在, 请说明理由.

13. 类比等差数列和等比数列的定义、通项公式、常用性质等, 发现它们具有如下的对偶关系: 只要将等差数列的一个关系式中的运算“+”改为“ $\times$ ”, “-”改为“ $\div$ ”, 正整数倍改为正整数指数幂, 相应地就可得到等比数列中一个形式相同的关系式, 反之也成立.

(1) 根据上述说法, 请你参照下表给出的信息推断出相关的对偶关系式;

名称	等差数列 $\{a_n\}$	等比数列 $\{b_n\}$
定义	$a_{n+1}-a_n=d$	
通项公式		$b_n=b_1q^{n-1}=b_mq^{n-m}$
常用性质	① $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\cdots$ ② $a_{n-k}+a_{n+k}=2a_n$ ($n>k$) ③ ④ $a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$	① ② ③ 若 $m+n=k+l$ ($m, n, k, l \in \mathbb{N}^*$), 则 $b_nb_m=b_kb_l$ ④

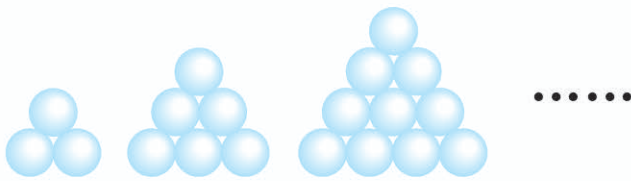
(2) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_{2018}=0$, 则有

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1+a_2+\cdots+a_{4035-n} \quad (n \in \mathbb{N}^*, n < 4035).$$

相应地, 在等比数列 $\{b_n\}$ 中, 若 $b_{2019}=1$, 请你类比推测出对偶的等式, 并加以证明.



14. 在 2015 年苏州世乒赛期间, 某景点用乒乓球堆成若干堆“正三棱锥”形的装饰品, 其中第 1 堆只有 1 层, 就一个球; 第 2, 3, 4, $\cdots$ 堆最底层 (第一层) 分别按图中所示方式固定摆放, 从第二层开始, 每层的小球自然垒放



(第 14 题)

在下一层之上, 第 n 堆第 n 层就放一个乒乓球. 记第 n 堆的乒乓球总数为 $f(n)$.

- (1) 求出 $f(3)$;
- (2) 试归纳出 $f(n+1)$ 与 $f(n)$ 的关系式, 并根据你得到的关系式探求 $f(n)$ 的表达式.

参考公式: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

15. 有理数都能表示成 $\frac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbf{Z}$, 且 $n \neq 0$, m 与 n 互质) 的形式, 进而有理数集 $\mathbf{Q} =$

$$\left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbf{Z}, \text{ 且 } n \neq 0, m \text{ 与 } n \text{ 互质} \right\}.$$

任何有理数 $\frac{m}{n}$ 都可以化为有限小数或无限循环小数.

反之, 任一有限小数也可以化为 $\frac{m}{n}$ 的形式, 从而是有理数; 那么无限循环小数是不是有理数?

思考下列问题:

- (1) $1.\dot{2}$ 是有理数吗? 请说明理由.
 - (2) $1.\dot{2}4$ 是有理数吗? 请说明理由.
16. 平面上有 n ($n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$) 个点, 其中任何三点都不在同一条直线上. 过这些点中任意两点作直线, 这样的直线共有多少条? 证明你的结论.
- *17. 数学归纳法还有其他变化形式, 例如, 将数学归纳法中的第 (1) 步保持不变, 第 (2) 步改为“以‘当 $n_0 \leq n \leq k$ ($k \in \mathbf{N}^*$, $k \geq n_0$) 时命题成立’为条件, 推出‘当 $n = k+1$ 时命题也成立’,”也可以断定命题对从 n_0 开始的所有正整数 n 都成立. 这种证明方法称为第二数学归纳法. 试用第二数学归纳法证明如下命题:

若数列 $\{F_n\}$ 满足 $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ($n \geq 3$, $n \in \mathbf{N}^*$) ($\{F_n\}$ 称为斐波那契数列), 则其通项公式为 $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$.

第五章

一元函数的导数及其应用

为了描述现实世界中的运动、变化现象，在数学中引入了函数。刻画静态现象的数与刻画动态现象的函数都是数学中非常重要的概念。在对函数的深入研究中，数学家创立了微积分，这是具有划时代意义的伟大创造，被誉为数学史上的里程碑。

微积分的创立与处理四类科学问题直接相关。一是已知物体运动的路程作为时间的函数，求物体在任意时刻的速度与加速度，反之，已知物体的加速度作为时间的函数，求速度与路程；二是求曲线的切线；三是求函数的最大值与最小值；四是求长度、面积、体积和重心等。历史上科学家们对这些问题的兴趣和研究经久不衰，终于在 17 世纪中叶，牛顿和莱布尼茨在前人探索与研究的基础上，凭着他们敏锐的直觉和丰富的想象力，各自独立地创立了微积分。

导数是微积分的核心内容之一，是现代数学的基本概念，蕴含着微积分的基本思想；导数定量地刻画了函数的局部变化，是研究函数增减、变化快慢、最大（小）值等性质的基本工具，因而在解决诸如增长率、膨胀率、效率、密度、速度、加速度等实际问题中有着广泛应用。

在本章，我们将通过丰富的实际背景和具体实例，学习导数的概念和导数的基本运算，体会导数的内涵与思想，感悟极限的思想。通过具体实例感受导数在研究函数和解决实际问题中的作用，体会导数的意义。



5.1 导数的概念及其意义

在必修第一册中，我们研究了函数的单调性，并利用函数单调性等知识定性地研究了一次函数、指数函数、对数函数增长速度的差异，知道“对数增长”是越来越慢的，“指数爆炸”比“直线上升”快得多. 进一步地，能否精确定量地刻画变化速度的快慢呢？下面我们就来研究这个问题.

5.1.1 变化率问题

问题 1 跳水运动员的速度

探究

在一次跳水运动中，某运动员在运动过程中的重心相对于水面的高度 h （单位：m）与起跳后的时间 t （单位：s）存在函数关系

$$h(t) = -4.9t^2 + 4.8t + 11.$$

如何描述运动员从起跳到入水的过程中运动的快慢程度呢？

直觉告诉我们，运动员从起跳到入水的过程中，在上升阶段运动得越来越慢，在下降阶段运动得越来越快. 我们可以把整个运动时间段分成许多小段，用运动员在每段时间内的平均速度 $\bar{v}$ 近似地描述他的运动状态.

例如，在 $0 \leq t \leq 0.5$ 这段时间里，

$$\bar{v} = \frac{h(0.5) - h(0)}{0.5 - 0} = 2.35(\text{m/s});$$

在 $1 \leq t \leq 2$ 这段时间里，

$$\bar{v} = \frac{h(2) - h(1)}{2 - 1} = -9.9(\text{m/s}).$$

一般地，在 $t_1 \leq t \leq t_2$ 这段时间里，

$$\bar{v} = \frac{h(t_2) - h(t_1)}{t_2 - t_1} = -4.9(t_1 + t_2) + 4.8.$$

思考

计算运动员在 $0 \leq t \leq \frac{48}{49}$ 这段时间里的平均速度，你发现了什么？你认为用平均速度描述运动员的运动状态有什么问题吗？

我们发现，运动员在 $0 \leq t \leq \frac{48}{49}$ 这段时间里的平均速度为 0. 显然，在这段时间内，运动员并不处于静止状态. 因此，用平均速度不能准确反映运动员在这一时间段里的运动状态.

为了精确刻画运动员的运动状态，需要引入瞬时速度的概念. 我们把物体在某一时刻的速度称为**瞬时速度** (instantaneous velocity).

探究

瞬时速度与平均速度有什么关系？你能利用这种关系求运动员在 $t=1$ s 时的瞬时速度吗？

设运动员在 t_0 时刻附近某一时间段内的平均速度是 $\bar{v}$ ，可以想象，如果不断缩短这一时间段的长度，那么 $\bar{v}$ 将越来越趋近于运动员在 t_0 时刻的瞬时速度.

为了求运动员在 $t=1$ 时的瞬时速度，我们在 $t=1$ 之后或之前，任意取一个时刻 $1+\Delta t$ ， Δt 是时间改变量，可以是正值，也可以是负值，但不为 0. 当 $\Delta t > 0$ 时， $1+\Delta t$ 在 1 之后；当 $\Delta t < 0$ 时， $1+\Delta t$ 在 1 之前. 当 $\Delta t > 0$ 时，把运动员在时间段 $[1, 1+\Delta t]$ 内近似看成做匀速直线运动，计算时间段 $[1, 1+\Delta t]$ 内的平均速度 $\bar{v}$ ，用平均速度 $\bar{v}$ 近似表示运动员在 $t=1$ 时的瞬时速度. 当 $\Delta t < 0$ 时，在时间段 $[1+\Delta t, 1]$ 内可作类似处理. 为了提高近似表示的精确度，我们不断缩短时间间隔，得到如下表格 (表 5.1-1).

用运动变化的观点研究问题是微积分的重要思想.

表 5.1-1

当 $\Delta t < 0$ 时，在时间段 $[1+\Delta t, 1]$ 内		当 $\Delta t > 0$ 时，在时间段 $[1, 1+\Delta t]$ 内	
Δt	$\bar{v} = \frac{h(1) - h(1+\Delta t)}{1 - (1+\Delta t)}$ $= \frac{4.9(\Delta t)^2 + 5\Delta t}{-\Delta t}$ $= -4.9\Delta t - 5$	Δt	$\bar{v} = \frac{h(1+\Delta t) - h(1)}{(1+\Delta t) - 1}$ $= \frac{-4.9(\Delta t)^2 - 5\Delta t}{\Delta t}$ $= -4.9\Delta t - 5$

续表

当 $\Delta t < 0$ 时, 在时间段 $[1+\Delta t, 1]$ 内		当 $\Delta t > 0$ 时, 在时间段 $[1, 1+\Delta t]$ 内	
-0.01	-4.951	0.01	-5.049
-0.001	-4.995 1	0.001	-5.004 9
-0.000 1	-4.999 51	0.000 1	-5.000 49
-0.000 01	-4.999 951	0.000 01	-5.000 049
-0.000 001	-4.999 995 1	0.000 001	-5.000 004 9
.....			

观察

给出 Δt 更多的值, 利用计算工具计算对应的平均速度 $\bar{v}$ 的值. 当 Δt 无限趋近于 0 时, 平均速度 $\bar{v}$ 有什么变化趋势?

我们发现, 当 Δt 无限趋近于 0, 即无论 t 从小于 1 的一边, 还是从大于 1 的一边无限趋近于 1 时, 平均速度 $\bar{v}$ 都无限趋近于 -5.

事实上, 由 $\bar{v} = \frac{h(1+\Delta t) - h(1)}{(1+\Delta t) - 1} = -4.9\Delta t - 5$ 可以发现, 当 Δt 无限趋近于 0 时, $-4.9\Delta t$ 也无限趋近于 0, 所以 $\bar{v}$ 无限趋近于 -5. 这与前面得到的结论一致. 数学中, 我们把 -5 叫做“当 Δt 无限趋近于 0 时, $\bar{v} = \frac{h(1+\Delta t) - h(1)}{\Delta t}$ 的极限”, 记为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(1+\Delta t) - h(1)}{\Delta t} = -5.$$

从物理的角度看, 当时间间隔 $|\Delta t|$ 无限趋近于 0 时, 平均速度 $\bar{v}$ 就无限趋近于 $t=1$ 时的瞬时速度. 因此, 运动员在 $t=1$ s 时的瞬时速度 $v(1) = -5$ m/s.

思考

- (1) 求运动员在 $t=2$ s 时的瞬时速度;
- (2) 如何求运动员从起跳到入水过程中在某一时刻 t_0 的瞬时速度?

练习

1. 求问题 1 中跳水运动员在 $t=0.5$ s 时的瞬时速度.
2. 火箭发射 t s 后, 其高度 (单位: m) 为 $h(t) = 0.9t^2$. 求:
 - (1) 在 $1 \leq t \leq 2$ 这段时间里, 火箭爬高的平均速度;
 - (2) 发射后第 10 s 时, 火箭爬高的瞬时速度.

3. 一个小球从 5 m 的高处自由下落, 其位移 y (单位: m) 与时间 t (单位: s) 之间的关系为 $y(t) = -4.9t^2$. 求 $t=1$ s 时小球的瞬时速度.

问题 2 抛物线的切线的斜率

我们知道, 如果一条直线与一个圆只有一个公共点, 那么这条直线与这个圆相切. 对于一般的曲线 C , 如何定义它的切线呢? 下面我们以抛物线 $f(x)=x^2$ 为例进行研究.

探究

你认为应该如何定义抛物线 $f(x)=x^2$ 在点 $P_0(1, 1)$ 处的切线?

与研究瞬时速度类似, 为了研究抛物线 $f(x)=x^2$ 在点 $P_0(1, 1)$ 处的切线, 我们通常在点 $P_0(1, 1)$ 的附近任取一点 $P(x, x^2)$, 考察抛物线 $f(x)=x^2$ 的割线 P_0P 的变化情况.

观察

如图 5.1-1, 当点 $P(x, x^2)$ 沿着抛物线 $f(x)=x^2$ 趋近于点 $P_0(1, 1)$ 时, 割线 P_0P 有什么变化趋势?

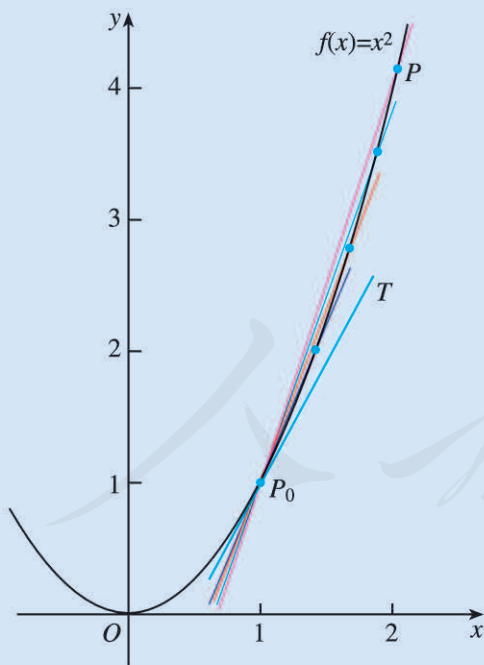


图 5.1-1

利用信息技术工具,
演示图 5.1-1 中 P_0P 的
动态变化趋势.

我们发现, 当点 P 无限趋近于点 P_0 时, 割线 P_0P 无限趋近于一个确定的位置, 这个确定位置的直线 P_0T 称为抛物线 $f(x)=x^2$ 在点 $P_0(1, 1)$ 处的切线.

探究

我们知道，斜率是确定直线的一个要素. 如何求抛物线 $f(x)=x^2$ 在点 $P_0(1, 1)$ 处的切线 P_0T 的斜率 k_0 呢？

从上述切线的定义可见，抛物线 $f(x)=x^2$ 在点 $P_0(1, 1)$ 处的切线 P_0T 的斜率与割线 P_0P 的斜率有内在联系. 记 $\Delta x = x - 1$ ，^① 则点 P 的坐标是 $(1 + \Delta x, (1 + \Delta x)^2)$. 于是，割线 P_0P 的斜率

$$k = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{(1 + \Delta x)^2 - 1}{(1 + \Delta x) - 1} = \Delta x + 2.$$

我们可以用割线 P_0P 的斜率 k 近似地表示切线 P_0T 的斜率 k_0 ，并且可以通过不断缩短横坐标间隔 $|\Delta x|$ 来提高近似表示的精确度，得到如下表格（表 5.1-2）.

表 5.1-2

$\Delta x < 0$		$\Delta x > 0$	
Δx	$k = \Delta x + 2$	Δx	$k = \Delta x + 2$
-0.01	1.99	0.01	2.01
-0.001	1.999	0.001	2.001
-0.000 1	1.999 9	0.000 1	2.000 1
-0.000 01	1.999 99	0.000 01	2.000 01
-0.000 001	1.999 999	0.000 001	2.000 001
.....			

观察

利用计算工具计算更多割线 P_0P 的斜率 k 的值，当 Δx 无限趋近于 0 时，割线 P_0P 的斜率 k 有什么变化趋势？

我们发现，当 Δx 无限趋近于 0 时，即无论 x 从小于 1 的一边，还是从大于 1 的一边无限趋近于 1 时，割线 P_0P 的斜率 k 都无限趋近于 2.

事实上，由 $k = \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \Delta x + 2$ 可以直接看出，当 Δx 无限趋近于 0 时， $\Delta x + 2$

无限趋近于 2. 我们把 2 叫做“当 Δx 无限趋近于 0 时， $k = \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x}$ 的极限”，记为

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = 2.$$

① Δx 可以是正值，也可以是负值，但不为 0.

从几何图形上看, 当横坐标间隔 $|\Delta x|$ 无限变小时, 点 P 无限趋近于点 P_0 , 于是割线 P_0P 无限趋近于点 P_0 处的切线 P_0T . 这时, 割线 P_0P 的斜率 k 无限趋近于点 P_0 处的切线 P_0T 的斜率 k_0 . 因此, 切线 P_0T 的斜率 $k_0=2$.

思考

观察问题 1 中的函数 $h(t)=-4.9t^2+4.8t+11$ 的图象(图 5.1-2), 平均速度

$$\bar{v} = \frac{h(1+\Delta t) - h(1)}{(1+\Delta t) - 1}$$

的几何意义是什么? 瞬时速度 $v(1)$ 呢?

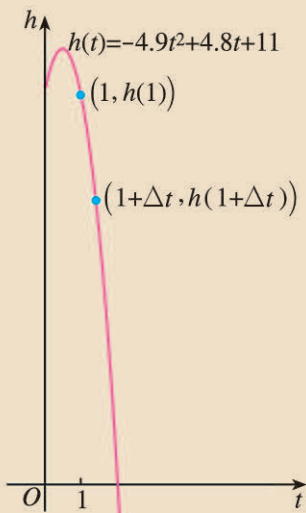


图 5.1-2

练习

1. 你认为应该怎样定义抛物线 $f(x)=x^2$ 在点 (x_0, x_0^2) 处的切线? 试求抛物线 $f(x)=x^2$ 在点 $(-1, 1)$ 处切线的斜率.
2. 求抛物线 $f(x)=x^2+1$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程.

5.1.2 导数的概念及其几何意义

前面我们研究了两类变化率问题: 一类是物理学中的问题, 涉及平均速度和瞬时速度; 另一类是几何学中的问题, 涉及割线斜率和切线斜率. 这两类问题来自不同的学科领域, 但在解决问题时, 都采用了由“平均变化率”逼近“瞬时变化率”的思想方法; 问题的答案也有一样的表示形式. 下面我们用上述思想方法研究更一般的问题.

对于函数 $y=f(x)$, 设自变量 x 从 x_0 变化到 $x_0+\Delta x$, 相应地, 函数值 y 就从 $f(x_0)$ 变化到 $f(x_0+\Delta x)$. 这时, x 的变化量为 Δx , y 的变化量为

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

我们把比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, 即

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

叫做函数 $y=f(x)$ 从 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 的平均变化率.

如果当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 无限趋近于一个确定的值, 即 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 有极限, 则称 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导, 并把这个确定的值叫做 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的**导数** (derivative) (也称为**瞬时变化率**), 记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$, 即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

由导数的定义可知, 问题 1 中运动员在 $t=1$ 时的瞬时速度 $v(1)$, 就是函数 $h(t) = -4.9t^2 + 4.8t + 11$ 在 $t=1$ 处的导数 $h'(1)$; 问题 2 中抛物线 $f(x) = x^2$ 在点 $P_0(1, 1)$ 处的切线 P_0T 的斜率 k_0 , 就是函数 $f(x) = x^2$ 在 $x=1$ 处的导数 $f'(1)$. 实际上, 导数可以描述任何运动变化事物的瞬时变化率, 如效率、交变电流、比热容等.

根据物体的路程关于时间的函数求速度与加速度和求已知曲线的切线这两类问题直接促使了导数的产生.

例 1 设 $f(x) = \frac{1}{x}$, 求 $f'(1)$.

$$\begin{aligned} \text{解: } f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+\Delta x} - 1}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{1+\Delta x} \right) = -1. \end{aligned}$$

例 2 将原油精炼为汽油、柴油、塑胶等各种不同产品, 需要对原油进行冷却和加热. 已知在第 x h 时, 原油的温度 (单位: $^{\circ}\text{C}$) 为 $y=f(x) = x^2 - 7x + 15$ ($0 \leq x \leq 8$). 计算第 2 h 与第 6 h 时, 原油温度的瞬时变化率, 并说明它们的意义.

解: 在第 2 h 和第 6 h 时, 原油温度的瞬时变化率就是 $f'(2)$ 和 $f'(6)$.

根据导数的定义,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\ &= \frac{(2+\Delta x)^2 - 7(2+\Delta x) + 15 - (2^2 - 7 \times 2 + 15)}{\Delta x} \\ &= \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2 - 7\Delta x}{\Delta x} \\ &= \Delta x - 3, \end{aligned}$$

所以

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x - 3) = -3.$$

同理可得

$$f'(6) = 5. \bullet$$

① 请同学们自己完成具体运算过程.

在第 2 h 与第 6 h 时, 原油温度的瞬时变化率分别为 $-3\text{ }^{\circ}\text{C/h}$ 与 $5\text{ }^{\circ}\text{C/h}$. 说明在第 2 h 附近, 原油温度大约以 $3\text{ }^{\circ}\text{C/h}$ 的速率下降; 在第 6 h 附近, 原油温度大约以 $5\text{ }^{\circ}\text{C/h}$ 的速率上升.

一般地, $f'(x_0)$ ($0 \leq x_0 \leq 8$) 反映了原油温度在时刻 x_0 附近的变化情况.

例 3 一辆汽车在公路上沿直线变速行驶, 假设 t s 时汽车的速度 (单位: m/s) 为 $y=v(t)=-t^2+6t+60$, 求汽车在第 2 s 与第 6 s 时的瞬时加速度, 并说明它们的意义.

分析: 瞬时加速度是速度关于时间的瞬时变化率. 因此, 在第 2 s 与第 6 s 时, 汽车的瞬时加速度分别为 $v'(2)$, $v'(6)$.

解: 在第 2 s 和第 6 s 时, 汽车的瞬时加速度就是 $v'(2)$ 和 $v'(6)$.

根据导数的定义,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta t} &= \frac{v(2+\Delta t)-v(2)}{\Delta t} \\ &= \frac{-(2+\Delta t)^2+6(2+\Delta t)+60-(-2^2+6\times 2+60)}{\Delta t} \\ &= -\Delta t+2,\end{aligned}$$

所以

$$v'(2)=\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (-\Delta t+2)=2.$$

同理可得

$$v'(6)=-6.$$

在第 2 s 与第 6 s 时, 汽车的瞬时加速度分别是 2 m/s^2 与 -6 m/s^2 . 说明在第 2 s 附近, 汽车的速度每秒大约增加 2 m/s ; 在第 6 s 附近, 汽车的速度每秒大约减少 6 m/s .

练习

1. 在例 2 中, 计算第 3 h 与第 5 h 时, 原油温度的瞬时变化率, 并说明它们的意义.
2. 设 $f(x)=x$, 求 $f'(1)$.
3. 一质点 A 沿直线运动, 位移 y (单位: m) 与时间 t (单位: s) 之间的关系为 $y(t)=2t^2+1$, 求质点 A 在 $t=2.7$ s 时的瞬时速度.
4. 设函数 $f(x)=x^2-1$. 求:
 - (1) 当自变量 x 由 1 变到 1.1 时, 函数的平均变化率;
 - (2) 函数在 $x=1$ 处的导数.

我们知道, 导数 $f'(x_0)$ 表示函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率, 反映了函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 附近的变化情况. 那么导数 $f'(x_0)$ 的几何意义是什么?

思考

观察函数 $y=f(x)$ 的图象 (图 5.1-3), 平均变化率

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

表示什么? 瞬时变化率

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

表示什么?

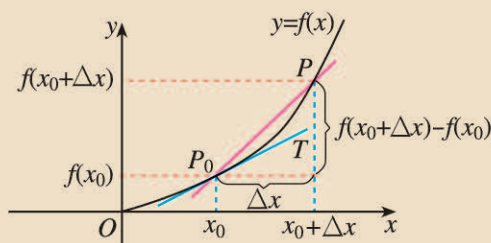


图 5.1-3

容易发现, 平均变化率

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

表示割线 P_0P 的斜率.

如图 5.1-4, 在曲线 $y=f(x)$ 上任取一点 $P(x, f(x))$, 如果当点 $P(x, f(x))$ 沿着曲线 $y=f(x)$ 无限趋近于点 $P_0(x_0, f(x_0))$ 时, 割线 P_0P 无限趋近于一个确定的位置, 这个确定位置的直线 P_0T 称为曲线 $y=f(x)$ 在点 P_0 处的**切线** (tangent line).

此处的切线定义与初中学过的圆的切线定义有什么不同?

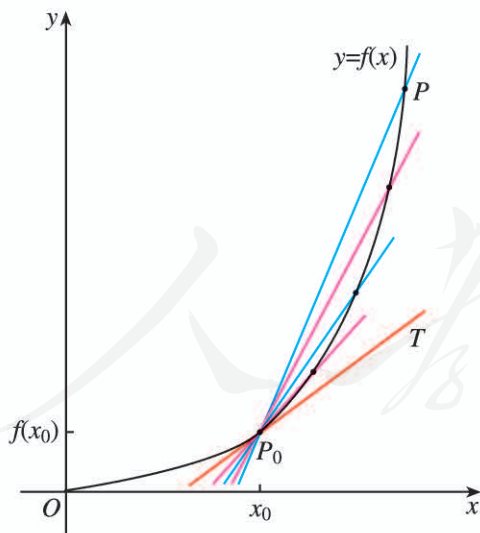


图 5.1-4

利用信息技术工具, 演示图 5.1-4 中 P_0P 的动态变化效果. 做一做, 看一看!

与问题 2 中抛物线的割线和切线之间的关系类似, 容易知道, 割线 P_0P 的斜率

$$k = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

记 $\Delta x = x - x_0$, 当点 P 沿着曲线 $y=f(x)$ 无限趋近于点 P_0 时, 即当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, k 无限趋

近于函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数. 因此, 函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 就是切线 P_0T 的斜率 k_0 , 即

$$k_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

这就是导数的几何意义.

继续观察图 5.1-4, 可以发现点 P_0 处的切线 P_0T 比任何一条割线更贴近点 P_0 附近的曲线. 进一步地, 利用信息技术工具将点 P_0 附近的曲线不断放大 (图 5.1-5), 可以发现点 P_0 附近的曲线越来越接近于直线. 因此, 在点 P_0 附近, 曲线 $y=f(x)$ 可以用点 P_0 处的切线 P_0T 近似代替. ①

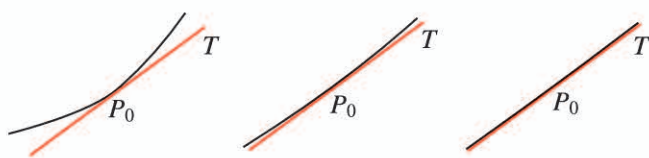


图 5.1-5

① 数学上常用简单的对象刻画复杂的对象. 例如, 用有理数 3.141 6 近似代替无理数 π . 这里, 我们用曲线上某点处的切线近似代替这一点附近的曲线, 这是微积分中重要的思想方法——以直代曲.

例 4 图 5.1-6 是跳水运动中某运动员的重心相对于水面的高度随时间变化的函数 $h(t) = -4.9t^2 + 4.8t + 11$ 的图象. 根据图象, 请描述、比较曲线 $h(t)$ 在 $t=t_0, t_1, t_2$ 附近的变化情况.

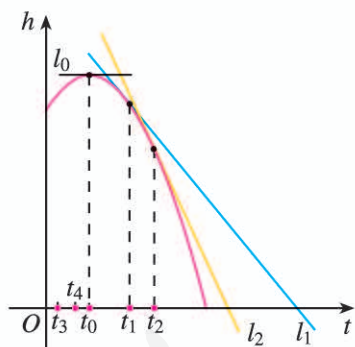


图 5.1-6

为使横轴中各点明确区分, 本图坐标系中横、纵轴的单位长度选取不一致.

解: 我们用曲线 $h(t)$ 在 $t=t_0, t_1, t_2$ 处的切线斜率, 刻画曲线 $h(t)$ 在上述三个时刻附近的变化情况.

(1) 当 $t=t_0$ 时, 曲线 $h(t)$ 在 $t=t_0$ 处的切线 l_0 平行于 t 轴, $h'(t_0)=0$. 这时, 在 $t=t_0$ 附近曲线比较平坦, 几乎没有升降.

(2) 当 $t=t_1$ 时, 曲线 $h(t)$ 在 $t=t_1$ 处的切线 l_1 的斜率 $h'(t_1)<0$. 这时, 在 $t=t_1$ 附近曲线下降, 即函数 $h(t)$ 在 $t=t_1$ 附近单调递减.

(3) 当 $t=t_2$ 时, 曲线 $h(t)$ 在 $t=t_2$ 处的切线 l_2 的斜率 $h'(t_2)<0$. 这时, 在 $t=t_2$ 附近曲线下降, 即函数 $h(t)$ 在 $t=t_2$ 附近也单调递减.

从图 5.1-6 可以看出, 直线 l_1 的倾斜程度小于直线 l_2 的倾斜程度, 这说明曲线 $h(t)$ 在 $t=t_1$ 附近比在 $t=t_2$ 附近下降得缓慢.

例 5 图 5.1-7 是人体血管中药物浓度 $c=f(t)$ (单位: mg/mL) 随时间 t (单位: min) 变化的函数图象. 根据图象, 估计 $t=0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ min 时, 血管中药物浓度的瞬时变化率 (精确到 0.1).

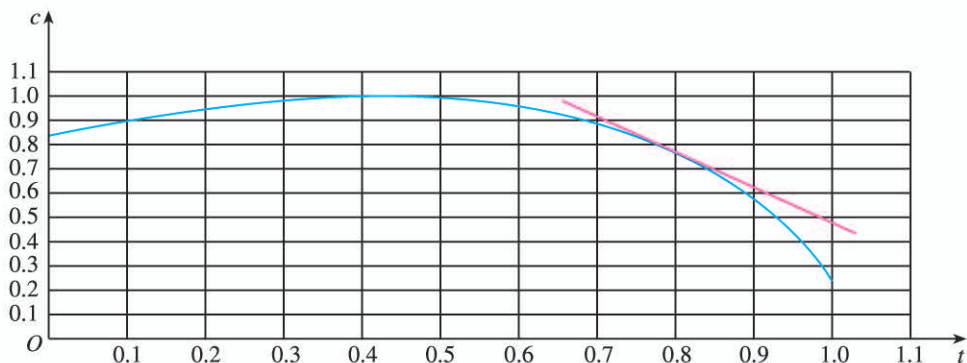


图 5.1-7

解: 血管中某一时刻药物浓度的瞬时变化率, 就是药物浓度 $f(t)$ 在此时刻的导数, 从图象上看, 它表示曲线 $f(t)$ 在此点处的切线的斜率.

如图 5.1-7, 画出曲线上某点处的切线, 利用网格估计这条切线的斜率, 可以得到此时刻药物浓度瞬时变化率的近似值.

作 $t=0.8$ 处的切线, 并在切线上取两点, 如 $(0.7, 0.91)$, $(1.0, 0.48)$, 则该切线的斜率

$$k = \frac{0.48 - 0.91}{1.0 - 0.7} \approx -1.4,$$

所以

$$f'(0.8) \approx -1.4.$$

表 5.1-3 给出了药物浓度的瞬时变化率的估计值.

表 5.1-3

t	0.2	0.4	0.6	0.8
药物浓度的瞬时变化率 $f'(t)$	0.4	0	-0.7	-1.4

从求函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处导数的过程可以看到, 当 $x=x_0$ 时, $f'(x_0)$ 是一个唯一确定的数. 这样, 当 x 变化时, $y=f'(x)$ 就是 x 的函数, 我们称它为 $y=f(x)$ 的 **导函数** (derived function) (简称**导数**). $y=f(x)$ 的导函数有时也记作 y' , 即

$$f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

练习

1. 根据图 5.1-6, 描述曲线 $h(t)$ 在 $t=t_3, t_4$ 附近增 (减) 以及增 (减) 快慢的情况.

2. 函数 $f(x)$ 的图象如图所示, 下列数值排序正确的是 ().

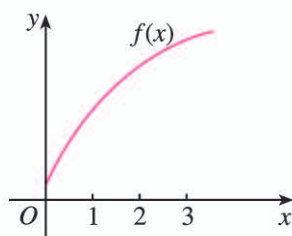
- (A) $f'(1) > f'(2) > f'(3) > 0$ (B) $f'(1) < f'(2) < f'(3) < 0$
(C) $0 < f'(1) < f'(2) < f'(3)$ (D) $f'(1) > f'(2) > 0 > f'(3)$

3. 求曲线 $y = -2x^2 + 1$ 在点 $(1, -1)$ 处的切线方程.

4. 吹气球时, 气球的半径 r (单位: dm) 与体积 V (单位: L) 之间的函数

关系是 $r(V) = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$. 利用信息技术工具, 画出 $0 \leq V \leq 5$ 时函数的图象, 并

根据其图象估计 $V = 0.6, 1.2$ L 时, 气球的瞬时膨胀率.



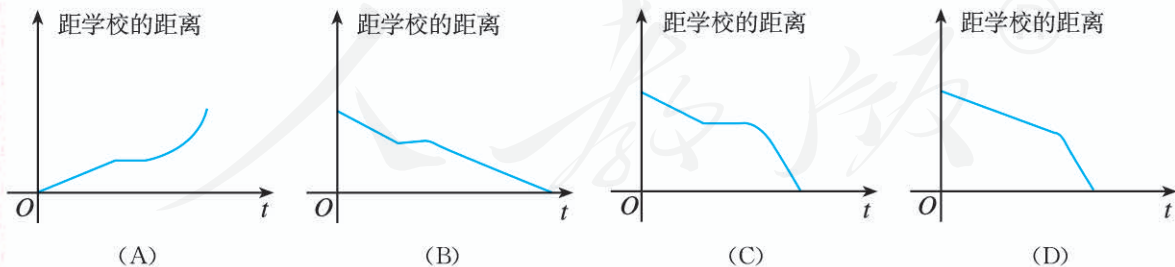
(第 2 题)

习题 5.1



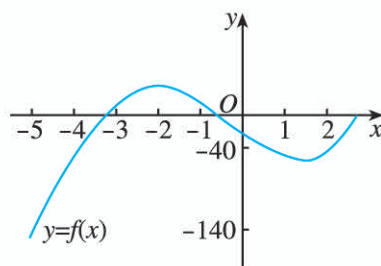
复习巩固

- 一个物体从 10 m 高处做自由落体运动, t s 时该物体距离地面的高度 (单位: m) 为 $h(t) = -4.9t^2 + 10$. 求该物体在 $t = 1$ 时的瞬时速度, 并解释此时物体的运动状况.
- 圆的面积 S (单位: cm^2) 与半径 R (单位: cm) 的关系为 $S = \pi R^2$. 求 $R = 5$ cm 时面积关于半径的瞬时变化率.
- 某质点沿直线运动, 位移 y (单位: m) 与时间 t (单位: s) 之间的关系为 $y(t) = 5t^2 + 6$. 求:
 - $2 \leq t \leq 3$ 这段时间内的平均速度;
 - $t = 2$ s 时的瞬时速度.
- 已知车轮旋转的角度 θ (单位: rad) 与时间 t (单位: s) 之间的关系为 $\theta(t) = \frac{25\pi}{8}t^2$. 求车轮转动开始后第 3.2 s 时的瞬时角速度.
- 小明骑车上学, 开始时匀速行驶, 途中因交通堵塞停留了一段时间, 后为了赶时间加快速度行驶. 与以上事件吻合得最好的图象是 ().



6. 如图, 试描述函数 $f(x)$ 在 $x = -5, -4, -2, 0, 1$ 附近的变化情况.

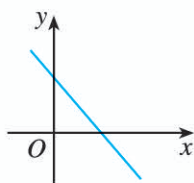
7. 求曲线 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ 在点 $(1, -\frac{3}{2})$ 处的切线的倾斜角.



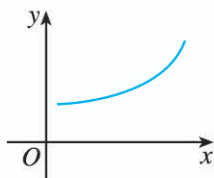
(第 6 题)

综合运用

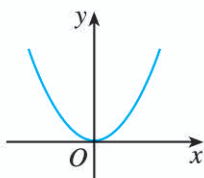
8. 一个质量为 $m=3\text{ kg}$ 的物体做直线运动, 设位移 y (单位: m) 与时间 t (单位: s) 之间的关系为 $y(t)=1+t^2$, 并且物体的动能 $E_k=\frac{1}{2}mv^2$. 求物体开始运动后第 5 s 时的动能.
9. 根据下面的文字叙述, 画出相应的路程关于时间的函数图象的大致形状.
- (1) 汽车在笔直的公路上匀速行驶;
 - (2) 汽车在笔直的公路上不断加速行驶;
 - (3) 汽车在笔直的公路上不断减速行驶.
10. 如图, 已知函数 $f(x)$ 的图象, 试画出其导函数 $f'(x)$ 图象的大致形状.



(1)



(2)



(3)

(第 10 题)

拓广探索

11. 在一次跳水运动中, $t\text{ s}$ 时运动员的重心相对于水面的高度 (单位: m) 是 $h(t)=-4.9t^2+4.8t+11$. 高度 h 关于时间 t 的导数是速度 v , 速度 v 关于时间 t 的导数 v' 的物理意义是什么? 试求 v, v' 关于时间 t 的函数解析式.
12. 根据下列条件, 分别画出函数 $y=f(x)$ 的图象在这点附近的大致形状:
- (1) $f(1)=-5, f'(1)=-1$; (2) $f(5)=10, f'(5)=15$;
 - (3) $f(10)=20, f'(10)=0$.

5.2 导数的运算

由导函数的定义可知, 一个函数的导数是唯一确定的. 在必修第一册中我们学过基本初等函数, 并且知道, 很多复杂的函数都是通过对这些函数进行加、减、乘、除等运算得到的. 由此自然想到, 能否先求出基本初等函数的导数, 然后研究出导数的“运算法则”, 这样就可以利用导数的运算法则和基本初等函数的导数求出复杂函数的导数. 本节我们就来研究这些问题.

5.2.1 基本初等函数的导数

根据导数的定义, 求函数 $y=f(x)$ 的导数, 就是求出当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 无限趋近的那个定值. 下面我们求几个常用函数的导数.

1. 函数 $y=f(x)=c$ 的导数

因为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x} = 0,$$

所以

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

若 $y=c$ (图 5.2-1) 表示路程关于时间的函数, 则 $y'=0$ 可以解释为某物体的瞬时速度始终为 0, 即一直处于静止状态.

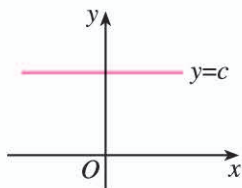


图 5.2-1

2. 函数 $y=f(x)=x$ 的导数

因为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} = 1,$$

所以

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

若 $y=x$ (图 5.2-2) 表示路程关于时间的函数, 则 $y'=1$ 可以解释为某物体做瞬时速度为 1 的匀速直线运动.

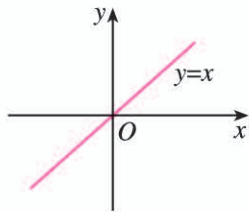


图 5.2-2

3. 函数 $y=f(x)=x^2$ 的导数

因为

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} \\ &= \frac{x^2+2x \cdot \Delta x+(\Delta x)^2-x^2}{\Delta x} \\ &= 2x+\Delta x,\end{aligned}$$

所以

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x+\Delta x) = 2x.$$

$y'=2x$ 表示函数 $y=x^2$ 的图象 (图 5.2-3) 上点 (x, y) 处切线的斜率为 $2x$, 说明随着 x 的变化, 切线的斜率也在变化. 另一方面, 从导数作为函数在一点的瞬时变化率来看, $y'=2x$ 表明: 当 $x<0$ 时, 随着 x 的增加, $|y'|$ 越来越小, $y=x^2$ 减少得越来越慢; 当 $x>0$ 时, 随着 x 的增加, $|y'|$ 越来越大, $y=x^2$ 增加得越来越快. 若 $y=x^2$ 表示路程关于时间的函数, 则 $y'=2x$ 可以解释为某物体做变速运动, 它在时刻 x 的瞬时速度为 $2x$.

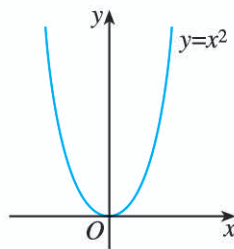


图 5.2-3

4. 函数 $y=f(x)=x^3$ 的导数

因为

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x} \\ &= \frac{x^3+3x^2 \cdot \Delta x+3x \cdot (\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x} \\ &= 3x^2+3x \cdot \Delta x+(\Delta x)^2,\end{aligned}$$

所以

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3x^2+3x \cdot \Delta x+(\Delta x)^2] = 3x^2.$$

$y'=3x^2$ 表示函数 $y=x^3$ 的图象 (图 5.2-4) 上点 (x, y) 处切线的斜率为 $3x^2$, 这说明随着 x 的变化, 切线的斜率也在变化, 且恒为非负数.

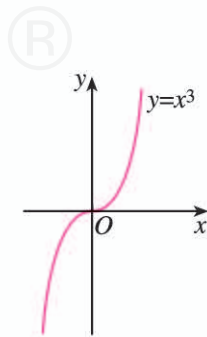


图 5.2-4

5. 函数 $y=f(x)=\frac{1}{x}$ 的导数

因为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x}$$

$$= \frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)\Delta x} = -\frac{1}{x^2 + x \cdot \Delta x},$$

所以

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2 + x \cdot \Delta x} \right) = -\frac{1}{x^2}.$$

探究

画出函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象. 根据图象, 描述它的变化情况, 并求出曲线在点 $(1, 1)$ 处的切线方程.

6. 函数 $y = f(x) = \sqrt{x}$ 的导数

因为

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}, \end{aligned}$$

所以

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

前面我们根据导数的定义求出了一些常用函数的导数. 一般地, 有下面的基本初等函数的导数公式表 (表 5.2-1), 这些公式可以直接使用.

表 5.2-1

基本初等函数的导数公式
1. 若 $f(x) = c$ (c 为常数), 则 $f'(x) = 0$;
2. 若 $f(x) = x^a$ ($a \in \mathbf{R}$, 且 $a \neq 0$), 则 $f'(x) = ax^{a-1}$;
3. 若 $f(x) = \sin x$, 则 $f'(x) = \cos x$;
4. 若 $f(x) = \cos x$, 则 $f'(x) = -\sin x$;
5. 若 $f(x) = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), 则 $f'(x) = a^x \ln a$; 特别地, 若 $f(x) = e^x$, 则 $f'(x) = e^x$;
6. 若 $f(x) = \log_a x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), 则 $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$; 特别地, 若 $f(x) = \ln x$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x}$.

例 1 求下列函数的导数:

(1) $y = x^{\frac{2}{3}}$; (2) $y = \log_2 x$.

解: (1) $y' = (x^{\frac{2}{3}})' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$;

(2) $y' = (\log_2 x)' = \frac{1}{x \ln 2}$.

例 2 假设某地在 20 年间的年均通货膨胀率为 5%，物价 p （单位：元）与时间 t （单位：年）之间的关系为

$$p(t) = p_0(1+5\%)^t,$$

其中 p_0 为 $t=0$ 时的物价. 假定某种商品的 $p_0=1$, 那么在第 10 个年头, 这种商品的价格上涨的速度大约是多少 (精确到 0.01 元/年)?

解: 根据基本初等函数的导数公式表, 有

$$p'(t) = 1.05^t \ln 1.05.$$

所以

$$p'(10) = 1.05^{10} \ln 1.05 \approx 0.08.$$

所以, 在第 10 个年头, 这种商品的价格约以 0.08 元/年的速度上涨.

?

如果某种商品的 $p_0=5$, 那么在第 10 个年头, 这种商品的价格上涨的速度大约是多少?

练习

1. 求下列函数的导数:

(1) $y = \frac{1}{x^4}$;

(2) $y = \sqrt[3]{x^4}$;

(3) $y = 3^x$;

(4) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$;

(5) $y = \log_4 x$;

(6) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

2. 求下列函数在给定点处的导数:

(1) $y = x^5$ 在 $x=3$ 处的导数;

(2) $y = \ln x$ 在 $x = \frac{2}{3}$ 处的导数;

(3) $y = \sin x$ 在 $x=2\pi$ 处的导数;

(4) $y = e^x$ 在 $x=0$ 处的导数.

3. 求余弦曲线 $y = \cos x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 处的切线方程.

4. 求曲线 $y = x^{\frac{1}{2}}$ 在点 $(4, 2)$ 处的切线方程.

5.2.2 导数的四则运算法则

在例2中, 当 $p_0=5$ 时, $p(t)=5 \times 1.05^t$. 这时, 求 p 关于 t 的导数可以看成求函数 $f(t)=5$ 与 $g(t)=1.05^t$ 乘积的导数. 一般地, 如何求两个函数的和、差、积、商的导数呢?

探究

设 $f(x)=x^2$, $g(x)=x$, 计算 $[f(x)+g(x)]'$ 与 $[f(x)-g(x)]'$, 它们与 $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 有什么关系? 再取几组函数试试, 上述关系仍然成立吗? 由此你能想到什么?

设 $y=f(x)+g(x)=x^2+x$, 因为

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x) - (x^2 + x)}{\Delta x} \\ &= \frac{(\Delta x)^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x}{\Delta x} \\ &= \Delta x + 2x + 1,\end{aligned}$$

所以

$$[f(x)+g(x)]' = y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 2x + 1) = 2x + 1.$$

而

$$f'(x) = (x^2)' = 2x, \quad g'(x) = x' = 1,$$

所以

$$[f(x)+g(x)]' = f'(x) + g'(x).$$

同样地, 对于上述函数, $[f(x)-g(x)]' = f'(x) - g'(x)$.

一般地, 对于两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的和 (或差) 的导数, 我们有如下法则:

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x).$$

例3 求下列函数的导数:

(1) $y=x^3-x+3$; (2) $y=2^x+\cos x$.

解: (1) $y' = (x^3 - x + 3)'$
 $= (x^3)' - (x)' + (3)'$
 $= 3x^2 - 1;$

(2) $y' = (2^x + \cos x)'$
 $= (2^x)' + (\cos x)'$
 $= 2^x \ln 2 - \sin x.$

思考

设 $f(x)=x^2$, $g(x)=x$, 计算 $[f(x)g(x)]'$ 与 $f'(x)g'(x)$, 它们是否相等?
 $f(x)$ 与 $g(x)$ 商的导数是否等于它们导数的商呢?

通过计算可知, $[f(x)g(x)]'=(x^3)'=3x^2$, $f'(x)g'(x)=2x \cdot 1=2x$, 因此
 $[f(x)g(x)]' \neq f'(x)g'(x)$. 同样地, $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'$ 与 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 也不相等.

事实上, 对于两个函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的乘积 (或商) 的导数, 我们有如下法则:

$$\begin{aligned}[f(x)g(x)]' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x); \\ \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \quad (g(x) \neq 0).\end{aligned}$$

由函数的乘积的导数法则可以得出

$$[cf(x)]' = c'f(x) + cf'(x) = cf'(x),$$

也就是说, 常数与函数的积的导数, 等于常数与函数的导数的积, 即

$$[cf(x)]' = cf'(x).$$

例 4 求下列函数的导数:

$$(1) y = x^3 e^x; \quad (2) y = \frac{2 \sin x}{x^2}.$$

$$\begin{aligned}\text{解: } (1) y' &= (x^3 e^x)' \\ &= (x^3)' e^x + x^3 (e^x)' \\ &= 3x^2 e^x + x^3 e^x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) y' &= \left(\frac{2 \sin x}{x^2}\right)' \\ &= \frac{(2 \sin x)' x^2 - 2 \sin x (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{2x^2 \cos x - 4x \sin x}{x^4} \\ &= \frac{2x \cos x - 4 \sin x}{x^3}.\end{aligned}$$

例 5 日常生活中的饮用水通常是经过净化的. 随着水的纯净度的提高, 所需净化费用不断增加. 已知将 1 t 水净化到纯净度为 $x\%$ 时所需费用 (单位: 元) 为

$$c(x) = \frac{5284}{100-x} \quad (80 < x < 100).$$

求净化到下列纯净度时, 所需净化费用的瞬时变化率:

$$(1) 90\%; \quad (2) 98\%.$$

解：净化费用的瞬时变化率就是净化费用函数的导数.

$$\begin{aligned}c'(x) &= \left(\frac{5284}{100-x} \right)' \\&= \frac{5284' \times (100-x) - 5284 \times (100-x)'}{(100-x)^2} \\&= \frac{0 \times (100-x) - 5284 \times (-1)}{(100-x)^2} \\&= \frac{5284}{(100-x)^2}.\end{aligned}$$

(1) 因为 $c'(90) = \frac{5284}{(100-90)^2} = 52.84$, 所以, 净化到纯净度为 90% 时, 净化费用的瞬时变化率是 52.84 元/吨.

(2) 因为 $c'(98) = \frac{5284}{(100-98)^2} = 1321$, 所以, 净化到纯净度为 98% 时, 净化费用的瞬时变化率是 1321 元/吨.

函数 $f(x)$ 在某点处导数的大小表示函数在此点附近变化的快慢. 由上述计算可知, $c'(98) = 25c'(90)$. 它表示净化到纯净度为 98% 左右时净化费用的变化率, 大约是净化到纯净度为 90% 左右时净化费用变化率的 25 倍. 这说明, 水的纯净度越高, 需要的净化费用就越多, 而且净化费用增加的速度也越快.

练习

- 运用基本初等函数的导数公式与导数运算法则, 重新求解 5.1 节例 2. 你是否感觉到运算法则给解题带来的方便简捷?
- 求下列函数的导数:
 - $y = 2x^3 - 3x^2 - 4$;
 - $y = 3\cos x + 2^x$;
 - $y = e^x \ln x$;
 - $y = (x^2 + 2x)\sqrt{x}$;
 - $y = \frac{\ln x}{x}$;
 - $y = \tan x$.
- 求曲线 $y = x^2 + \frac{3}{x}$ 在点 $(1, 4)$ 处的切线方程.

5.2.3 简单复合函数的导数

思考

如何求函数 $y = \ln(2x-1)$ 的导数呢?

函数 $y=\ln(2x-1)$ 不是由基本初等函数通过加、减、乘、除运算得到的，所以无法用现有的方法求它的导数。下面，我们先分析这个函数的结构特点。

若设 $u=2x-1$ ($x>\frac{1}{2}$)，则 $y=\ln u$ 。从而 $y=\ln(2x-1)$ 可以看成是由 $y=\ln u$ 和 $u=2x-1$ ($x>\frac{1}{2}$) 经过“复合”得到的，即 y 可以通过中间变量 u 表示为自变量 x 的函数。

如果把 y 与 u 的关系记作 $y=f(u)$ ， u 与 x 的关系记作 $u=g(x)$ ，那么这个“复合”过程可表示为

$$y=f(u)=f(g(x))=\ln(2x-1).$$

一般地，对于两个函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ ，如果通过中间变量 u ， y 可以表示成 x 的函数，那么称这个函数为函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的**复合函数** (composite function)，记作 $y=f(g(x))$ 。

我们遇到的许多函数都可以看成是由两个函数经过“复合”得到的。例如，函数 $y=\ln(2x-1)$ 由 $y=\ln u$ 和 $u=2x-1$ ($x>\frac{1}{2}$) 复合而成。又如，函数 $y=\sin 2x$ 由 $y=\sin u$ 和 $u=2x$ 复合而成。

如何求复合函数的导数呢？我们先来研究 $y=\sin 2x$ 的导数。

一个合理的猜想是，函数 $y=\sin 2x$ 的导数一定与函数 $y=\sin u$ ， $u=2x$ 的导数有关。下面我们就来研究这种关系。

以 y'_x 表示 y 对 x 的导数， y'_u 表示 y 对 u 的导数， u'_x 表示 u 对 x 的导数。一方面，

$$\begin{aligned} y'_x &= (\sin 2x)' = (2\sin x \cos x)' \\ &= 2[(\sin x)' \cdot \cos x + \sin x \cdot (\cos x)'] \\ &= 2[\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x)] \\ &= 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= 2\cos 2x. \end{aligned}$$

另一方面， $y'_u = (\sin u)' = \cos u$ ， $u'_x = (2x)' = 2$ 。

可以发现， $y'_x = 2\cos 2x = \cos u \cdot 2 = y'_u \cdot u'_x$ 。

一般地，对于由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的函数 $y=f(g(x))$ ，它的导数与函数 $y=f(u)$ ， $u=g(x)$ 的导数间的关系为

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

即 y 对 x 的导数等于 y 对 u 的导数与 u 对 x 的导数的乘积。

例 6 求下列函数的导数：

$$(1) y=(3x+5)^3; \quad (2) y=e^{-0.05x+1};$$

$$(3) y=\ln(2x-1).$$

解：(1) 函数 $y=(3x+5)^3$ 可以看作函数 $y=u^3$ 和 $u=3x+5$ 的复合函数. 根据复合函数的求导法则, 有

$$\begin{aligned}y'_x &= y'_u \cdot u'_x \\&= (u^3)' \cdot (3x+5)' \\&= 3u^2 \times 3 \\&= 9(3x+5)^2.\end{aligned}$$

(2) 函数 $y=e^{-0.05x+1}$ 可以看作函数 $y=e^u$ 和 $u=-0.05x+1$ 的复合函数. 根据复合函数的求导法则, 有

$$\begin{aligned}y'_x &= y'_u \cdot u'_x \\&= (e^u)' \cdot (-0.05x+1)' \\&= -0.05e^u \\&= -0.05e^{-0.05x+1}.\end{aligned}$$

(3) 函数 $y=\ln(2x-1)$ 可以看作函数 $y=\ln u$ 和 $u=2x-1$ ($x>\frac{1}{2}$) 的复合函数. 根据复合函数的求导法则, 有

$$\begin{aligned}y'_x &= y'_u \cdot u'_x \\&= (\ln u)' \cdot (2x-1)' \\&= \frac{1}{u} \times 2 \\&= \frac{2}{2x-1}.\end{aligned}$$

例 7 某个弹簧振子在振动过程中的位移 y (单位: mm) 与时间 t (单位: s) 之间的关系为 $y=18\sin\left(\frac{2\pi}{3}t-\frac{\pi}{2}\right)$. 求函数 y 在 $t=3$ s 时的导数, 并解释它的实际意义.

解：函数 $y=18\sin\left(\frac{2\pi}{3}t-\frac{\pi}{2}\right)$ 可以看作函数 $y=18\sin u$ 和 $u=\frac{2\pi}{3}t-\frac{\pi}{2}$ 的复合函数, 根据复合函数的求导法则, 有

$$\begin{aligned}y'_t &= y'_u \cdot u'_t \\&= (18\sin u)' \cdot \left(\frac{2\pi}{3}t-\frac{\pi}{2}\right)' \\&= 18\cos u \times \frac{2\pi}{3} \\&= 12\pi\cos\left(\frac{2\pi}{3}t-\frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

$$\text{当 } t=3 \text{ 时, } y'_t=12\pi\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0.$$

它表示当 $t=3$ s 时, 弹簧振子振动的瞬时速度为 0 mm/s.

练习

1. 求下列函数的导数:

$$(1) y = \frac{2}{\sqrt{3x+1}}; \quad (2) y = (1-2x)^3; \quad (3) y = \log_2(2x+1);$$

$$(4) y = \cos \frac{x}{3}; \quad (5) y = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right); \quad (6) y = 2^{2x+1}.$$

2. 求下列函数在给定点处的导数:

$$(1) y = e^{-2x+1} \text{ 在 } x = \frac{1}{2} \text{ 处的导数};$$

$$(2) y = \ln(5x+2) \text{ 在 } x=1 \text{ 处的导数}.$$

3. 求曲线 $y = \sqrt[3]{3x-1}$ 在点 $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ 处的切线方程.

习题 5.2



复习巩固

1. 求下列函数的导数:

$$(1) y = 2x^3 - 3x^2 + 5;$$

$$(2) y = \frac{2}{x} + \frac{4}{x+1};$$

$$(3) y = 2^x + \log_2 x;$$

$$(4) y = x^5 e^x;$$

$$(5) y = \frac{x^3 - 1}{\sin x};$$

$$(6) y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}.$$

2. 求下列函数的导数:

$$(1) y = (x+1)^{99};$$

$$(2) y = \frac{x}{\sqrt{2x+1}};$$

$$(3) y = (2x-3)\sin(2x+5);$$

$$(4) y = \frac{\cos(3x-2)}{2x};$$

$$(5) y = (3x+1)^2 \ln(3x);$$

$$(6) y = 3^x e^{-3x}.$$

3. 已知函数 $f(x) = 13 - 8x + \sqrt{2}x^2$, 且 $f'(x_0) = 4$, 求 x_0 .

4. 已知函数 $y = x \ln x$.

(1) 求这个函数的导数;

(2) 求这个函数的图象在点 $(1, 0)$ 处的切线方程.

5. 求曲线 $y = \frac{\sin x}{x}$ 在点 $M(\pi, 0)$ 处的切线方程.



综合运用

6. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin x - \cos x$, 求 $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 处的导数.

7. 设函数 $f(x) = 1 - e^x$ 的图象与 x 轴相交于点 P , 求该曲线在点 P 处的切线方程.

8. 已知函数 $f(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - 3 \ln x$, 求 $f(x)$ 的导数, 并求出 $f'(x) > 0$ 的解集.

9. 氦气是一种由地表自然散发的无味的放射性气体. 如果最初有 500 g 氦气, 那么 t 天后, 氦气的剩余量为 $A(t)=500 \times 0.834^t$ g.

(1) 氦气的散发速度是多少?

(2) $A'(7)$ 的值是什么 (精确到 0.1)? 它表示什么意义?

10. 设某高山滑雪运动员在一次滑雪训练中滑行的路程 l (单位: m) 与时间 t (单位: s) 之间的

关系为 $l(t)=2t^2+\frac{3}{2}t$.

(1) 求 l 关于 t 的导数, 并解释它的实际意义;

(2) 当 $t=3$ s 时, 求运动员的滑雪速度;

(3) 当运动员的滑雪路程为 38 m 时, 求此时的滑雪速度.

拓广探索

11. 设曲线 $y=e^{2ax}$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线与直线 $2x-y+1=0$ 垂直, 求 a 的值.

12. 请按步骤, 完成下面的任务.

(1) 利用信息技术工具, 分别画出 $h=1, 0.5, 0.1, 0.05$ 时, 函数 $y=\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ 的图象.

(2) 画出函数 $y=\cos x$ 的图象, 并与上面的四个图象比较, 当 h 越来越小时, 你观察到了什么?

(3) 猜测 $y=\sin x$ 的导数, 它与基本初等函数的导数公式表中 $\sin x$ 的导数公式一样吗?

13. 某海湾拥有世界上最大的海潮. 假设在该海湾某一固定点处, 大海水深 d (单位: m) 与午夜后的时间 t (单位: h)

之间的关系为 $d(t)=10+4\cos \frac{\pi}{6}t$. 求下列时刻此固定点

的水位变化速度 (精确到 0.01 m/h):

(1) 上午 6:00;

(2) 上午 10:00;

(3) 中午 12:00;

(4) 下午 4:00.



探究与发现

牛顿法——用导数方法求方程的近似解

人们很早以前就开始探索高次方程的数值求解问题. 牛顿 (Isaac Newton, 1643—1727) 在《流数法》一书中, 给出了高次代数方程的一种数值解法——牛顿法. 这种求方程根的方法, 在科学界已被广泛采用.

下面, 我们看看如何求方程 $\frac{1}{15}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + 2x - \frac{12}{5} = 0$ 的根.

从函数的观点看, 方程 $\frac{1}{15}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + 2x - \frac{12}{5} = 0$ 的根就是函数 $f(x) = \frac{1}{15}x^3 -$

$\frac{3}{5}x^2+2x-\frac{12}{5}$ 的零点. 从图形上看, 一个函数的零点 r 就是函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴的交点的横坐标 (图 1). 那么, 如何求 r 的值呢?

如果可以找到一步一步逼近 r 的 $x_0, x_1, \dots, x_n$, 使得当 n 很大时, $|x_n - r|$ 很小, 那么, 我们就可以把 x_n 的值作为 r 的近似值, 即把 x_n 作为方程 $f(x)=0$ 的近似解.

牛顿用“作切线”的方法找到了这一串 $x_0, x_1, \dots, x_n$. 当然, 要有一个起始点, 比如, 我们从 $x_0=6$ 开始.^①

如图 1, 在横坐标为 x_0 的点处作 $f(x)$ 的切线, 切线与 x 轴交点的横坐标就是 x_1 ; 用 x_1 代替 x_0 重复上面的过程得到 x_2 ; 一直继续下去, 得到 $x_0, x_1, \dots, x_n$. 从图形上我们可以看到, x_1 较 x_0 接近 r , x_2 较 x_1 接近 r , 等等. 它们越来越逼近 r . 接下来的任务是计算 x_n . 我们知道, $f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率是 $f'(x_0)$, 因此切线方程为

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

如果 $f'(x_0) \neq 0$, 那么切线与 x 轴交点的横坐标是

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

继续这个过程, 就可以推导出如下求方程根的牛顿法公式:

如果 $f'(x_{n-1}) \neq 0$, 那么

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}. \quad ②$$

对于一个给定的精确度, 你能根据上述公式, 求出方程 $\frac{1}{15}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + 2x - \frac{12}{5} = 0$ 的近似解吗?

进一步思考以下问题:

1. 不同的初始值对求方程的近似解有影响吗? 如果有, 影响在什么地方?

2. 你还知道其他求方程近似解的方法吗? 你认为牛顿法的优点和缺点是什么?

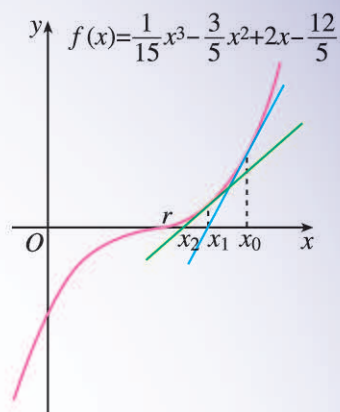


图 1

① 起始点当然是越接近零点越好, 我们可以事先对零点作一个估计. 如果使用信息技术工具, 这种估计是比较容易的.

② 请同学们自己推导.

5.3 导数在研究函数中的应用

在必修第一册中，我们通过图象直观，利用不等式、方程等知识，研究了函数的单调性、周期性、奇偶性以及最大(小)值等性质. 在本章前两节中，我们学习了导数的概念和运算，知道导数是关于瞬时变化率的数学表达，它定量地刻画了函数的局部变化. 能否利用导数更加精确地研究函数的性质呢？本节我们就来讨论这个问题.

5.3.1 函数的单调性

我们先来研究前面学习过的跳水问题.

思考

图 5.3-1(1) 是某跳水运动员的重心相对于水面的高度 h 随时间 t 变化的函数 $h(t) = -4.9t^2 + 4.8t + 11$ 的图象，图 5.3-1(2) 是跳水运动员的速度 v 随时间 t 变化的函数 $v(t) = h'(t) = -9.8t + 4.8$ 的图象. $a = \frac{24}{49}$, b 是函数 $h(t)$ 的零点.

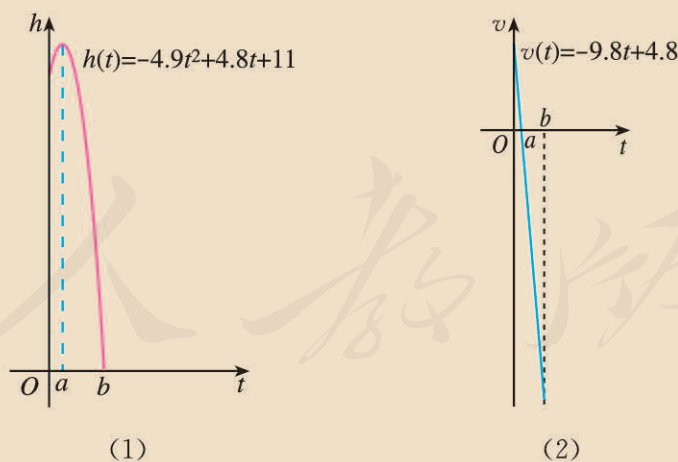


图 5.3-1

运动员从起跳到最高点，以及从最高点到入水这两段时间的运动状态有什么区别？如何从数学上刻画这种区别？

观察图象可以发现：

(1) 从起跳到最高点，运动员的重心处于上升状态，离水面的高度 h 随时间 t 的增加

而增加, 即 $h(t)$ 单调递增. 相应地, $v(t)=h'(t)>0$.

(2) 从最高点入水, 运动员的重心处于下降状态, 离水面的高度 h 随时间 t 的增加而减小, 即 $h(t)$ 单调递减. 相应地, $v(t)=h'(t)<0$.

思考

我们看到, 函数 $h(t)$ 的单调性与 $h'(t)$ 的正负有内在联系. 那么, 我们能否由 $h'(t)$ 的正负来判断函数 $h(t)$ 的单调性呢?

对于上述跳水问题, 可以发现:

当 $t \in (0, a)$ 时, $h'(t) > 0$, 函数 $h(t)$ 的图象是“上升”的, 函数 $h(t)$ 在 $(0, a)$ 内单调递增;

当 $t \in (a, b)$ 时, $h'(t) < 0$, 函数 $h(t)$ 的图象是“下降”的, 函数 $h(t)$ 在 (a, b) 内单调递减.

这种情况是否具有一般性呢?

观察

观察下面一些函数的图象 (图 5.3-2), 探讨函数的单调性与导数的正负的关系.

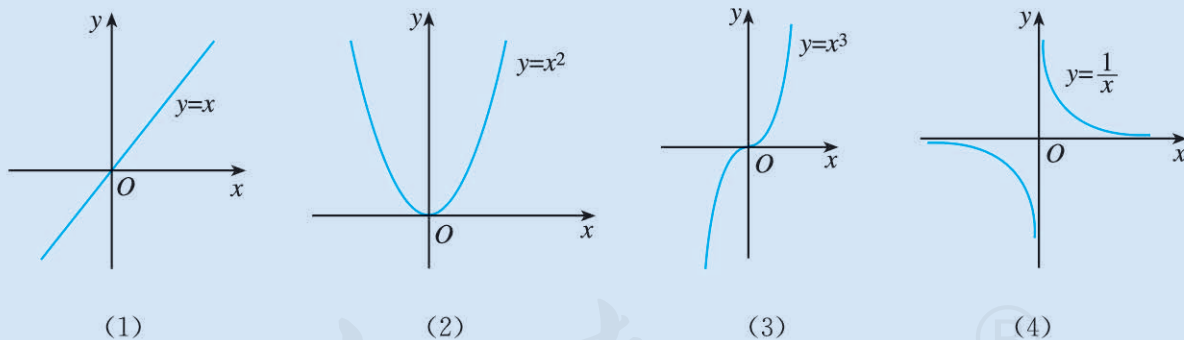


图 5.3-2

如图 5.3-3, 导数 $f'(x_0)$ 表示函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率. 可以发现:

在 $x=x_0$ 处, $f'(x_0) > 0$, 切线是“左下右上”的上升式, 函数 $f(x)$ 的图象也是上升的, 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 附近单调递增;

在 $x=x_1$ 处, $f'(x_1) < 0$, 切线是“左上右下”的下降式, 函数 $f(x)$ 的图象也是下降的, 函数 $f(x)$ 在 $x=x_1$ 附近单调递减.

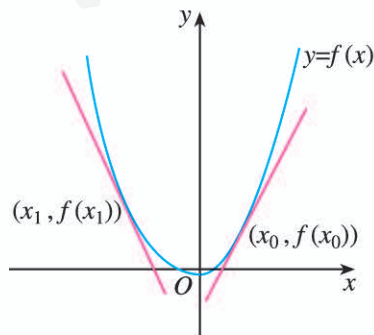


图 5.3-3

一般地, 函数 $f(x)$ 的单调性与导函数 $f'(x)$ 的正负之间具有如下的关系:

在某个区间 (a, b) 内, 如果 $f'(x) > 0$, 那么函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调递增;

在某个区间 (a, b) 内, 如果 $f'(x) < 0$, 那么函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调递减.

如果在某个区间上恒有 $f'(x) = 0$, 那么函数 $f(x)$ 有什么特性?

例 1 利用导数判断下列函数的单调性:

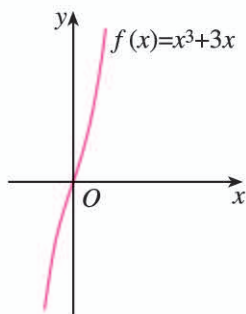
(1) $f(x) = x^3 + 3x$; (2) $f(x) = \sin x - x, x \in (0, \pi)$;

(3) $f(x) = \frac{x-1}{x}$.

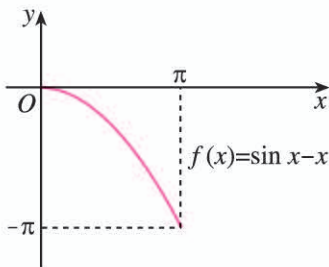
解: (1) 因为 $f(x) = x^3 + 3x$, 所以

$$f'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1) > 0.$$

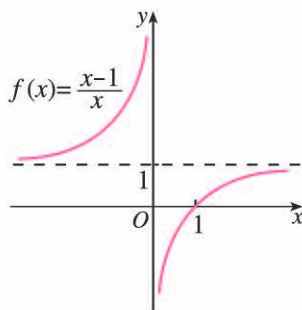
所以, 函数 $f(x) = x^3 + 3x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 如图 5.3-4(1) 所示.



(1)



(2)



(3)

图 5.3-4

(2) 因为 $f(x) = \sin x - x, x \in (0, \pi)$, 所以

$$f'(x) = \cos x - 1 < 0.$$

所以, 函数 $f(x) = \sin x - x$ 在 $(0, \pi)$ 内单调递减, 如图 5.3-4(2) 所示.

(3) 因为 $f(x) = 1 - \frac{1}{x}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 所以

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0.$$

所以, 函数 $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 如图 5.3-4(3) 所示.

例 2 已知导函数 $f'(x)$ 的下列信息:

当 $1 < x < 4$ 时, $f'(x) > 0$;

当 $x < 1$, 或 $x > 4$ 时, $f'(x) < 0$;

当 $x = 1$, 或 $x = 4$ 时, $f'(x) = 0$.

试画出函数 $f(x)$ 图象的大致形状.

解: 当 $1 < x < 4$ 时, $f'(x) > 0$, 可知 $f(x)$ 在区间 $(1, 4)$ 内单调递增;

当 $x < 1$, 或 $x > 4$ 时, $f'(x) < 0$, 可知 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 和 $(4, +\infty)$ 上都单调递减;

当 $x=1$, 或 $x=4$ 时, $f'(x)=0$, 这两点比较特殊, 我们称它们为“稳定点”.

综上, 函数 $f(x)$ 图象的大致形状如图 5.3-5 所示.

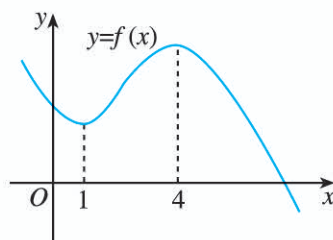


图 5.3-5

思考

请同学们回顾一下函数单调性的定义, 并思考在某个区间上单调的函数 $y=f(x)$ 的平均变化率的几何意义与 $f'(x)$ 的正负的关系.

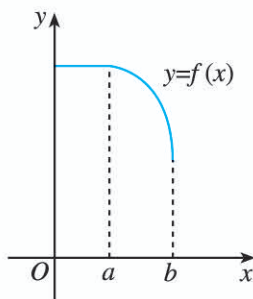
练习

1. 判断下列函数的单调性:

(1) $f(x)=x^2-2x+4$; (2) $f(x)=e^x-x$.

2. 利用导数讨论二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的单调区间.

3. 函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示, 试画出函数 $y=f'(x)$ 在区间 $(0, b)$ 内图象的大致形状.



(第3题)

形如 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a \neq 0$) 的函数应用广泛, 下面我们利用导数来研究这类函数的单调性.

例3 求函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1$ 的单调区间.

解: 函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$. 对 $f(x)$ 求导数, 得

$$f'(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2).$$

令 $f'(x)=0$, 解得

$$x=-1, \text{ 或 } x=2.$$

$x=-1$ 和 $x=2$ 把函数定义域划分成三个区间, $f'(x)$ 在各区间上的正负, 以及 $f(x)$ 的单调性如表 5.3-1 所示.

表 5.3-1

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递增	$f(-1)=\frac{13}{6}$	单调递减	$f(2)=-\frac{7}{3}$	单调递增

所以, $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-1, 2)$ 内单调递减, 如图 5.3-6 所示.

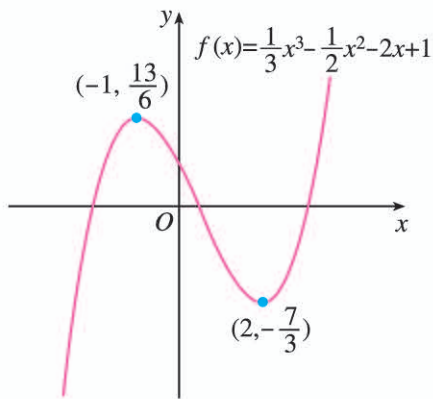


图 5.3-6

如果不用导数的方法, 直接运用单调性的定义, 你如何求解本题? 运算过程麻烦吗? 你有什么体会?

一般情况下, 我们可以通过如下步骤判断函数 $y=f(x)$ 的单调性:

第 1 步, 确定函数的定义域;

第 2 步, 求出导数 $f'(x)$ 的零点;

第 3 步, 用 $f'(x)$ 的零点将 $f(x)$ 的定义域划分为若干个区间, 列表给出 $f'(x)$ 在各区间上的正负, 由此得出函数 $y=f(x)$ 在定义域内的单调性.

探究

研究对数函数 $y=\ln x$ 与幂函数 $y=x^3$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上增长快慢的情况.

对数函数 $y=\ln x$ 的导数为 $y'=\frac{1}{x}>0$ ($x\in(0, +\infty)$), 所以 $y=\ln x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 当 x 越来越大时, $y'=\frac{1}{x}$ 越来越小, 所以函数 $y=\ln x$ 递增得越来越慢, 图象上升得越来越“平缓”(如图 5.3-7 (1)).

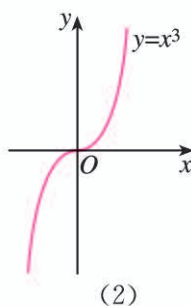
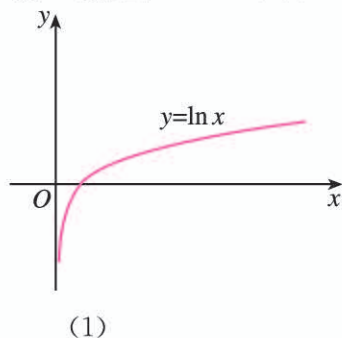


图 5.3-7

幂函数 $y=x^3$ 的导数为 $y'=3x^2>0$ ($x\in(0, +\infty)$), 所以 $y=x^3$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 当 x 越来越大时, $y'=3x^2$ 越来越大, 函数 $y=x^3$ 递增得越来越快, 图象上升得越来越“陡峭”(如图 5.3-7 (2)).

一般地, 如果一个函数在某一范围内导数的绝对值较大, 那么函数在这个范围内变化得较快, 这时函数的图象就比较“陡峭”(向上或向下); 反之, 函数在这个范围内变化得较慢, 函数的图象就比较“平缓”.

例 4 设 $x>0$, $f(x)=\ln x$, $g(x)=1-\frac{1}{x}$, 两个函数的图象如图 5.3-8 所示. 判断 $f(x)$, $g(x)$ 的图象与 C_1, C_2 之间的对应关系.

解: 因为 $f(x)=\ln x$, $g(x)=1-\frac{1}{x}$, 所以

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad g'(x) = \frac{1}{x^2}.$$

当 $x=1$ 时, $f'(x)=g'(x)=1$;

当 $0<x<1$ 时, $g'(x)>f'(x)>1$;

当 $x>1$ 时, $0<g'(x)<f'(x)<1$.

所以, $f(x), g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上都是增函数. 在区间 $(0, 1)$ 内, $g(x)$ 的图象比 $f(x)$ 的图象要“陡峭”; 在区间 $(1, +\infty)$ 上, $g(x)$ 的图象比 $f(x)$ 的图象要“平缓”.

所以, $f(x), g(x)$ 的图象依次是图 5.3-8 中的 C_2, C_1 .

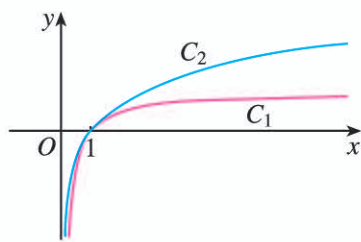


图 5.3-8

练习

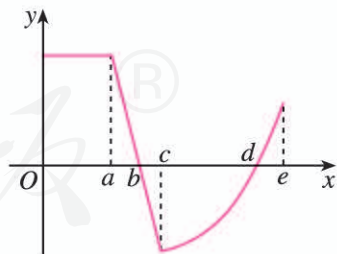
1. 判断下列函数的单调性, 并求出单调区间:

(1) $f(x)=3x-x^3$;

(2) $f(x)=x^3-x^2-x$.

2. 证明函数 $f(x)=2x^3-6x^2+7$ 在区间 $(0, 2)$ 内单调递减.

3. 函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示, 试画出函数 $y=f(x)$ 图象的大致形状.



(第 3 题)

5.3.2 函数的极值与最大(小)值

在用导数研究函数的单调性时, 我们发现利用导数的正负可以判断函数的增减. 如果函数在某些点处的导数为 0, 那么在这些点处函数有什么性质呢?

1. 函数的极值

观察图 5.3-9, 我们发现, 当 $t=a$ 时, 跳水运动员距水面的高度最大. 那么, 函数 $h(t)$ 在此点处的导数是多少呢? 此点附近的图象有什么特点? 相应地, 导数的正负性有什么变化规律?

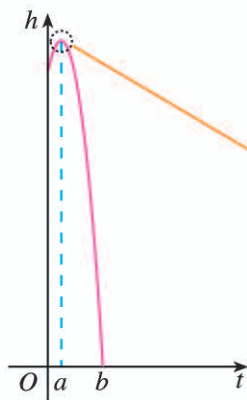


图 5.3-9

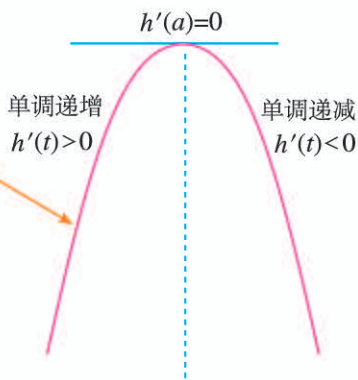


图 5.3-10

放大 $t=a$ 附近函数 $h(t)$ 的图象, 如图 5.3-10. 可以看出, $h'(a)=0$; 在 $t=a$ 的附近, 当 $t<a$ 时, 函数 $h(t)$ 单调递增, $h'(t)>0$; 当 $t>a$ 时, 函数 $h(t)$ 单调递减, $h'(t)<0$. 这就是说, 在 $t=a$ 附近, 函数值先增 (当 $t<a$ 时, $h'(t)>0$) 后减 (当 $t>a$ 时, $h'(t)<0$). 这样, 当 t 在 a 的附近从小到大经过 a 时, $h'(t)$ 先正后负, 且 $h'(t)$ 连续变化, 于是有 $h'(a)=0$.

对于一般的函数 $y=f(x)$, 是否也有同样的性质呢?

探究

如图 5.3-11, 函数 $y=f(x)$ 在 $x=a, b, c, d, e$ 等点处的函数值与这些点附近的函数值有什么关系? $y=f(x)$ 在这些点处的导数值是多少? 在这些点附近, $y=f(x)$ 的导数的正负性有什么规律?

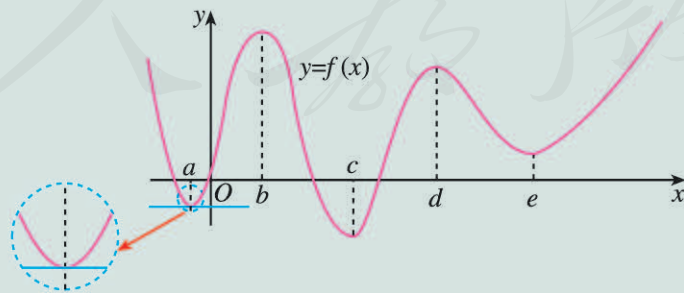


图 5.3-11

以 $x=a, b$ 两点为例, 可以发现, 函数 $y=f(x)$ 在点 $x=a$ 处的函数值 $f(a)$ 比它在点 $x=a$ 附近其他点处的函数值都小, $f'(a)=0$; 而且在点 $x=a$ 附近的左侧 $f'(x)<0$,

右侧 $f'(x) > 0$. 类似地, 函数 $y = f(x)$ 在点 $x = b$ 处的函数值 $f(b)$ 比它在点 $x = b$ 附近其他点处的函数值都大, $f'(b) = 0$; 而且在点 $x = b$ 附近的左侧 $f'(x) > 0$, 右侧 $f'(x) < 0$.

我们把 a 叫做函数 $y = f(x)$ 的极小值点, $f(a)$ 叫做函数 $y = f(x)$ 的**极小值**; b 叫做函数 $y = f(x)$ 的极大值点, $f(b)$ 叫做函数 $y = f(x)$ 的**极大值**. 极小值点、极大值点统称为**极值点**, 极小值和极大值统称为**极值** (extremum).

极值反映了函数在某一点附近的大小情况, 刻画了函数的局部性质.

例 5 求函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 4$ 的极值.

解: 因为 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 4$, 所以

$$f'(x) = x^2 - 4 = (x+2)(x-2).$$

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -2$, 或 $x = 2$.

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如表 5.3-2 所示.

表 5.3-2

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	单调递增	$\frac{28}{3}$	单调递减	$-\frac{4}{3}$	单调递增

因此, 当 $x = -2$ 时, $f(x)$ 有极大值, 并且极大值为

$$f(-2) = \frac{28}{3};$$

当 $x = 2$ 时, $f(x)$ 有极小值, 并且极小值为

$$f(2) = -\frac{4}{3}.$$

函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 4$ 的图象如图 5.3-12 所示.

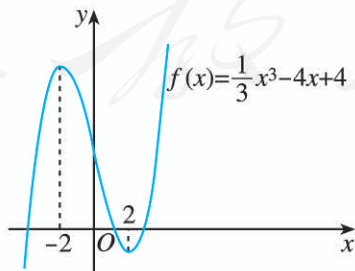


图 5.3-12

?

极大值一定大于极小值吗?

思考

导数值为 0 的点一定是函数的极值点吗?

导数值为 0 的点不一定是函数的极值点. 例如, 对于函数 $f(x)=x^3$, 我们有 $f'(x)=3x^2$. 虽然 $f'(0)=0$, 但由于无论 $x>0$, 还是 $x<0$, 恒有 $f'(x)>0$, 即函数 $f(x)=x^3$ 是增函数, 所以 0 不是函数 $f(x)=x^3$ 的极值点. 一般地, 函数 $y=f(x)$ 在一点处的导数值为 0 是函数 $y=f(x)$ 在这点取极值的必要条件, 而非充分条件.

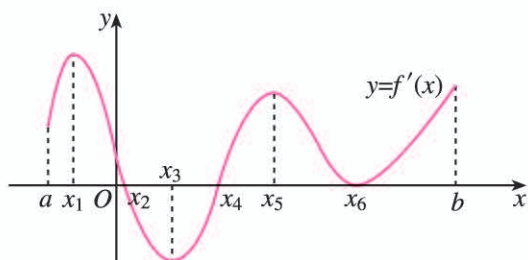
一般地, 可按如下方法求函数 $y=f(x)$ 的极值:

解方程 $f'(x)=0$, 当 $f'(x_0)=0$ 时:

- (1) 如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)>0$, 右侧 $f'(x)<0$, 那么 $f(x_0)$ 是极大值;
- (2) 如果在 x_0 附近的左侧 $f'(x)<0$, 右侧 $f'(x)>0$, 那么 $f(x_0)$ 是极小值.

练习

1. 函数 $f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示, 试找出函数 $f(x)$ 的极值点, 并指出哪些是极大值点, 哪些是极小值点.



(第 1 题)

2. 求下列函数的极值:

- (1) $f(x)=6x^2-x-2$;
- (2) $f(x)=x^3-27x$;
- (3) $f(x)=6+12x-x^3$;
- (4) $f(x)=3x-x^3$.

2. 函数的最大(小)值

我们知道, 极值反映的是函数在某一点附近的局部性质, 而不是函数在整个定义域内的性质. 也就是说, 如果 x_0 是函数 $y=f(x)$ 的极大(小)值点, 那么在 $x=x_0$ 附近找不到比 $f(x_0)$ 更大(小)的值. 但是, 在解决实际问题或研究函数的性质时, 我们往往更关心函数在某个区间上, 哪个值最大, 哪个值最小. 如果 x_0 是某个区间上函数 $y=f(x)$ 的最大(小)值点, 那么 $f(x_0)$ 不小(大)于函数 $y=f(x)$ 在此区间上的所有函数值.

图 5.3-13 是函数 $y=f(x)$, $x\in[a, b]$ 的图象, 你能找出它的极小值、极大值吗?

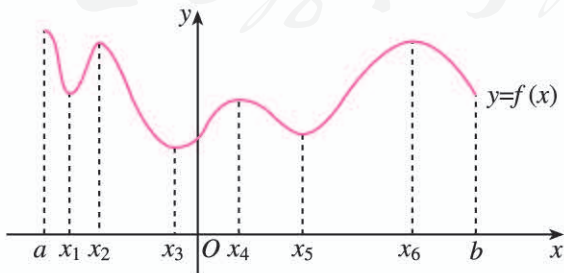


图 5.3-13

观察图象, 我们发现, $f(x_1)$, $f(x_3)$, $f(x_5)$ 是函数 $y=f(x)$ 的极小值, $f(x_2)$, $f(x_4)$, $f(x_6)$ 是函数 $y=f(x)$ 的极大值.

探究

进一步地，你能找出函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最小值、最大值吗？

从图 5.3-13 可以看出，函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最小值是 $f(x_3)$ ，最大值是 $f(a)$ 。

在图 5.3-14、图 5.3-15 中，观察 $[a, b]$ 上的函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图象，它们在 $[a, b]$ 上有最大值、最小值吗？如果有，最大值和最小值分别是什么？

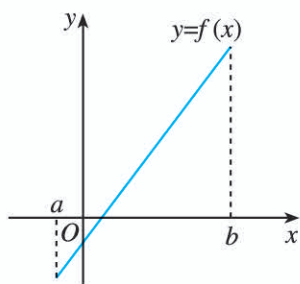


图 5.3-14

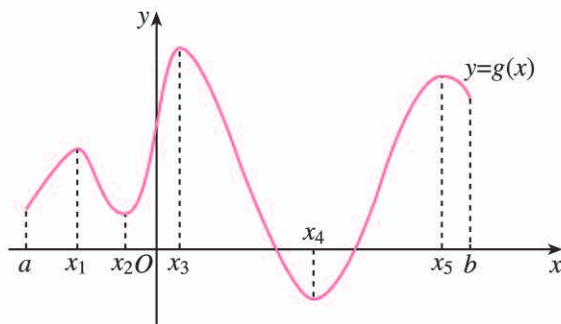


图 5.3-15

一般地，如果在区间 $[a, b]$ 上函数 $y=f(x)$ 的图象是一条连续不断的曲线，那么它必有最大值和最小值。

结合图 5.3-14、图 5.3-15，以及函数极值中的例子，不难看出，只要把函数 $y=f(x)$ 的所有极值连同端点的函数值进行比较，就可以求出函数的最大值与最小值。

例 6 求函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$ 在区间 $[0, 3]$ 上的最大值与最小值。

解：由例 5 可知，在区间 $[0, 3]$ 上，当 $x=2$ 时，函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$ 有极小值，并且极小值为 $f(2)=-\frac{4}{3}$ 。

又由于

$$f(0)=4, f(3)=1,$$

所以，函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$ 在区间 $[0, 3]$ 上的最大值是 4，

最小值是 $-\frac{4}{3}$ 。

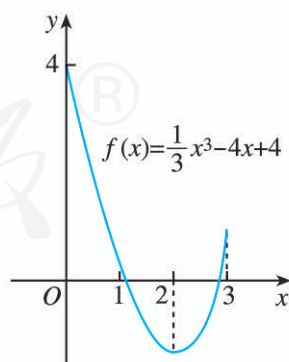


图 5.3-16

上述结论可以从函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$ 在区间 $[0, 3]$ 上的图象（图 5.3-16）得到直观验证。

一般地，求函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值与最小值的步骤如下：

(1) 求函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内的极值;

(2) 将函数 $y=f(x)$ 的各极值与端点处的函数值 $f(a)$, $f(b)$ 比较, 其中最大的一个是最大值, 最小的一个是最小值.

观察例 4 中的图 5.3-8, 我们发现, 当 $x>0$ 时,

$$1-\frac{1}{x}\leq \ln x. \quad \textcircled{1}$$

怎样证明这个结论呢?

我们将不等式①转化为

$$\frac{1}{x}-1+\ln x\geq 0.$$

设 $s(x)=\frac{1}{x}-1+\ln x$, 那么

$$s'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}.$$

令 $s'(x)=0$, 解得 $x=1$.

当 x 变化时, $s'(x)$, $s(x)$ 的变化情况如表 5.3-3 所示.

表 5.3-3

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$s'(x)$	-	0	+
$s(x)$	单调递减	0	单调递增

所以, 当 $x=1$ 时, $s(x)$ 取得最小值. 所以

$$s(x)\geq s(1)=0,$$

即

$$\frac{1}{x}-1+\ln x\geq 0.$$

所以, 当 $x>0$ 时, $1-\frac{1}{x}\leq \ln x$.

练习

1. 参考求函数极值的练习, 求下列函数在给定区间上的最大值与最小值:

(1) $f(x)=6x^2-x-2$, $x\in[0, 2]$;

(2) $f(x)=x^3-27x$, $x\in[-4, 4]$;

(3) $f(x)=6+12x-x^3$, $x\in\left[-\frac{1}{3}, 3\right]$;

(4) $f(x)=3x-x^3$, $x\in[2, 3]$.

2. 证明不等式: $x-1\geq \ln x$, $x\in(0, +\infty)$.

下面我们通过实例说明如何利用导数解决与函数相关的问题.

例 7 给定函数 $f(x)=(x+1)e^x$.

- (1) 判断函数 $f(x)$ 的单调性, 并求出 $f(x)$ 的极值;
- (2) 画出函数 $f(x)$ 的大致图象;
- (3) 求出方程 $f(x)=a$ ($a \in \mathbf{R}$) 的解的个数.

解: (1) 函数的定义域为 $\mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x+1)'e^x + (x+1)(e^x)' \\ &= e^x + (x+1)e^x \\ &= (x+2)e^x. \end{aligned}$$

令 $f'(x)=0$, 解得 $x=-2$.

$f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如表 5.3-4 所示.

表 5.3-4

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, +\infty)$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	单调递减	$-\frac{1}{e^2}$	单调递增

所以, $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -2)$ 上单调递减, 在区间 $(-2, +\infty)$ 上单调递增.

当 $x=-2$ 时, $f(x)$ 有极小值 $f(-2)=-\frac{1}{e^2}$.

(2) 令 $f(x)=0$, 解得 $x=-1$.

当 $x < -1$ 时, $f(x) < 0$; 当 $x > -1$ 时, $f(x) > 0$.

所以, $f(x)$ 的图象经过特殊点 $A(-2, -\frac{1}{e^2})$, $B(-1, 0)$, $C(0, 1)$.

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 与一次函数相比, 指数函数 $y=e^{-x}$ 呈爆炸性增长, 从而 $f(x)=\frac{x+1}{e^{-x}} \rightarrow 0$;

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, $f'(x) \rightarrow +\infty$.

根据以上信息, 我们画出 $f(x)$ 的大致图象如图 5.3-17 所示.

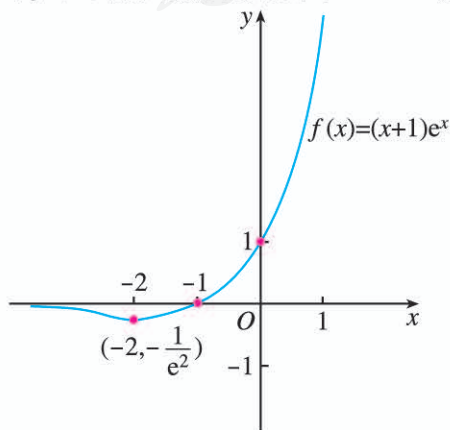


图 5.3-17

(3) 方程 $f(x)=a$ ($a \in \mathbf{R}$) 的解的个数为函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 的交点个数.

由 (1) 及图 5.3-17 可得, 当 $x=-2$ 时, $f(x)$ 有最小值 $f(-2)=-\frac{1}{e^2}$.

所以, 关于方程 $f(x)=a$ ($a \in \mathbf{R}$) 的解的个数有如下结论:

当 $a < -\frac{1}{e^2}$ 时, 解为 0 个;

当 $a = -\frac{1}{e^2}$ 或 $a \geq 0$ 时, 解为 1 个;

当 $-\frac{1}{e^2} < a < 0$ 时, 解为 2 个.

由例 7 可见, 函数 $f(x)$ 的图象直观地反映了函数 $f(x)$ 的性质. 通常, 可以按如下步骤画出函数 $f(x)$ 的大致图象:

- (1) 求出函数 $f(x)$ 的定义域;
- (2) 求导数 $f'(x)$ 及函数 $f'(x)$ 的零点;
- (3) 用 $f'(x)$ 的零点将 $f(x)$ 的定义域划分为若干个区间, 列表给出 $f'(x)$ 在各区间上的正负, 并得出 $f(x)$ 的单调性与极值;
- (4) 确定 $f(x)$ 的图象所经过的一些特殊点, 以及图象的变化趋势;
- (5) 画出 $f(x)$ 的大致图象.

下面我们通过实例介绍导数在解决实际问题中的应用.

问题 饮料瓶大小对饮料公司利润的影响

(1) 你是否注意过, 市场上等量的小包装的物品一般比大包装的要贵些? 你想从数学上知道它的道理吗?

(2) 是不是饮料瓶越大, 饮料公司的利润越大?

例 8 某制造商制造并出售球形瓶装的某种饮料. 瓶子的制造成本是 $0.8\pi r^2$ 分, 其中 r (单位: cm) 是瓶子的半径. 已知每出售 1 mL 的饮料, 制造商可获利 0.2 分, 且制造商能制作的瓶子的最大半径为 6 cm.

(1) 瓶子半径多大时, 能使每瓶饮料的利润最大?

(2) 瓶子半径多大时, 每瓶饮料的利润最小?

解: 由题意可知, 每瓶饮料的利润是

$$y=f(r)=0.2 \times \frac{4}{3} \pi r^3 - 0.8 \pi r^2 = 0.8 \pi \left(\frac{r^3}{3} - r^2 \right), \quad 0 < r \leq 6.$$

所以

$$f'(r)=0.8\pi(r^2-2r).$$

令 $f'(r)=0$, 解得 $r=2$.

当 $r \in (0, 2)$ 时, $f'(r) < 0$; 当 $r \in (2, 6)$ 时, $f'(r) > 0$.

因此, 当半径 $r > 2$ 时, $f'(r) > 0$, $f(r)$ 单调递增, 即半径越大, 利润越高; 当半径 $r < 2$ 时, $f'(r) < 0$, $f(r)$ 单调递减, 即半径越大, 利润越低.

(1) 半径为 6 cm 时, 利润最大.

(2) 半径为 2 cm 时, 利润最小, 这时 $f(2) < 0$, 表示此种瓶内饮料的利润还不够瓶子的成本, 此时利润是负值.

换一个角度: 如果我们不用导数工具, 直接从函数 $f(r)$ 的图象 (图 5.3-18) 上观察, 你有什么发现?

从图象上容易看出, 当 $r=3$ 时, $f(3)=0$, 即瓶子的半径是 3 cm 时, 饮料的利润与饮料瓶的成本恰好相等; 当 $r > 3$ 时, 利润才为正值.

当 $r \in (0, 2)$ 时, $f(r)$ 单调递减, 你能解释它的实际意义吗?

通过此问题的解决, 我们很容易回答开始时的问题. 请同学们自己作出回答.

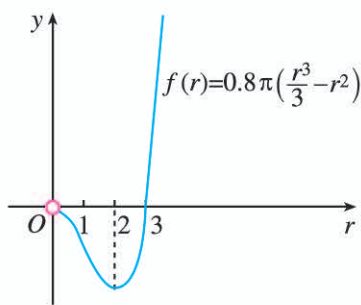


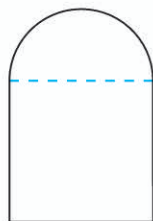
图 5.3-18

练习

1. 利用函数的单调性, 证明下列不等式, 并通过函数图象直观验证:

$$\sin x < x, x \in (0, \pi).$$

2. 如图, 用铁丝围成一个上面是半圆, 下面是矩形的图形, 其面积为 $a \text{ m}^2$. 为使所用材料最省, 圆的直径应为多少?



(第 2 题)

习题 5.3



复习巩固

1. 判断下列函数的单调性, 并求出单调区间:

(1) $f(x) = -2x + 1$;

(2) $f(x) = x + \cos x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$;

(3) $f(x) = 2x - 4$;

(4) $f(x) = 2x^3 + 4x$.

2. 判断下列函数的单调性, 并求出单调区间:

(1) $f(x) = x^2 + 2x - 4$;

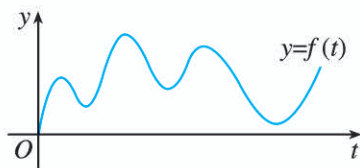
(2) $f(x) = 2x^2 - 3x + 3$;

(3) $f(x) = 3x + x^3$;

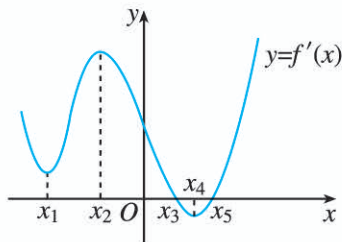
(4) $f(x) = x^3 + x^2 - x$.

3. 如图, 已知汽车在笔直的公路上行驶.

- (1) 如果 $y=f(t)$ 表示时刻 t 时汽车与起点的距离, 请标出汽车速度等于 0 的点;
- (2) 如果 $y=f(t)$ 表示时刻 t 时汽车的速度, 那么(1)中标出点的意义是什么?



(第 3 题)



(第 4 题)

4. 导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示. 在标记的点中, 在哪一点处

- (1) 导函数 $y=f'(x)$ 有极大值?
- (2) 导函数 $y=f'(x)$ 有极小值?
- (3) 函数 $f(x)$ 有极大值?
- (4) 函数 $f(x)$ 有极小值?

5. 求下列函数的极值:

- (1) $f(x)=6x^2+x+2$;
- (2) $f(x)=x^3-12x$;
- (3) $f(x)=6-12x+x^3$;
- (4) $f(x)=48x-x^3$.

6. 参照第 5 题, 求下列函数在给定区间上的最大值与最小值:

- (1) $f(x)=6x^2+x+2, x \in [-1, 1]$;
- (2) $f(x)=x^3-12x, x \in [-3, 3]$;
- (3) $f(x)=6-12x+x^3, x \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$;
- (4) $f(x)=48x-x^3, x \in [-3, 5]$.



综合运用

7. 将一条长为 l 的铁丝截成两段, 分别弯成两个正方形. 要使两个正方形的面积和最小, 两段铁丝的长度分别是多少?
8. 将一个边长为 a 的正方形铁片的四角截去四个边长均为 x 的小正方形, 做成一个无盖方盒.
 - (1) 试把方盒的容积 V 表示为 x 的函数;
 - (2) x 多大时, 方盒的容积 V 最大?
9. 用测量工具测量某物体的长度, 由于工具的精度以及测量技术的原因, 测得 n 个数据

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n.$$

证明: 用 n 个数据的平均值

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$$

表示这个物体的长度, 能使这 n 个数据的方差

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x - a_i)^2$$

最小.

10. 已知某商品的生产成本 C 与产量 q 之间的关系为 $C=100+4q$, 单价 p 与产量 q 之间的关系为 $p=25-\frac{1}{8}q$. 产量 q 为何值时, 利润最大?
11. 已知某商品进价为 a 元/件, 根据以往经验, 当售价是 b ($b \geq \frac{4}{3}a$) 元/件时, 可卖出 c 件. 市场调查表明, 当售价下降 10% 时, 销量可增加 40%. 现决定一次性降价, 售价为多少时, 可获得最大利润?
12. 利用函数的单调性, 证明下列不等式, 并通过函数图象直观验证:
- (1) $e^x > 1+x, x \neq 0$; (2) $\ln x < x < e^x, x > 0$.

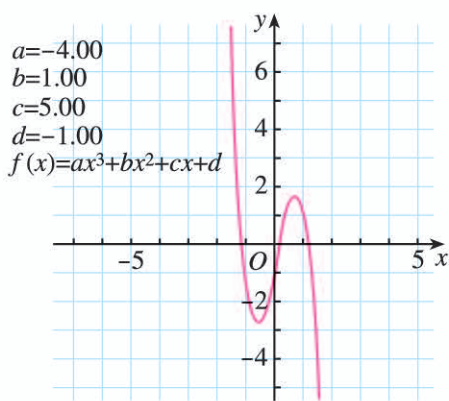
拓广探索

13. 利用信息技术工具, 根据给定的 a, b, c, d 的值, 可以画出函数

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad (a \neq 0)$$

的图象, 当 $a=-4, b=1, c=5, d=-1$ 时, $f(x)$ 的图象如图所示. 改变 a, b, c, d 的值, 观察图象的形状:

- (1) 你能归纳函数 $f(x)$ 图象的大致形状吗? 它的图象有什么特点? 你能从图象上大致估计它的单调区间吗?
- (2) 运用导数研究它的单调性, 并求出相应的单调区间.



(第 13 题)

图形技术与函数性质

信息技术发展到今天，图形计算器、计算机软件的图形技术功能已经非常强大。函数作图和分析功能是图形技术的一个重要方面，主要包括：

1. 由函数 $f(x)$ 的解析式直接画出其图象；
2. 移动光标，显示函数 $f(x)$ 图象上任一点的坐标；
3. 由函数 $f(x)$ 的解析式及其图象求出其导函数 $f'(x)$ ，并画出其图象；
4. 显示并求出经过函数 $f(x)$ 图象上某点切线的斜率和切线的方程；
5. 求出并显示函数 $f(x)$ 的零点和极值点；
6. 对函数 $f(x)$ 图象的局部进行放大和缩小；
7. 求出函数 $f(x)$ 在定义域内某个闭区间上的最大值与最小值。

图 1、图 2 展示了上述部分功能。

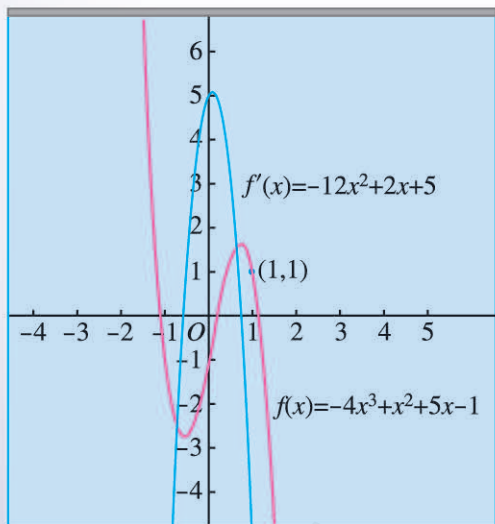


图 1

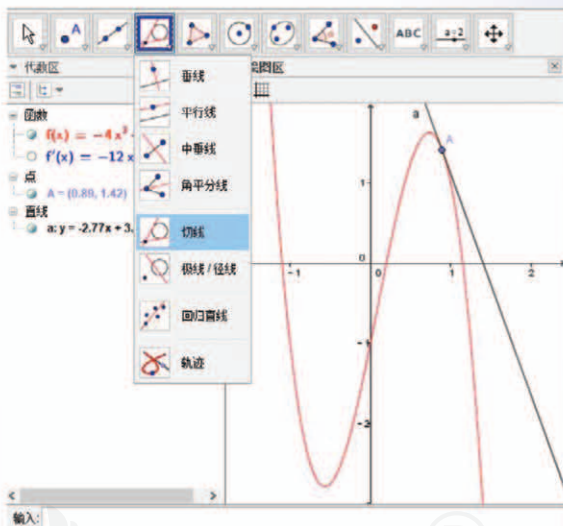


图 2

图形计算器和计算机软件提供的函数作图和分析功能，对我们把握函数的性质有重要的帮助：一方面，通过画出函数的图象，对图象进行观察和分析，并作出猜想和发现，从而探讨函数的性质；另一方面，用导数研究函数的性质后，可用图形技术进行直观验证，两者相辅相成。



微积分的创立与发展

17 世纪中叶, 数学史上发生了一件具有划时代意义的重大事件, 那就是微积分的诞生.

微积分的创立有深刻的时代背景. 从欧洲文艺复兴时期到 17 世纪上半叶, 社会、经济、科学、贸易、航运等的发展, 对数学提出了新的要求. 紧接着函数概念的引入, 微积分应运而生, 这是继欧氏几何后数学史上最伟大的创造. 微积分的创立不仅是数学思想史上的里程碑, 也是科学思想史上的里程碑.

微积分是如何创立的? 又是如何发展的? 它在数学史和人类社会的发展中起了什么作用? 请你按以下要求, 查阅与微积分有关的文献, 自己选题, 写一份研究报告或一篇数学小论文.

一、主题

1. 微积分创立与发展的过程.
2. 微积分对人类文明的主要贡献.

二、实施建议

1. 选题: 根据个人兴趣, 围绕主题, 初步确定选题范围.
2. 分组: 将相近选题的 5~6 人分为一个小组, 确定一名组长.
3. 分配任务: 根据个人的具体情况, 经小组共同商议, 由组长确定每人的具体任务.
4. 搜集资料: 针对具体的研究报告或论文题目, 通过网络、书店、图书馆等多种途径搜集素材, 包括文字、图片、数据以及音像资料, 并记录相关资料.

5. 素材汇总: 用研究报告或论文的形式展现小组的实践成果.

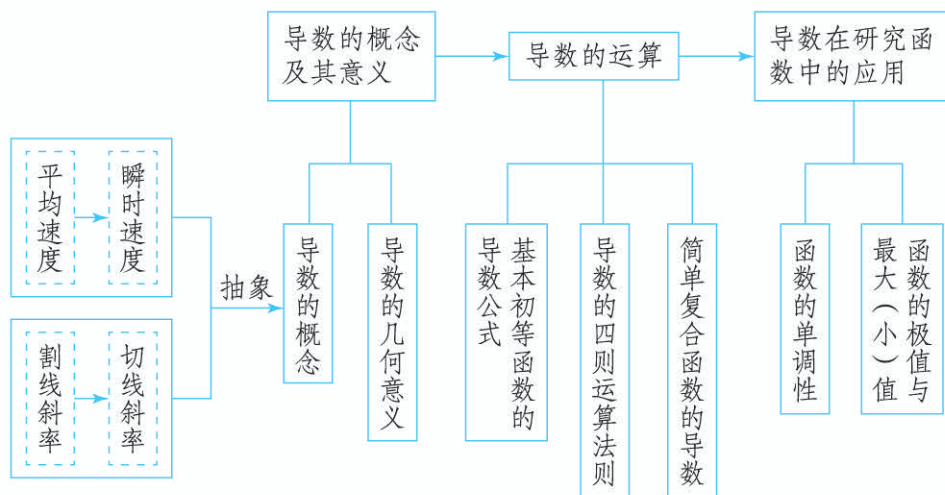
6. 在全班范围内进行交流、讨论和总结.

三、参考选题

1. 微积分创立的背景与过程.
2. 微积分的完善与发展.
3. 微积分创立与发展的过程中, 作出重要贡献的数学家以及他们的主要贡献.
4. 微积分在数学思想史和科学思想史上的价值.

小结

一、本章知识结构



二、回顾与思考

在本章，我们通过丰富的实际背景，经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，得到导数的概念及其几何意义。在此基础上给出导数的运算法则，进而运用导数研究函数的单调性、极值和最大（小）值等性质，并利用导数解决简单的实际问题。

导数是关于瞬时变化率的数学表达，客观世界中大量的变化率问题都可以用导数加以刻画，导数的几何意义直观地反映了函数的局部变化情况，学习时应注意体会导数的内涵与思想，并体会极限的思想。

对很多运动变化问题的研究最后都会归结为对各种函数的研究，其中函数的增减，以及增减的范围、增减的快慢等是最基本的问题。导数简明地回答了这些问题：由 $f'(x)$ 的正负可知函数 $f(x)$ 是增还是减，由 $f'(x)$ 绝对值的大小可知函数变化得急剧还是平缓。不仅如此，导数也是研究函数极值问题从而解决优化问题的一种通法。导数定量地刻画了函数的局部变化规律，是研究函数性质的基本工具。利用导数研究函数的性质，思路清晰，步骤明确，既快捷又易于掌握。学习时应通过具体实例感受导数在研究函数和解决实际问题中的作用，体会导数的意义。

请你带着下面的问题，复习一下全章内容吧。

1. 平均变化率与瞬时变化率之间有什么内在联系？有人说，“导数就是瞬时变化率”，对此你有什么认识？
2. 你能从物理和几何两方面解释导数的意义吗？

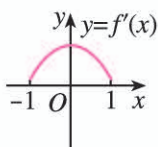
- 利用导数定义推导函数 $y=f(x)$ 的导数时, 其基本步骤是什么?
- 导数的四则运算法则是什么? 如何求简单复合函数的导数?
- 利用导数研究函数性质的基本步骤是什么?
- 通过本章的学习, 你对“导数是研究函数性质的基本工具”有什么体会?

复习参考题 5

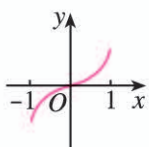


复习巩固

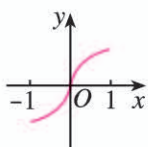
- 已知点 P 和点 Q 是曲线 $y=x^2-2x-3$ 上的两点, 且点 P 的横坐标是 1, 点 Q 的横坐标是 4. 求:
 - 割线 PQ 的斜率;
 - 点 P 处的切线方程.
- 求下列函数的导数:
 - $y=2x \tan x$;
 - $y=2^x \ln x$;
 - $y=(x-2)^3(3x+1)^2$;
 - $y=\frac{x^2}{(2x+1)^3}$;
 - $y=e^{-2x+1} \cos(-x^2+x)$;
 - $y=\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$.
- 已知函数 $y=f(x)$ 的图象是下列四个图象之一, 且其导函数 $y=f'(x)$ 的图象如图所示, 则该函数的图象是 ().



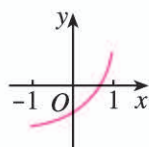
(第 3 题)



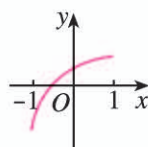
(A)



(B)



(C)



(D)

- 求下列曲线在给定点处的切线方程:

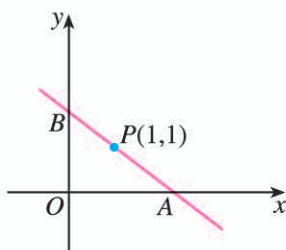
- $y=x-\frac{1}{x}$, $(1, 0)$;
- $y=\frac{e^{2x-1}}{x^2}$, $(\frac{1}{2}, 4)$.

- 一个距地心距离为 r , 质量为 m 的人造卫星, 与地球之间的万有引力 F 由公式 $F=\frac{GMm}{r^2}$ 给出, 其中 M 为地球质量, G 为引力常量. 求 F 对于 r 的瞬时变化率.
- 一杯 80°C 的热红茶置于 20°C 的房间里, 它的温度会逐渐下降, 温度 T (单位: $^\circ\text{C}$) 与时间 t (单位: min) 之间的关系由函数 $T=f(t)$ 给出.
 - 判断 $f'(t)$ 的正负, 并说明理由.
 - $f'(3)=-4$ 的实际意义是什么? 如果 $f(3)=65^\circ\text{C}$, 你能画出函数 $f(t)$ 在 $t=3$ 时图象的大致形状吗?
- 求函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调区间.

8. 已知函数 $f(x)=x^2+px+q$, 试确定 p, q 的值, 使得当 $x=1$ 时, $f(x)$ 有最小值 4.

9. 已知函数 $f(x)=x(x-c)^2$ 在 $x=2$ 处有极大值, 求 c 的值.

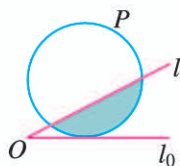
10. 如图, 过点 $P(1, 1)$ 作直线 AB , 分别与 x 轴的正半轴、 y 轴的正半轴交于点 A, B . 当直线 AB 在什么位置时, $\triangle AOB$ 的面积最小? 最小面积是多少?



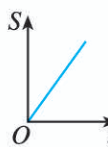
(第 10 题)

综合运用

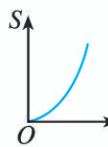
11. 如图, 直线 l 和圆 P , 当 l 从 l_0 开始在平面上按逆时针方向绕点 O 匀速转动 (转动角度不超过 90°) 时, 它扫过的圆内阴影部分的面积 S 是时间 t 的函数. 这个函数的图象大致是 ().



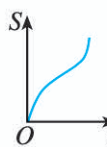
(第 11 题)



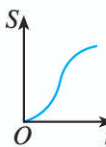
(A)



(B)



(C)



(D)

12. 当室内的有毒细菌开始增加时, 就要使用杀菌剂. 刚开始使用的时候, 细菌数量还会继续增加, 随着时间的增加, 它增加的幅度逐渐变小, 到一定时间, 细菌数量开始减少. 已知使用杀菌剂 t h 后的细菌数量为 $b(t)=10^5+10^4t-10^3t^2$.

(1) 求细菌数量在 $t=5$ 与 $t=10$ 时的瞬时变化率.

(2) 细菌数量在哪段时间增加, 在哪段时间减少? 为什么?

13. 已知曲线 $y=x+\ln x$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线与曲线 $y=ax^2+(2a+3)x+1$ 只有一个公共点, 求 a 的值.

14. 用总长 14.8 m 的钢条制作一个长方体容器的框架, 如果所制容器底面一边的长比另一边的长多 0.5 m, 那么高为多少时容器的容积最大? 最大容积是多少?

15. 用半径为 R 的圆形铁皮剪出一个圆心角为 α 的扇形, 制成一个圆锥形容器. 扇形的圆心角 α 为多大时, 容器的容积最大?

拓展探索

16. 已知 A, B 两地的距离是 130 km. 根据交通法规, 两地之间的公路车速应限制在 50~100 km/h. 假设油价是 7 元/L, 以 x km/h 的速度行驶时, 汽车的耗油率为 $(3+\frac{x^2}{360})$ L/h, 司机每小时的工资是 35 元. 那么最经济的车速是多少 (精确到 1 km/h)? 如果不考虑其他费用, 这次行车的总费用是多少 (精确到 1 元)?

17. 作函数 $y=\frac{e^x(2x-1)}{x-1}$ 的大致图象.

18. 已知函数 $f(x)=e^x-\ln(x+m)$. 当 $m\leq 2$ 时, 求证 $f(x)>0$.

19. 已知函数 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^x-x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

部分中英文词汇索引

中文	英文	页码
数列	sequence of number	3
等差数列	arithmetic progression	13
公差	common difference	13
等差中项	arithmetic mean	13
等比数列	geometric progression	28
公比	common ratio	28
等比中项	geometric mean	28
数学归纳法	mathematical induction	46
瞬时速度	instantaneous velocity	60
导数	derivative	65
切线	tangent line	67
导函数	derived function	69
复合函数	composite function	79
极值	extremum	91

人教版®

后 记

本册教科书是人民教育出版社课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心依据教育部《普通高中数学课程标准（2017年版）》编写的，经国家教材委员会2019年审查通过。

本册教科书的编写，集中反映了我国十余年来普通高中课程改革的成果，吸取了2004年版《普通高中课程标准实验教科书·数学（A版）》的编写经验，凝聚了参与课改实验的教育专家、学科专家、教材编写专家、教研人员和一线教师，以及教材设计装帧专家的集体智慧。本书插图绘制为王俊宏，为本书提供照片的有东方IC图片网（第39，58页各一张图）等。

我们感谢2004年版《普通高中课程标准实验教科书·数学（A版）》的主编刘绍学，副主编钱珮玲、章建跃，以及所有编写人员。我们感谢所有对教科书的编写、出版、试教等提供过帮助与支持的同仁和社会各界朋友。

本册教科书出版之前，我们通过多种渠道与教科书选用作品（包括照片、画作）的作者进行了联系，得到了他们的大力支持。对此，我们表示衷心的感谢！恳请未联系到的作者与我们联系，以便及时支付稿酬。

我们真诚地希望广大教师、学生及家长在使用本册教科书的过程中提出宝贵意见。我们将集思广益，不断修订，使教科书趋于完善。

联系方式

电话：010-58758866

电子邮箱：jcfk@pep.com.cn

人民教育出版社 课程教材研究所

中学数学课程教材研究开发中心

2019年4月



PUTONG GAOZHONG JIAOKESHU
SHUXUE

人教版®



绿色印刷产品

ISBN 978-7-107-14537-5



9 787107 145375 >

定价：00.00 元