

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

高等数学

第七版 上册

同济大学数学系 编

高等教育出版社

2008年度普通高等教育精品教材

本书第三版获1997年普通高等学校
国家级教学成果一等奖

■ 高等数学 第七版 上册	同济大学数学系
□ 高等数学 第七版 下册	同济大学数学系
□ 高等数学附册 学习辅导与习题选解 同济·第七版	同济大学数学系
□ 高等数学习题全解指南 上册 同济·第七版	同济大学数学系
□ 高等数学习题全解指南 下册 同济·第七版	同济大学数学系
□ 工程数学——线性代数 第六版	同济大学数学系
□ 线性代数附册 学习辅导与习题全解 同济·第六版	同济大学数学系
□ 工程数学——概率统计简明教程 第二版	同济大学数学系
□ 概率统计简明教程附册 学习辅导与习题全解 第二版	同济大学数学系
□ 工程数学——新编统计学	同济大学数学系

高等教育出版社
增值服务
使用说明详见书内刮擦声明页

数字课程网站

网址：http://abook.hep.com.cn/39663
http://abook.hep.edu.cn/39663

ISBN 978-7-04-039663-8
9 787040 396638 >
定价 37.70 元



“十二五”普通高等教育

高等数学

第七版 上册

同济大学数学系 编

GAODENG SHUXUE

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是同济大学数学系编的《高等数学》第七版，从整体上说与第六版没有大的变化，内容深广度符合“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，适合高等院校工科类各专业学生使用。

本次修订遵循“坚持改革、不断锤炼、打造精品”的要求，对第六版中个别概念的定义，少量定理、公式的证明及定理的假设条件作了一些重要修改；对全书的文字表达、记号的采用进行了仔细推敲；个别内容的安排作了一些调整，习题配置予以进一步充实、丰富，对少量习题作了更换。所有这些修订都是为了使本书更加完善，更好地满足教学需要。

本书分上、下两册出版，上册包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程等内容，书末还附有二阶和三阶行列式简介、基本初等函数的图形、几种常用的曲线、积分表、习题答案与提示。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/同济大学数学系编. --7版.
--北京:高等教育出版社,2014.7
ISBN 978-7-04-039663-8

Ⅰ.①高… Ⅱ.①同… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第099713号

策划编辑	王 强	责任编辑	蒋 青	封面设计	王凌波	版式设计	童 丹
插图绘制	尹文军	责任校对	孟 玲	责任印制	朱学忠		

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印 刷	高教社(天津)印务有限公司		http://www.landraco.com.cn
开 本	787mm×960mm 1/16		
印 张	28	版 次	1978年3月第1版
字 数	500千字		2014年7月第7版
购书热线	010-58581118	印 次	2014年8月第2次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	37.70元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 39663-00

第七版前言

本次修订工作是在遵循“坚持改革、不断锤炼、打造精品”的要求下进行的，修订的内容主要包括以下几个方面：

1. 在与中学数学的衔接上，删去了有关集合的内容，保留了映射与函数，便于在教学时根据实际情况作灵活处理；

2. 关于一些重要概念的定义作了仔细推敲，力求更加准确、没有瑕疵；

3. 在坚持工科数学教学要求的前提下，恰当地处理有关定理的假设条件、严谨性、适用性等问题，使教材进一步完善；

4. 关于语言文字表达以及一些记号的采用，力求用词规范，表达确切，记号采用科学合理；

5. 对于个别内容安排进行了适当调整，并增补少量内容，以便更好地适合教学的需要；

6. 对习题配置进一步充实、丰富，并作了一些必要的调整。

本书已经出到了第七版，在本书每一版的修订过程中都得到了广大关注本书的专家、同仁和读者的关心、帮助和指导。本次修订就吸取了他们对前几版提出的许多宝贵意见和建议，特别是浙江大学蔡燧林教授、北京师范大学李仲来教授、北京航空航天大学李心灿教授和徐兵教授等，他们的意见和建议对本次修订带来了很大帮助，在此谨向他们表示诚挚的谢意。

本次修订工作由同济大学邱伯驺完成。新版中存在的问题，继续欢迎广大专家、同仁和读者给予批评指正。

编　　者

二〇一四年一月

第六版前言

本书第六版是在第五版的基础上，遵循以下几条原则进行修订的。

1. 按照精品课程教材的要求，在保持本书第五版优点、特色的前提下，继续坚持改革，反复锤炼，努力反映国内外高等数学课程改革和学科建设的最新成果和最高水平，体现创新教学理念，有利于激发学生自主学习，有利于提高学生的综合素质和创新能力。

2. 教材的定位进行适当调整，使得修订后教材深广度的高限与第五版的要求基本保持不变，而低限完全符合非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会制定的新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，以适合当前我国各类高校工科类专业本科教学根据不同的教学要求实施分层次教学的需要。为此，在修订版中，对于超过新的教学基本要求的内容，涉及一节、一目或有标题的内容均采用 * 号标出，其余的情形则采用异体字排印，有关习题也以 * 号标出；对于新的教学基本要求中的个别内容，如涉及向量分析的内容，本书第五版中体现不够，在修订时给予适当的补充；对于新的教学基本要求中指明的为某些相关专业选用的基本内容，也以 * 号标出。

3. 教材的习题配置是教材的重要组成部分，是高等数学课程教学中实现教学要求，提高教学质量的重要环节。修订时努力吸收国内外一些优秀微积分教材在习题配置方面的优点，对本书第五版中的习题作较多的调整，包括增加概念复习题、图形题、应用题、综合题等，习题的总量也适当增加。

4. 根据本书第五版出版以来广大同行和读者在教学实践中的意见和建议，进行局部修订，包括本书上、下册内容的适当调整。修订时，将“微分方程”一章内容移至上册作为第七章，“空间解析几何与向量代数”一章内容移至下册作为第八章。

本版修订工作仍由邱伯驺、骆承钦完成。新版中存在的问题，欢迎广大专家、同行和读者继续给予批评指正。

编　　者

二〇〇六年七月

第五版前言

本书第五版是在第四版的基础上，根据我们多年的教学改革实践，按照新形势下教材改革的精神，进行全面修订而成的。在修订中，我们保留了原教材的系统和风格及其结构严谨、逻辑清晰、叙述详细、通俗易懂、例题较多、便于自学等优点，同时注意吸收当前教材改革中一些成功的改革举措，使得新版能更适合当前教学的需要，成为适应时代要求、符合改革精神又继承传统优点的教材。

新版为更好地与中学数学教学相衔接，上册从一般的集合、映射引入函数概念，精简了基本初等函数的基础内容；为有利于培养学生的能力和数学素养，渗透了一些现代数学的思想、语言和方法，适当引用了一些数学记号和逻辑符号，文字作了适当简化；为适应高等数学课程教学时数减少的情况，在保证《高等数学课程教学基本要求》的前提下，对一些内容作了适当精简和合并；在应用方面，增加了一些微积分在科学技术、经济管理和日常生活等方面的应用性例题和习题。对第四版中存在的个别问题，这次也作了修订。修改较多的部分涉及函数、极限及向量代数等内容。

这次修订中，我系的广大教师提出了许多宝贵的意见和建议，特别是郭镜明教授提供了不少好的建议，我们在此表示诚挚的谢意。

本版修订工作由邱伯驺、骆承钦完成。新版中存在的问题，欢迎广大专家、同行和读者批评指正。

编　　者

二〇〇一年十月

第四版前言

关于本书的修订问题，全国高校工科数学课程教学指导委员会曾于1992年5月的工作会议上进行了讨论，与会代表们希望本书修改后能更加适应大多数院校的需要，这也正是我们的愿望。因此，我们在修订时，对不标＊号的部分，注意控制其深广度，以期使它尽量符合高等工业院校的《高等数学课程教学基本要求》（后称“基本要求”）；同时仍保留标＊号的内容，这些内容都是超出“基本要求”的，可供对数学要求稍高的专业采用。

兄弟院校的同行，对本书此次修订也提出了不少具体意见，修订时我们都作了认真考虑。在此，我们对课委会及同行们表示衷心的谢意。齐植兰、赵中时、谢树艺三位教授审阅了本书第四版书稿，并提出不少宝贵意见，对此我们表示感谢。

本版在每章末增加了总习题，希望这些总习题在检查学习效果以及复习方面能发挥作用。

本书中用到二、三阶行列式的一些知识，部分读者由于阅读本书前尚未学过这方面的内容，因而产生学习上的困难。为此，本版上册增加了一个附录，用尽可能少的篇幅介绍有关二、三阶行列式的一些简单知识。

本书从第二版起的修订工作均由同济大学承担。第二版修订工作的正文部分由王福楹、邱伯驺完成，习题部分由宣耀焕、郭镜明、黄忠湛、王章炎完成。参加第三版修订工作的有王福楹、邱伯驺、骆承钦、王章炎。参加第四版修订工作的有王福楹、邱伯驺、骆承钦。

编　者

一九九三年十二月

第一版前言

本书分上、下两册。上册包括一元函数微积分学、空间解析几何与向量代数，下册包括多元函数微积分学、级数、微分方程、线性代数和概率论。各章配有习题，书末附有习题答案。

本书可作为高等学校工科高等数学课程的试用教材或教学参考书。

参加本书编写工作的有同济大学王福楹、王福保、蔡森甫、邱伯驺，上海交通大学王嘉善，上海纺织工学院巫锡禾，上海科技大学蔡天亮，上海机械学院王敦珊、周继高，上海铁道学院李鸿祥等同志。

本书由上海海运学院陆子芬教授主审。参加审稿的还有大连工学院刘锡琛，合肥工业大学万迪生、何继文，成都电讯工程学院冯潮清，西北工业大学王德如，浙江大学盛骤、孙玉麟，太原工学院徐永源、张宝玉，上海海运学院朱幼文、卢启兴等同志。

审稿同志都认真审阅了原稿，并提出了不少改进意见，对此我们表示衷心感谢。

限于编者水平，同时编写时间也比较仓促，因而教材中一定存在不妥之处，希望广大读者提出批评和指正。

编　者

一九七八年三月

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话　(010)58581897　58582371　58581879

反盗版举报传真　(010)82086060

反盗版举报邮箱　dd@hep.com.cn

通信地址　北京市西城区德外大街4号　高等教育出版社法务部

邮政编码　100120

短信防伪说明

本图书采用出版物短信防伪系统，用户购书后刮开封底防伪密码涂层，将16位防伪密码发送短信至106695881280，免费查询所购图书真伪。

反盗版短信举报

编辑短信“JB，图书名称，出版社，购买地点”发送至10669588128

短信防伪客服电话

(010)58582300

与本书配套的数字课程资源使用说明

与本书配套的数字课程资源发布在高等教育出版社易课程网站，请登录网站后开始课程学习。

1. 访问 http://abook.hep.com.cn/39663

2. 输入数字课程账号(见封底明码)、密码、验证码

3. 点击“进入课程”

4. 开始课程学习

账号自登录之日起一年内有效，过期作废。

使用本账号如有任何问题，请发邮件至：yangfan@hep.com.cn。

目　录

第一章　函数与极限 …… 1
第一节　映射与函数 …… 1
一、映射(1)　二、函数(3)　习题 1-1(16)
第二节　数列的极限 …… 18
一、数列极限的定义(18)　二、收敛数列的性质(23)　习题 1-2(26)
第三节　函数的极限 …… 27
一、函数极限的定义(27)　二、函数极限的性质(32)　习题 1-3(33)
第四节　无穷小与无穷大 …… 34
一、无穷小(34)　二、无穷大(35)　习题 1-4(37)
第五节　极限运算法则 …… 38
习题 1-5(45)
第六节　极限存在准则　两个重要极限 …… 45
习题 1-6(52)
第七节　无穷小的比较 …… 52
习题 1-7(55)
第八节　函数的连续性与间断点 …… 56
一、函数的连续性(56)　二、函数的间断点(58)　习题 1-8(61)
第九节　连续函数的运算与初等函数的连续性 …… 62
一、连续函数的和、差、积、商的连续性(62)　二、反函数与复合函数的连续性(62)　三、初等函数的连续性(64)　习题 1-9(65)
第十节　闭区间上连续函数的性质 …… 66
一、有界性与最大值最小值定理(67)　二、零点定理与介值定理(68)
*三、一致连续性(69)　习题 1-10(70)
总习题一 …… 70
第二章　导数与微分 …… 73
第一节　导数概念 …… 73
一、引例(73)　二、导数的定义(75)　三、导数的几何意义(80)
四、函数可导性与连续性的关系(82)　习题 2-1(83)
第二节　函数的求导法则 …… 84
一、函数的和、差、积、商的求导法则(85)　二、反函数的求导法则(87)

三、复合函数的求导法则(89)　四、基本求导法则与导数公式(92)
习题 2-2(94)
第三节　高阶导数 …… 96
习题 2-3(100)
第四节　隐函数及由参数方程所确定的函数的导数　相关变化率 …… 101
一、隐函数的导数(101)　二、由参数方程所确定的函数的导数(104)
三、相关变化率(108)　习题 2-4(108)
第五节　函数的微分 …… 110
一、微分的定义(110)　二、微分的几何意义(113)　三、基本初等函数的微分公式与微分运算法则(113)　四、微分在近似计算中的应用(116)
习题 2-5(120)
总习题二 …… 122
第三章　微分中值定理与导数的应用 …… 125
第一节　微分中值定理 …… 125
一、罗尔定理(125)　二、拉格朗日中值定理(126)　三、柯西中值定理(129)　习题 3-1(132)
第二节　洛必达法则 …… 132
习题 3-2(137)
第三节　泰勒公式 …… 137
习题 3-3(143)
第四节　函数的单调性与曲线的凹凸性 …… 144
一、函数单调性的判定法(144)　二、曲线的凹凸性与拐点(147)
习题 3-4(150)
第五节　函数的极值与最大值最小值 …… 152
一、函数的极值及其求法(152)　二、最大值最小值问题(156)
习题 3-5(161)
第六节　函数图形的描绘 …… 163
习题 3-6(167)
第七节　曲率 …… 168
一、弧微分(168)　二、曲率及其计算公式(169)　三、曲率圆与曲率半径(173)　*四、曲率中心的计算公式　渐屈线与渐伸线(174)
习题 3-7(176)
第八节　方程的近似解 …… 177
一、二分法(177)　二、切线法(178)　三、割线法(180)
习题 3-8(181)

总习题三 …… 181
第四章　不定积分 …… 184
第一节　不定积分的概念与性质 …… 184
一、原函数与不定积分的概念(184)　二、基本积分表(188)　三、不定积分的性质(189)　习题 4-1(192)
第二节　换元积分法 …… 193
一、第一类换元法(194)　二、第二类换元法(200)　习题 4-2(207)
第三节　分部积分法 …… 208
习题 4-3(212)
第四节　有理函数的积分 …… 213
一、有理函数的积分(213)　二、可化为有理函数的积分举例(216)
习题 4-4(218)
第五节　积分表的使用 …… 219
习题 4-5(221)
总习题四 …… 222
第五章　定积分 …… 224
第一节　定积分的概念与性质 …… 224
一、定积分问题举例(224)　二、定积分的定义(226)　三、定积分的近似计算(229)　四、定积分的性质(232)　习题 5-1(236)
第二节　微积分基本公式 …… 237
一、变速直线运动中位置函数与速度函数之间的联系(237)　二、积分上限的函数及其导数(238)　三、牛顿-莱布尼茨公式(240)
习题 5-2(244)
第三节　定积分的换元法和分部积分法 …… 246
一、定积分的换元法(246)　二、定积分的分部积分法(252)
习题 5-3(254)
第四节　反常积分 …… 256
一、无穷限的反常积分(256)　二、无界函数的反常积分(259)
习题 5-4(262)
*第五节　反常积分的审敛法　Γ 函数 …… 262
一、无穷限反常积分的审敛法(263)　二、无界函数的反常积分的审敛法(266)　三、Γ 函数(268)　*习题 5-5(270)
总习题五 …… 270
第六章　定积分的应用 …… 274
第一节　定积分的元素法 …… 274

第二节　定积分在几何学上的应用 …… 276
一、平面图形的面积(276)　二、体积(280)　三、平面曲线的弧长(284)
习题 6-2(286)
第三节　定积分在物理学上的应用 …… 289
一、变力沿直线所作的功(289)　二、水压力(291)　三、引力(292)
习题 6-3(293)
总习题六 …… 294
第七章　微分方程 …… 297
第一节　微分方程的基本概念 …… 297
习题 7-1(301)
第二节　可分离变量的微分方程 …… 302
习题 7-2(308)
第三节　齐次方程 …… 308
一、齐次方程(308)　*二、可化为齐次的方程(312)　习题 7-3(314)
第四节　一阶线性微分方程 …… 314
一、线性方程(314)　*二、伯努利方程(319)　习题 7-4(320)
第五节　可降阶的高阶微分方程 …… 321
一、$y^{(n)}=f(x)$型的微分方程(321)　二、$y''=f(x,y')$型的微分方程(323)　三、$y''=f(y,y')$型的微分方程(326)　习题 7-5(328)
第六节　高阶线性微分方程 …… 329
一、二阶线性微分方程举例(329)　二、线性微分方程的解的结构(331)　*三、常数变易法(334)　习题 7-6(337)
第七节　常系数齐次线性微分方程 …… 338
习题 7-7(346)
第八节　常系数非齐次线性微分方程 …… 347
一、$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$型(348)　二、$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos \omega x+Q_n(x)\sin \omega x]$型(350)　习题 7-8(354)
*第九节　欧拉方程 …… 355
*习题 7-9(356)
*第十节　常系数线性微分方程组解法举例 …… 357
*习题 7-10(359)
总习题七 …… 360
附录Ⅰ　二阶和三阶行列式简介 …… 363
附录Ⅱ　基本初等函数的图形 …… 368
附录Ⅲ　几种常用的曲线 …… 371

附录Ⅳ　积分表 …… 374
习题答案与提示 …… 385

第一章　函数与极限

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学的研究对象则是变动的量. 所谓函数关系就是变量之间的依赖关系，极限方法是研究变量的一种基本方法. 本章将介绍映射、函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质.

第一节　映射与函数

映射是现代数学中的一个基本概念，而函数是微积分的研究对象，也是映射的一种. 本节主要介绍映射、函数及有关概念，函数的性质与运算等.

一、映射

1. 映射概念

定义　设 X、Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，那么称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作

$$f: X \to Y,$$

其中 y 称为元素 x（在映射 f 下）的像，并记作 $f(x)$，即

$$y = f(x),$$

而元素 x 称为元素 y（在映射 f 下）的一个原像；集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 D_f，即 $D_f = X$；X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域，记作 R_f 或 $f(X)$，即

$$R_f = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

从上述映射的定义中，需要注意的是：

（1）构成一个映射必须具备以下三个要素：集合 X，即定义域 $D_f = X$；集合 Y，即值域的范围：$R_f \subset Y$；对应法则 f，使对每个 $x \in X$，有唯一确定的 $y = f(x)$ 与之对应.

（2）对每个 $x \in X$，元素 x 的像 y 是唯一的；而对每个 $y \in R_f$，元素 y 的原像不一定是唯一的；映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集，即 $R_f \subset Y$，不一定 $R_f = Y$.

例 1　设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，对每个 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)=x^2$. 显然，f 是一个映射，f 的定义域 $D_f=\mathbf{R}$，值域 $R_f=\{y\mid y\geqslant 0\}$，它是 $\mathbf{R}$ 的一个真子集. 对于 R_f 中的元素 y，除 $y=0$ 外，它的原像不是唯一的. 如 $y=4$ 的原像就有 $x=2$ 和 $x=-2$ 两个.

例 2　设 $X=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$，$Y=\{(x,0)\mid |x|\leqslant 1\}$，$f:X\to Y$，对每个 $(x,y)\in X$，有唯一确定的 $(x,0)\in Y$ 与之对应. 显然 f 是一个映射，f 的定义域 $D_f=X$，值域 $R_f=Y$. 在几何上，这个映射表示将平面上一个圆心在原点的单位圆周上的点投影到 x 轴的区间 $[-1,1]$ 上.

例 3　设 $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$，对每个 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$f(x)=\sin x$. f 是一个映射，其定义域 $D_f=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，值域 $R_f=[-1,1]$.

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射，若 $R_f=Y$，即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像，则称 f 为 X 到 Y 上的映射或满射；若对 X 中任意两个不同元素 $x_1\neq x_2$，它们的像 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为 X 到 Y 的单射；若映射 f 既是单射，又是满射，则称 f 为一一映射（或双射）.

上面例 1 中的映射，既非单射，又非满射；例 2 中的映射不是单射，是满射；例 3 中的映射，既是单射，又是满射，因此是一一映射.

映射又称为算子. 根据集合 X、Y 的不同情形，在不同的数学分支中，映射又有不同的惯用名称. 例如，从非空集 X 到数集 Y 的映射又称为 X 上的泛函，从非空集 X 到它自身的映射又称为 X 上的变换，从实数集（或其子集）X 到实数集 Y 的映射通常称为定义在 X 上的函数.

2. 逆映射与复合映射

设 f 是 X 到 Y 的单射，则由定义，对每个 $y\in R_f$，有唯一的 $x\in X$，适合 $f(x)=y$. 于是，我们可定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g，即

$$g:R_f\to X,$$

对每个 $y\in R_f$，规定 $g(y)=x$，这 x 满足 $f(x)=y$. 这个映射 g 称为 f 的逆映射，记作 f^{-1}，其定义域 $D_{f^{-1}}=R_f$，值域 $R_{f^{-1}}=X$.

按上述定义，只有单射才存在逆映射. 所以，在例 1、例 2、例 3 中，只有例 3 中的映射 f 才存在逆映射 f^{-1}，这个 f^{-1} 就是反正弦函数的主值

$$f^{-1}(x)=\arcsin x,\ x\in[-1,1],$$

其定义域 $D_{f^{-1}}=[-1,1]$，值域 $R_{f^{-1}}=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

设有两个映射

$$g:X\to Y_1,\qquad f:Y_2\to Z,$$

其中 $Y_1\subset Y_2$，则由映射 g 和 f 可以定出一个从 X 到 Z 的对应法则，它将每个 $x\in X$ 映成 $f[g(x)]\in Z$. 显然，这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射，这个映射称为映射 g 和 f 构成的复合映射，记作 $f\circ g$，即

$$f\circ g:X\to Z,\ (f\circ g)(x)=f[g(x)],x\in X.$$

由复合映射的定义可知，映射 g 和 f 构成复合映射的条件是：g 的值域 R_g 必须包含在 f 的定义域内，即 $R_g\subset D_f$. 否则，不能构成复合映射. 由此可以知道，映射 g 和 f 的复合是有顺序的，$f\circ g$ 有意义并不表示 $g\circ f$ 也有意义. 即使 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 都有意义，复合映射 $f\circ g$ 与 $g\circ f$ 也未必相同.

例 4　设有映射 $g:\mathbf{R}\to[-1,1]$，对每个 $x\in\mathbf{R}$，$g(x)=\sin x$，映射 $f:[-1,1]\to[0,1]$，对每个 $u\in[-1,1]$，$f(u)=\sqrt{1-u^2}$，则映射 g 和 f 构成的复合映射 $f\circ g:\mathbf{R}\to[0,1]$，对每个 $x\in\mathbf{R}$，有

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f(\sin x)=\sqrt{1-\sin^2 x}=|\cos x|.$$

二、函数

1. 函数的概念

定义　设数集 $D\subset\mathbf{R}$，则称映射 $f:D\to\mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为

$$y=f(x),\ x\in D,$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$.

函数的定义中，对每个 $x\in D$，按对应法则 f，总有唯一确定的值 y 与之对应，这个值称为函数 f 在 x 处的函数值，记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$. 因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系，通常称为函数关系. 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}.$$

需要指出，按照上述定义，记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的：前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而后者表示与自变量 x 对应的函数值. 但为了叙述方便，习惯上常用记号“$f(x),x\in D$”或“$y=f(x),x\in D$”来表示定义在 D 上的函数，这时应理解为由它所确定的函数 f.

表示函数的记号是可以任意选取的，除了常用的 f 外，还可用其他的英文字母或希腊字母，如“g”“F”“φ”等. 相应地，函数可记作 $y=g(x)$，$y=F(x)$，$y=\varphi(x)$ 等. 有时还直接用因变量的记号来表示函数，即把函数记作 $y=$

$y(x)$. 但在同一个问题中,讨论到几个不同的函数时,为了表示区别,需用不同的记号来表示它们.

函数是从实数集到实数集的映射,其值域总在 **R** 内,因此构成函数的要素是:定义域 D_f及对应法则 f. 如果两个函数的定义域相同,对应法则也相同,那么这两个函数就是相同的,否则就是不同的.

函数的定义域通常按以下两种情形来确定:一种是对有实际背景的函数,根据实际背景中变量的实际意义确定. 例如,在自由落体运动中,设物体下落的时间为 t,下落的距离为 s,开始下落的时刻 $t=0$,落地的时刻 $t=T$,则 s 与 t 之间的函数关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\ t\in[0,T].$$

这个函数的定义域就是区间$[0,T]$;另一种是抽象地用算式表达的函数,通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合,这种定义域称为函数的自然定义域. 在这种约定之下,一般的用算式表达的函数可用"$y=f(x)$"表达,而不必再表出 D_f. 例如,函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是闭区间$[-1,1]$,函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域是开区间$(-1,1)$.

表示函数的主要方法有三种:表格法、图形法、解析法(公式法),这在中学里大家已经熟悉. 其中,用图形法表示函数是基于函数图形的概念,即坐标平面上的点集

$$\{P(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x),x\in D$ 的图形(图 1-1). 图中的 R_f表示函数 $y=f(x)$的值域.

下面举几个函数的例子.

例 5　函数

$$y=2$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=\{2\}$,它的图形是一条平行于 x 轴的直线,如图 1-2 所示.

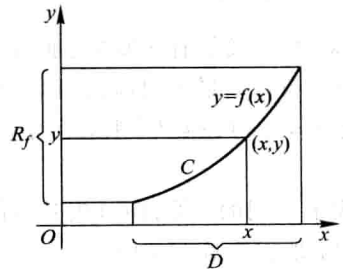


图 1-1

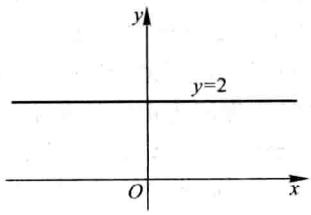


图 1-2

例 6　函数

$$y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=[0,+\infty)$，它的图形如图1-3 所示. 这函数称为绝对值函数.

例 7　函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$

称为符号函数，它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{-1,0,1\}$，它的图形如图1-4 所示. 对于任何实数 x，下列关系成立：

$$x=\operatorname{sgn} x\cdot|x|.$$

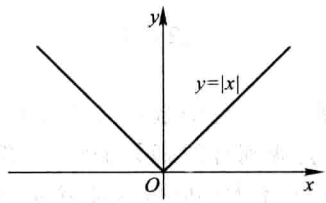


图 1-3

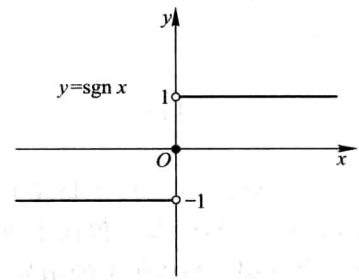


图 1-4

例 8　设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作 $[x]$. 例如，$\left[\frac{5}{7}\right]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[\pi]=3$，$[-1]=-1$，$[-3.5]=-4$. 把 x 看作变量，则函数

$$y=[x]$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\mathbf{Z}$. 它的图形如图 1-5 所示，这图形称为阶梯曲线. 在 x 为整数值处，图形发生跳跃，跃度为 1. 这函数称为取整函数.

在例 6 和例 7 中看到，有时一个函数要用几个式子表示. 这种在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，通常称为分段函数.

例 9　函数

$$y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1+x, & x>1\end{cases}$$

是一个分段函数. 它的定义域 $D=[0,+\infty)$. 当 $x\in[0,1]$ 时，对应的函数值

$f(x)=2\sqrt{x}$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，对应的函数值 $f(x)=1+x$. 例如，$\frac{1}{2}\in[0,1]$，所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$；$1\in[0,1]$，所以 $f(1)=2\sqrt{1}=2$；$3\in(1,+\infty)$，所以 $f(3)=1+3=4$. 这函数的图形如图 1-6 所示.

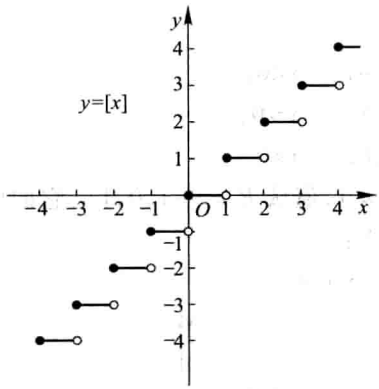


图 1-5

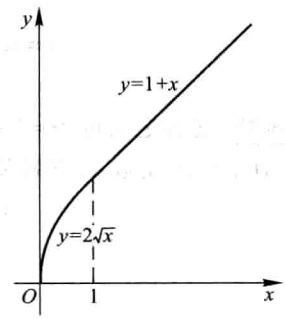


图 1-6

用几个式子来表示一个(不是几个!)函数，不仅与函数定义并无矛盾，而且有现实意义. 在自然科学和工程技术中，经常会遇到分段函数的情形. 例如在等温过程中，气体压强 p 与体积 V 的函数关系，当 V 不太小时依从玻意耳(Boyle)定律；当 V 相当小时，函数关系就要用范德瓦耳斯(van der Waals)方程来表示，即

$$p=\begin{cases}\dfrac{\gamma}{V-\beta}-\dfrac{\alpha}{V^2}, & \beta<V<V_0,\\[2ex] \dfrac{k}{V}, & V\geqslant V_0,\end{cases}$$

其中 k,α,β,γ 都是常量.

2. 函数的几种特性

(1) 函数的有界性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 如果存在数 K_1，使得

$$f(x)\leqslant K_1$$

对任一 $x\in X$ 都成立，那么称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界，而 K_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界. 如果存在数 K_2，使得

$$f(x)\geqslant K_2$$

对任一 $x\in X$ 都成立，那么称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界，而 K_2 称为函数 $f(x)$ 在 X

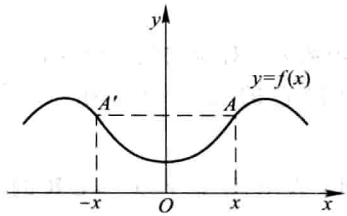


图 1-11

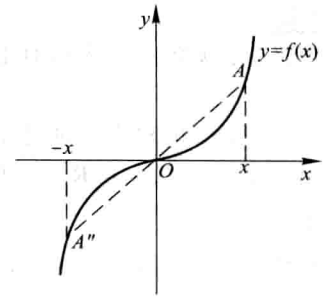


图 1-12

(4) 函数的周期性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个正数 l, 使得对于任一 $x \in D$ 有 $(x \pm l) \in D$, 且

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立, 那么称 $f(x)$ 为周期函数, l 称为 $f(x)$ 的周期, 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如, 函数 $\sin x$, $\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数; 函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

图 1-13 表示周期为 l 的一个周期函数. 在每个长度为 l 的区间上, 函数图形有相同的形状.

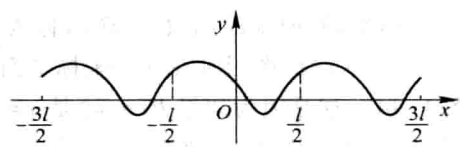


图 1-13

并非每个周期函数都有最小正周期. 下面的函数就属于这种情形.

例 10　狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x \in \mathbf{Q},\\ 0, & x \in \mathbf{Q}^C.\end{cases}$$

容易验证这是一个周期函数, 任何正有理数 r 都是它的周期. 因为不存在最小的正有理数, 所以它没有最小正周期.

3. 反函数与复合函数

作为逆映射的特例, 我们有以下反函数的概念.

设函数 $f: D \to f(D)$ 是单射, 则它存在逆映射 $f^{-1}: f(D) \to D$, 称此映射 f^{-1} 为函

数 f 的反函数.

按此定义,对每个 $y\in f(D)$,有唯一的 $x\in D$,使得 $f(x)=y$,于是有

$$f^{-1}(y)=x.$$

这就是说,反函数 f^{-1} 的对应法则是完全由函数 f 的对应法则所确定的.

例如,函数 $y=x^3$,$x\in\mathbf{R}$ 是单射,所以它的反函数存在,其反函数为 $x=y^{\frac{1}{3}}$,$y\in\mathbf{R}$.

由于习惯上自变量用 x 表示,因变量用 y 表示,于是 $y=x^3$,$x\in\mathbf{R}$ 的反函数通常写作 $y=x^{\frac{1}{3}}$,$x\in\mathbf{R}$.

一般地,$y=f(x)$,$x\in D$ 的反函数记成 $y=f^{-1}(x)$,$x\in f(D)$.

若 f 是定义在 D 上的单调函数,则 $f:D\to f(D)$ 是单射,于是 f 的反函数 f^{-1} 必定存在,而且容易证明 f^{-1} 也是 $f(D)$ 上的单调函数. 事实上,不妨设 f 在 D 上单调增加,现在来证明 f^{-1} 在 $f(D)$ 上也是单调增加的.

任取 $y_1,y_2\in f(D)$,且 $y_1<y_2$. 按函数 f 的定义,对 y_1,在 D 内存在唯一的原像 x_1,使得 $f(x_1)=y_1$,于是 $f^{-1}(y_1)=x_1$;对 y_2,在 D 内存在唯一的原像 x_2,使得 $f(x_2)=y_2$,于是 $f^{-1}(y_2)=x_2$.

如果 $x_1>x_2$,则由 $f(x)$ 单调增加,必有 $y_1>y_2$;如果 $x_1=x_2$,则显然有 $y_1=y_2$. 这两种情形都与假设 $y_1<y_2$ 不符,故必有 $x_1<x_2$,即 $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$. 这就证明了 f^{-1} 在 $f(D)$ 上是单调增加的.

相对于反函数 $y=f^{-1}(x)$ 来说,原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数. 把直接函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一坐标平面上,这两个图形关于直线 $y=x$ 是对称的(图 1-14). 这是因为如果 $P(a,b)$ 是 $y=f(x)$ 图形上的点,则有 $b=f(a)$. 按反函数的定义,有 $a=f^{-1}(b)$,故 $Q(b,a)$ 是 $y=f^{-1}(x)$ 图形上的点;反之,若 $Q(b,a)$ 是 $y=f^{-1}(x)$ 图形上的点,则 $P(a,b)$ 是 $y=f(x)$ 图形上的点. 而 $P(a,b)$ 与 $Q(b,a)$ 是关于直线 $y=x$ 对称的.

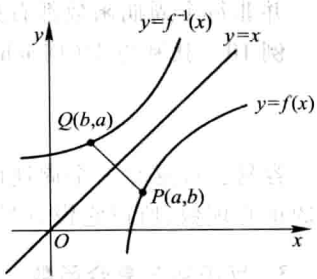


图 1-14

复合函数是复合映射的一种特例,按照通常函数的记号,复合函数的概念可如下表述:

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f,函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D_g,且其值域 $R_g\subset D_f$,则由下式确定的函数

$$y=f[g(x)],\quad x\in D_g$$

称为由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数,它的定义域为 D_g,变量 u 称为中间变量.

函数 g 与函数 f 构成的复合函数,即按"先 g 后 f"的次序复合的函数,通常

上的一个下界. 如果存在正数 M,使得

$$|f(x)|\leqslant M$$

对任一 $x\in X$ 都成立,那么称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果这样的 M 不存在,就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界;这就是说,如果对于任何正数 M,总存在 $x_1\in X$,使 $|f(x_1)|>M$,那么函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

例如,就函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内来说,数 1 是它的一个上界,数 -1 是它的一个下界(当然,大于 1 的任何数也是它的上界,小于 -1 的任何数也是它的下界). 又

$$|\sin x|\leqslant 1$$

对任一实数 x 都成立,故函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的. 这里 $M=1$(当然也可取大于 1 的任何数作为 M 而使 $|f(x)|\leqslant M$ 对任一实数 x 都成立).

又如函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内没有上界,但有下界,例如 1 就是它的一个下界. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内是无界的,因为不存在这样的正数 M,使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 内的一切 x 都成立. 但是 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的,例如可取 $M=1$ 而使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$ 对于一切 $x\in(1,2)$ 都成立.

容易证明,函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

(2) 函数的单调性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的(图 1-7);如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的(图 1-8). 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

例如,函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的,在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的;在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $f(x)=x^2$ 不是单调的(图 1-9).

又例如,函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的(图 1-10).

(3) 函数的奇偶性　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任一 $x\in D$,

$$f(-x)=f(x)$$

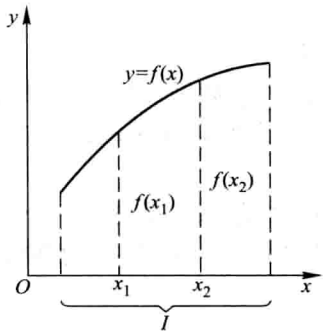


图 1-7

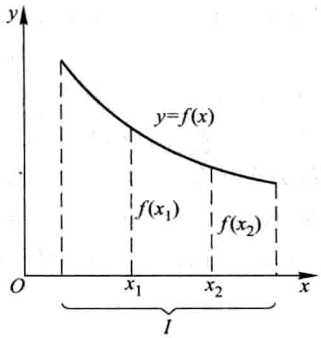


图 1-8

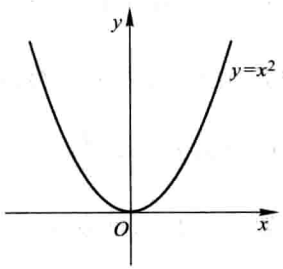


图 1-9

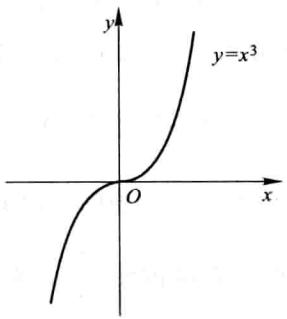


图 1-10

恒成立，那么称 $f(x)$ 为偶函数. 如果对于任一 $x \in D$，

$$f(-x) = -f(x)$$

恒成立，那么称 $f(x)$ 为奇函数.

例如，$f(x) = x^2$ 是偶函数，因为 $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. 又例如，$f(x) = x^3$ 是奇函数，因为 $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

偶函数的图形关于 y 轴是对称的. 因为若 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(-x) = f(x)$，所以如果 $A(x, f(x))$ 是图形上的点，那么与它关于 y 轴对称的点 $A'(-x, f(x))$ 也在图形上(图 1-11).

奇函数的图形关于原点是对称的. 因为若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(-x) = -f(x)$，所以如果 $A(x, f(x))$ 是图形上的点，那么与它关于原点对称的点 $A''(-x, -f(x))$ 也在图形上(图 1-12).

函数 $y = \sin x$ 是奇函数. 函数 $y = \cos x$ 是偶函数. 函数 $y = \sin x + \cos x$ 既非奇函数，也非偶函数.

记为 $f\circ g$，即

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)].$$

与复合映射一样，g 与 f 能构成复合函数 $f\circ g$ 的条件是：函数 g 的值域 R_g 必须包含于函数 f 的定义域 D_f，即 $R_g\subset D_f$. 否则，不能构成复合函数. 例如，$y=f(u)=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1,1]$，$u=g(x)=\sin x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $g(\mathbf{R})\subset[-1,1]$，故 g 与 f 可构成复合函数.

$$y=\arcsin\sin x,x\in\mathbf{R};$$

又如，$y=f(u)=\sqrt{u}$ 的定义域为 $D_f=[0,+\infty)$，$u=g(x)=\tan x$ 的值域为 $R_g=(-\infty,+\infty)$，显然 $R_g\not\subset D_f$，故 g 与 f 不能构成复合函数. 但是，如果将函数 g 限制在它的定义域的一个子集 $D=\left\{x\mid k\pi\leqslant x<\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$ 上，令 $g^*(x)=\tan x,x\in D$，那么 $R_{g^*}=g^*(D)\subset D_f$，$g^*$ 与 f 就可以构成复合函数

$$(f\circ g^*)(x)=\sqrt{\tan x},x\in D.$$

习惯上为了简便起见，仍称函数 $\sqrt{\tan x}$ 是由函数 $u=\tan x$ 与函数 $y=\sqrt{u}$ 构成的复合函数. 这里函数 $u=\tan x$ 应理解成：$u=\tan x,x\in D$. 以后，我们采取这种习惯说法. 例如，我们称函数 $u=x+1$ 与函数 $y=\ln u$ 构成复合函数 $\ln(x+1)$，它的定义域不是 $u=x+1$ 的自然定义域 $\mathbf{R}$，而是 $\mathbf{R}$ 的一个子集 $D=(-1,+\infty)$.

有时，也会遇到两个以上函数所构成的复合函数，只要它们顺次满足构成复合函数的条件. 例如，函数 $y=\sqrt{u}$，$u=\cot v$，$v=\frac{x}{2}$ 可构成复合函数 $y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$，这里 u 及 v 都是中间变量，复合函数的定义域是 $D=\{x\mid 2k\pi<x\leqslant(2k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，而不是 $v=\frac{x}{2}$ 的自然定义域 $\mathbf{R}$，D 是 $\mathbf{R}$ 的一个非空子集.

4. 函数的运算

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域依次为 D_f，D_g，$D=D_f\cap D_g\neq\varnothing$，则我们可以定义这两个函数的下列运算：

和（差）$f\pm g$：　$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x),x\in D$；

积 $f\cdot g$：　$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x),x\in D$；

商 $\frac{f}{g}$：　$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},x\in D\setminus\{x\mid g(x)=0,x\in D\}$.

例 11　设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-l,l)$，证明必存在 $(-l,l)$ 上的偶函数 $g(x)$ 及奇函数 $h(x)$，使得

$$f(x)=g(x)+h(x).$$

证　先分析如下：假若这样的 $g(x)$，$h(x)$ 存在，使得

$$f(x)=g(x)+h(x), \tag{1-1}$$

且

$$g(-x)=g(x), h(-x)=-h(x).$$

于是有

$$f(-x)=g(-x)+h(-x)=g(x)-h(x). \tag{1-2}$$

利用(1-1)、(1-2)式，就可作出 $g(x)$，$h(x)$. 这就启发我们作如下证明：

作

$$g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)], h(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

则

$$g(x)+h(x)=f(x),$$

$$g(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=g(x),$$

$$h(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-h(x).$$

证毕.

5. 初等函数

在初等数学中已经讲过下面几类函数：

幂函数：$y=x^{\mu}$（$\mu\in\mathbf{R}$ 是常数），

指数函数：$y=a^{x}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$），

对数函数：$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$，特别当 $a=e$[①] 时，记为 $y=\ln x$），

三角函数：如 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$ 等，

反三角函数：如 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$ 等.

以上这五类函数统称为基本初等函数.

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，称为初等函数. 例如

$$y=\sqrt{1-x^2}, \qquad y=\sin^2 x, \qquad y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$$

等都是初等函数. 在本课程中所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

应用上常遇到以 e 为底的指数函数 $y=e^{x}$ 和 $y=e^{-x}$ 所产生的双曲函数以及它们的反函数——反双曲函数. 它们的定义如下：

① e 是一个无理数，这个数的意义见本章第六节.

双曲正弦　$\operatorname{sh} x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$,

双曲余弦　$\operatorname{ch} x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$,

双曲正切　$\operatorname{th} x=\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$.

这三个双曲函数的简单性态如下：

双曲正弦的定义域为$(-\infty,+\infty)$，它是奇函数，它的图形通过原点且关于原点对称. 在区间$(-\infty,+\infty)$内它是单调增加的. 当 x 的绝对值很大时，它的图形在第一象限内接近于曲线 $y=\dfrac{1}{2}e^{x}$，在第三象限内接近于曲线 $y=-\dfrac{1}{2}e^{-x}$（图 1-15）.

双曲余弦的定义域为$(-\infty,+\infty)$，它是偶函数，它的图形通过点$(0,1)$且关于 y 轴对称. 在区间$(-\infty,0)$内它是单调减少的. 在区间$(0,+\infty)$内它是单调增加的. $\operatorname{ch} 0=1$ 是这函数的最小值. 当 x 的绝对值很大时，它的图形在第一象限内接近于曲线 $y=\dfrac{1}{2}e^{x}$，在第二象限内接近于曲线 $y=\dfrac{1}{2}e^{-x}$（图 1-15）.

双曲正切的定义域为$(-\infty,+\infty)$，它是奇函数，它的图形通过原点且关于原点对称. 在区间$(-\infty,+\infty)$内它是单调增加的. 它的图形夹在水平直线$y=1$及$y=-1$之间，且当 x 的绝对值很大时，它的图形在第一象限内接近于直线$y=1$，而在第三象限内接近于直线 $y=-1$（图 1-16）.

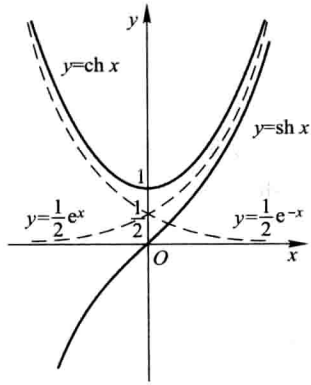


图 1-15

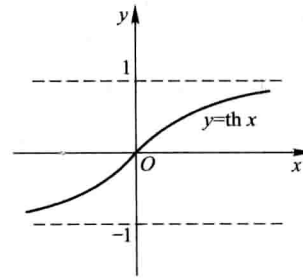


图 1-16

根据双曲函数的定义，可证下列四个公式：

$$\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh} x\operatorname{ch} y+\operatorname{ch} x\operatorname{sh} y, \tag{1-3}$$

$$\operatorname{sh}(x-y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y-\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y, \tag{1-4}$$

$$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y, \tag{1-5}$$

$$\operatorname{ch}(x-y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y-\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y. \tag{1-6}$$

我们来证明公式(1-3),其他三个公式读者可自行证明.由定义,得

$$\begin{aligned}&\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y+\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y\\=&\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}+\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\\=&\frac{e^{x+y}-e^{y-x}+e^{x-y}-e^{-(x+y)}}{4}+\frac{e^{x+y}+e^{y-x}-e^{x-y}-e^{-(x+y)}}{4}\\=&\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}=\operatorname{sh}(x+y).\end{aligned}$$

由以上几个公式可以导出其他一些公式,例如:

在公式(1-6)中令 $x=y$,并注意到 $\operatorname{ch}0=1$,得

$$\operatorname{ch}^{2}x-\operatorname{sh}^{2}x=1; \tag{1-7}$$

在公式(1-3)中令 $x=y$,得

$$\operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x; \tag{1-8}$$

在公式(1-5)中令 $x=y$,得

$$\operatorname{ch}2x=\operatorname{ch}^{2}x+\operatorname{sh}^{2}x. \tag{1-9}$$

以上关于双曲函数的公式(1-3)至(1-9)与三角函数的有关公式相类似,把它们对比可帮助记忆.

双曲函数 $y=\operatorname{sh}x$,$y=\operatorname{ch}x$ $(x\geqslant 0)$,$y=\operatorname{th}x$ 的反函数依次记为

反双曲正弦　$y=\operatorname{arsh}x$,

反双曲余弦　$y=\operatorname{arch}x$,

反双曲正切　$y=\operatorname{arth}x$.

这些反双曲函数都可通过自然对数函数来表示,分别讨论如下:

先讨论双曲正弦 $y=\operatorname{sh}x$ 的反函数.由 $x=\operatorname{sh}y$,有

$$x=\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}.$$

令 $u=e^{y}$,则由上式有

$$u^{2}-2xu-1=0.$$

这是关于 u 的一个二次方程,它的根为

$$u=x\pm\sqrt{x^{2}+1}.$$

因 $u=e^{y}>0$,故上式根号前应取正号,于是

$$u=x+\sqrt{x^{2}+1}.$$

由于 $y=\ln u$，故得反双曲正弦

$$y=\operatorname{arsh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

函数 $y=\operatorname{arsh} x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，它是奇函数，在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内为单调增加. 由 $y=\operatorname{sh} x$ 的图形，根据反函数的作图法，可得 $y=\operatorname{arsh} x$ 的图形如图 1-17所示.

下面讨论双曲余弦 $y=\operatorname{ch} x$ $(x\geqslant 0)$ 的反函数.

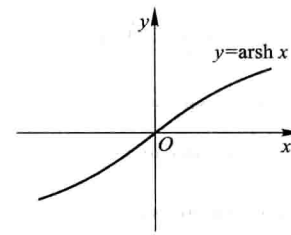


图 1-17

由 $x=\operatorname{ch} y$ $(y\geqslant 0)$，有

$$x=\frac{e^y+e^{-y}}{2},\quad y\geqslant 0.$$

由此得 $e^y=x\pm\sqrt{x^2-1}$，故

$$y=\ln\left(x\pm\sqrt{x^2-1}\right).$$

上式中 x 的值必须满足条件 $x\geqslant 1$，而其中平方根前的符号由于 $y\geqslant 0$ 应取正. 故

$$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

上述双曲余弦 $y=\operatorname{ch} x$ $(x\geqslant 0)$ 的反函数称为反双曲余弦的主值，记作 $y=\operatorname{arch} x$，即

$$y=\operatorname{arch} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).$$

这样规定的函数 $y=\operatorname{arch} x$ 的定义域为 $[1,+\infty)$，它在区间 $[1,+\infty)$ 上是单调增加的(图 1-18).

类似地，可得反双曲正切

$$y=\operatorname{arth} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

这函数的定义域为开区间 $(-1,1)$，它在开区间 $(-1,1)$ 内是单调增加的奇函数. 它的图形关于原点对称(图 1-19).

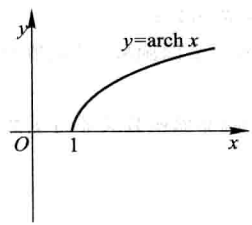


图 1-18

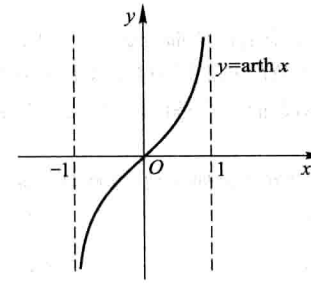


图 1-19

习　题　1-1

1. 求下列函数的自然定义域：

(1) $y=\sqrt{3x+2}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$；

(3) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；　　(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$；

(5) $y=\sin\sqrt{x}$；　　(6) $y=\tan(x+1)$；

(7) $y=\arcsin(x-3)$；　　(8) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；

(9) $y=\ln(x+1)$；　　(10) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

2. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；

(2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；

(4) $f(x)=1$，$g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

3. 设

$$\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$$

求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$，并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

4. 试证下列函数在指定区间内的单调性：

(1) $y=\dfrac{x}{1-x}$，　$(-\infty,1)$；　　(2) $y=x+\ln x$，　$(0,+\infty)$.

5. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

6. 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l,l)$ 上的. 证明：

(1) 两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

7. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非偶函数又非奇函数？

(1) $y=x^2(1-x^2)$；　　(2) $y=3x^2-x^3$；

(3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；　　(4) $y=x(x-1)(x+1)$；

(5) $y=\sin x-\cos x+1$；　　(6) $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$.

8. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期：

(1) $y=\cos(x-2)$；　　(2) $y=\cos 4x$；

(3) $y=1+\sin \pi x$；　　(4) $y=x\cos x$；

(5) $y=\sin^2 x$.

9. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$；　　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

(3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$；　　(4) $y=2\sin 3x$ $\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$；

(5) $y=1+\ln(x+2)$；　　(6) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

10. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义，试证：函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

11. 在下列各题中，求由所给函数构成的复合函数，并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值：

(1) $y=u^2$，$u=\sin x$，$x_1=\dfrac{\pi}{6}$，$x_2=\dfrac{\pi}{3}$；

(2) $y=\sin u$，$u=2x$，$x_1=\dfrac{\pi}{8}$，$x_2=\dfrac{\pi}{4}$；

(3) $y=\sqrt{u}$，$u=1+x^2$，$x_1=1$，$x_2=2$；

(4) $y=e^u$，$u=x^2$，$x_1=0$，$x_2=1$；

(5) $y=u^2$，$u=e^x$，$x_1=1$，$x_2=-1$.

12. 设 $f(x)$ 的定义域 $D=[0,1]$，求下列各函数的定义域：

(1) $f(x^2)$；　　(2) $f(\sin x)$；

(3) $f(x+a)$ $(a>0)$；　　(4) $f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$.

13. 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}\qquad g(x)=e^x,$$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形.

14. 已知水渠的横断面为等腰梯形，斜角 $\varphi=40°$（图 1-20）. 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时，求湿周 L（$L=AB+BC+CD$）与水深 h 之间的函数关系式，并指明其定义域.

15. 设 xOy 平面上有正方形 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 及直线 $l:x+y=t$ $(t\geqslant 0)$. 若 $S(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积，试求 $S(t)$ 与 t 之间的函数关系.

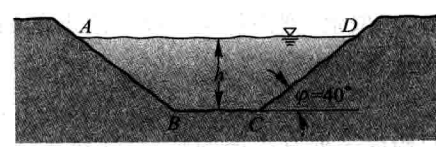


图 1-20

16. 求联系华氏温度（用 F 表示）和摄氏温度（用 C 表示）的转换公式，并求

(1) 90 ℉的等价摄氏温度和-5 ℃的等价华氏温度;

(2) 是否存在一个温度值,使华氏温度计和摄氏温度计的读数是一样的? 如果存在,那么该温度值是多少?

17. 已知 $Rt\triangle ABC$ 中,直角边 AC、BC 的长度分别为 20、15,动点 P 从 C 出发,沿三角形边界按 $C\to B\to A$ 方向移动;动点 Q 从 C 出发,沿三角形边界按 $C\to A\to B$ 方向移动,移动到两动点相遇时为止,且点 Q 移动的速度是点 P 移动的速度的 2 倍. 设动点 P 移动的距离为 x,$\triangle CPQ$ 的面积为 y,试求 y 与 x 之间的函数关系.

18. 利用以下美国人口普查局提供的世界人口数据①以及指数模型来推测 2020 年的世界人口.

年份	人口数/百万	年增长率/%
2008	6708.2	1.166
2009	6786.4	1.140
2010	6863.8	1.121
2011	6940.7	1.107
2012	7017.5	1.107
2013	7095.2	

第二节　数列的极限

一、数列极限的定义

极限概念是在探求某些实际问题的精确解答过程中产生的. 例如,我国古代数学家刘徽(公元 3 世纪)利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法——割圆术,就是极限思想在几何学上的应用.

设有一圆,首先作内接正六边形,把它的面积记为 A_1;再作内接正十二边形,其面积记为 A_2;再作内接正二十四边形,其面积记为 A_3;如此下去,每次边数加倍,一般地,把内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边形的面积记为 A_n ($n\in\mathbf{N}_+$). 这样,就得到一系列内接正多边形的面积

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots,$$

它们构成一列有次序的数. 当 n 越大,内接正多边形与圆的差别就越小,从而以

① 这里世界人口数据是指每年年中的人口数.

A_n作为圆面积的近似值也越精确. 但是无论 n 取得如何大，只要 n 取定了，A_n终究只是多边形的面积，而还不是圆的面积. 因此，设想 n 无限增大（记为 $n\to\infty$，读作 n 趋于无穷大），即内接正多边形的边数无限增加，在这个过程中，内接正多边形无限接近于圆，同时 A_n也无限接近于某一确定的数值，这个确定的数值就理解为圆的面积. 这个确定的数值在数学上称为上面这列有次序的数（所谓数列）$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$当 $n\to\infty$ 时的极限. 在圆面积问题中我们看到，正是这个数列的极限才精确地表达了圆的面积.

在解决实际问题中逐渐形成的这种极限方法，已成为高等数学中的一种基本方法，因此有必要作进一步的阐明.

先说明数列的概念. 如果按照某一法则，对每个 $n\in\mathbf{N}_+$，对应着一个确定的实数 x_n，这些实数 x_n按照下标 n 从小到大排列得到的一个序列

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

就叫做数列，简记为数列$\{x_n\}$.

数列中的每一个数叫做数列的项，第 n 项 x_n叫做数列的一般项（或通项）. 例如：

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots;$$

$$2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots;$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots;$$

$$1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots;$$

$$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots$$

都是数列的例子，它们的一般项依次为

$$\frac{n}{n+1},\quad 2^n,\quad \frac{1}{2^n},\quad (-1)^{n+1},\quad \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}.$$

在几何上，数列$\{x_n\}$可看作数轴上的一个动点，它依次取数轴上的点 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$（图1-21）.

数列$\{x_n\}$可看作自变量为正整数 n 的函数

$$x_n = f(n),\ n\in\mathbf{N}_+.$$

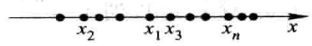


图 1-21

当自变量 n 依次取 1, 2, 3, $\cdots$ 一切正整数时，对应的函数值就排列成数列$\{x_n\}$.

对于我们要讨论的问题来说，重要的是：当 n 无限增大时（即 $n\to\infty$ 时），对应的 $x_n = f(n)$是否能无限接近于某个确定的数值？如果能够的话，这个数值等于多少？

我们对数列

$$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots \tag{2-1}$$

进行分析. 在这数列中,

$$x_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

我们知道,两个数 a 与 b 之间的接近程度可以用这两个数之差的绝对值 $|b-a|$ 来度量(在数轴上 $|b-a|$ 表示点 a 与点 b 之间的距离),$|b-a|$ 越小,a 与 b 就越接近.

就数列(2-1)来说,因为

$$|x_n-1|=\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n},$$

由此可见,当 n 越来越大时,$\frac{1}{n}$ 越来越小,从而 x_n 就越来越接近于 1. 因为只要 n 足够大,$|x_n-1|$ 即 $\frac{1}{n}$ 可以小于任意给定的正数,所以说,当 n 无限增大时,x_n 无限接近于 1. 例如,给定 $\frac{1}{100}$,欲使 $\frac{1}{n}<\frac{1}{100}$,只要 $n>100$,即从第 101 项起,都能使不等式

$$|x_n-1|<\frac{1}{100}$$

成立. 同样地,如果给定 $\frac{1}{10\ 000}$,那么从第 10 001 项起,都能使不等式

$$|x_n-1|<\frac{1}{10\ 000}$$

成立. 一般地,不论给定的正数 ε 多么小,总存在着一个正整数 N,使得当 $n>N$ 时,不等式

$$|x_n-1|<\varepsilon$$

都成立. 这就是数列 $x_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$ 当 $n\to\infty$ 时无限接近于 1 这件事的实质. 这样的一个数 1,叫做数列 $x_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$ 当 $n\to\infty$ 时的极限.

一般地,有如下数列极限的定义:

定义　设 $\{x_n\}$ 为一数列,如果存在常数 a,对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

都成立，那么就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a,$$

或

$$x_n\to a\ (n\to\infty).$$

如果不存在这样的常数 a，就说数列 $\{x_n\}$ 没有极限，或者说数列 $\{x_n\}$ 是发散的，习惯上也说 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不存在.

上面定义中正数 ε 可以任意给定是很重要的，因为只有这样，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 才能表达出 x_n 与 a 无限接近的意思. 此外还应注意到：定义中的正整数 N 是与任意给定的正数 ε 有关的，它随着 ε 的给定而选定.

我们给“数列 $\{x_n\}$ 的极限为 a”一个几何解释：

将常数 a 及数列 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$ 在数轴上用它们的对应点表示出来，再在数轴上作点 a 的 ε 邻域即开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$（图 1-22）.

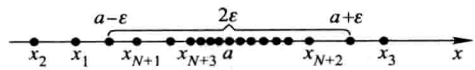


图 1-22

因不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

与不等式

$$a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$$

等价，所以当 $n>N$ 时，所有的点 x_n 都落在开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 内，而只有有限个（至多只有 N 个）在这区间以外.

为了表达方便，引入记号“$\forall$”表示“对于任意给定的”或“对于每一个”，记号“$\exists$”表示“存在”. 于是，“对于任意给定的 $\varepsilon>0$”写成“$\forall\varepsilon>0$”，“存在正整数 N”写成“$\exists$ 正整数 N”，数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定义可表达为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\text{ 正整数 }N,\text{当 }n>N\text{ 时，有 }|x_n-a|<\varepsilon.$$

数列极限的定义并未直接提供如何去求数列的极限，以后要讲极限的求法，而现在只先举几个说明极限概念的例子.

例 1　证明数列

$$2,\frac{1}{2},\frac{4}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$$

的极限是 1.

证　$|x_n-a|=\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}$,

$\forall \varepsilon>0$,为了使$|x_n-a|<\varepsilon$,只要

$$\frac{1}{n}<\varepsilon \quad 或 \quad n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

这个$\dfrac{1}{\varepsilon}$是一个确定的实数,而对于任何一个实数都有无穷多个大于它的正整数存在,所以,任取一个大于$\dfrac{1}{\varepsilon}$的正整数作为N,则当$n>N$时,就有

$$\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$$

例 2　已知$x_n=\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}$,证明数列$\{x_n\}$的极限是 0.

证　$|x_n-a|=\left|\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}-0\right|=\dfrac{1}{(n+1)^2}<\dfrac{1}{n^2}$.

$\forall \varepsilon>0$ 为了使$|x_n-a|<\varepsilon$,只要

$$\frac{1}{n^2}<\varepsilon \quad 或 \quad n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},$$

这个$\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$是一个确定的实数,大于$\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$的正整数有无穷多个存在,任取其中一个作为$N$,则当$n>N$时,就有

$$\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}-0\right|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}=0.$$

注意　在利用数列极限的定义来论证某个数a是数列$\{x_n\}$的极限时,重要的是对于任意给定的正数ε,要能够指出定义中所说的这种正整数N确实存在.如果知道$|x_n-a|$小于某个量(这个量与n存在函数关系),那么当这个量小于ε时,$|x_n-a|<\varepsilon$当然也成立.若令这个量小于ε能推出符合定义要求的正整数N必定存在,就可采用这种方法.例 2 便是这样做的.当然,在利用极限定义证明极限时,如果能具体找出一个满足定义要求的正整数N,那么也就证明了这种N的

存在. 在例 2 中，若设 $\varepsilon<1$，就可取 $N=\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$. 在以后的证明中，多采取这种找出一个符合定义要求的正整数 N 的方法.

例 3　设 $|q|<1$，证明等比数列

$$1, q, q^2, \cdots, q^{n-1}, \cdots$$

的极限是 0.

证　$\forall \varepsilon>0$（设 $\varepsilon<1$），因为

$$|x_n-0|=|q^{n-1}-0|=|q|^{n-1},$$

要使 $|x_n-0|<\varepsilon$，只要

$$|q|^{n-1}<\varepsilon.$$

取自然对数，得 $(n-1)\ln|q|<\ln\varepsilon$. 因 $|q|<1$，$\ln|q|<0$，故

$$n>1+\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}.$$

取 $N=\left[1+\frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$，则当 $n>N$ 时，就有

$$|q^{n-1}-0|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} q^{n-1}=0.$$

二、收敛数列的性质

下面四个定理都是有关收敛数列的性质.

定理 1（极限的唯一性）　如果数列 $\{x_n\}$ 收敛，那么它的极限唯一.

证　用反证法. 假设同时有 $x_n\to a$ 及 $x_n\to b$，且 $a<b$. 取 $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，故 $\exists$ 正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，不等式

$$|x_n-a|<\frac{b-a}{2} \tag{2-2}$$

都成立. 同理，因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=b$，故 $\exists$ 正整数 N_2，当 $n>N_2$ 时，不等式

$$|x_n-b|<\frac{b-a}{2} \tag{2-3}$$

都成立. 取 $N=\max\{N_1, N_2\}$（这式子表示 N 是 N_1 和 N_2 中较大的那个数），则当 $n>N$ 时，(2-2) 式及 (2-3) 式会同时成立，但由 (2-2) 式有 $x_n<\frac{a+b}{2}$，由 (2-3) 式有 $x_n>\frac{a+b}{2}$，这是不可能的. 这矛盾证明了本定理的断言.

例 4　证明数列 $x_n=(-1)^{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$ 是发散的.

证　如果这数列收敛,根据定理 1 它有唯一的极限,设极限为 a,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 按数列极限的定义,对于 $\varepsilon=\frac{1}{2}$,∃ 正整数 N,当 $n>N$ 时,$|x_n-a|<\frac{1}{2}$ 成立;即当 $n>N$ 时,x_n 都在开区间 $\left(a-\frac{1}{2},a+\frac{1}{2}\right)$ 内. 但这是不可能的,因为 $n\to\infty$ 时,x_n 无休止地一再重复取得 1 和 -1 这两个数,而这两个数不可能同时属于长度为 1 的开区间 $\left(a-\frac{1}{2},a+\frac{1}{2}\right)$ 内. 因此这数列发散.

由函数有界性的概念可得以下的数列有界性概念.

对于数列 $\{x_n\}$,如果存在正数 M,使得对于一切 x_n 都满足不等式

$$|x_n|\leqslant M,$$

那么称数列 $\{x_n\}$ 是有界的;如果这样的正数 M 不存在,就说数列 $\{x_n\}$ 是无界的.

例如,数列 $x_n=\frac{n}{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$ 是有界的,因为可取 $M=1$,而使

$$\left|\frac{n}{n+1}\right|\leqslant 1$$

对于一切正整数 n 都成立.

数列 $x_n=2^n$ $(n=1,2,\cdots)$ 是无界的,因为当 n 无限增加时,2^n 可超过任何正数.

数轴上对应于有界数列的点 x_n 都落在某个闭区间 $[-M,M]$ 上.

定理 2(收敛数列的有界性)　**如果数列 $\{x_n\}$ 收敛,那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界.**

证　因为数列 $\{x_n\}$ 收敛,设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 根据数列极限的定义,对于 $\varepsilon=1$,∃ 正整数 N,当 $n>N$ 时,不等式

$$|x_n-a|<1$$

都成立. 于是,当 $n>N$ 时,

$$|x_n|=|(x_n-a)+a|\leqslant|x_n-a|+|a|<1+|a|.$$

取 $M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,1+|a|\}$,那么数列 $\{x_n\}$ 中的一切 x_n 都满足不等式

$$|x_n|\leqslant M.$$

这就证明了数列 $\{x_n\}$ 是有界的.

根据上述定理,如果数列 $\{x_n\}$ 无界,那么数列 $\{x_n\}$ 一定发散. 但是,如果数列 $\{x_n\}$ 有界,却不能断定数列 $\{x_n\}$ 一定收敛,例如数列

$$1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$$

有界,但例 4 证明了这数列是发散的. 所以数列有界是数列收敛的必要条件,但

不是充分条件.

定理 3(收敛数列的保号性)　如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,且 $a>0$(或 $a<0$),那么存在正整数 N,当 $n>N$ 时,都有 $x_n>0$(或 $x_n<0$).

证　就 $a>0$ 的情形证明. 由数列极限的定义,对 $\varepsilon=\dfrac{a}{2}>0$,∃正整数 N,当 $n>N$ 时,有

$$|x_n-a|<\frac{a}{2},$$

从而

$$x_n>a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}>0.$$

推论　如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n\geqslant 0$(或 $x_n\leqslant 0$),且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,那么 $a\geqslant 0$(或 $a\leqslant 0$).

证　设数列 $\{x_n\}$ 从第 N_1 项起,即当 $n>N_1$ 时有 $x_n\geqslant 0$. 现在用反证法证明. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a<0$,则由定理 3 知,∃正整数 N_2,当 $n>N_2$ 时,有 $x_n<0$. 取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,当 $n>N$ 时,按假定有 $x_n\geqslant 0$,按定理 3 有 $x_n<0$,这引起矛盾. 所以必有 $a\geqslant 0$.

数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n\leqslant 0$ 的情形,可以类似地证明.

最后,介绍子数列的概念以及关于收敛数列与其子数列间关系的一个定理.

在数列 $\{x_n\}$ 中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列 $\{x_n\}$ 中的先后次序,这样得到的一个数列称为原数列 $\{x_n\}$ 的子数列(或子列).

设在数列 $\{x_n\}$ 中,第一次抽取 x_{n_1},第二次在 x_{n_1} 后抽取 x_{n_2},第三次在 x_{n_2} 后抽取 x_{n_3},……,这样无休止地抽取下去,得到一个数列

$$x_{n_1},x_{n_2},\cdots,x_{n_k},\cdots,$$

这个数列 $\{x_{n_k}\}$ 就是数列 $\{x_n\}$ 的一个子数列.

注意　在子数列 $\{x_{n_k}\}$ 中,一般项 x_{n_k} 是第 k 项,而 x_{n_k} 在原数列 $\{x_n\}$ 中却是第 n_k 项. 显然,$n_k\geqslant k$.

***定理 4(收敛数列与其子数列间的关系)　如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a,那么它的任一子数列也收敛,且极限也是 a.**

证　设数列 $\{x_{n_k}\}$ 是数列 $\{x_n\}$ 的任一子数列.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,故 $\forall\,\varepsilon>0$,∃正整数 N,当 $n>N$ 时,$|x_n-a|<\varepsilon$ 成立.

取 $K=N$,则当 $k>K$ 时,$n_k>n_K=n_N\geqslant N$. 于是 $|x_{n_k}-a|<\varepsilon$. 这就证明了 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$.

证毕.

由定理4可知，如果数列$\{x_n\}$有两个子数列收敛于不同的极限，那么数列$\{x_n\}$是发散的. 例如，例4中的数列

$$1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$$

的子数列$\{x_{2k-1}\}$收敛于1，而子数列$\{x_{2k}\}$收敛于-1，因此数列$x_n=(-1)^{n+1}(n=1,2,\cdots)$是发散的. 同时这个例子也说明，一个发散的数列也可能有收敛的子数列.

习　题　1-2

1. 下列各题中，哪些数列收敛，哪些数列发散？对收敛数列，通过观察$\{x_n\}$的变化趋势，写出它们的极限：

(1) $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$；　　(2) $\left\{(-1)^n\frac{1}{n}\right\}$；

(3) $\left\{2+\frac{1}{n^2}\right\}$；　　(4) $\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\}$；

(5) $\{n(-1)^n\}$；　　(6) $\left\{\frac{2^n-1}{3^n}\right\}$；

(7) $\left\{n-\frac{1}{n}\right\}$；　　(8) $\left\{[(-1)^n+1]\frac{n+1}{n}\right\}$.

2. (1) 数列的有界性是数列收敛的什么条件？

(2) 无界数列是否一定发散？

(3) 有界数列是否一定收敛？

3. 下列关于数列$\{x_n\}$的极限是a的定义，哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，试说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

(1) 对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbf{N}_+$，当$n>N$时，不等式$x_n-a<\varepsilon$成立；

(2) 对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbf{N}_+$，当$n>N$时，有无穷多项x_n，使不等式$|x_n-a|<\varepsilon$成立；

(3) 对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在$N\in\mathbf{N}_+$，当$n>N$时，不等式$|x_n-a|<c\varepsilon$成立，其中c为某个正常数；

(4) 对于任意给定的$m\in\mathbf{N}_+$，存在$N\in\mathbf{N}_+$，当$n>N$时，不等式$|x_n-a|<\frac{1}{m}$成立.

*4. 设数列$\{x_n\}$的一般项$x_n=\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$. 问$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$？求出$N$，使当$n>N$时，$x_n$与其极限之差的绝对值小于正数$\varepsilon$. 当$\varepsilon=0.001$时，求出数$N$.

*5. 根据数列极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n\text{个}}=1$.

*6. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$. 并举例说明：如果数列 $\{|x_n|\}$ 有极限，但数列 $\{x_n\}$ 未必有极限.

*7. 设数列 $\{x_n\}$ 有界，又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

*8. 对于数列 $\{x_n\}$，若 $x_{2k-1}\to a$ $(k\to\infty)$，$x_{2k}\to a$ $(k\to\infty)$，证明：$x_n\to a$ $(n\to\infty)$.

第三节　函数的极限

一、函数极限的定义

因为数列 $\{x_n\}$ 可看作自变量为 n 的函数：$x_n=f(n)$，$n\in\mathbf{N}_+$，所以，数列 $\{x_n\}$ 的极限为 a，就是：当自变量 n 取正整数而无限增大（即 $n\to\infty$）时，对应的函数值 $f(n)$ 无限接近于确定的数 a. 把数列极限概念中的函数为 $f(n)$ 而自变量的变化过程为 $n\to\infty$ 等特殊性撇开，这样可以引出函数极限的一般概念：在自变量的某个变化过程中，如果对应的函数值无限接近于某个确定的数，那么这个确定的数就叫做在这一变化过程中函数的极限. 这个极限是与自变量的变化过程密切相关的，由于自变量的变化过程不同，函数的极限就表现为不同的形式. 数列极限看作函数 $f(n)$ 当 $n\to\infty$ 时的极限，这里自变量的变化过程是 $n\to\infty$. 下面讲述自变量的变化过程为其他情形时函数 $f(x)$ 的极限，主要研究两种情形：

（1）自变量 x 任意地接近于有限值 x_0 或者说趋于有限值 x_0（记作 $x\to x_0$）时，对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形；

（2）自变量 x 的绝对值 $|x|$ 无限增大即趋于无穷大（记作 $x\to\infty$）时，对应的函数值 $f(x)$ 的变化情形.

1. 自变量趋于有限值时函数的极限

现在考虑自变量 x 的变化过程为 $x\to x_0$. 如果在 $x\to x_0$ 的过程中，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于确定的数值 A，那么就说 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限. 当然，这里我们首先假定函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域[①]内是有定义的.

在 $x\to x_0$ 的过程中，对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于 A，就是 $|f(x)-A|$ 能任意小. 如数列极限概念所述，$|f(x)-A|$ 能任意小这件事可以用 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 来表达，其中 ε 是任意给定的正数. 因为函数值 $f(x)$ 无限接近于 A 是在 $x\to x_0$ 的过程中实现的，所以对于任意给定的正数 ε，只要求充分接近于 x_0 的 x 所对应的函数值

① 以 x_0 为中心的任何开区间称为点 x_0 的邻域，记作 $U(x_0)$；在 $U(x_0)$ 中去掉中心 x_0 后，称为点 x_0 的去心邻域，记作 $\mathring{U}(x_0)$.

$f(x)$满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$；而充分接近于x_0的x可表达为$0<|x-x_0|<\delta$，其中δ是某个正数. 从几何上看，适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$的x的全体，就是点x_0的去心δ邻域①，而邻域半径δ则体现了x接近x_0的程度.

通过以上分析，我们给出$x\to x_0$时函数的极限的定义如下：

定义 1　**设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数A，对于任意给定的正数ε（不论它多么小），总存在正数δ，使得当x满足不等式$0<|x-x_0|<\delta$时，对应的函数值$f(x)$都满足不等式**

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么常数A就叫做函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad \text{或} \quad f(x)\to A \ (\text{当 } x\to x_0).$$

我们指出，定义中$0<|x-x_0|$表示$x\neq x_0$，所以$x\to x_0$时$f(x)$有没有极限，与$f(x)$在点x_0是否有定义并无关系.

定义 1 可以简单地表述为

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon>0, \exists\, \delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限为A的几何解释如下：任意给定一正数ε，作平行于x轴的两条直线$y=A+\varepsilon$和$y=A-\varepsilon$，界于这两条直线之间是一横条区域. 根据定义，对于给定的ε，存在着点x_0的一个δ邻域$(x_0-\delta, x_0+\delta)$，当$y=f(x)$的图形上的点的横坐标x在邻域$(x_0-\delta, x_0+\delta)$内，但$x\neq x_0$时，这些点的纵坐标$f(x)$满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

或

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon.$$

亦即这些点落在上面所作的横条区域内（图 1-23）.

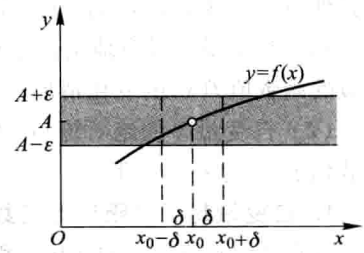


图 1-23

例 1　证明$\lim\limits_{x\to x_0} c=c$，此处$c$为一常数.

证　这里$|f(x)-A|=|c-c|=0$，因此$\forall\, \varepsilon>0$，可任取$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，能使不等式

$$|f(x)-A|=|c-c|=0<\varepsilon$$

成立. 所以$\lim\limits_{x\to x_0} c=c$.

---

① 设$x_0\in\mathbf{R}, \delta>0$，开区间$(x_0-\delta, x_0+\delta)$称为点$x_0$的$\delta$邻域，记作$U(x_0,\delta)$，点$x_0$的去心$\delta$邻域记作$\mathring{U}(x_0,\delta)$，$\delta$称为邻域半径.

例 2　证明 $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$.

证　这里 $|f(x)-A|=|x-x_0|$，因此 $\forall\,\varepsilon>0$，总可取 $\delta=\varepsilon$，当 $0<|x-x_0|<\delta=\varepsilon$ 时，能使不等式 $|f(x)-A|=|x-x_0|<\varepsilon$ 成立. 所以 $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$.

例 3　证明 $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$.

证　由于

$$|f(x)-A|=|(2x-1)-1|=2|x-1|,$$

为了使 $|f(x)-A|<\varepsilon$，只要

$$|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

所以，$\forall\,\varepsilon>0$，可取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，则当 x 适合不等式

$$0<|x-1|<\delta$$

时，对应的函数值 $f(x)$ 就满足不等式

$$|f(x)-1|=|(2x-1)-1|<\varepsilon.$$

从而

$$\lim_{x\to 1}(2x-1)=1.$$

例 4　证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

证　这里，函数在点 $x=1$ 是没有定义的，但是函数当 $x\to 1$ 时的极限存在或不存在与它并无关系. 事实上，$\forall\,\varepsilon>0$，将不等式

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$$

约去非零因子 $x-1$ 后，就化为

$$|x+1-2|=|x-1|<\varepsilon,$$

因此，只要取 $\delta=\varepsilon$，那么当 $0<|x-1|<\delta$ 时，就有

$$\left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon.$$

所以

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$$

例 5　证明：当 $x_0>0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

证　$\forall\,\varepsilon>0$，因为

$$|f(x)-A|=|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|=\left|\frac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x_0}}|x-x_0|,$$

要使$|f(x)-A|<\varepsilon$，只要$|x-x_0|<\sqrt{x_0}\varepsilon$且$x\geqslant 0$，而$x\geqslant 0$可用$|x-x_0|\leqslant x_0$保证，因此取$\delta=\min\{x_0,\sqrt{x_0}\varepsilon\}$（这式子表示，$\delta$是$x_0$和$\sqrt{x_0}\varepsilon$两个数中较小的那个数），则当$x$适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$时，对应的函数值$\sqrt{x}$就满足不等式

$$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|<\varepsilon.$$

所以

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}.$$

上述$x\to x_0$时函数$f(x)$的极限概念中，x是既从x_0的左侧也从x_0的右侧趋于x_0的. 但有时只能或只需考虑x仅从x_0的左侧趋于x_0（记作$x\to x_0^-$）的情形，或x仅从x_0的右侧趋于x_0（记作$x\to x_0^+$）的情形. 在$x\to x_0^-$的情形，x在x_0的左侧，$x<x_0$. 在$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的定义中，把$0<|x-x_0|<\delta$改为$x_0-\delta<x<x_0$，那么$A$就叫做函数$f(x)$当$x\to x_0$时的左极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0^-)=A.$$

类似地，在$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的定义中，把$0<|x-x_0|<\delta$改为$x_0<x<x_0+\delta$，那么$A$就叫做函数$f(x)$当$x\to x_0$时的右极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0^+)=A.$$

左极限与右极限统称为单侧极限.

根据$x\to x_0$时函数$f(x)$的极限的定义以及左极限和右极限的定义，容易证明：函数$f(x)$当$x\to x_0$时极限存在的充分必要条件是左极限及右极限各自存在并且相等，即

$$f(x_0^-)=f(x_0^+).$$

因此，即使$f(x_0^-)$和$f(x_0^+)$都存在，但若不相等，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$也不存在.

例 6　设

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1 & x>0.\end{cases}$$

证明：当$x\to 0$时$f(x)$的极限不存在.

证　仿例 3 可证当$x\to 0$时$f(x)$的左极限

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1,$$

而右极限

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1,$$

因为左极限和右极限存在但不相等，所以

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

不存在(图 1-24).

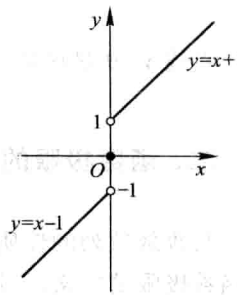


图 1-24

2. 自变量趋于无穷大时函数的极限

如果在 $x\to\infty$ 的过程中,对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于确定的数值 A,那么 A 叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限. 精确地说,就是

定义 2　设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义. 如果存在常数 A,对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在着正数 X,使得当 x 满足不等式 $|x|>X$ 时,对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A \ (当\ x\to\infty).$$

定义 2 可简单地表达为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,X>0,\ 当\ |x|>X\ 时,有\ |f(x)-A|<\varepsilon.$$

如果 $x>0$ 且无限增大(记作 $x\to+\infty$),那么只要把上面定义中的 $|x|>X$ 改为 $x>X$,就可得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 的定义. 同样,如果 $x<0$ 且 $|x|$ 无限增大(记作 $x\to-\infty$),那么只要把 $|x|>X$ 改为 $x<-X$,便得 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 的定义.

从几何上来说,$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的意义是:作直线 $y=A-\varepsilon$ 和 $y=A+\varepsilon$,则总有一个正数 X 存在,使得当 $x<-X$ 或 $x>X$ 时,函数 $y=f(x)$ 的图形位于这两直线之间(图 1-25). 这时,直线 $y=A$ 是函数 $y=f(x)$ 的图形的水平渐近线.

例 7　证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

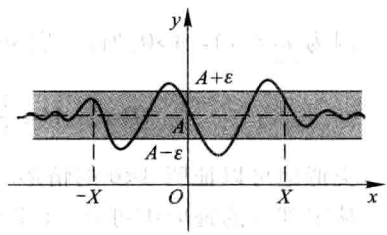


图 1-25

证　$\forall\,\varepsilon>0$,要证 $\exists\,X>0$,当 $|x|>X$ 时,不等式

$$\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$$

成立. 因这个不等式相当于

$$\frac{1}{|x|}<\varepsilon \text{ 或 } |x|>\frac{1}{\varepsilon}.$$

由此可知,如果取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$,那么当 $|x|>X=\dfrac{1}{\varepsilon}$ 时,不等式 $\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$ 成立,这就证明了

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

直线 $y=0$ 是函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图形的水平渐近线.

二、函数极限的性质

与收敛数列的性质相比较,可得函数极限的一些相应的性质. 它们都可以根据函数极限的定义,运用类似于证明收敛数列性质的方法加以证明. 由于函数极限的定义按自变量的变化过程不同有各种形式,下面仅以"$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$"这种形式为代表给出关于函数极限性质的一些定理,并就其中的几个给出证明. 至于其他形式的极限的性质及其证明,只要相应地做一些修改即可得出.

定理 1(函数极限的唯一性)　**如果** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ **存在,那么这极限唯一.**

定理 2(函数极限的局部有界性)　**如果** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,**那么存在常数** $M>0$ **和** $\delta>0$,**使得当** $0<|x-x_0|<\delta$ **时,有** $|f(x)|\leqslant M$.

证　因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,所以取 $\varepsilon=1$,则 $\exists\,\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x)-A|<1\Rightarrow|f(x)|\leqslant|f(x)-A|+|A|<|A|+1,$$

记 $M=|A|+1$,则定理 2 就获得证明.

定理 3(函数极限的局部保号性)　**如果** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,**且** $A>0$ (**或** $A<0$),**那么存在常数** $\delta>0$,**使得当** $0<|x-x_0|<\delta$ **时,有** $f(x)>0$ (**或** $f(x)<0$).

证　就 $A>0$ 的情形证明.

因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$,所以,取 $\varepsilon=\frac{A}{2}>0$,则 $\exists\,\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x)-A|<\frac{A}{2}\Rightarrow f(x)>A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}>0.$$

类似地可以证明 $A<0$ 的情形.

从定理 3 的证明中可知,在定理 3 的条件下,可得下面更强的结论:

定理 3′　**如果** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ $(A\neq0)$,**那么就存在着** x_0 **的某一去心邻域** $\mathring{U}(x_0)$,**当** $x\in\mathring{U}(x_0)$ **时,就有** $|f(x)|>\frac{|A|}{2}$.

由定理 3,易得以下推论:

推论　**如果在** x_0 **的某去心邻域内** $f(x)\geqslant0$ (**或** $f(x)\leqslant0$),**而且** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,**那**

么 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

***定理 4（函数极限与数列极限的关系）　如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，$\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足：$x_n\neq x_0$（$n\in\mathbf{N}_+$），那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.**

证　设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

又因 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，故对 $\delta>0$，$\exists\,N$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-x_0|<\delta$.

由假设，$x_n\neq x_0$（$n\in\mathbf{N}_+$），故当 $n>N$ 时，$0<|x_n-x_0|<\delta$，从而 $|f(x_n)-A|<\varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

习　题　1-3

1. 对图 1-26 所示的函数 $f(x)$，求下列极限，如极限不存在，说明理由.

（1）$\lim\limits_{x\to -2}f(x)$；　　（2）$\lim\limits_{x\to -1}f(x)$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

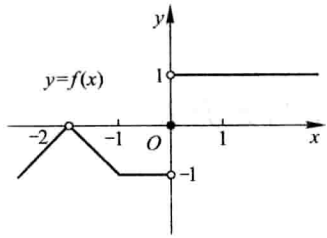


图 1-26

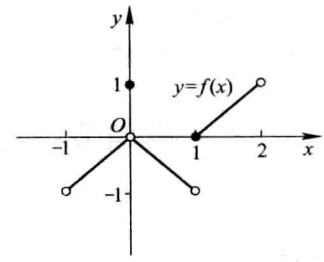


图 1-27

2. 对图 1-27 所示的函数 $f(x)$，下列陈述中哪些是对的，哪些是错的？

（1）$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$；　　（4）$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$；

（5）$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在；　　（6）对每个 $x_0\in(-1,1)$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在.

3. 对图 1-28 所示的函数，下列陈述中哪些是对的，哪些是错的？

（1）$\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=1$；　　（2）$\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)$ 不存在；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$；　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$；

（5）$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=1$；　　（6）$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=0$；

（7）$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=0$；　　（8）$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=0$.

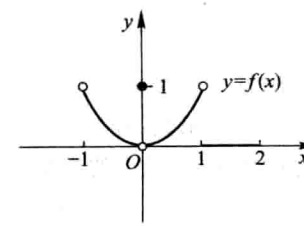


图 1-28

4. 求 $f(x)=\frac{x}{x}$，$\varphi(x)=\frac{|x|}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的左、右极限，并说明它们在 $x\to 0$ 时的极限是否存在.

*5. 根据函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$；　(2) $\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$；

(3) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=-4$；　(4) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

*6. 根据函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$；　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

*7. 当 $x\to 2$ 时，$y=x^2\to 4$. 问 δ 等于多少，使当 $|x-2|<\delta$ 时，$|y-4|<0.001$？

*8. 当 $x\to\infty$ 时，$y=\frac{x^2-1}{x^2+3}\to 1$. 问 X 等于多少，使当 $|x|>X$ 时，$|y-1|<0.01$？

*9. 证明函数 $f(x)=|x|$ 当 $x\to 0$ 时极限为零.

*10. 证明：若 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限都存在且都等于 A，则

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A.$$

*11. 根据函数极限的定义证明：函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

*12. 试给出 $x\to\infty$ 时函数极限的局部有界性的定理，并加以证明.

第四节　无穷小与无穷大

一、无穷小

定义 1　如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小.

特别地，以零为极限的数列 $\{x_n\}$ 称为 $n\to\infty$ 时的无穷小.

例 1　因为 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$，所以函数 $x-1$ 为当 $x\to 1$ 时的无穷小.

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，所以函数 $\frac{1}{x}$ 为当 $x\to\infty$ 时的无穷小.

注意　不要把无穷小与很小的数（例如百万分之一）混为一谈，因为无穷小是这样的函数，在 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）的过程中，这函数的绝对值能小于任意给定的正数 ε，而很小的数如百万分之一，就不能小于任意给定的正数 ε，例如取 ε 等于千万分之一，则百万分之一就不能小于这个给定的 ε. 但零是可以作为无穷小的唯一的常数，因为如果 $f(x)\equiv 0$，那么对于任意给定的 $\varepsilon>0$ 总有 $|f(x)|<\varepsilon$.

下面的定理说明无穷小与函数极限的关系.

定理 1　在自变量的同一变化过程 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）中，函数 $f(x)$ 具有极限 A 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$，其中 α 是无穷小.

证　先证必要性. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

令 $\alpha=f(x)-A$，则 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小，且

$$f(x)=A+\alpha.$$

这就证明了 $f(x)$ 等于它的极限 A 与一个无穷小 α 之和.

再证充分性. 设 $f(x)=A+\alpha$，其中 A 是常数，α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小，于是

$$|f(x)-A|=|\alpha|.$$

因 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小，所以 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|\alpha|<\varepsilon,$$

即

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

这就证明了 A 是 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限.

类似地可证明当 $x\to\infty$ 时的情形.

二、无穷大

如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，对应的函数值的绝对值 $|f(x)|$ 可以大于预先指定的任何很大的正数 M，那么就称函数 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷大. 精确地说，就是

定义 2　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义（或 $|x|$ 大于某一正数时有定义）. 如果对于任意给定的正数 M（不论它多么大），总存在正数 δ（或正数 X），只要 x 适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$（或 $|x|>X$），对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式

$$|f(x)|>M,$$

那么称函数 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷大.

按函数极限的定义来说，当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷大的函数 $f(x)$ 的极限是不存在的. 但为了便于叙述函数的这一性态，我们也说“函数的极限是无穷大”，并记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty\quad\left(\text{或}\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty\right).$$

如果在无穷大的定义中，把$|f(x)|>M$换成$f(x)>M$（或$f(x)<-M$），就记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=+\infty \quad (\text{或} \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=-\infty).$$

必须注意，无穷大（∞）不是数，不可与很大的数（如1千万、1亿等）混为一谈.

例2　证明$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$（图1-29）.

证　设$\forall M>0$. 要使

$$\left|\frac{1}{x-1}\right|>M,$$

只要

$$|x-1|<\frac{1}{M}.$$

所以，取$\delta=\dfrac{1}{M}$，则只要x适合不等式$0<|x-1|<\delta=\dfrac{1}{M}$，就有

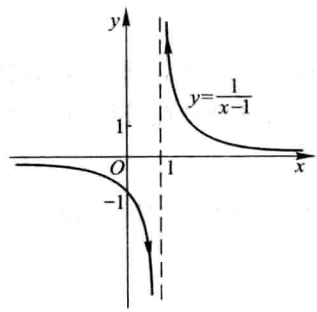


图1-29

$$\left|\frac{1}{x-1}\right|>M.$$

这就证明了$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.

直线$x=1$是函数$y=\dfrac{1}{x-1}$的图形的铅直渐近线.

一般地说，如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，那么直线$x=x_0$是函数$y=f(x)$的图形的铅直渐近线.

无穷大与无穷小之间有一种简单的关系，即

定理2　在自变量的同一变化过程中，如果$f(x)$为无穷大，那么$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小；反之，如果$f(x)$为无穷小，且$f(x)\neq 0$，那么$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大.

证　设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

$\forall\varepsilon>0$. 根据无穷大的定义，对于$M=\dfrac{1}{\varepsilon}$，$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)|>M=\frac{1}{\varepsilon},$$

即

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|<\varepsilon,$$

所以$\frac{1}{f(x)}$为当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

反之，设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，且 $f(x)\neq 0$.

$\forall M>0$. 根据无穷小的定义，对于 $\varepsilon=\frac{1}{M}$，$\exists \delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)|<\varepsilon=\frac{1}{M},$$

由于当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)\neq 0$，从而

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|>M,$$

所以$\frac{1}{f(x)}$为当 $x\to x_0$ 时的无穷大.

类似地可证当 $x\to\infty$ 时的情形.

习　题　1-4

1. 两个无穷小的商是否一定是无穷小？举例说明之.

*2. 根据定义证明：

（1）$y=\frac{x^2-9}{x+3}$为当 $x\to 3$ 时的无穷小；　　（2）$y=x\sin\frac{1}{x}$为当 $x\to 0$ 时的无穷小.

*3. 根据定义证明：函数 $y=\frac{1+2x}{x}$为当 $x\to 0$ 时的无穷大. 问 x 应满足什么条件，能使 $|y|>10^4$？

4. 求下列极限并说明理由：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-x^2}{1-x}$.

5. 根据函数极限或无穷大定义，填写下表：

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$	$\forall \varepsilon>0$， $\exists \delta>0$， 使当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时， 即有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$.			

续表

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0^+$				
$x\to x_0^-$				
$x\to\infty$		$\forall M>0$， $\exists X>0$， 使当 $\lvert x\rvert>X$ 时， 即有 $\lvert f(x)\rvert>M$.		
$x\to+\infty$				
$x\to-\infty$				

6. 函数 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是否有界？这个函数是否为 $x\to+\infty$ 时的无穷大？为什么？

*7. 证明：函数 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 内无界，但这函数不是 $x\to0^+$ 时的无穷大.

8. 求函数 $f(x)=\frac{4}{2-x^2}$ 的图形的渐近线.

第五节　极限运算法则

本节讨论极限的求法，主要是建立极限的四则运算法则和复合函数的极限运算法则，利用这些法则，可以求某些函数的极限. 以后我们还将介绍求极限的其他方法.

在下面的讨论中，记号“lim”下面没有标明自变量的变化过程，实际上，下面的定理对 $x\to x_0$ 及 $x\to\infty$ 都是成立的. 在论证时，我们只证明了 $x\to x_0$ 的情形，只要把 δ 改成 X，把 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 改成 $\lvert x\rvert>X$，就可得 $x\to\infty$ 情形的证明.

定理 1　两个无穷小的和是无穷小.

证　设 α 及 β 是当 $x\to x_0$ 时的两个无穷小，而

$$\gamma=\alpha+\beta.$$

$\forall\varepsilon>0$. 因为 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小，对于 $\frac{\varepsilon}{2}>0$，$\exists\delta_1>0$，当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta_1$ 时，不等式

$$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$$

成立. 又因 β 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小，对于 $\frac{\varepsilon}{2}>0$，$\exists\delta_2>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，不等式

$$|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}$$

成立. 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，

$$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}\quad 及\quad |\beta|<\frac{\varepsilon}{2}$$

同时成立，从而 $|\gamma|=|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. 这就证明了 γ 也是当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

用数学归纳法可证：**有限个无穷小之和也是无穷小.**

定理 2　有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

证　设函数 u 在 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 内是有界的，即 $\exists M>0$ 使 $|u|\leqslant M$ 对一切 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 成立. 又设 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_2>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_2)$ 时，有

$$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{M}.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，

$$|u|\leqslant M\quad 及\quad |\alpha|<\frac{\varepsilon}{M}$$

同时成立. 从而

$$|u\alpha|=|u|\cdot|\alpha|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$

这就证明了 $u\alpha$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

推论 1　常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 2　有限个无穷小的乘积是无穷小.

定理 3　如果 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，那么

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$;

(3) **若又有 $B\neq0$，则**

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}.$$

证　先证(1).

因 $\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$,由第四节定理 1 有

$$f(x)=A+\alpha,\quad g(x)=B+\beta,$$

其中 α 及 β 为无穷小. 于是

$$f(x)\pm g(x)=(A+\alpha)\pm(B+\beta)=(A\pm B)+(\alpha\pm\beta).$$

由本节定理 1, $\alpha\pm\beta$ 是无穷小($\alpha-\beta$ 可看作 $\alpha+(-1)\beta$,由本节定理 2 的推论 1, $(-1)\beta$ 是无穷小,因此 $\alpha-\beta$ 也可看作两个无穷小的和). 再由第四节定理 1,得

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B=\lim f(x)\pm\lim g(x).$$

关于(2)的证明,建议读者作为练习.

再证(3).

由 $\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$,有

$$f(x)=A+\alpha, g(x)=B+\beta,$$

其中 α 及 β 为无穷小. 设

$$\gamma=\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B},$$

则

$$\gamma=\frac{A+\alpha}{B+\beta}-\frac{A}{B}=\frac{1}{B(B+\beta)}(B\alpha-A\beta).$$

上式表示, γ 可看作两个函数的乘积,其中函数 $B\alpha-A\beta$ 是无穷小. 下面我们证明另一个函数 $\frac{1}{B(B+\beta)}$ 在点 x_0 的某一邻域内有界.

根据第三节定理 3′,由于 $\lim g(x)=B\neq 0$,存在着点 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$,当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时, $|g(x)|>\frac{|B|}{2}$,从而 $\left|\frac{1}{g(x)}\right|<\frac{2}{|B|}$. 于是

$$\left|\frac{1}{B(B+\beta)}\right|=\frac{1}{|B|}\cdot\left|\frac{1}{g(x)}\right|<\frac{1}{|B|}\cdot\frac{2}{|B|}=\frac{2}{B^2}.$$

这就证明了 $\frac{1}{B(B+\beta)}$ 在点 x_0 的去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内有界.

因此,根据本节定理 2, γ 是无穷小. 而

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}+\gamma,$$

所以由上节定理 1,得

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}.$$

证毕.

定理3中的(1)、(2)可推广到有限个函数的情形. 例如,如果 $\lim f(x)$, $\lim g(x)$, $\lim h(x)$ 都存在,则有

$$\lim[f(x)+g(x)-h(x)]=\lim f(x)+\lim g(x)-\lim h(x),$$

$$\lim[f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)\cdot\lim h(x).$$

关于定理3中的(2),有如下推论:

推论1　**如果 $\lim f(x)$ 存在,而 c 为常数,那么**

$$\lim[cf(x)]=c\lim f(x).$$

就是说,求极限时,常数因子可以提到极限记号外面. 这是因为 $\lim c=c$.

推论2　**如果 $\lim f(x)$ 存在,而 n 是正整数,那么**

$$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n.$$

这是因为

$$\begin{aligned}\lim[f(x)]^n&=\lim[f(x)\cdot f(x)\cdot\cdots\cdot f(x)]\\&=\lim f(x)\cdot\lim f(x)\cdot\cdots\cdot\lim f(x)=[\lim f(x)]^n.\end{aligned}$$

关于数列,也有类似的极限四则运算法则,这就是下面的定理.

定理4　**设有数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$. 如果**

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A,\qquad\lim_{n\to\infty}y_n=B,$$

那么

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=A\cdot B$;

(3) **当** $y_n\neq0$ $(n=1,2,\cdots)$ **且** $B\neq0$ **时**, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{A}{B}$.

证明从略.

定理5　**如果** $\varphi(x)\geqslant\psi(x)$,**而** $\lim\varphi(x)=A$, $\lim\psi(x)=B$,**那么** $A\geqslant B$.

证　令 $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$,则 $f(x)\geqslant0$. 由本节定理3有

$$\begin{aligned}\lim f(x)&=\lim[\varphi(x)-\psi(x)]\\&=\lim\varphi(x)-\lim\psi(x)=A-B.\end{aligned}$$

由第三节定理3推论,有 $\lim f(x)\geqslant0$,即 $A-B\geqslant0$,故 $A\geqslant B$.

例1　求 $\lim\limits_{x\to1}(2x-1)$.

解　$\lim\limits_{x\to1}(2x-1)=\lim\limits_{x\to1}2x-\lim\limits_{x\to1}1=2\lim\limits_{x\to1}x-1=2\cdot1-1=1.$

例2　求 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-1}{x^2-5x+3}$.

解　这里分母的极限不为零,故

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-5x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3-1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-5x+3)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim 1}{\lim\limits_{x\to 2}x^2-5\lim\limits_{x\to 2}x+\lim 3}=\frac{(\lim\limits_{x\to 2}x)^3-1}{(\lim\limits_{x\to 2}x)^2-5\cdot 2+3}$$

$$=\frac{2^3-1}{2^2-10+3}=\frac{7}{-3}=-\frac{7}{3}.$$

从上面两个例题可以看出，求有理整函数（多项式）或有理分式函数当 $x\to x_0$ 的极限时，只要把 x_0 代替函数中的 x 就行了（对于有理分式函数，需假定这样代入后分母不等于零）.

事实上，设多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,$$

则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)$$

$$=a_0(\lim_{x\to x_0}x)^n+a_1(\lim_{x\to x_0}x)^{n-1}+\cdots+\lim_{x\to x_0}a_n$$

$$=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\cdots+a_n=f(x_0).$$

又设有理分式函数

$$F(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

其中 $P(x)$，$Q(x)$ 都是多项式，于是

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=P(x_0),\quad \lim_{x\to x_0}Q(x)=Q(x_0);$$

如果 $Q(x_0)\neq 0$，那么

$$\lim_{x\to x_0}F(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=F(x_0).$$

但必须**注意**：若 $Q(x_0)=0$，则关于商的极限的运算法则不能应用，那就需要特别考虑. 下面我们举两个属于这种情形的例题.

例 3　求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$.

解　当 $x\to 3$ 时，分子及分母的极限都是零，于是分子、分母不能分别取极限. 因分子及分母有公因子 $x-3$，而 $x\to 3$ 时，$x\neq 3$，$x-3\neq 0$，可约去这个不为零的公因子. 所以

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}1}{\lim\limits_{x\to 3}(x+3)}=\frac{1}{6}.$$

例 4　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}$.

解　因为分母的极限 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-5x+4)=1^2-5\cdot 1+4=0$，不能应用商的极限的运算法则. 但因

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{2x-3}=\frac{1^2-5\cdot 1+4}{2\cdot 1-3}=0,$$

故由第四节定理 2 得

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-3}{x^2-5x+4}=\infty .$$

例 5　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$.

解　先用 x^3 去除分母及分子，然后取极限：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^3}}{7+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^3}}=\frac{3}{7},$$

这是因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a}{x^n}=a\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=a\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)^n=0,$$

其中 a 为常数，n 为正整数，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$（见第三节例 7）.

例 6　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}$.

解　先用 x^3 去除分母和分子，然后求极限，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^3}}=\frac{0}{2}=0.$$

例 7　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}$.

解　应用例 6 的结果并根据上节定理 2，即得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}=\infty .$$

例 5、例 6、例 7 是下列一般情形的特例，即当 $a_0\neq 0, b_0\neq 0$，m 和 n 为非负整数时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}0, & \text{当 } n>m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n=m,\\ \infty, & \text{当 } n<m.\end{cases}$$

例 8　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

解　当 $x\to\infty$ 时，分子及分母的极限都不存在，故关于商的极限的运算法则不能应用. 如果把 $\dfrac{\sin x}{x}$ 看作 $\sin x$ 与 $\dfrac{1}{x}$ 的乘积，由于 $\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时为无穷小，而 $\sin x$ 是有界函数，则根据本节定理 2，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

定理 6（复合函数的极限运算法则）　**设函数 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 复合而成，$f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，且存在 $\delta_0>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时，有 $g(x)\neq u_0$，则**

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

证　按函数极限的定义，要证：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，

$$|f[g(x)]-A|<\varepsilon$$

成立.

由于 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\eta>0$，当 $0<|u-u_0|<\eta$ 时，$|f(u)-A|<\varepsilon$ 成立.

又由于 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，对于上面得到的 $\eta>0$，$\exists\delta_1>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，$|g(x)-u_0|<\eta$ 成立.

由假设，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时，$g(x)\neq u_0$. 取 $\delta=\min\{\delta_0,\delta_1\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|g(x)-u_0|<\eta$ 及 $|g(x)-u_0|\neq 0$ 同时成立，即 $0<|g(x)-u_0|<\eta$ 成立，从而

$$|f[g(x)]-A|=|f(u)-A|<\varepsilon$$

成立. 证毕.

在定理 6 中，把 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$ 换成 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$，而把 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$ 换成 $\lim\limits_{u\to\infty}f(u)=A$，可得类似的定理.

定理 6 表示，如果函数 $g(x)$ 和 $f(u)$ 满足该定理的条件，那么作代换 $u=g(x)$ 可把求 $\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]$ 化为求 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)$，这里 $u_0=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

习　题　1-5

1. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^2+1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$；

(5) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^4-3x^2+1}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$；　　(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)$；

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$；　　(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}$；

(13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$；　　(14) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

2. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2x+1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3-x+1)$.

3. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

4. 设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$均为非负数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$. 下列陈述中哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

(1) $a_n<b_n$，$n\in\mathbf{N}_+$；　　(2) $b_n<c_n$，$n\in\mathbf{N}_+$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在.

5. 下列陈述中，哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

(1) 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$不存在，那么$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$不存在；

(2) 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$都不存在，那么$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$不存在；

(3) 如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$不存在，那么$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)$不存在.

*6. 证明本节定理3中的(2).

第六节　极限存在准则　两个重要极限

下面讲判定极限存在的两个准则以及作为应用准则的例子，讨论两个重要

极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 及 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$.

准则 I　如果数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件：

（1）从某项起，即 $\exists\, n_0\in\mathbf{N}_+$，当 $n>n_0$ 时，有

$$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n;$$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

证　因 $y_n\to a$，$z_n\to a$，所以根据数列极限的定义，$\forall\,\varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N_1，当 $n>N_1$ 时，有 $|y_n-a|<\varepsilon$；又 $\exists$ 正整数 N_2，当 $n>N_2$ 时，有 $|z_n-a|<\varepsilon$. 现在取 $N=\max\{n_0,N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，有

$$|y_n-a|<\varepsilon,\quad |z_n-a|<\varepsilon$$

同时成立，即

$$a-\varepsilon<y_n<a+\varepsilon,\quad a-\varepsilon<z_n<a+\varepsilon$$

同时成立. 又因当 $n>N$ 时，x_n 介于 y_n 和 z_n 之间，从而有

$$a-\varepsilon<y_n\leqslant x_n\leqslant z_n<a+\varepsilon,$$

即

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

成立. 这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

上述数列极限存在准则可以推广到函数的极限：

准则 I′　如果

（1）**当** $x\in\mathring{U}(x_0,r)$（**或** $|x|>M$）**时，**

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x);$$

（2）$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=A$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=A$，

那么 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)$ **存在，且等于** A.

准则 I 及准则 I′称为夹逼准则.

作为准则 I′的应用，下面证明一个重要的极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

首先注意到，函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 对于一切 $x\neq 0$ 都有定义.

在图 1-30 所示的四分之一的单位圆中，设圆心

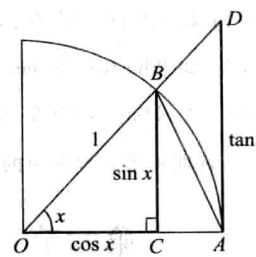


图 1-30

角 $\angle AOB=x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$，点 A 处的切线与 OB 的延长线相交于 D，又 $BC\perp OA$，则

$$\sin x=CB,\quad x=\overset{\frown}{AB},\quad \tan x=AD.$$

因为

$$\triangle AOB \text{ 的面积}<\text{扇形 } AOB \text{ 的面积}<\triangle AOD \text{ 的面积},$$

所以

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x,$$

即

$$\sin x<x<\tan x.$$

不等号各边都除以 $\sin x$，就有

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},$$

或

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1. \tag{6-1}$$

因为当 x 用 $-x$ 代替时，$\cos x$ 与 $\frac{\sin x}{x}$ 都不变，所以上面的不等式对于开区间 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 内的一切 x 也是成立的.

为了对(6-1)式应用准则 I′，下面来证 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

事实上，当 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ 时，

$$0<|\cos x-1|=1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{2},$$

即

$$0<1-\cos x<\frac{x^2}{2}.$$

当 $x\to 0$ 时，$\frac{x^2}{2}\to 0$，由准则 I′有 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=0$，所以

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1.$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$，$\lim\limits_{x\to 0}1=1$，由不等式(6-1)及准则 I′，即得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

从图 1-31 也可以看出这个重要极限.

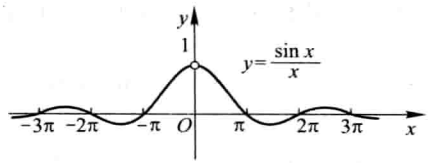


图 1-31

例 1　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1.$

例 2　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{1+\cos x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}.$$

例 3　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

解　令 $t=\arcsin x$，则 $x=\sin t$，当 $x\to 0$ 时，有 $t\to 0$. 于是由复合函数的极限运算法则得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1.$$

准则Ⅱ　单调有界数列必有极限.

如果数列 $\{x_n\}$ 满足条件

$$x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}\leqslant\cdots,$$

就称数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的；如果数列 $\{x_n\}$ 满足条件

$$x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant x_{n+1}\geqslant\cdots,$$

就称数列 $\{x_n\}$ 是单调减少的. 单调增加和单调减少的数列统称为单调数列①.

在第二节中曾证明：收敛的数列一定有界. 但那时也曾指出：有界的数列不一定收敛. 现在准则Ⅱ表明：如果数列不仅有界，并且是单调的，那么这数列的极限必定存在，也就是这数列一定收敛.

对准则Ⅱ我们不作证明，而给出如下的几何解释：

① 这里的单调数列是广义的，就是说，在条件中也包括相等的情形. 以后称单调数列都是指这种广义的单调数列.

从数轴上看，对应于单调数列的点 x_n 只可能向一个方向移动，所以只有两种可能情形：或者点 x_n 沿数轴移向无穷远（$x_n\to+\infty$ 或 $x_n\to-\infty$），或者点 x_n 无限趋近于某一个定点 A（图 1-32），也就是数列 $\{x_n\}$ 趋于一个极限. 但现在假定数列是有界的，而有界数列的点 x_n 都落在数轴上某一个区间 $[-M,M]$ 内，那么上述第一种情形就不可能发生了. 这就表示这个数列趋于一个极限，并且这个极限的绝对值不超过 M.

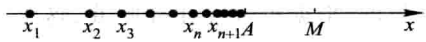


图 1-32

作为准则Ⅱ的应用，我们讨论另一个重要极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}.$$

下面考虑 x 取正整数 n 而趋于 $+\infty$ 的情形.

设 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$，我们来证数列 $\{x_n\}$ 单调增加并且有界. 按牛顿二项公式，有

$$\begin{aligned}x_n&=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\\&=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\\&\quad\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}\\&=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\\&\quad\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),\end{aligned}$$

类似地，

$$\begin{aligned}x_{n+1}=1+1&+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\cdots+\\&\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\\&\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).\end{aligned}$$

比较 x_n，x_{n+1} 的展开式，可以看到除前两项外，x_n 的每一项都小于 x_{n+1} 的对应项，并且 x_{n+1} 还多了最后的一项，其值大于 0，因此

$$x_n<x_{n+1},$$

这就说明数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的. 这个数列同时还是有界的. 因为，如果 x_n 的展

开式中各项括号内的数用较大的数 1 代替，得

$$x_n \leqslant 1+\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) \leqslant 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

这就说明数列 $\{x_n\}$ 是有界的. 根据极限存在准则 Ⅱ，这个数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，通常用字母 e 来表示它，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.$$

可以证明，当 x 取实数而趋于 $+\infty$ 或 $-\infty$ 时，函数 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 的极限都存在且都等于 e①. 因此②，

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}. \tag{6-2}$$

这个数 e 是无理数，它的值是

$$\mathrm{e}=2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\cdots.$$

在第一节中提到的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 以及自然对数 $y=\ln x$ 中的底 e 就是这个常数.

利用复合函数的极限运算法则，可把(6-2)式写成另一形式. 在 $(1+z)^{\frac{1}{z}}$ 中作代换 $x=\frac{1}{z}$，得 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. 又当 $z\to 0$ 时 $x\to\infty$. 因此由复合函数的极限运算法则得

---

① 设 $n\leqslant x<n+1$，则

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

且 n 与 x 同时趋于 $+\infty$，因为

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}=\mathrm{e},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=\mathrm{e},$$

应用夹逼准则，即得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

令 $x=-(t+1)$，则 $x\to-\infty$ 时，$t\to+\infty$. 从而

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-(t+1)}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}=\lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]=\mathrm{e}.$$

② 参阅习题 1-3 第 10 题.

$$\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

下面的例4也是用代换方法来做的，实质上还是用到了复合函数的极限运算法则.

例4　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

解　令 $t=-x$，则当 $x\to\infty$ 时，$t\to-\infty$. 于是

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to-\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

相应于单调有界数列必有极限的准则Ⅱ，函数极限也有类似的准则. 对于自变量的不同变化过程（$x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$），准则有不同的形式. 现以 $x\to x_0^-$ 为例，将相应的准则叙述如下：

准则Ⅱ′　**设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个左邻域内单调并且有界，则 $f(x)$ 在 x_0 的左极限 $f(x_0^-)$ 必定存在.**

***柯西（Cauchy）①极限存在准则**

在第二节例1及例2中，我们看到收敛数列不一定是单调的. 因此，准则Ⅱ所给出的单调有界这条件，是数列收敛的充分条件，而不是必要的. 当然，其中有界这一条件对数列的收敛性来说是必要的. 下面叙述的柯西极限存在准则，它给出了数列收敛的充分必要条件.

柯西极限存在准则　**数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是：对于任意给定的正数 ε，存在正整数 N，使得当 $m>N$，$n>N$ 时，有**

$$|x_n-x_m|<\varepsilon.$$

证　必要性　设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. $\forall\,\varepsilon>0$，由数列极限的定义，$\exists$ 正整数 N，当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-a|<\frac{\varepsilon}{2};$$

同样，当 $m>N$ 时，也有

$$|x_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

① 柯西（Augustin-Louis Cauchy，1789—1857），法国数学家，他出版了《分析教程》（1821）、《无穷小分析教程概论》（1823）、《微积分在几何中的应用》（1826—1828）这几部划时代的著作，给出了分析学一系列基本概念的严格定义，将微积分理论完整而严密地奠基于极限的基础之上，从而使他成为严格微积分学的奠基者.

因此，当 $m>N, n>N$ 时，有

$$|x_n-x_m|=|(x_n-a)-(x_m-a)|$$
$$\leqslant |x_n-a|+|x_m-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

所以条件是必要的.

充分性这里不予证明.

这准则的几何意义表示，数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是：对于任意给定的正数 ε，在数轴上一切具有足够大号码的点 x_n 中，任意两点间的距离小于 ε.

柯西极限存在准则有时也叫做柯西审敛原理.

习　题　1-6

1. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin \omega x}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0} x\cot x$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$；　　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$ (x 为不等于零的常数).

2. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{kx}$ (k 为正整数).

*3. 根据函数极限的定义，证明极限存在的准则 I′.

4. 利用极限存在准则证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}=1$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$；

(3) 数列 $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \cdots$ 的极限存在；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[n]{1+x}=1$；　　(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$.

第七节　无穷小的比较

在第五节中我们已经知道，两个无穷小的和、差及乘积仍旧是无穷小. 但是，关于两个无穷小的商，却会出现不同的情况，例如，当 $x\to 0$ 时，$3x$、x^2、$\sin x$ 都是无穷小，而

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{3x}{x^2}=\infty,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}=\frac{1}{3}.$$

两个无穷小之比的极限的各种不同情况，反映了不同的无穷小趋于零的“快慢”程度. 就上面几个例子来说，在 $x\to 0$ 的过程中，$x^2\to 0$ 比 $3x\to 0$“快些”，反过来 $3x\to 0$ 比 $x^2\to 0$“慢些”，而 $\sin x\to 0$ 与 $x\to 0$“快慢相仿”.

下面，我们就无穷小之比的极限存在或为无穷大时，来说明两个无穷小之间的比较. 应当注意，下面的 α 及 β 都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小，且 $\alpha\neq 0$，$\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$ 也是在这个变化过程中的极限.

定义

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，那么就说 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$；

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，那么就说 β 是比 α 低阶的无穷小；

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，那么就说 β 与 α 是同阶无穷小；

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0$，$k>0$，那么就说 β 是关于 α 的 k 阶无穷小；

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，那么就说 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$.

显然，等价无穷小是同阶无穷小的特殊情形，即 $c=1$ 的情形.

下面举一些例子：

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{x}=0$，所以当 $x\to 0$ 时，$3x^2$ 是比 x 高阶的无穷小，即

$$3x^2=o(x)\quad (x\to 0).$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\infty$，所以当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{n}$ 是比 $\dfrac{1}{n^2}$ 低阶的无穷小.

因为 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$，所以当 $x\to 3$ 时，x^2-9 与 $x-3$ 是同阶无穷小.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$，所以当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x$ 是关于 x 的二阶无穷小.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，所以当 $x\to 0$ 时，$\sin x$ 与 x 是等价无穷小，即

$$\sin x\sim x\quad (x\to 0).$$

下面再举一个常用的等价无穷小的例子.

例 1　证明:当 $x\to 0$ 时,$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$.

证　因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[n]{1+x})^n-1}{\frac{1}{n}x[\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{n}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1}=1\text{①},$$

所以 $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$ $(x\to 0)$.

关于等价无穷小,有下面两个定理.

定理 1　**β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为**

$$\beta=\alpha+o(\alpha).$$

证　必要性　设 $\alpha\sim\beta$,则

$$\lim\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=\lim\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)=\lim\frac{\beta}{\alpha}-1=0,$$

因此 $\beta-\alpha=o(\alpha)$,即 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.

充分性　设 $\beta=\alpha+o(\alpha)$,则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\alpha+o(\alpha)}{\alpha}=\lim\left(1+\frac{o(\alpha)}{\alpha}\right)=1,$$

因此 $\alpha\sim\beta$.

例 2　因为当 $x\to 0$ 时,$\sin x\sim x$,$\tan x\sim x$,$\arcsin x\sim x$,$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$,所以当 $x\to 0$ 时有

$$\sin x=x+o(x),\quad \tan x=x+o(x),$$

$$\arcsin x=x+o(x),\quad 1-\cos x=\frac{1}{2}x^2+o(x^2).$$

定理 2　**设 $\alpha\sim\widetilde{\alpha}$,$\beta\sim\widetilde{\beta}$,且 $\lim\frac{\widetilde{\beta}}{\widetilde{\alpha}}$ 存在,则**

① 极限 $\lim_{x\to 0}\sqrt[n]{(1+x)^m}=1$ $(m=n-1,n-2,\cdots,1)$ 用到了习题 1-6 中题 4(4) 的结果及第五节中定理 3 的推论 2.

$$\lim \frac{\beta}{\alpha}=\lim \frac{\widetilde{\beta}}{\widetilde{\alpha}}.$$

证　$\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=\lim \left(\dfrac{\beta}{\widetilde{\beta}} \cdot \dfrac{\widetilde{\beta}}{\widetilde{\alpha}} \cdot \dfrac{\widetilde{\alpha}}{\alpha}\right)=\lim \dfrac{\beta}{\widetilde{\beta}} \cdot \lim \dfrac{\widetilde{\beta}}{\widetilde{\alpha}} \cdot \lim \dfrac{\widetilde{\alpha}}{\alpha}=\lim \dfrac{\widetilde{\beta}}{\widetilde{\alpha}}.$

定理 2 表明，求两个无穷小之比的极限时，分子及分母都可用等价无穷小来代替. 因此，如果用来代替的无穷小选得适当的话，就可以使计算简化.

例 3　求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$.

解　当 $x \to 0$ 时，$\tan 2x \sim 2x$，$\sin 5x \sim 5x$，所以

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim_{x \to 0} \frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}.$$

例 4　求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x^3+3x}$.

解　当 $x \to 0$ 时，$\sin x \sim x$，无穷小 x^3+3x 与它本身显然是等价的，所以

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^3+3x}=\lim_{x \to 0} \frac{x}{x(x^2+3)}=\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2+3}=\frac{1}{3}.$$

例 5　求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}$.

解　当 $x \to 0$ 时，$(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1 \sim \dfrac{1}{3}x^2$，$\cos x-1 \sim -\dfrac{1}{2}x^2$，所以

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}.$$

习　题　1-7

1. 当 $x \to 0$ 时，$2x-x^2$ 与 x^2-x^3 相比，哪一个是高阶无穷小？
2. 当 $x \to 0$ 时，$(1-\cos x)^2$ 与 $\sin^2 x$ 相比，哪一个是高阶无穷小？
3. 当 $x \to 1$ 时，无穷小 $1-x$ 和(1) $1-x^3$，(2) $\dfrac{1}{2}(1-x^2)$ 是否同阶，是否等价？
4. 证明：当 $x \to 0$ 时，有

(1) $\arctan x \sim x$；　　(2) $\sec x-1 \sim \dfrac{x^2}{2}$.

5. 利用等价无穷小的性质，求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{2x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}$ (n,m 为正整数)；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$.

6. 证明无穷小的等价关系具有下列性质：

(1) $\alpha\sim\alpha$ (自反性)；　　(2) 若 $\alpha\sim\beta$，则 $\beta\sim\alpha$ (对称性)；

(3) 若 $\alpha\sim\beta,\beta\sim\gamma$，则 $\alpha\sim\gamma$ (传递性).

第八节　函数的连续性与间断点

一、函数的连续性

自然界中有许多现象，如气温的变化、河水的流动、植物的生长等都是连续地变化着的. 这种现象在函数关系上的反映，就是函数的连续性. 例如就气温的变化来看，当时间变动很微小时，气温的变化也很微小，这种特点就是所谓连续性. 下面我们先引入增量的概念，然后来描述连续性，并引出函数的连续性的定义.

设变量 u 从它的一个初值 u_1 变到终值 u_2，终值与初值的差 u_2-u_1 就叫做变量 u 的增量，记作 Δu，即

$$\Delta u=u_2-u_1.$$

增量 Δu 可以是正的，也可以是负的. 在 Δu 为正的情形，变量 u 从 u_1 变到 $u_2=u_1+\Delta u$ 时是增大的；当 Δu 为负时，变量 u 是减小的.

应该注意到：记号 Δu 并不表示某个量 Δ 与变量 u 的乘积，而是一个整体不可分割的记号.

现在假定函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一个邻域内是有定义的. 当自变量 x 在这邻域内从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数值或因变量 $f(x)$ 相应地从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$，因此函数值或因变量 $f(x)$ 的对应增量为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

习惯上也称 Δy 为函数的增量，函数增量的几何解释如图 1-33 所示.

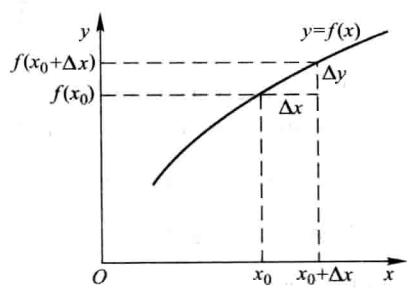


图 1-33

假如保持 x_0 不变而让自变量的增量 Δx 变动，一般说来，函数的增量 Δy 也要随着变动. 现在我们对连续性的概念可以

这样描述：如果当 Δx 趋于零时，函数的对应增量 Δy 也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \tag{8-1}$$

或

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处是连续的，即有下述定义：

定义　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续.

为了应用方便起见，下面把函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续的定义用不同的方式来叙述.

设 $x=x_0+\Delta x$，则 $\Delta x\to 0$ 就是 $x\to x_0$. 又由于

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x)-f(x_0),$$

即

$$f(x)=f(x_0)+\Delta y,$$

可见 $\Delta y\to 0$ 就是 $f(x)\to f(x_0)$，因此(8-1)式与

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

相当. 所以，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续的定义又可叙述如下：

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0), \tag{8-2}$$

那么就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

由函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限的定义可知，上述定义也可用“ε-δ”语言表达如下：

$f(x)$ 在点 x_0 连续 $\Leftrightarrow \forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

下面说明左连续及右连续的概念.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0^-)$ 存在且等于 $f(x_0)$，即

$$f(x_0^-)=f(x_0),$$

那么就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 左连续. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0^+)$ 存在且等于 $f(x_0)$，即

$$f(x_0^+)=f(x_0),$$

那么就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 右连续.

在区间上每一点都连续的函数，叫做在该区间上的连续函数，或者说函数在

该区间上连续. 如果区间包括端点，那么函数在右端点连续是指左连续，在左端点连续是指右连续.

连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

在第五节中，我们曾经证明：如果 $f(x)$ 是有理整函数（多项式），那么对于任意的实数 x_0，都有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，因此有理整函数在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续的. 对于有理分式函数 $F(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，只要 $Q(x_0)\neq 0$，就有 $\lim\limits_{x\to x_0} F(x)=F(x_0)$，因此有理分式函数在其定义域内的每一点都是连续的.

由第三节例 5 可知，函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内是连续的.

作为例子，我们来证明，函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续的.

设 x 是区间 $(-\infty,+\infty)$ 内任意取定的一点. 当 x 有增量 Δx 时，对应的函数的增量为

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x,$$

由三角公式有

$$\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

注意到

$$\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\leqslant 1,$$

就推得

$$|\Delta y|=|\sin(x+\Delta x)-\sin x|\leqslant 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|.$$

因为对于任意的角度 α，当 $\alpha\neq 0$ 时有 $|\sin\alpha|<|\alpha|$，所以

$$0\leqslant|\Delta y|=|\sin(x+\Delta x)-\sin x|<|\Delta x|.$$

因此，当 $\Delta x\to 0$ 时，由夹逼准则得 $|\Delta y|\to 0$，这就证明了 $y=\sin x$ 对于任一 $x\in(-\infty,+\infty)$ 是连续的.

类似地可以证明，函数 $y=\cos x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续的.

二、函数的间断点

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义. 在此前提下，如果函数 $f(x)$ 有下列三种情形之一：

（1）在 $x=x_0$ 没有定义；

（2）虽在 $x=x_0$ 有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在；

(3) 虽在 $x=x_0$ 有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$，

那么函数 $f(x)$ 在点 x_0 为不连续，而点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点.

下面举例来说明函数间断点的几种常见类型.

例 1　正切函数 $y=\tan x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处没有定义，所以点 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 是函数 $\tan x$ 的间断点. 因

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty,$$

我们称 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 为函数 $\tan x$ 的无穷间断点(图 1-34).

例 2　函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 没有定义；当 $x\to 0$ 时，函数值在 -1 与 $+1$ 之间变动无限多次(图 1-35)，所以点 $x=0$ 称为函数 $\sin\dfrac{1}{x}$ 的振荡间断点.

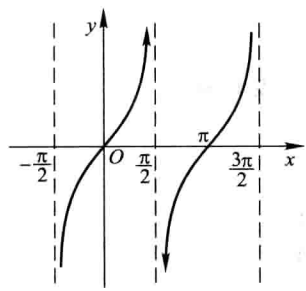


图 1-34

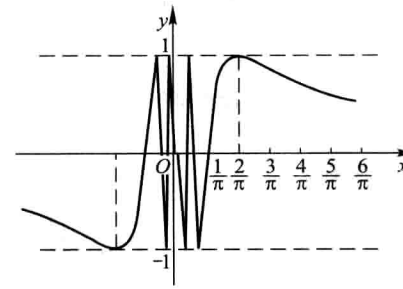


图 1-35

例 3　函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在点 $x=1$ 没有定义，所以函数在点 $x=1$ 为不连续(图 1-36). 但这里

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2.$$

如果补充定义：令 $x=1$ 时 $y=2$，那么所给函数在 $x=1$ 成为连续. 所以 $x=1$ 称为该函数的可去间断点.

例 4　函数

$$y=f(x)=\begin{cases}x, & x\neq 1,\\ \dfrac{1}{2}, & x=1.\end{cases}$$

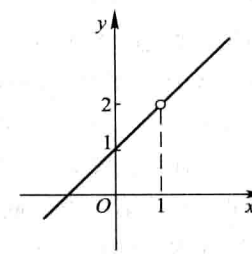


图 1-36

这里$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}x=1$，但$f(1)=\dfrac{1}{2}$，所以

$$\lim_{x\to 1}f(x)\neq f(1).$$

因此，点$x=1$是函数$f(x)$的间断点（图 1-37）. 但如果改变函数$f(x)$在$x=1$处的定义：令$f(1)=1$，那么$f(x)$在$x=1$成为连续. 所以$x=1$也称为该函数的可去间断点.

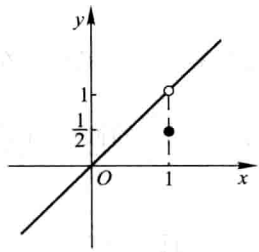


图 1-37

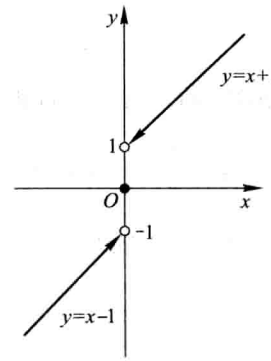


图 1-38

例 5　函数

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1 & x>0.\end{cases}$$

这里，当$x\to 0$时，

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1,$$
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1.$$

左极限与右极限虽都存在，但不相等，故极限$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在，所以点$x=0$是函数$f(x)$的间断点（图 1-38）. 因$y=f(x)$的图形在$x=0$处产生跳跃现象，我们称$x=0$为函数$f(x)$的跳跃间断点.

上面举了一些间断点的例子. 通常把间断点分成两类：如果x_0是函数$f(x)$的间断点，但左极限$f(x_0^-)$及右极限$f(x_0^+)$都存在，那么x_0称为函数$f(x)$的第一类间断点. 不是第一类间断点的任何间断点，称为第二类间断点. 在第一类间断点中，左、右极限相等者称为可去间断点，不相等者称为跳跃间断点. 无穷间断点和振荡间断点显然是第二类间断点.

习　题　1-8

1. 设 $y=f(x)$ 的图形如图 1-39 所示，试指出 $f(x)$ 的全部间断点，并对可去间断点补充或修改函数值的定义，使它成为连续点.

2. 研究下列函数的连续性，并画出函数的图形：

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & x<-1 \text{ 或 } x>1.\end{cases}$

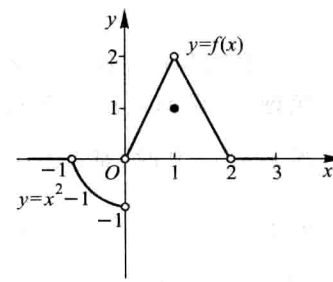


图 1-39

3. 下列函数在指出的点处间断，说明这些间断点属于哪一类. 如果是可去间断点，那么补充或改变函数的定义使它连续：

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}, x=1, x=2;$

(2) $y=\dfrac{x}{\tan x}, x=k\pi, x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$　$(k=0,\pm1,\pm2\cdots);$

(3) $y=\cos^2\dfrac{1}{x}, x=0;$

(4) $y=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 1,\\ 3-x, & x>1,\end{cases}$　$x=1.$

4. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性，若有间断点，则判别其类型.

5. 下列陈述中，哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

(1) 如果函数 $f(x)$ 在 a 连续，那么 $|f(x)|$ 也在 a 连续；

(2) 如果函数 $|f(x)|$ 在 a 连续，那么 $f(x)$ 也在 a 连续.

*6. 证明：若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续且 $f(x_0)\neq 0$，则存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$，当 $x\in U(x_0)$ 时，$f(x)\neq 0$.

*7. 设

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q},\end{cases}$$

证明：

(1) $f(x)$ 在 $x=0$ 连续；

(2) $f(x)$ 在非零的 x 处都不连续.

*8. 试举出具有以下性质的函数 $f(x)$ 的例子：

$x=0,\pm1,\pm2,\pm\dfrac{1}{2},\cdots,\pm n,\pm\dfrac{1}{n},\cdots$ 是 $f(x)$ 的所有间断点，且它们都是无穷间断点.

第九节　连续函数的运算与初等函数的连续性

一、连续函数的和、差、积、商的连续性

由函数在某点连续的定义和极限的四则运算法则，立即可得出下面的定理：

定理1　设函数$f(x)$和$g(x)$在点x_0连续，则它们的和（差）$f\pm g$、积$f\cdot g$及商$\frac{f}{g}$（当$g(x_0)\neq 0$时）都在点x_0连续.

例1　因$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$，$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$，而$\sin x$和$\cos x$都在区间$(-\infty,+\infty)$内连续（第八节），故由定理1知$\tan x$和$\cot x$在它们的定义域内是连续的.

二、反函数与复合函数的连续性

反函数和复合函数的概念已经在第一节中讲过，这里来讨论它们的连续性.

定理2　如果函数$y=f(x)$在区间I_x上单调增加（或单调减少）且连续，那么它的反函数$x=f^{-1}(y)$也在对应的区间$I_y=\{y\mid y=f(x),x\in I_x\}$上单调增加（或单调减少）且连续.

证明从略.

例2　由于$y=\sin x$在闭区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上单调增加且连续，所以它的反函数$y=\arcsin x$在闭区间$[-1,1]$上也是单调增加且连续的.

同样，应用定理2可证：$y=\arccos x$在闭区间$[-1,1]$上单调减少且连续，$y=\arctan x$在区间$(-\infty,+\infty)$内单调增加且连续，$y=\operatorname{arccot} x$在区间$(-\infty,+\infty)$内单调减少且连续.

总之，反三角函数$\arcsin x$，$\arccos x$，$\arctan x$，$\operatorname{arccot} x$在它们的定义域内都是连续的.

定理3　设函数$y=f[g(x)]$由函数$u=g(x)$与函数$y=f(u)$复合而成，$\mathring{U}(x_0)\subset D_{f\circ g}$. 若$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，而函数$y=f(u)$在$u=u_0$连续，则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=f(u_0). \tag{9-1}$$

证　在第五节定理6中，令$A=f(u_0)$（这时$f(u)$在点u_0连续），并取消“存在$\delta_0>0$，当$x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$时，有$g(x)\neq u_0$”这条件，便得上面的定理. 这里$g(x)\neq u_0$

这条件可以取消的理由是：$\forall \varepsilon>0$，使 $g(x)=u_0$ 成立的那些点 x，显然也使 $|f[g(x)]-f(u_0)|<\varepsilon$ 成立. 因此附加 $g(x)\neq u_0$ 这条件就没有必要了.

因为在定理 3 中有

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0,\quad \lim_{u\to u_0} f(u)=f(u_0),$$

故(9-1)式又可写成

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=f[\lim_{x\to x_0} g(x)]. \tag{9-2}$$

(9-1)式表示，在定理 3 的条件下，如果作代换 $u=g(x)$，那么求 $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)]$ 就化为求 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)$，这里 $u_0=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

(9-2)式表示，在定理 3 的条件下，求复合函数 $f[g(x)]$ 的极限时，函数符号 f 与极限号 $\lim\limits_{x\to x_0}$ 可以交换次序.

把定理 3 中的 $x\to x_0$ 换成 $x\to\infty$，可得类似的定理.

例 3　求 $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}$.

解　$y=\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}$ 可看作由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=\dfrac{x-3}{x^2-9}$ 复合而成. 因为 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{6}$，而函数 $y=\sqrt{u}$ 在点 $u=\dfrac{1}{6}$ 连续，所以

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}}=\sqrt{\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}}=\sqrt{\frac{1}{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

定理 4　**设函数 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $u=g(x)$ 与函数 $y=f(u)$ 复合而成，$U(x_0)\subset D_{f\circ g}$. 若函数 $u=g(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，且 $g(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在 $u=u_0$ 连续，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在 $x=x_0$ 也连续.**

证　只要在定理 3 中令 $u_0=g(x_0)$，这就表示 $g(x)$ 在点 x_0 连续，于是由(9-1)式得

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=f(u_0)=f[g(x_0)],$$

这就证明了复合函数 $f[g(x)]$ 在点 x_0 连续.

例 4　讨论函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 的连续性.

解　函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 可看作是由 $u=\dfrac{1}{x}$ 及 $y=\sin u$ 复合而成的. $\dfrac{1}{x}$ 当 $-\infty<x<0$ 和 $0<x<+\infty$ 时是连续的，$\sin u$ 当 $-\infty<u<+\infty$ 时是连续的. 根据定理 4，函数 $\sin\dfrac{1}{x}$ 在无限区间 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 内是连续的.

三、初等函数的连续性

前面证明了三角函数及反三角函数在它们的定义域内是连续的.

我们指出(但不详细讨论),指数函数 a^x ($a>0, a\neq 1$)对于一切实数 x 都有定义,且在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调的和连续的,它的值域为$(0,+\infty)$.

由指数函数的单调性和连续性,引用定理 2 可得:对数函数 $\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$)在区间$(0,+\infty)$内单调且连续.

幂函数 $y=x^\mu$ 的定义域随 μ 的值而异,但无论 μ 为何值,在区间$(0,+\infty)$内幂函数总是有定义的. 下面我们来证明,在$(0,+\infty)$内幂函数是连续的. 事实上,设 $x>0$,则

$$y=x^\mu=a^{\mu\log_a x},$$

因此,幂函数 x^μ 可看作是由 $y=a^u$, $u=\mu\log_a x$ 复合而成的,由此,根据定理 4,它在$(0,+\infty)$内连续. 如果对于 μ 取各种不同值加以分别讨论,可以证明(证明从略)幂函数在它的定义域内是连续的.

综合起来得到:**基本初等函数在它们的定义域内都是连续的.**

最后,根据第一节中关于初等函数的定义,由基本初等函数的连续性以及本节定理 1、定理 4 可得下列重要结论:**一切初等函数在其定义区间内都是连续的**. 所谓定义区间,就是包含在定义域内的区间.

根据函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的定义,如果已知 $f(x)$ 在点 x_0 连续,那么求 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 的极限时,只要求 $f(x)$ 在点 x_0 的函数值就行了. 因此,上述关于初等函数连续性的结论提供了求极限的一个方法,这就是:如果 $f(x)$ 是初等函数,且 x_0 是 $f(x)$ 的定义区间内的点,那么

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

例如,点 $x_0=0$ 是初等函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的定义区间$[-1,1]$上的点,所以 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1}=1$;又如点 $x_0=\dfrac{\pi}{2}$ 是初等函数 $f(x)=\ln\sin x$ 的一个定义区间$(0,\pi)$内的点,所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\sin x=\ln\sin\frac{\pi}{2}=0.$$

例 5　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e=\dfrac{1}{\ln a}$.

例 6　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$.

解　令 $a^x-1=t$，则 $x=\log_a(1+t)$，当 $x\to 0$ 时 $t\to 0$，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\ln a.$$

例 7　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}(\alpha\in\mathbf{R})$.

解　令 $(1+x)^\alpha-1=t$，则当 $x\to 0$ 时，$t\to 0$，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{(1+x)^\alpha-1}{\ln(1+x)^\alpha}\cdot\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}\right]$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\alpha.$$

由例 5、例 6、例 7 可得下列三个常用的等价无穷小关系式：

$$\ln(1+x)\sim x\quad(x\to 0),$$

$$e^x-1\sim x\quad(x\to 0),$$

$$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x\quad(x\to 0).$$

例 8　求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$.

解　因为

$$(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}=(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot 6}=e^{6\cdot\frac{x}{\sin x}\ln(1+2x)^{\frac{1}{2x}}},$$

利用定理 3 及极限的运算法则，便有

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[6\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\ln(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]}=e^6.$$

一般地，对于形如 $u(x)^{v(x)}$ $(u(x)>0,u(x)\neq 1)$ 的函数（通常称为幂指函数），如果

$$\lim u(x)=a>0,\ \lim v(x)=b,$$

那么

$$\lim u(x)^{v(x)}=a^b.$$

注意：这里三个 lim 都表示在同一自变量变化过程中的极限.

习　题　1-9

1. 求函数 $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+x-6}$ 的连续区间，并求极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to -3}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

2. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 连续，证明函数

$$\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\},\quad \psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$$

在点 x_0 也连续.

3. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}$；　　(2) $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2\alpha)^3$；

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}$；

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$；　　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)^{\frac{2}{3}}-1}{x\ln(1+x)}$.

4. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\dfrac{\sin x}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}-e^x+1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}-1}$.

5. 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，且 $f(x)\neq 0$，$\varphi(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有定义，且有间断点，则下列陈述中哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，试说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

(1) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点；　　(2) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点；

(3) $f[\varphi(x)]$ 未必有间断点；　　(4) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

6. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ a+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

应当怎样选择数 a，才能使得 $f(x)$ 成为在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数.

第十节　闭区间上连续函数的性质

第八节中已说明了函数在区间上连续的概念，如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，在右端点 b 左连续，在左端点 a 右连续，那么函数 $f(x)$ 就是在闭区间 $[a,b]$ 上连续的. 在闭区间上连续的函数有几个重要的性质，今以定理的形式叙述它们.

一、有界性与最大值最小值定理

先说明最大值和最小值的概念. 对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$，如果有 $x_0 \in I$，使得对于任一 $x \in I$ 都有

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad (f(x) \geqslant f(x_0)),$$

那么称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的最大值(最小值).

例如，函数 $f(x)=1+\sin x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上有最大值 2 和最小值 0. 又例如，函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有最大值 1 和最小值 -1. 在开区间 $(0,+\infty)$ 内，$\operatorname{sgn} x$ 的最大值和最小值都等于 1（注意：最大值和最小值可以相等！）. 但函数 $f(x)=x$ 在开区间 (a,b) 内既无最大值又无最小值. 下面的定理给出函数有界且最大值和最小值存在的充分条件.

定理 1（有界性与最大值最小值定理）　在闭区间上连续的函数在该区间上有界且一定能取得它的最大值和最小值.

这就是说，如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么存在常数 $M>0$，使得对任一 $x \in [a,b]$，满足 $|f(x)| \leqslant M$；且至少有一点 ξ_1，使 $f(\xi_1)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值；又至少有一点 ξ_2，使 $f(\xi_2)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值(图 1-40).

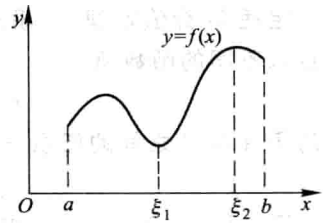


图 1-40

这里不予证明.

注意　如果函数在开区间内连续，或函数在闭区间上有间断点，那么函数在该区间上不一定有界，也不一定有最大值或最小值. 例如，函数 $y=\tan x$ 在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是连续的，但它在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是无界的，且既无最大值又无最小值；又如，函数

$$y=f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0 \leqslant x<1,\\ 1, & x=1,\\ -x+3, & 1<x \leqslant 2\end{cases}$$

在闭区间 $[0,2]$ 上有间断点 $x=1$，这函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,2]$ 上虽然有界，但是既无最大值又无最小值(图 1-41).

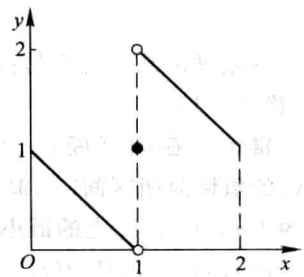


图 1-41

二、零点定理与介值定理

如果 x_0 使 $f(x_0)=0$，那么 x_0 称为函数 $f(x)$ 的零点.

定理 2（零点定理）　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号（即 $f(a)\cdot f(b)<0$），则在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使

$$f(\xi)=0.$$

这里不予证明.

从几何上看，定理 2 表示：如果连续曲线弧 $y=f(x)$ 的两个端点位于 x 轴的不同侧，那么这段曲线弧与 x 轴至少有一个交点（图 1-42）.

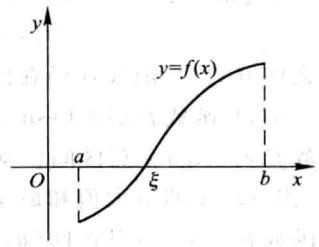


图 1-42

由定理 2 立即可推得下列较一般性的定理.

定理 3（介值定理）　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在这区间的端点取不同的函数值

$$f(a)=A \quad 及 \quad f(b)=B,$$

则对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得

$$f(\xi)=C \quad (a<\xi<b).$$

证　设 $\varphi(x)=f(x)-C$，则 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $\varphi(a)=A-C$ 与 $\varphi(b)=B-C$ 异号. 根据零点定理，开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ 使得

$$\varphi(\xi)=0 \quad (a<\xi<b).$$

又 $\varphi(\xi)=f(\xi)-C$，因此由上式即得

$$f(\xi)=C \quad (a<\xi<b).$$

这定理的几何意义是：连续曲线弧 $y=f(x)$ 与水平直线 $y=C$ 至少相交于一点（图 1-43）.

推论　在闭区间 $[a,b]$ 上连续的函数 $f(x)$ 的值域为闭区间 $[m,M]$，其中 m 与 M 依次为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值.

设 $m=f(x_1)$，$M=f(x_2)$，而 $m\neq M$，在闭区间 $[x_1,x_2]$（或 $[x_2,x_1]$）上应用介值定理，知 $f(x)$ 可取区间 (m,M) 内的一切值，结合 $f(x_1)=m$，$f(x_2)=M$，便得上述推论.

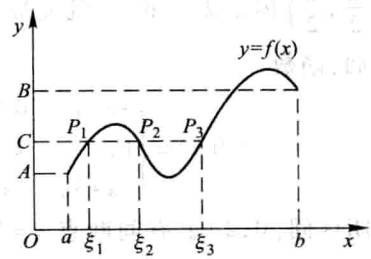


图 1-43

例 1　证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

证　函数 $f(x)=x^3-4x^2+1$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，又

$$f(0)=1>0,\quad f(1)=-2<0.$$

根据零点定理，在$(0,1)$内至少有一点ξ，使得

$$f(\xi)=0,$$

即

$$\xi^3-4\xi^2+1=0\qquad(0<\xi<1).$$

这等式说明方程$x^3-4x^2+1=0$在区间$(0,1)$内至少有一个根是ξ.

*三、一致连续性

我们先介绍函数的一致连续性概念.

设函数在区间I上连续，x_0是在I上任意取定的一个点. 由于$f(x)$在点x_0连续，因此$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当$|x-x_0|<\delta$时，就有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 通常这个$\delta$不仅与$\varepsilon$有关，而且与所取定的$x_0$有关，即使$\varepsilon$不变，但选取区间$I$上的其他点作为$x_0$时，这个$\delta$就不一定适用了. 可是对于某些函数，却有这样一种重要情形：存在着只与ε有关，而对区间I上任何点x_0都能适用的正数δ，即对任何$x_0\in I$，只要$|x-x_0|<\delta$时，就有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 如果函数$f(x)$在区间$I$上能使这种情形发生，就说函数$f(x)$在区间$I$上是一致连续的.

定义　设函数$f(x)$在区间I上有定义. 如果对于任意给定的正数ε，总存在正数δ，使得对于区间I上的任意两点x_1、x_2，当$|x_1-x_2|<\delta$时，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

那么称函数$f(x)$在区间I上一致连续.

一致连续性表示，不论在区间I的任何部分，只要自变量的两个数值接近到一定程度，就可使对应的函数值达到所指定的接近程度.

由上述定义可知，如果函数$f(x)$在区间I上一致连续，那么$f(x)$在区间I上也是连续的. 但反过来不一定成立，举例说明如下：

例2　函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在区间$(0,1]$上是连续的，但不是一致连续的.

因为函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$是初等函数，它在区间$(0,1]$上有定义，所以在$(0,1]$上是连续的.

$\forall\varepsilon>0$ $(0<\varepsilon<1)$，假定$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,1]$上一致连续，应该$\exists\delta>0$，使得对于$(0,1]$上的任意两个值x_1、x_2，当$|x_1-x_2|<\delta$时，就有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

现在取原点附近的两点

$$x_1=\frac{1}{n},\qquad x_2=\frac{1}{n+1},$$

其中 n 为正整数，这样的 x_1、x_2 显然在 $(0,1]$ 上. 因

$$|x_1-x_2|=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right|=\frac{1}{n(n+1)},$$

故只要 n 取得足够大，总能使 $|x_1-x_2|<\delta$. 但这时有

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\frac{1}{\frac{1}{n}}-\frac{1}{\frac{1}{n+1}}\right|=|n-(n+1)|=1>\varepsilon,$$

不符合一致连续的定义，所以 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上不是一致连续的.

上例说明，在半开区间上连续的函数不一定在该区间上一致连续. 但是，有下面的定理：

定理 4（一致连续性定理）　如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么它在该区间上一致连续.

这里不予证明.

习　题　1-10

1. 假设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，并且对 $[0,1]$ 上任一点 x 有 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$. 试证明 $[0,1]$ 中必存在一点 c，使得 $f(c)=c$（c 称为函数 $f(x)$ 的不动点）.

2. 证明方程 $x^5-3x=1$ 至少有一个根介于 1 和 2 之间.

3. 证明方程 $x=a\sin x+b$，其中 $a>0$，$b>0$，至少有一个正根，并且它不超过 $a+b$.

4. 证明任一最高次幂的指数为奇数的代数方程

$$a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$$

至少有一实根，其中 $a_0,a_1,\cdots,a_{2n+1}$ 均为常数，$n\in\mathbf{N}$.

5. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$（$n\geqslant 3$），则在 (x_1,x_n) 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

*6. 设函数 $f(x)$ 对于闭区间 $[a,b]$ 上的任意两点 x、y，恒有 $|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|$，其中 L 为正常数，且 $f(a)\cdot f(b)<0$. 证明：至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

*7. 证明：若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 必在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

*8. 在什么条件下，(a,b) 内的连续函数 $f(x)$ 为一致连续？

总习题一

1. 在“充分”“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内：

(1) 数列$\{x_n\}$有界是数列$\{x_n\}$收敛的_____条件,数列$\{x_n\}$收敛是数列$\{x_n\}$有界的_____条件;

(2) $f(x)$在x_0的某一去心邻域内有界是$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的_____条件,$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在是$f(x)$在$x_0$的某一去心邻域内有界的_____条件;

(3) $f(x)$在x_0的某一去心邻域内无界是$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$的_____条件,$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$是$f(x)$在$x_0$的某一去心邻域内无界的_____条件;

(4) $f(x)$当$x\to x_0$时的右极限$f(x_0^+)$及左极限$f(x_0^-)$都存在且相等是$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在的_____条件.

2. 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{-x^2}, & 0<|x|<\dfrac{\pi}{2},\\ a, & x=0\end{cases}$$

在$x=0$连续,则$a=$_____.

3. 以下两题中给出了四个结论,从中选出一个正确的结论:

(1) 设$f(x)=2^x+3^x-2$,则当$x\to 0$时,有(　　).

(A) $f(x)$与x是等价无穷小　　(B) $f(x)$与x同阶但非等价无穷小

(C) $f(x)$是比x高阶的无穷小　　(D) $f(x)$是比x低阶的无穷小

(2) 设

$$f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1},$$

则$x=0$是$f(x)$的(　　).

(A) 可去间断点　　(B) 跳跃间断点

(C) 第二类间断点　　(D) 连续点

4. 设$f(x)$的定义域是$[0,1]$,求下列函数的定义域:

(1) $f(e^x)$;　　(2) $f(\ln x)$;

(3) $f(\arctan x)$;　　(4) $f(\cos x)$.

5. 设

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0,\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0,\end{cases}$$

求$f[f(x)]$,$g[g(x)]$,$f[g(x)]$,$g[f(x)]$.

6. 利用$y=\sin x$的图形作出下列函数的图形:

(1) $y=|\sin x|$;　　(2) $y=\sin|x|$;　　(3) $y=2\sin\dfrac{x}{2}$.

7. 把半径为R的一圆形铁皮,自圆心处剪去圆心角为α的一扇形后围成一无底圆锥. 试建立这圆锥的体积V与角α间的函数关系.

*8. 根据函数极限的定义证明$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}=5$.

9. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x+1}{(x-1)^2}$；

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,b>0,c>0)$；

(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$ $(a>0)$；

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1}$.

10. 设

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ a+x^2 & x\leqslant 0,\end{cases}$$

要使$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，应当怎样选择数a？

11. 设

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}},$$

求$f(x)$的间断点，并说明间断点所属类型.

12. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

13. 证明方程$\sin x+x+1=0$在开区间$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$内至少有一个根.

14. 如果存在直线$L:y=kx+b$，使得当$x\to\infty$（或$x\to+\infty$，$x\to-\infty$）时，曲线$y=f(x)$上的动点$M(x,y)$到直线L的距离$d(M,L)\to 0$，那么称L为曲线$y=f(x)$的渐近线. 当直线L的斜率$k\neq 0$时，称L为斜渐近线.

(1) 证明：直线$L:y=kx+b$为曲线$y=f(x)$的渐近线的充分必要条件是

$$k=\lim_{\substack{x\to\infty\\(x\to+\infty\\x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x},\qquad b=\lim_{\substack{x\to\infty\\(x\to+\infty\\x\to-\infty)}}[f(x)-kx];$$

(2) 求曲线$y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$的斜渐近线.

第二章　导数与微分

微分学是微积分的重要组成部分，它的基本概念是导数与微分.

本章中，我们主要讨论导数和微分的概念以及它们的计算方法. 至于导数的应用，将在第三章讨论.

第一节　导数概念

一、引例

为了说明微分学的基本概念——导数，我们先讨论两个问题：速度问题和切线问题. 这两个问题在历史上都与导数概念的形成有密切的关系.

1. 直线运动的速度

设某质点沿直线运动. 在直线上规定了原点、正方向和单位长度，使直线成为数轴. 此外，再取定一个时刻作为测量时间的零点. 设质点于时刻 t 在直线上的位置的坐标为 s（简称位置 s）. 这样，该质点的运动完全由某个函数

$$s=f(t)$$

所确定. 此函数对运动过程中所出现的 t 值有定义，称为位置函数. 在最简单的情形，该质点所经过的路程与所花的时间成正比. 就是说，无论取哪一段时间间隔，比值

$$\frac{\text{经过的路程}}{\text{所花的时间}} \tag{1-1}$$

总是相同的. 这个比值就称为该质点的速度，并说该质点做匀速运动. 如果运动不是匀速的，那么在运动的不同时间间隔内，比值(1-1)会有不同的值. 这样，把比值(1-1)笼统地称为该质点的速度就不合适了，而需要按不同时刻来考虑. 那么，这种非匀速运动的质点在某一时刻（设为 t_0）的速度应如何理解而又如何求得呢？

首先取从时刻 t_0 到 t 这样一个时间间隔，在这段时间内，质点从位置 $s_0=f(t_0)$ 移动到 $s=f(t)$. 这时由(1-1)式算得的比值

$$\frac{s-s_0}{t-t_0}=\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \tag{1-2}$$

可认为是质点在上述时间间隔内的平均速度. 如果时间间隔选得较短,这个比值(1-2)在实践中也可用来说明质点在时刻 t_0 的速度. 但对于质点在时刻 t_0 的速度的精确概念来说,这样做是不够的,而更确切地应当这样:令 $t\to t_0$,取(1-2)式的极限,如果这个极限存在,设为 v,即

$$v=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0},$$

这时就把这个极限值 v 称为质点在时刻 t_0 的(瞬时)速度.

2. 切线问题

圆的切线可定义为"与曲线只有一个交点的直线". 但是对于其他曲线,用"与曲线只有一个交点的直线"作为切线的定义就不一定合适. 例如,对于抛物线 $y=x^2$,在原点 O 处两个坐标轴都符合上述定义,但实际上只有 x 轴是该抛物线在点 O 处的切线. 下面给出切线的定义.

设有曲线 C 及 C 上的一点 M (图 2-1),在点 M 外另取 C 上一点 N,作割线 MN. 当点 N 沿曲线 C 趋于点 M 时,如果割线 MN 绕点 M 旋转而趋于极限位置 MT,直线 MT 就称为曲线 C 在点 M 处的切线. 这里极限位置的含义是:只要弦长 $|MN|$ 趋于零,$\angle NMT$ 也趋于零.

现在就曲线 C 为函数 $y=f(x)$ 的图形的情形来讨论切线问题. 设 $M(x_0,y_0)$ 是曲线 C 上的一个点(图 2-2),则 $y_0=f(x_0)$. 根据上述定义要定出曲线 C 在点 M 处的切线,只要定出切线的斜率就行了. 为此,在点 M 外另取 C 上的一点 $N(x,y)$,于是割线 MN 的斜率为

$$\tan\varphi=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

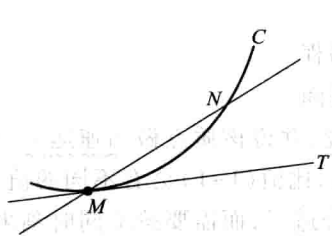


图 2-1

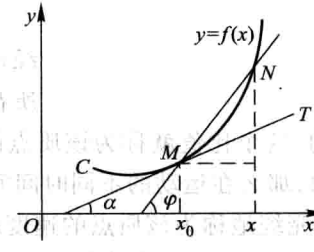


图 2-2

其中 φ 为割线 MN 的倾角. 当点 N 沿曲线 C 趋于点 M 时,$x\to x_0$. 如果当 $x\to x_0$ 时,上式的极限存在,设为 k,即

$$k=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，那么此极限 k 是割线斜率的极限，也就是切线的斜率. 这里 $k=\tan\alpha$，其中 α 是切线 MT 的倾角. 于是，通过点 $M(x_0,f(x_0))$ 且以 k 为斜率的直线 MT 便是曲线 C 在点 M 处的切线. 事实上，由 $\angle NMT=\varphi-\alpha$ 以及 $x\to x_0$ 时 $\varphi\to\alpha$，可见 $x\to x_0$ 时（这时 $|MN|\to 0$），$\angle NMT\to 0$. 因此直线 MT 确为曲线 C 在点 M 处的切线.

二、导数的定义

1. 函数在一点处的导数与导函数

从上面所讨论的两个问题看出，非匀速直线运动的速度和切线的斜率都归结为如下的极限：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \tag{1-3}$$

这里 $x-x_0$ 和 $f(x)-f(x_0)$ 分别是函数 $y=f(x)$ 的自变量的增量 Δx 和函数的增量 Δy：

$$\Delta x=x-x_0,$$

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

因 $x\to x_0$ 相当于 $\Delta x\to 0$，故(1-3)式也可写成

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\quad 或\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

在自然科学和工程技术领域内，还有许多概念，例如电流强度、角速度、线密度等，都可归结为形如(1-3)式的数学形式. 我们撇开这些量的具体意义，抓住它们在数量关系上的共性，就得出函数的导数概念.

定义　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx（点 $x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内）时，相应地，因变量取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；如果 Δy 与 Δx 之比当 $\Delta x\to 0$ 时的极限存在，那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称这个极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}, \tag{1-4}$$

也可记作 $y'|_{x=x_0}$，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ **或** $\left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导有时也说成 $f(x)$ 在点 x_0 具有导数或导数存在.

导数的定义式(1-4)也可取不同的形式，常见的有

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{1-5}$$

和

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{1-6}$$

(1-5)式中的 h 即自变量的增量 Δx.

在实际中,需要讨论各种具有不同意义的变量的变化"快慢"问题,在数学上就是所谓函数的变化率问题. 导数概念就是函数变化率这一概念的精确描述. 它撇开了自变量和因变量所代表的几何或物理等方面的特殊意义,纯粹从数量方面来刻画变化率的本质:因变量增量与自变量增量之比$\frac{\Delta y}{\Delta x}$是因变量 y 在以 x_0 和 $x_0+\Delta x$ 为端点的区间上的平均变化率,而导数 $f'(x_0)$ 则是因变量 y 在点 x_0 处的变化率,它反映了因变量随自变量的变化而变化的快慢程度.

如果极限(1-4)不存在,就说函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导. 如果不可导的原因是由于 $\Delta x\to 0$ 时,比式$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to\infty$,为了方便起见,也往往说函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数为无穷大.

上面讲的是函数在一点处可导. 如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 I 内的每点处都可导,那么就称函数 $f(x)$ 在开区间 I 内可导. 这时,对于任一 $x\in I$,都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值. 这样就构成了一个新的函数,这个函数叫做原来函数 $y=f(x)$ 的导函数,记作 y',$f'(x)$,$\frac{dy}{dx}$或$\frac{df(x)}{dx}$.

在(1-4)式或(1-5)式中把 x_0 换成 x,即得导函数的定义式

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

或

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

注意　在以上两式中,虽然 x 可以取区间 I 内的任何数值,但在极限过程中,x 是常量,Δx 或 h 是变量.

显然,函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的函数值,即

$$f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}.$$

导函数 $f'(x)$ 简称导数,而 $f'(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 x_0 处的导数或导数 $f'(x)$ 在 x_0 处的值.

2. 求导数举例

下面根据导数定义求一些简单函数的导数.

例 1　求函数 $f(x)=C$（C 为常数）的导数.

解　$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{C-C}{h}=0$,

即

$$(C)'=0.$$

这就是说,常数的导数等于零.

例 2　求函数 $f(x)=x^n$（$n\in\mathbf{N}_+$）的导数.

解　当 $n=1$ 时,$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)-x}{h}=1$;

当 $n>1$ 时,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}\right]=nx^{n-1}.$$

即

$$(x^n)'=\begin{cases}1, & n=1,\\ nx^{n-1}, & n>1.\end{cases}$$

例 3　求幂函数 $f(x)=x^\mu$（$\mu\in\mathbf{R}$）的导数.

解　幂函数的定义域与常数 μ 有关,以下设 x 在幂函数 x^μ 的定义域内且 $x\neq 0$,则

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^\mu-x^\mu}{h}=x^{\mu-1}\cdot\frac{\left(1+\dfrac{h}{x}\right)^\mu-1}{\dfrac{h}{x}}.$$

利用第一章第九节例 7 的结果,便得

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\mu x^{\mu-1},$$

即

$$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}.$$

这就是幂函数的导数公式①.

利用这公式,可以很方便地求出幂函数的导数,例如:

当 $\mu=\dfrac{1}{2}$ 时,$y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$（$x>0$）的导数为

① 对 $x=0$ 时,若 $\mu>1$,则用导数定义直接计算得 $f'(0)=0$,而此时公式右端当 $x=0$ 时也为零,故公式对一切 x 适用;若 $\mu=1$,则对一切 x 有 $f'(x)=1$,而此时公式右端当 $x\neq 0$ 时也为 1,当 $x=0$ 时,其值特别约定为 1,这样,公式对一切 x 也适用.

$$(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},$$

即

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}};$$

当 $\mu=-1$ 时，$y=x^{-1}=\frac{1}{x}(x\neq 0)$ 的导数为

$$(x^{-1})'=(-1)x^{-1-1}=-x^{-2},$$

即

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}.$$

例 4　求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

解　$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot 2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x,$$

即

$$(\sin x)'=\cos x.$$

这就是说，正弦函数的导数是余弦函数.

用类似的方法，可求得

$$(\cos x)'=-\sin x,$$

就是说，余弦函数的导数是负的正弦函数.

例 5　求函数 $f(x)=a^x\ (a>0,a\neq 1)$ 的导数.

解　$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}.$$

利用第一章第九节例 6 的结果得

$$f'(x)=a^x\ln a,$$

即

$$(a^x)'=a^x\ln a.$$

这就是指数函数的导数公式. 特殊地，当 $a=\mathrm{e}$ 时，因 $\ln \mathrm{e}=1$，故有

$$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x.$$

上式表明，以 e 为底的指数函数的导数就是它自己，这是以 e 为底的指数函

数的一个重要特性.

例 6　求函数 $f(x)=\log_a x$ $(a>0,a\neq 1)$ 的导数.

解
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)$$
$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}.$$

作代换 $u=\frac{h}{x}$ 并利用第一章第九节例 5 的结果得

$$f'(x)=\frac{1}{x\ln a},$$

即

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.$$

这就是对数函数的导数公式. 特殊地,当 $a=e$ 时,由上式得自然对数函数的导数公式

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

例 7　求函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的导数.

解　$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h|-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{|h|}{h}$.

当 $h<0$ 时,$\dfrac{|h|}{h}=-1$,故 $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{|h|}{h}=-1$;

当 $h>0$ 时,$\dfrac{|h|}{h}=1$,故 $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{|h|}{h}=1$.

所以,$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ 不存在,即函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

3. 单侧导数

根据函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 的定义,导数

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

是一个极限,而极限存在的充分必要条件是左、右极限都存在且相等,因此 $f'(x_0)$ 存在即 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是左、右极限

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\quad 及\quad \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

都存在且相等. 这两个极限分别称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数和右导数，记作 $f'_-(x_0)$ 及 $f'_+(x_0)$，即

$$f'_-(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

现在可以说，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是左导数 $f'_-(x_0)$ 和右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等.

函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的左导数 $f'_-(0)=-1$ 及右导数 $f'_+(0)=1$ 虽然都存在，但不相等，故 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

左导数和右导数统称为单侧导数.

如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，且 $f'_+(a)$ 及 $f'_-(b)$ 都存在，那么就说 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导.

三、导数的几何意义

由第一目中切线问题的讨论以及第二目中导数的定义可知：函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率，即

$$f'(x_0)=\tan\alpha,$$

其中 α 是切线的倾角（图 2-3）.

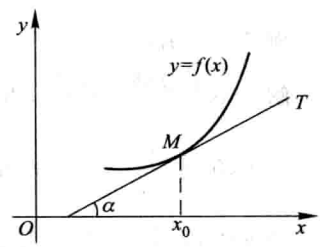


图 2-3

如果 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数为无穷大，那么这时曲线 $y=f(x)$ 的割线以垂直于 x 轴的直线 $x=x_0$ 为极限位置，即曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,f(x_0))$ 处具有垂直于 x 轴的切线 $x=x_0$（参看后面例 10）.

根据导数的几何意义并应用直线的点斜式方程，可知曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

过切点 $M(x_0,y_0)$ 且与切线垂直的直线叫做曲线 $y=f(x)$ 在点 M 处的法线. 如果 $f'(x_0)\neq 0$，法线的斜率为 $-\dfrac{1}{f'(x_0)}$，从而法线方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

例 8　求等边双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点 $\left(\frac{1}{2},2\right)$ 处的切线的斜率，并写出在该点处的切线方程和法线方程.

解　根据导数的几何意义知道，所求切线的斜率为

$$k_1=y'\big|_{x=\frac{1}{2}}.$$

由于 $y'=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$，于是

$$k_1=-\frac{1}{x^2}\bigg|_{x=\frac{1}{2}}=-4.$$

从而所求切线方程为

$$y-2=-4\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

即

$$4x+y-4=0.$$

所求法线的斜率为

$$k_2=-\frac{1}{k_1}=\frac{1}{4},$$

于是所求法线方程为

$$y-2=\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

即

$$2x-8y+15=0.$$

例 9　求曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 的通过点 $(0,-4)$ 的切线方程.

解　设切点为 (x_0,y_0)，则切线的斜率为

$$f'(x_0)=\frac{3}{2}\sqrt{x}\bigg|_{x=x_0}=\frac{3}{2}\sqrt{x_0}.$$

于是所求切线方程可设为

$$y-y_0=\frac{3}{2}\sqrt{x_0}(x-x_0). \tag{1-7}$$

因切点 (x_0,y_0) 在曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 上，故有

$$y_0=x_0^{\frac{3}{2}}, \tag{1-8}$$

由已知切线(1-7)通过点 $(0,-4)$，故有

$$-4-y_0=\frac{3}{2}\sqrt{x_0}(0-x_0). \tag{1-9}$$

求得方程(1-8)及(1-9)组成的方程组的解为 $x_0=4$，$y_0=8$，代入(1-7)式并

化简，即得所求切线方程为

$$3x-y-4=0.$$

四、函数可导性与连续性的关系

设函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

存在. 由具有极限的函数与无穷小的关系知道，

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha,$$

其中 α 为当 $\Delta x\to 0$ 时的无穷小. 上式两边同乘 Δx，得

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x.$$

由此可见，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y\to 0$. 这就是说，函数 $y=f(x)$ 在点 x 处是连续的. 所以，如果函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导，那么函数在该点必连续.

另一方面，一个函数在某点连续却不一定在该点可导. 举例说明如下：

例 10　函数 $y=f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，但在点 $x=0$ 处不可导. 这是因为在点 $x=0$ 处有

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{\sqrt[3]{h}-0}{h}=\frac{1}{h^{2/3}},$$

因而，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^{2/3}}=+\infty$，即导数为无穷大（注意，导数不存在）. 这事实在图形中表现为曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 在原点 O 具有垂直于 x 轴的切线 $x=0$（图 2-4）.

例 11　函数 $y=\sqrt{x^2}$（即 $y=|x|$）在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，但在例 7 中已经看到，这函数在 $x=0$ 处不可导. 曲线 $y=\sqrt{x^2}$ 在原点 O 没有切线（图 2-5）.

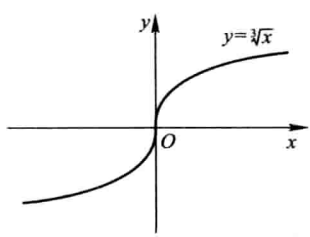


图 2-4

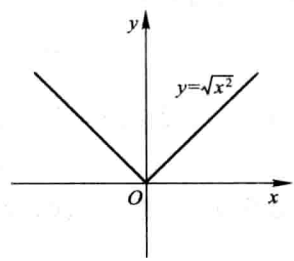


图 2-5

由以上讨论可知，函数在某点连续是函数在该点可导的必要条件，但不是充分条件.

习　题　2-1

1. 设物体绕定轴旋转，在时间间隔$[0,t]$上转过角度θ，从而转角θ是t的函数：$\theta=\theta(t)$. 如果旋转是匀速的，那么称$\omega=\dfrac{\theta}{t}$为该物体旋转的角速度. 如果旋转是非匀速的，应怎样确定该物体在时刻t_0的角速度？

2. 当物体的温度高于周围介质的温度时，物体就不断冷却. 若物体的温度T与时间t的函数关系为$T=T(t)$，应怎样确定该物体在时刻t的冷却速度？

3. 设某工厂生产x件产品的成本为

$$C(x)=2000+100x-0.1x^2(\text{元}),$$

这函数$C(x)$称为成本函数，成本函数$C(x)$的导数$C'(x)$在经济学中称为边际成本. 试求

(1) 当生产100件产品时的边际成本；

(2) 生产第101件产品的成本，并与(1)中求得的边际成本作比较，说明边际成本的实际意义.

4. 设$f(x)=10x^2$，试按定义求$f'(-1)$.

5. 证明$(\cos x)'=-\sin x$.

6. 下列各题中均假定$f'(x_0)$存在，按照导数定义观察下列极限，指出A表示什么：

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，其中$f(0)=0$，且$f'(0)$存在；

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=A$.

以下两题中给出了四个结论，从中选出一个正确的结论：

7. 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, & x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1,\end{cases}$$

则$f(x)$在$x=1$处的(　　).

(A) 左、右导数都存在　　(B) 左导数存在，右导数不存在

(C) 左导数不存在，右导数存在　　(D) 左、右导数都不存在

8. 设$f(x)$可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则$f(0)=0$是$F(x)$在$x=0$处可导的(　　).

(A) 充分必要条件　　(B) 充分条件但非必要条件

(C) 必要条件但非充分条件　　(D) 既非充分条件又非必要条件

9. 求下列函数的导数：

（1）$y=x^4$；　　（2）$y=\sqrt[3]{x^2}$；　　（3）$y=x^{1.6}$；

（4）$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$；　　（5）$y=\dfrac{1}{x^2}$；　　（6）$y=x\sqrt[5]{x}$；

（7）$y=\dfrac{x^2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^5}}$.

10. 已知物体的运动规律为 $s=t^3$ m，求这物体在 $t=2$ s 时的速度.

11. 如果 $f(x)$ 为偶函数，且 $f'(0)$ 存在，证明 $f'(0)=0$.

12. 求曲线 $y=\sin x$ 在具有下列横坐标的各点处切线的斜率：

$$x=\frac{2}{3}\pi,\qquad x=\pi.$$

13. 求曲线 $y=\cos x$ 上点 $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$ 处的切线方程和法线方程.

14. 求曲线 $y=e^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程.

15. 在抛物线 $y=x^2$ 上取横坐标为 $x_1=1$ 及 $x_2=3$ 的两点，作过这两点的割线. 问该抛物线上哪一点的切线平行于这条割线？

16. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性：

（1）$y=|\sin x|$；

（2）$y=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

17. 设函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ ax+b, & x>1.\end{cases}$$

为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导，a、b 应取什么值？

18. 已知 $f(x)=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f'_+(0)$ 及 $f'_-(0)$，又 $f'(0)$ 是否存在？

19. 已知 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

20. 证明：双曲线 $xy=a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于 $2a^2$.

第二节　函数的求导法则

在本节中，将介绍求导数的几个基本法则以及前一节中未讨论过的几个基本初等函数的导数公式. 借助于这些法则和基本初等函数的导数公式，就能比较方便地求出常见的初等函数的导数.

一、函数的和、差、积、商的求导法则

定理 1　如果函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都在点 x 具有导数，那么它们的和、差、积、商（除分母为零的点外）都在点 x 具有导数，且

(1) $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$；

(2) $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

(3) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$ $(v(x)\neq 0)$.

证　(1) $[u(x)\pm v(x)]'$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x)]-[u(x)\pm v(x)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

$$=u'(x)\pm v'(x).$$

于是法则(1)获得证明. 法则(1)可简单地表示为

$$(u\pm v)'=u'\pm v'.$$

(2) $[u(x)v(x)]'$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot v(x+\Delta x)+u(x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)+u(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

$$=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$$

其中 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)=v(x)$ 是由于 $v'(x)$ 存在，故 $v(x)$ 在点 x 连续. 于是法则(2)获得证明. 法则(2)可简单地表示为

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

(3) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x)-u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{v(x+\Delta x)v(x)\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}v(x)-u(x)\dfrac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}}{v(x+\Delta x)v(x)}$$

$$=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

于是法则(3)获得证明. 法则(3)可简单地表示为

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

定理 1 中的法则(1)、(2)可推广到任意有限个可导函数的情形. 例如,设 $u=u(x)$、$v=v(x)$、$w=w(x)$ 均可导,则有

$$(u+v-w)'=u'+v'-w',$$

$$(uvw)'=[(uv)w]'=(uv)'w+(uv)w'=(u'v+uv')w+uvw',$$

即

$$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'.$$

在法则(2)中,当 $v(x)=C$ (C 为常数)时,有

$$(Cu)'=Cu'.$$

例 1　$y=2x^3-5x^2+3x-7$,求 y'.

解　$y'=(2x^3-5x^2+3x-7)'=(2x^3)'-(5x^2)'+(3x)'-(7)'$

$=2\cdot 3x^2-5\cdot 2x+3-0=6x^2-10x+3.$

例 2　$f(x)=x^3+4\cos x-\sin\dfrac{\pi}{2}$,求 $f'(x)$ 及 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

解　$f'(x)=3x^2-4\sin x,$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{4}\pi^2-4.$$

例 3　$y=e^x(\sin x+\cos x)$,求 y'.

解　$y'=(e^x)'(\sin x+\cos x)+e^x(\sin x+\cos x)'$

$=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x.$

例 4　$y=\tan x$,求 y'.

解　$y'=(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x,$$

即

$$(\tan x)'=\sec^2 x.$$

这就是正切函数的导数公式.

例 5　$y=\sec x$，求 y'.

解　$y'=(\sec x)'=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'=\dfrac{(1)'\cos x-1\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$$=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x,$$

即

$$(\sec x)'=\sec x\tan x.$$

这就是正割函数的导数公式.

用类似方法，还可求得余切函数及余割函数的导数公式

$$(\cot x)'=-\csc^2 x,$$

$$(\csc x)'=-\csc x\cot x.$$

二、反函数的求导法则

定理 2　**如果函数 $x=f(y)$ 在区间 I_y 内单调、可导且 $f'(y)\neq 0$，那么它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在区间 $I_x=\{x\mid x=f(y),y\in I_y\}$ 内也可导，且**

$$[f^{-1}(x)]'=\frac{1}{f'(y)}\quad\text{或}\quad\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}.\tag{2-1}$$

证　由于 $x=f(y)$ 在 I_y 内单调、可导（从而连续），由第一章第九节定理 2 知道，$x=f(y)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 存在，且 $f^{-1}(x)$ 在 I_x 内也单调、连续.

任取 $x\in I_x$，给 x 以增量 Δx（$\Delta x\neq 0$，$x+\Delta x\in I_x$），由 $y=f^{-1}(x)$ 的单调性可知

$$\Delta y=f^{-1}(x+\Delta x)-f^{-1}(x)\neq 0,$$

于是有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

因 $y=f^{-1}(x)$ 连续，故

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,$$

从而

$$[f^{-1}(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{f'(y)}.$$

上述结论可简单地说成：反函数的导数等于直接函数导数的倒数.

下面用上述结论来求反三角函数及对数函数的导数.

例 6　设 $x=\sin y, y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 为直接函数，则 $y=\arcsin x$ 是它的反函数.

函数 $x=\sin y$ 在开区间 $I_y=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调、可导，且

$$(\sin y)'=\cos y>0.$$

因此，由公式(2-1)，在对应区间 $I_x=(-1,1)$ 内有

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}.$$

但 $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$（因为当 $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos y>0$，所以根号前只取正号），从而得反正弦函数的导数公式

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{2-2}$$

用类似的方法可得反余弦函数的导数公式

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{2-3}$$

例 7　设 $x=\tan y$ 是直接函数，$y\in I_y=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，则 $y=\arctan x$ 是它的反函数. 函数 $x=\tan y$ 在 $I_y=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调、可导，且

$$(\tan y)'=\sec^2 y\neq 0.$$

因此，由公式(2-1)，在对应区间 $I_x=(-\infty,+\infty)$ 内有

$$(\arctan x)'=\frac{1}{(\tan y)'}=\frac{1}{\sec^2 y}.$$

但 $\sec^2 y=1+\tan^2 y=1+x^2$，从而得反正切函数的导数公式

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}. \tag{2-4}$$

用类似的方法可得反余切函数的导数公式

$$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}. \tag{2-5}$$

如果利用三角学中的公式

$$\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x \quad 和 \quad \operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}-\arctan x,$$

那么从公式(2-2)和(2-4)，也立刻可得公式(2-3)和(2-5).

例 8　设 $x=a^y$（$a>0, a\neq 1$）为直接函数，则 $y=\log_a x$ 是它的反函数. 函数 $x=a^y$ 在区间 $I_y=(-\infty,+\infty)$ 内单调、可导，且

$$(a^y)'=a^y\ln a\neq 0.$$

因此，由公式(2-1)，在对应区间 $I_x=(0,+\infty)$ 内有

$$(\log_a x)'=\frac{1}{(a^y)'}=\frac{1}{a^y\ln a}.$$

但 $a^y=x$，从而得到第一节例 6 中已求得的对数函数的导数公式

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.$$

三、复合函数的求导法则

到目前为止，对于

$$\ln\tan x,\quad e^{x^3},\quad \sin\frac{2x}{1+x^2}$$

那样的函数，我们还不知道它们是否可导，可导的话如何求它们的导数. 这些问题借助于下面的重要法则可以得到解决，从而使可以求得导数的函数的范围得到很大扩充.

定理 3　如果 $u=g(x)$ 在点 x 可导，而 $y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$ 可导，那么复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点 x 可导，且其导数为

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x)\quad \text{或}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}. \tag{2-6}$$

证　由于 $y=f(u)$ 在点 u 可导，因此

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)$$

存在，于是根据极限与无穷小的关系有

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)+\alpha(\Delta u),$$

其中 $\alpha(\Delta u)$ 是 $\Delta u\to 0$ 时的无穷小. 上式中 $\Delta u\neq 0$，用 Δu 乘上式两边，得

$$\Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha(\Delta u)\cdot\Delta u. \tag{2-7}$$

当 $\Delta u=0$ 时，规定 $\alpha(\Delta u)=0$[①]，这时因 $\Delta y=f(u+\Delta u)-f(u)=0$，而(2-7)式右端亦为零，故(2-7)式对 $\Delta u=0$ 也成立. 用 $\Delta x\neq 0$ 除(2-7)式两边，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha(\Delta u)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

① 这时，$\alpha(\Delta u)=\begin{cases}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}-f'(u), & \Delta u\neq 0,\\ 0, & \Delta u=0,\end{cases}$ 函数 $\alpha(\Delta u)$ 在 $\Delta u=0$ 处连续，即 $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha(\Delta u)=0=\alpha(0)$.

于是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha(\Delta u)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right].$$

根据函数在某点可导必在该点连续的性质知道，当$\Delta x\to 0$时，$\Delta u\to 0$，从而可以推知

$$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta u)=\lim_{\Delta u\to 0}\alpha(\Delta u)=0.$$

又因$u=g(x)$在点x处可导，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=g'(x),$$

故

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

即

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x).$$

这就是公式(2-6).

例 9　设$y=e^{x^3}$，求$\frac{dy}{dx}$.

解　$y=e^{x^3}$可看作由$y=e^u$，$u=x^3$复合而成，因此

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=e^u\cdot 3x^2=3x^2e^{x^3}.$$

例 10　设$y=\sin\frac{2x}{1+x^2}$，求$\frac{dy}{dx}$.

解　$y=\sin\frac{2x}{1+x^2}$可看作由$y=\sin u$，$u=\frac{2x}{1+x^2}$复合而成. 因

$$\frac{dy}{du}=\cos u,$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{2(1+x^2)-(2x)^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2},$$

所以

$$\frac{dy}{dx}=\cos u\cdot\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\cdot\cos\frac{2x}{1+x^2}.$$

从以上例子看出，应用复合函数求导法则时，首先要分析所给函数可看作由哪些函数复合而成，或者说，所给函数能分解成哪些函数的复合. 如果所给函数能分解成比较简单的函数的复合，而这些简单函数的导数我们已经会求，那么应用复合函数求导法则就可以求所给函数的导数了.

对复合函数的分解比较熟练后，就不必再写出中间变量，而可以采用下列例题的方式来计算.

例 11　设 $y=\ln \sin x$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(\ln \sin x)'=\dfrac{1}{\sin x}(\sin x)'=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x.$

例 12　设 $y=\sqrt[3]{1-2x^2}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=[(1-2x^2)^{\frac{1}{3}}]'=\dfrac{1}{3}(1-2x^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot(1-2x^2)'$

$$=\frac{-4x}{3\sqrt[3]{(1-2x^2)^2}}.$$

复合函数的求导法则可以推广到多个中间变量的情形. 我们以两个中间变量为例，设 $y=f(u)$，$u=\varphi(v)$，$v=\psi(x)$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

而　$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，故复合函数 $y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$ 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

当然，这里假定上式右端所出现的导数在相应处都存在.

例 13　设 $y=\ln \cos(\mathrm{e}^x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　所给函数可分解为 $y=\ln u$，$u=\cos v$，$v=\mathrm{e}^x$. 因 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\dfrac{1}{u}$，$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=-\sin v$，$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^x$，故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}\cdot(-\sin v)\cdot\mathrm{e}^x=-\frac{\sin(\mathrm{e}^x)}{\cos(\mathrm{e}^x)}\cdot\mathrm{e}^x=-\mathrm{e}^x\tan(\mathrm{e}^x).$$

不写出中间变量，此例可这样写：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=[\ln \cos(\mathrm{e}^x)]'=\frac{1}{\cos(\mathrm{e}^x)}[\cos(\mathrm{e}^x)]'$$

$$=\frac{-\sin(\mathrm{e}^x)}{\cos(\mathrm{e}^x)}(\mathrm{e}^x)'=-\mathrm{e}^x\tan(\mathrm{e}^x).$$

例 14　设 $y=\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}$，求 y'.

解　$y'=(\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}})'=\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)'$

$$=e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}.$$

四、基本求导法则与导数公式

基本初等函数的导数公式与本节中所讨论的求导法则，在初等函数的求导运算中起着重要的作用，我们必须熟练地掌握它们. 为了便于查阅，现在把这些导数公式和求导法则归纳如下：

1. 常数和基本初等函数的导数公式

(1) $(C)'=0$，

(2) $(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$，

(3) $(\sin x)'=\cos x$，

(4) $(\cos x)'=-\sin x$，

(5) $(\tan x)'=\sec^2 x$，

(6) $(\cot x)'=-\csc^2 x$，

(7) $(\sec x)'=\sec x\tan x$，

(8) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$，

(9) $(a^x)'=a^x\ln a\ \ (a>0,a\neq 1)$，

(10) $(e^x)'=e^x$，

(11) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}\ \ (a>0,a\neq 1)$，

(12) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，

(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

(14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$，

(16) $(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

2. 函数的和、差、积、商的求导法则

设 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 都可导，则

(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$，

(2) $(Cu)'=Cu'$（C 是常数），

(3) $(uv)'=u'v+uv'$，

(4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq 0)$.

3. 反函数的求导法则

设 $x=f(y)$ 在区间 I_y 内单调、可导且 $f'(y)\neq 0$，则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在 $I_x=f(I_y)$ 内也可导，且

$$[f^{-1}(x)]'=\frac{1}{f'(y)}\quad 或\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}.$$

4. 复合函数的求导法则

设 $y=f(u)$，而 $u=g(x)$ 且 $f(u)$ 及 $g(x)$ 都可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 的导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\quad 或\quad y'(x)=f'(u)\cdot g'(x).$$

下面再举两个综合运用这些法则和导数公式的例子.

例 15　设 $y=\sin nx\cdot\sin^n x$ （n 为常数），求 y'.

解　首先应用积的求导法则得

$$y'=(\sin nx)'\sin^n x+\sin nx\cdot(\sin^n x)'.$$

在计算 $(\sin nx)'$ 与 $(\sin^n x)'$ 时，都要应用复合函数求导法则，由此得

$$\begin{aligned}y'&=n\cos nx\cdot\sin^n x+\sin nx\cdot n\sin^{n-1}x\cdot\cos x\\&=n\sin^{n-1}x(\cos nx\cdot\sin x+\sin nx\cdot\cos x)\\&=n\sin^{n-1}x\cdot\sin(n+1)x.\end{aligned}$$

例 16　证明下列双曲函数及反双曲函数的导数公式：

$$(\operatorname{sh}x)'=\operatorname{ch}x,\ (\operatorname{ch}x)'=\operatorname{sh}x,\ (\operatorname{th}x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2x},$$

$$(\operatorname{arsh}x)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ (\operatorname{arch}x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ (\operatorname{arth}x)'=\frac{1}{1-x^2}.$$

证　由定理 1(1)、(2)，有

$$(\operatorname{sh}x)'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{(e^x)'-(e^{-x})'}{2},$$

再利用 $(e^x)'=e^x$ 及定理 3，得 $(e^{-x})'=-e^{-x}$. 于是

$$(\operatorname{sh}x)'=\frac{(e^x)'-(e^{-x})'}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\operatorname{ch}x.$$

同理可得

$$(\operatorname{ch}x)'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\operatorname{sh}x.$$

由定理 1(3)及上述结果，有

$$\begin{aligned}(\operatorname{th}x)'&=\left(\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}\right)'=\frac{(\operatorname{sh}x)'\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x(\operatorname{ch}x)'}{\operatorname{ch}^2x}\\&=\frac{\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x}{\operatorname{ch}^2x}=\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}.\end{aligned}$$

由 $\operatorname{arsh}x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，应用复合函数求导法则及定理 1(1)，有

$$\begin{aligned}(\operatorname{arsh}x)'&=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2})'\\&=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\end{aligned}$$

由 $\operatorname{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，同理可得

$$(\operatorname{arch}x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ x\in(1,+\infty).$$

由 $\operatorname{arth} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$，可得

$$(\operatorname{arth} x)'=\frac{1}{1-x^2},x\in(-1,1).$$

习　题　2-2

1. 推导余切函数及余割函数的导数公式：

$$(\cot x)'=-\csc^2 x,\qquad (\csc x)'=-\csc x\cot x.$$

2. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^3+\frac{7}{x^4}-\frac{2}{x}+12$；　　(2) $y=5x^3-2^x+3e^x$；

(3) $y=2\tan x+\sec x-1$；　　(4) $y=\sin x\cdot\cos x$；

(5) $y=x^2\ln x$；　　(6) $y=3e^x\cos x$；

(7) $y=\frac{\ln x}{x}$；　　(8) $y=\frac{e^x}{x^2}+\ln 3$；

(9) $y=x^2\ln x\cos x$；　　(10) $s=\frac{1+\sin t}{1+\cos t}$.

3. 求下列函数在给定点处的导数：

(1) $y=\sin x-\cos x$，求 $y'\Big|_{x=\frac{\pi}{6}}$ 和 $y'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}$；

(2) $\rho=\theta\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta$，求 $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$；

(3) $f(x)=\frac{3}{5-x}+\frac{x^2}{5}$，求 $f'(0)$ 和 $f'(2)$.

4. 以初速度 v_0 竖直上抛的物体，其上升高度 s 与时间 t 的关系是 $s=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$. 求：

(1) 该物体的速度 $v(t)$；　　(2) 该物体达到最高点的时刻.

5. 求曲线 $y=2\sin x+x^2$ 上横坐标为 $x=0$ 的点处的切线方程和法线方程.

6. 求下列函数的导数：

(1) $y=(2x+5)^4$；　　(2) $y=\cos(4-3x)$；

(3) $y=e^{-3x^2}$；　　(4) $y=\ln(1+x^2)$；

(5) $y=\sin^2 x$；　　(6) $y=\sqrt{a^2-x^2}$；

(7) $y=\tan x^2$；　　(8) $y=\arctan(e^x)$；

(9) $y=(\arcsin x)^2$；　　(10) $y=\ln\cos x$.

7. 求下列函数的导数：

(1) $y=\arcsin(1-2x)$；　　(2) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

(3) $y=e^{-\frac{x}{2}}\cos 3x$;　　(4) $y=\arccos\frac{1}{x}$;

(5) $y=\frac{1-\ln x}{1+\ln x}$;　　(6) $y=\frac{\sin 2x}{x}$;

(7) $y=\arcsin\sqrt{x}$;　　(8) $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$;

(9) $y=\ln(\sec x+\tan x)$;　　(10) $y=\ln(\csc x-\cot x)$.

8. 求下列函数的导数:

(1) $y=\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)^2$;　　(2) $y=\ln\tan\frac{x}{2}$;

(3) $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$;　　(4) $y=e^{\arctan\sqrt{x}}$;

(5) $y=\sin^n x\cos nx$;　　(6) $y=\arctan\frac{x+1}{x-1}$;

(7) $y=\frac{\arcsin x}{\arccos x}$;　　(8) $y=\ln\ln\ln x$;

(9) $y=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$;　　(10) $y=\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

9. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可导,且 $f^2(x)+g^2(x)\neq 0$,试求函数 $y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$ 的导数.

10. 设 $f(x)$ 可导,求下列函数的导数 $\frac{dy}{dx}$:

(1) $y=f(x^2)$;　　(2) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$.

11. 求下列函数的导数:

(1) $y=e^{-x}(x^2-2x+3)$;　　(2) $y=\sin^2 x\cdot\sin(x^2)$;

(3) $y=\left(\arctan\frac{x}{2}\right)^2$;　　(4) $y=\frac{\ln x}{x^n}$;

(5) $y=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$;　　(6) $y=\ln\cos\frac{1}{x}$;

(7) $y=e^{-\sin^2\frac{1}{x}}$;　　(8) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$;

(9) $y=x\arcsin\frac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$;　　(10) $y=\arcsin\frac{2t}{1+t^2}$.

*12. 求下列函数的导数:

(1) $y=\operatorname{ch}(\operatorname{sh} x)$;　　(2) $y=\operatorname{sh} x\cdot e^{\operatorname{ch} x}$;

(3) $y=\operatorname{th}(\ln x)$;　　(4) $y=\operatorname{sh}^3 x+\operatorname{ch}^2 x$;

(5) $y=\operatorname{th}(1-x^2)$;　　(6) $y=\operatorname{arsh}(x^2+1)$;

(7) $y=\operatorname{arch}(e^{2x})$;　　(8) $y=\arctan(\operatorname{th} x)$;

(9) $y=\ln\operatorname{ch} x+\frac{1}{2\operatorname{ch}^2 x}$;　　(10) $y=\operatorname{ch}^2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

13. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在点 x_0 的某一邻域内有定义,$f(x)$ 在 x_0 处可导,$f(x_0)=0$,$g(x)$ 在 x_0 处连续,试讨论 $f(x)g(x)$ 在 x_0 处的可导性.

14. 设函数 $f(x)$ 满足下列条件:

(1) $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，对一切 $x,y\in\mathbf{R}$；

(2) $f(x)=1+xg(x)$，而 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$.

试证明 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处可导，且 $f'(x)=f(x)$.

第三节　高阶导数

我们知道，变速直线运动的速度 $v(t)$ 是位置函数 $s(t)$ 对时间 t 的导数，即

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\quad 或\quad v=s',$$

而加速度 a 又是速度 v 对时间 t 的变化率，即速度 v 对时间 t 的导数：

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)\quad 或\quad a=(s')'.$$

这种导数的导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)$ 或 $(s')'$ 叫做 s 对 t 的二阶导数，记作

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}\quad 或\quad s''(t).$$

所以，直线运动的加速度就是位置函数 s 对时间 t 的二阶导数.

一般地，函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍然是 x 的函数. 我们把 $y'=f'(x)$ 的导数叫做函数 $y=f(x)$ 的二阶导数，记作 y'' 或 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，即

$$y''=(y')'\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right).$$

相应地，把 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的一阶导数.

类似地，二阶导数的导数，叫做三阶导数，三阶导数的导数叫做四阶导数……一般地，$(n-1)$ 阶导数的导数叫做 n 阶导数，分别记作

$$y''',\ y^{(4)},\ \cdots,\ y^{(n)}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3},\ \frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4},\ \cdots,\ \frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}.$$

函数 $y=f(x)$ 具有 n 阶导数，也常说成函数 $f(x)$ 为 n 阶可导. 如果函数 $f(x)$ 在点 x 处具有 n 阶导数，那么 $f(x)$ 在点 x 的某一邻域内必定具有一切低于 n 阶的导数. 二阶及二阶以上的导数统称高阶导数.

由此可见，求高阶导数就是按前面学过的求导法则多次接连地求导数，若需

要求函数的高阶导数公式，则需要在逐次求导过程中，善于寻求它的某种规律.

例 1　$y=ax+b$，求 y''.

解　$y'=a, y''=0$.

例 2　$s=\sin \omega t$，求 s''.

解　$s'=\omega\cos \omega t, s''=-\omega^2\sin \omega t$.

例 3　证明：函数 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 满足关系式

$$y^3y''+1=0.$$

证　将 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 求导，得

$$y'=\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}},$$

$$y''=\frac{-\sqrt{2x-x^2}-(1-x)\dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}}{2x-x^2}$$

$$=\frac{-2x+x^2-(1-x)^2}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}=-\frac{1}{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{y^3}.$$

于是

$$y^3y''+1=0.$$

下面介绍几个初等函数的 n 阶导数.

例 4　求指数函数 $y=e^x$ 的 n 阶导数.

解　$y'=e^x$，　$y''=e^x$，　$y'''=e^x$，　$y^{(4)}=e^x$.

一般地，可得

$$y^{(n)}=e^x,$$

即

$$(e^x)^{(n)}=e^x.$$

例 5　求正弦函数与余弦函数的 n 阶导数.

解　$y=\sin x$，

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'''=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{(4)}=\cos\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+4\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

一般地，可得

$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

即

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

用类似方法，可得

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

例 6　求函数 $\ln(1+x)$ 的 n 阶导数.

解　$y=\ln(1+x)$，$y'=\dfrac{1}{1+x}$，

$$y''=-\frac{1}{(1+x)^2},\quad y'''=\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3},\quad y^{(4)}=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4},$$

一般地，可得

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},$$

即

$$[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

通常规定 $0!=1$，所以这个公式当 $n=1$ 时也成立.

例 7　求幂函数的 n 阶导数公式.

解　设 $y=x^{\mu}$（μ 是任意常数），那么

$$y'=\mu x^{\mu-1},$$
$$y''=\mu(\mu-1)x^{\mu-2},$$
$$y'''=\mu(\mu-1)(\mu-2)x^{\mu-3},$$
$$y^{(4)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)x^{\mu-4},$$

一般地，可得

$$y^{(n)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n},$$

即

$$(x^{\mu})^{(n)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}.$$

当 $\mu=n$ 时，得到

$$(x^n)^{(n)}=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1=n!,$$

而

$$(x^n)^{(n+k)}=0\quad(k=1,2,\cdots).$$

如果函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都在点 x 处具有 n 阶导数，那么显然 $u(x)+v(x)$ 及 $u(x)-v(x)$ 也在点 x 处具有 n 阶导数，且

$$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}.$$

但乘积 $u(x)\cdot v(x)$ 的 n 阶导数并不简单. 由

$$(uv)'=u'v+uv'$$

首先得出

$$(uv)''=u''v+2u'v'+uv'',$$

$$(uv)'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''.$$

用数学归纳法可以证明

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\cdots+$$

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uv^{(n)}.$$

上式称为莱布尼茨(Leibniz)公式. 这公式可以这样记忆:把 $(u+v)^n$ 按二项式定理展开写成

$$(u+v)^n=u^nv^0+nu^{n-1}v^1+\frac{n(n-1)}{2!}u^{n-2}v^2+\cdots+u^0v^n,$$

即

$$(u+v)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^ku^{n-k}v^k①,$$

然后把 k 次幂换成 k 阶导数(零阶导数理解为函数本身),再把左端的 $u+v$ 换成 uv,这样就得到莱布尼茨公式

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}.$$

例 8　$y=x^2e^{2x}$,求 $y^{(20)}$.

解　设 $u=e^{2x}$,$v=x^2$,则

$$u^{(k)}=2^ke^{2x}\ (k=1,2,\cdots,20),$$

$$v'=2x,\quad v''=2,\quad v^{(k)}=0\ (k=3,4,\cdots,20),$$

代入莱布尼茨公式,得

$$y^{(20)}=(x^2e^{2x})^{(20)}=2^{20}e^{2x}\cdot x^2+20\cdot 2^{19}e^{2x}\cdot 2x+\frac{20\cdot 19}{2!}2^{18}e^{2x}\cdot 2$$

$$=2^{20}e^{2x}(x^2+20x+95).$$

---

① 记号 $\sum$ 表示对同一类型诸项求和. 例如,$\sum_{k=0}^{n}C_n^ku^{n-k}v^k$ 表示在 $C_n^ku^{n-k}v^k$ 中依次令 $k=0,1,\cdots,n$,然后对这样得到的 $n+1$ 项求和.

习　题　2-3

1. 求下列函数的二阶导数：

（1）$y=2x^2+\ln x$；　　（2）$y=e^{2x-1}$；

（3）$y=x\cos x$；　　（4）$y=e^{-t}\sin t$；

（5）$y=\sqrt{a^2-x^2}$；　　（6）$y=\ln(1-x^2)$；

（7）$y=\tan x$；　　（8）$y=\dfrac{1}{x^3+1}$；

（9）$y=(1+x^2)\arctan x$；　　（10）$y=\dfrac{e^x}{x}$；

（11）$y=xe^{x^2}$；　　（12）$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

2. 设$f(x)=(x+10)^6$，求$f'''(2)$.

3. 设$f''(x)$存在，求下列函数的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

（1）$y=f(x^2)$；　　（2）$y=\ln[f(x)]$.

4. 试从$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$导出：

（1）$\dfrac{d^2x}{dy^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$；　　（2）$\dfrac{d^3x}{dy^3}=\dfrac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

5. 已知物体的运动规律为$s=A\sin\omega t$（A，ω是常数），求物体运动的加速度，并验证：

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\omega^2 s=0.$$

6. 密度大的陨星进入大气层时，当它离地心为s km时的速度与$\sqrt{s}$成反比. 试证陨星的加速度与s^2成反比.

7. 假设质点沿x轴运动的速度为$\dfrac{dx}{dt}=f(x)$，试求质点运动的加速度.

8. 验证函数$y=C_1e^{\lambda x}+C_2e^{-\lambda x}$（$\lambda$，$C_1$，$C_2$是常数）满足关系式

$$y''-\lambda^2 y=0.$$

9. 验证函数$y=e^x\sin x$满足关系式

$$y''-2y'+2y=0.$$

10. 求下列函数所指定的阶的导数：

（1）$y=e^x\cos x$，求$y^{(4)}$；　　（2）$y=x^2\sin 2x$，求$y^{(50)}$.

*11. 求下列函数的n阶导数的一般表达式：

（1）$y=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$（$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_n$都是常数）；

（2）$y=\sin^2 x$；　　（3）$y=x\ln x$；　　（4）$y=xe^x$.

*12. 求函数$f(x)=x^2\ln(1+x)$在$x=0$处的n阶导数$f^{(n)}(0)$（$n\geqslant 3$）.

第四节　隐函数及由参数方程所确定的函数的导数　相关变化率

一、隐函数的导数

函数 $y=f(x)$ 表示两个变量 y 与 x 之间的对应关系，这种对应关系可以用各种不同方式表达. 前面我们遇到的函数，例如 $y=\sin x$，$y=\ln x+\sqrt{1-x^2}$ 等，这种函数表达方式的特点是：等号左端是因变量的符号，而右端是含有自变量的式子，当自变量取定义域内任一值时，由这式子能确定对应的函数值. 用这种方式表达的函数叫做显函数. 有些函数的表达方式却不是这样，例如，方程

$$x+y^3-1=0$$

表示一个函数，因为当变量 x 在 $(-\infty,+\infty)$ 内取值时，变量 y 有确定的值与之对应. 例如，当 $x=0$ 时，$y=1$；当 $x=-1$ 时，$y=\sqrt[3]{2}$，等等. 这样的函数称为隐函数.

一般地，如果变量 x 和 y 满足一个方程 $F(x,y)=0$，在一定条件下，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足这方程的唯一的 y 值存在，那么就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间内确定了一个隐函数.

把一个隐函数化成显函数，叫做隐函数的显化. 例如从方程 $x+y^3-1=0$ 解出 $y=\sqrt[3]{1-x}$，就把隐函数化成了显函数. 隐函数的显化有时是有困难的，甚至是不可能的. 但在实际问题中，有时需要计算隐函数的导数，因此，我们希望有一种方法，不管隐函数能否显化，都能直接由方程算出它所确定的隐函数的导数来. 下面通过具体例子来说明这种方法.

例 1　求由方程 $e^y+xy-e=0$ 所确定的隐函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

解　我们把方程两边分别对 x 求导数①，注意 $y=y(x)$. 方程左边对 x 求导得

$$\frac{d}{dx}(e^y+xy-e)=e^y\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx},$$

方程右边对 x 求导得

$$(0)'=0.$$

① 假设方程 $F(x,y)=0$ 确定一个函数 $y=y(x)$，把 $y=y(x)$ 代入方程便得恒等式 $F[x,y(x)]\equiv 0$. 因此，这里说的方程两边对 x 求导，是指恒等式两边对 x 求导.

由于等式两边对 x 的导数相等，所以

$$e^y\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx}=0,$$

从而

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x+e^y}\quad(x+e^y\neq 0).$$

在这个结果中，分式中的 $y=y(x)$ 是由方程 $e^y+xy-e=0$ 所确定的隐函数.

例 2　求由方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$ 所确定的隐函数在 $x=0$ 处的导数 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解　把方程两边分别对 x 求导，由于方程两边的导数相等，所以

$$5y^4\frac{dy}{dx}+2\frac{dy}{dx}-1-21x^6=0.$$

由此得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+21x^6}{5y^4+2}.$$

因为当 $x=0$ 时，从原方程得 $y=0$，所以

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{1}{2}.$$

例 3　求椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 在点 $\left(2,\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ 处的切线方程（图 2-6）.

解　由导数的几何意义知道，所求切线的斜率为

$$k=y'\Big|_{x=2}.$$

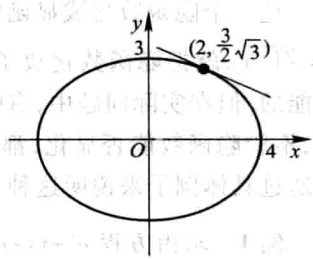


图 2-6

椭圆方程的两边分别对 x 求导，有

$$\frac{x}{8}+\frac{2}{9}y\cdot\frac{dy}{dx}=0.$$

从而

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{9x}{16y}.$$

当 $x=2$ 时，$y=\frac{3}{2}\sqrt{3}$，代入上式得

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2}=-\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

于是所求的切线方程为

$$y-\frac{3}{2}\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-2),$$

即

$$\sqrt{3}x+4y-8\sqrt{3}=0.$$

例 4　求由方程 $x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$ 所确定的隐函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解　应用隐函数的求导方法，得

$$1-\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}\cos y\cdot\frac{dy}{dx}=0,$$

于是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{2-\cos y}.$$

上式两边再对 x 求导，得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2\sin y\frac{dy}{dx}}{(2-\cos y)^2}=\frac{-4\sin y}{(2-\cos y)^3}.$$

上式右端分式中的 $y=y(x)$ 是由方程 $x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$ 所确定的隐函数.

在某些场合，利用所谓对数求导法求导数比用通常的方法简便些. 这种方法是先在 $y=f(x)$ 的两边取对数，然后再求出 y 的导数. 我们通过下面的例子来说明这种方法.

例 5　求 $y=x^{\sin x}$ $(x>0)$ 的导数.

解　这函数是幂指函数. 为了求这函数的导数，可以先在等式两边取对数，得

$$\ln y=\sin x\cdot\ln x.$$

上式两边对 x 求导，注意到 $y=y(x)$，得

$$\frac{1}{y}y'=\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x},$$

于是

$$y'=y\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right).$$

对于一般形式的幂指函数

$$y=u^v\ (u>0),\tag{4-1}$$

如果 $u=u(x)$、$v=v(x)$ 都可导，则可像例 5 那样利用对数求导法求出幂指函数(4-1)的导数，也可把幂指函数(4-1)表示为

$$y=e^{v\ln u}.$$

这样，便可直接求得

$$y'=e^{v\ln u}\left(v'\cdot\ln u+v\cdot\frac{u'}{u}\right)=u^v\left(v'\cdot\ln u+\frac{vu'}{u}\right).$$

例 6　求 $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数.

解　先在等式两边取对数(假定 $x>4$)，得

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)],$$

上式两边对 x 求导，注意到 $y=y(x)$，得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right),$$

于是

$$y'=\frac{y}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right).$$

当 $x<1$ 时，$y=\sqrt{\dfrac{(1-x)(2-x)}{(3-x)(4-x)}}$；

当 $2<x<3$ 时，$y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(3-x)(4-x)}}$；

用同样的方法可得与上面相同的结果.

二、由参数方程所确定的函数的导数

研究物体运动的轨迹时，常遇到参数方程. 例如，研究抛射体的运动问题时，如果空气阻力忽略不计，那么抛射体的运动轨迹可表示为

$$\begin{cases}x=v_1t,\\ y=v_2t-\dfrac{1}{2}gt^2,\end{cases}\tag{4-2}$$

其中 v_1、v_2 分别是抛射体初速度的水平、铅直分量，g 是重力加速度，t 是飞行时间，x 和 y 分别是飞行中抛射体在铅直平面上的位置的横坐标和纵坐标(图 2-7).

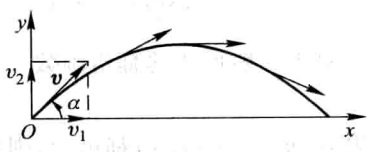


图 2-7

在(4-2)式中，x、y 都与 t 存在函数关系. 如果把对应于同一个 t 值的 y 与 x 的值看做是对应的，那么这样就得到 y 与 x 之间的函数关系. 消去(4-2)中的参数 t，有

$$y=\frac{v_2}{v_1}x-\frac{g}{2v_1^2}x^2.$$

这是因变量 y 与自变量 x 直接联系的式子，也是参数方程(4-2)所确定的函数的显式表示.

一般地，若参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases} \tag{4-3}$$

确定 y 与 x 间的函数关系，则称此函数关系所表达的函数为由参数方程(4-3)所确定的函数.

在实际问题中，需要计算由参数方程(4-3)所确定的函数的导数. 但从(4-3)中消去参数 t 有时会有困难. 因此，我们希望有一种方法能直接由参数方程(4-3)算出它所确定的函数的导数来. 下面就来讨论由参数方程(4-3)所确定的函数的求导方法.

在(4-3)式中，如果函数 $x=\varphi(t)$ 具有单调连续反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，且此反函数能与函数 $y=\psi(t)$ 构成复合函数，那么由参数方程(4-3)所确定的函数可以看成是由函数 $y=\psi(t)$、$t=\varphi^{-1}(x)$ 复合而成的函数 $y=\psi[\varphi^{-1}(x)]$. 现在，要计算这个复合函数的导数. 为此再假定函数 $x=\varphi(t)$、$y=\psi(t)$ 都可导，而且 $\varphi'(t)\neq 0$. 于是根据复合函数的求导法则与反函数的求导法则，就有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

即

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{4-4}$$

上式也可写成

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

(4-4)式就是由参数方程(4-3)所确定的 x 的函数的导数公式①.

① 作为 x 的函数，$\frac{dy}{dx}$ 应表示为

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ \frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\end{cases}$$

但为了方便起见，通常把 $x=\varphi(t)$ 省去. 后面的公式(4-5)也作类似的理解.

如果 $x=\varphi(t)$、$y=\psi(t)$ 还是二阶可导的，那么从(4-4)式又可得到函数的二阶导数公式

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$
$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)},$$

即

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}. \tag{4-5}$$

例 7　已知椭圆的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t,\end{cases}$$

求椭圆在 $t=\frac{\pi}{4}$ 相应的点处的切线方程(图 2-8).

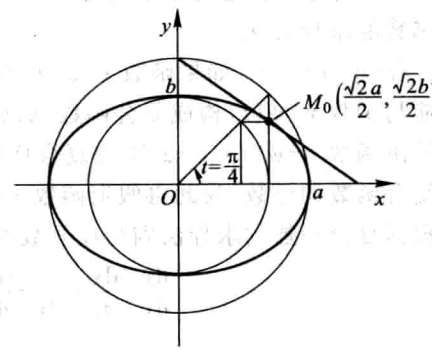


图 2-8

解　当 $t=\frac{\pi}{4}$ 时，椭圆上的相应点 M_0 的坐标是

$$x_0=a\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}a}{2},$$

$$y_0=b\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}b}{2}.$$

曲线在点 M_0 的切线斜率为

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left.\frac{b\cos t}{-a\sin t}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{b}{a}.$$

代入点斜式方程，即得椭圆在点 M_0 处的切线方程

$$y-\frac{\sqrt{2}b}{2}=-\frac{b}{a}\left(x-\frac{\sqrt{2}a}{2}\right).$$

化简后得

$$bx+ay-\sqrt{2}ab=0.$$

例 8　已知抛射体的运动轨迹的参数方程为

$$\begin{cases}x=v_1t,\\ y=v_2t-\frac{1}{2}gt^2,\end{cases}$$

求抛射体在时刻 t 的运动速度的大小和方向.

解　先求速度的大小.

由于速度的水平分量为

$$\frac{dx}{dt}=v_1,$$

铅直分量为

$$\frac{dy}{dt}=v_2-gt,$$

所以抛射体运动速度的大小为

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{v_1^2+(v_2-gt)^2}.$$

再求速度的方向,也就是轨迹的切线方向.

设 α 是切线的倾角,则根据导数的几何意义,得

$$\tan\alpha=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{v_2-gt}{v_1}.$$

在抛射体刚射出(即 $t=0$)时,

$$\tan\alpha\Big|_{t=0}=\frac{dy}{dx}\Big|_{t=0}=\frac{v_2}{v_1};$$

当 $t=\frac{v_2}{g}$ 时,

$$\tan\alpha\Big|_{t=\frac{v_2}{g}}=\frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{v_2}{g}}=0,$$

这时,运动方向是水平的,即抛射体达到最高点(图 2-7).

例 9　计算由摆线(图 2-9)的参数方程

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$$

所确定的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数.

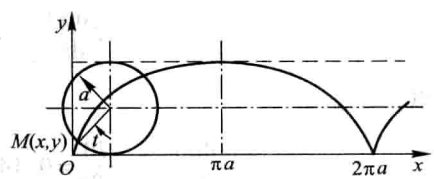


图 2-9

解　$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\cot\frac{t}{2}\quad(t\neq 2n\pi,n\in\mathbf{Z}).$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\cot\frac{t}{2}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{a(1-\cos t)}$$

$$= -\frac{1}{a(1-\cos t)^2}(t \neq 2n\pi, n \in \mathbf{Z}).$$

三、相关变化率

设 $x=x(t)$ 及 $y=y(t)$ 都是可导函数，而变量 x 与 y 间存在某种关系，从而变化率 $\frac{dx}{dt}$ 与 $\frac{dy}{dt}$ 间也存在一定关系. 这两个相互依赖的变化率称为相关变化率. 相关变化率问题就是研究这两个变化率之间的关系，以便从其中一个变化率求出另一个变化率.

例 10　一气球从离开观察员 500 m 处离地面铅直上升，当气球高度为 500 m时，其速率为 140 m/min(分). 求此时观察员视线的仰角增加的速率是多少?

解　设气球上升 t s(秒)后，其高度为 h，观察员视线的仰角为 α，则

$$\tan \alpha = \frac{h}{500},$$

其中 α 及 h 都与 t 存在可导的函数关系. 上式两边对 t 求导，得

$$\sec^2 \alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{500} \cdot \frac{dh}{dt}.$$

由已知条件，存在 t_0，使 $h\Big|_{t=t_0} = 500$ m，$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{t=t_0} = 140$ m/min. 又 $\tan \alpha\Big|_{t=t_0} = 1$，$\sec^2 \alpha\Big|_{t=t_0} = 2$. 代入上式得

$$2\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t=t_0} = \frac{1}{500} \cdot 140,$$

所以

$$\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t=t_0} = \frac{70}{500} = 0.14 \text{ (rad(弧度)/min)}.$$

即此时观察员视线的仰角增加的速率是 0.14 rad/min.

习　题　2-4

1. 求由下列方程所确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$：

(1) $y^2-2xy+9=0$；　　(2) $x^3+y^3-3axy=0$；

(3) $xy=e^{x+y}$;　　(4) $y=1-xe^{y}$.

2. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)$ 处的切线方程和法线方程.

3. 求由下列方程所确定的隐函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $x^2-y^2=1$;　　(2) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$;

(3) $y=\tan(x+y)$;　　(4) $y=1+xe^{y}$.

4. 用对数求导法求下列函数的导数:

(1) $y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}$;　　(2) $y=\sqrt[5]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$;

(3) $y=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$;　　(4) $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^{x}}}$.

5. 求下列参数方程所确定的函数的导数 $\frac{dy}{dx}$:

(1) $\begin{cases}x=at^2,\\ y=bt^3;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x=\theta(1-\sin\theta),\\ y=\theta\cos\theta.\end{cases}$

6. 已知 $\begin{cases}x=e^{t}\sin t,\\ y=e^{t}\cos t,\end{cases}$ 求当 $t=\frac{\pi}{3}$ 时 $\frac{dy}{dx}$ 的值.

7. 写出下列曲线在所给参数值相应的点处的切线方程和法线方程:

(1) $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=\cos 2t,\end{cases}$ 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处;(2) $\begin{cases}x=\frac{3at}{1+t^2},\\ y=\frac{3at^2}{1+t^2},\end{cases}$ 在 $t=2$ 处.

8. 求下列参数方程所确定的函数的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $\begin{cases}x=\frac{t^2}{2},\\ y=1-t;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=b\sin t;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=3e^{-t},\\ y=2e^{t};\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}x=f'(t),\\ y=tf'(t)-f(t),\end{cases}$ 设 $f''(t)$ 存在且不为零.

*9. 求下列参数方程所确定的函数的三阶导数 $\frac{d^3y}{dx^3}$:

(1) $\begin{cases}x=1-t^2,\\ y=t-t^3;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=t-\arctan t.\end{cases}$

10. 落在平静水面上的石头,产生同心波纹. 若最外一圈波半径的增大速率总是 6 m/s,问在 2 s 末扰动水面面积增大的速率为多少?

11. 注水入深 8 m 上顶直径 8 m 的正圆锥形容器中,其速率为 4 m^3/min. 当水深为 5 m

时，其表面上升的速率为多少？

12. 溶液自深 18 cm 顶直径 12 cm 的正圆锥形漏斗中漏入一直径为10 cm 的圆柱形筒中. 开始时漏斗中盛满了溶液. 已知当溶液在漏斗中深为 12 cm 时，其表面下降的速率为 1 cm/min. 问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率为多少？

第五节　函数的微分

一、微分的定义

先分析一个具体问题. 一块正方形金属薄片受温度变化的影响，其边长由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$（图 2-10），问此薄片的面积改变了多少？

设此薄片的边长为 x，面积为 A，则 A 与 x 存在函数关系：$A=x^2$. 薄片受温度变化的影响时面积的改变量可以看成是当自变量 x 自 x_0 取得增量 Δx 时，函数 $A=x^2$ 相应的增量 ΔA，即

$$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2.$$

从上式可以看出，ΔA 分成两部分，第一部分 $2x_0\Delta x$ 是 Δx 的线性函数，即图中带有斜线的两个矩形面积之和，而第二部分 $(\Delta x)^2$ 在图中是带有交叉斜线的小正方形的面积，当 $\Delta x\to 0$ 时，第二部分 $(\Delta x)^2$ 是比 Δx 高阶的无穷小，即 $(\Delta x)^2=o(\Delta x)$. 由此可见，如果边长改变很微小，即 $|\Delta x|$ 很小时，面积的改变量 ΔA 可近似地用第一部分来代替.

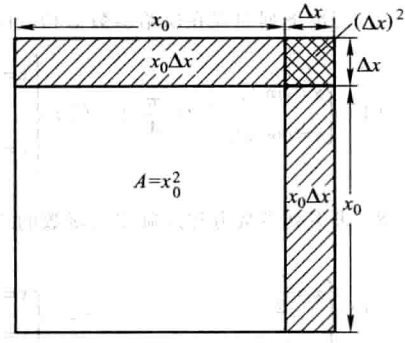


图 2-10

一般地，如果函数 $y=f(x)$ 满足一定条件，那么增量 Δy 可表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x),$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数，因此 $A\Delta x$ 是 Δx 的线性函数，且 Δy 与它的差

$$\Delta y-A\Delta x=o(\Delta x)$$

是比 Δx 高阶的无穷小. 所以，当 $A\neq 0$，且 $|\Delta x|$ 很小时，我们就可以用 Δx 的线性函数 $A\Delta x$ 来近似代替 Δy.

定义　**设函数 $y=f(x)$ 在某区间内有定义，x_0 及 $x_0+\Delta x$ 在这区间内，如果函**

数的增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

可表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x), \tag{5-1}$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数，那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 是可微的，而 $A\Delta x$ 叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量增量 Δx 的微分，记作 $\mathrm{d}y$，即

$$\mathrm{d}y=A\Delta x.$$

下面讨论函数可微的条件. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微，则按定义有(5-1)式成立. (5-1)式两边除以 Δx，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

于是，当 $\Delta x\to 0$ 时，由上式就得到

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0).$$

因此，如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微，那么 $f(x)$ 在点 x_0 也一定可导(即 $f'(x_0)$ 存在)，且 $A=f'(x_0)$.

反之，如果 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$$

存在，根据极限与无穷小的关系(第一章第四节定理 1)，上式可写成

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha,$$

其中 $\alpha\to 0$(当 $\Delta x\to 0$). 由此又有

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x.$$

因 $\alpha\Delta x=o(\Delta x)$，且 $f'(x_0)$ 不依赖于 Δx，故上式相当于(5-1)式，所以 $f(x)$ 在点 x_0 也是可微的.

由此可见，函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，且当 $f(x)$ 在点 x_0 可微时，其微分一定是

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x. \tag{5-2}$$

当 $f'(x_0)\neq 0$ 时，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\mathrm{d}y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{f'(x_0)\Delta x}=\frac{1}{f'(x_0)}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1.$$

从而，当 $\Delta x\to 0$ 时，Δy 与 $\mathrm{d}y$ 是等价无穷小，于是由第一章第七节定理 1 可知，这时有

$$\Delta y=\mathrm{d}y+o(\mathrm{d}y), \tag{5-3}$$

即 dy 是 Δy 的主部①. 又由于 $dy=f'(x_0)\Delta x$ 是 Δx 的线性函数，所以在 $f'(x_0)\neq 0$ 的条件下，我们说 dy 是 Δy 的线性主部（当 $\Delta x\to 0$）. 于是我们得到结论：在 $f'(x_0)\neq 0$ 的条件下，以微分 $dy=f'(x_0)\Delta x$ 近似代替增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 时，其误差为 $o(dy)$. 因此，在 $|\Delta x|$ 很小时，有近似等式

$$\Delta y\approx dy.$$

例 1　求函数 $y=x^2$ 在 $x=1$ 和 $x=3$ 处的微分.

解　函数 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处的微分为

$$dy=(x^2)'|_{x=1}\Delta x=2\Delta x,$$

在 $x=3$ 处的微分为

$$dy=(x^2)'|_{x=3}\Delta x=6\Delta x.$$

函数 $y=f(x)$ 在任意点 x 的微分，称为函数的微分，记作 dy 或 $df(x)$，即

$$dy=f'(x)\Delta x.$$

例如，函数 $y=\cos x$ 的微分为

$$dy=(\cos x)'\Delta x=-\sin x\Delta x,$$

函数 $y=e^x$ 的微分为

$$dy=(e^x)'\Delta x=e^x\Delta x.$$

显然，函数的微分 $dy=f'(x)\Delta x$ 与 x 和 Δx 有关.

例 2　求函数 $y=x^3$ 当 $x=2$，$\Delta x=0.02$ 时的微分.

解　先求函数在任意点 x 的微分

$$dy=(x^3)'\Delta x=3x^2\Delta x.$$

再求函数当 $x=2$，$\Delta x=0.02$ 时的微分

$$dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}}=(3x^2\Delta x)\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}}=3\cdot 2^2\cdot 0.02=0.24.$$

通常把自变量 x 的增量 Δx 称为自变量的微分，记作 dx，即 $dx=\Delta x$. 于是函数 $y=f(x)$ 的微分又可记作

$$dy=f'(x)dx.$$

从而有

$$\frac{dy}{dx}=f'(x).$$

这就是说，函数的微分 dy 与自变量的微分 dx 之商等于该函数的导数. 因此，导数也叫做“微商”.

① 设 α 及 β 都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小，如果 $\beta=\alpha+o(\alpha)$，则称 α 是 β 的主部.

二、微分的几何意义

为了对微分有比较直观的了解，我们来说明微分的几何意义.

在直角坐标系中，函数 $y=f(x)$ 的图形是一条曲线. 对于某一固定的 x_0 值，曲线上有一个确定点 $M(x_0,y_0)$，当自变量 x 有微小增量 Δx 时，就得到曲线上另一点 $N(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$. 从图 2-11 可知：

$$MQ=\Delta x,$$

$$QN=\Delta y.$$

过点 M 作曲线的切线 MT，它的倾角为 α，则

$$QP=MQ\cdot\tan\alpha=\Delta x\cdot f'(x_0),$$

即

$$\mathrm{d}y=QP.$$

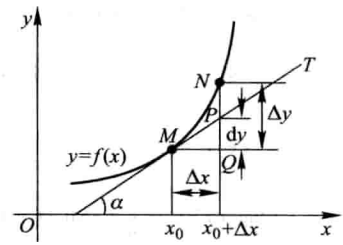


图 2-11

由此可见，对于可微函数 $y=f(x)$ 而言，当 Δy 是曲线 $y=f(x)$ 上的点的纵坐标的增量时，$\mathrm{d}y$ 就是曲线的切线上点的纵坐标的相应增量. 当 $|\Delta x|$ 很小时，$|\Delta y-\mathrm{d}y|$ 比 $|\Delta x|$ 小得多. 因此在点 M 的邻近，我们可以用切线段来近似代替曲线段. 在局部范围内用线性函数近似代替非线性函数，在几何上就是局部用切线段近似代替曲线段，这在数学上称为非线性函数的局部线性化，这是微分学的基本思想方法之一. 这种思想方法在自然科学和工程问题的研究中是经常采用的.

三、基本初等函数的微分公式与微分运算法则

从函数的微分的表达式

$$\mathrm{d}y=f'(x)\,\mathrm{d}x$$

可以看出，要计算函数的微分，只要计算函数的导数，再乘自变量的微分. 因此，可得如下的微分公式和微分运算法则.

1. 基本初等函数的微分公式

由基本初等函数的导数公式，可以直接写出基本初等函数的微分公式. 为了便于对照，列表于下：

导数公式	微分公式
$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$	$\mathrm{d}(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$
$(\sin x)'=\cos x$	$\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\mathrm{d}x$

续表

导数公式	微分公式
$(\cos x)'=-\sin x$	$\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\mathrm{d}x$
$(\tan x)'=\sec^2 x$	$\mathrm{d}(\tan x)=\sec^2 x\mathrm{d}x$
$(\cot x)'=-\csc^2 x$	$\mathrm{d}(\cot x)=-\csc^2 x\mathrm{d}x$
$(\sec x)'=\sec x\tan x$	$\mathrm{d}(\sec x)=\sec x\tan x\mathrm{d}x$
$(\csc x)'=-\csc x\cot x$	$\mathrm{d}(\csc x)=-\csc x\cot x\mathrm{d}x$
$(a^x)'=a^x\ln a\quad(a>0\text{ 且 }a\neq 1)$	$\mathrm{d}(a^x)=a^x\ln a\mathrm{d}x\quad(a>0\text{ 且 }a\neq 1)$
$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$	$\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$
$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}\quad(a>0\text{ 且 }a\neq 1)$	$\mathrm{d}(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x\quad(a>0\text{ 且 }a\neq 1)$
$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	$\mathrm{d}(\ln x)=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$
$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{d}(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$
$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{d}(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$
$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{d}(\arctan x)=\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$
$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{d}(\operatorname{arccot} x)=-\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

2. 函数和、差、积、商的微分法则

由函数和、差、积、商的求导法则，可推得相应的微分法则. 为了便于对照，列成下表(表中 $u=u(x)$，$v=v(x)$都可导).

函数和、差、积、商的求导法则	函数和、差、积、商的微分法则
$(u\pm v)'=u'\pm v'$	$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$
$(Cu)'=Cu'$	$\mathrm{d}(Cu)=C\mathrm{d}u$
$(uv)'=u'v+uv'$	$\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}\quad(v\neq 0)$	$\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}\quad(v\neq 0)$

现在我们以乘积的微分法则为例加以证明.

根据函数微分的表达式,有

$$d(uv)=(uv)'dx.$$

再根据乘积的求导法则,有

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

于是

$$d(uv)=(u'v+uv')dx=u'vdx+uv'dx.$$

由于

$$u'dx=du,\ v'dx=dv,$$

所以

$$d(uv)=vdu+udv.$$

其他法则都可以用类似方法证明.

3. 复合函数的微分法则

与复合函数的求导法则相应的复合函数的微分法则可推导如下:

设 $y=f(u)$ 及 $u=g(x)$ 都可导,则复合函数 $y=f[g(x)]$ 的微分为

$$dy=y'_x dx=f'(u)g'(x)dx.$$

由于 $g'(x)dx=du$,所以,复合函数 $y=f[g(x)]$ 的微分公式也可以写成

$$dy=f'(u)du \quad 或 \quad dy=y'_u du.$$

由此可见,无论 u 是自变量还是中间变量,微分形式 $dy=f'(u)du$ 保持不变. 这一性质称为微分形式不变性. 这性质表示,当变换自变量时,微分形式 $dy=f'(u)du$ 并不改变.

例 3　$y=\sin(2x+1)$,求 dy.

解　把 $2x+1$ 看成中间变量 u,则

$$\begin{aligned}dy&=d(\sin u)=\cos u du=\cos(2x+1)d(2x+1)\\&=\cos(2x+1)\cdot 2dx=2\cos(2x+1)dx.\end{aligned}$$

在求复合函数的导数时,可以不写出中间变量. 在求复合函数的微分时,类似地也可以不写出中间变量. 下面我们用这种方法来求函数的微分.

例 4　$y=\ln(1+e^{x^2})$,求 dy.

解　$$dy=d(\ln(1+e^{x^2}))=\frac{1}{1+e^{x^2}}d(1+e^{x^2})=\frac{1}{1+e^{x^2}}\cdot e^{x^2}d(x^2)$$

$$=\frac{e^{x^2}}{1+e^{x^2}}\cdot 2xdx=\frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}dx.$$

例 5　$y=e^{1-3x}\cos x$,求 dy.

解　应用积的微分法则，得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y &= \mathrm{d}(\mathrm{e}^{1-3x}\cos x) = \cos x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{1-3x}) + \mathrm{e}^{1-3x}\mathrm{d}(\cos x) \\ &= (\cos x)\mathrm{e}^{1-3x}(-3\mathrm{d}x) + \mathrm{e}^{1-3x}(-\sin x\mathrm{d}x) \\ &= -\mathrm{e}^{1-3x}(3\cos x + \sin x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

例 6　在下列等式左端的括号中填入适当的函数，使等式成立.

(1) $\mathrm{d}(\quad) = x\mathrm{d}x$;　　(2) $\mathrm{d}(\quad) = \cos \omega t\mathrm{d}t$ $(\omega \neq 0)$.

解　(1) 我们知道，

$$\mathrm{d}(x^2) = 2x\mathrm{d}x.$$

可见

$$x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2) = \mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right),$$

即

$$\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right) = x\mathrm{d}x.$$

一般地，有

$$\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2} + C\right) = x\mathrm{d}x \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

(2) 因为

$$\mathrm{d}(\sin \omega t) = \omega\cos \omega t\mathrm{d}t,$$

可见

$$\cos \omega t\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega}\mathrm{d}(\sin \omega t) = \mathrm{d}\left(\frac{1}{\omega}\sin \omega t\right),$$

即

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{\omega}\sin \omega t\right) = \cos \omega t\ \mathrm{d}t.$$

一般地，有

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{\omega}\sin \omega t + C\right) = \cos \omega t\mathrm{d}t \quad (C \text{ 为任意常数}, \omega \neq 0).$$

四、微分在近似计算中的应用

1. 函数的近似计算

在工程问题中，经常会遇到一些复杂的计算公式. 如果直接用这些公式进行

计算，那是很费力的. 利用微分往往可以把一些复杂的计算公式用简单的近似公式来代替.

前面说过，如果 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)\neq 0$，且 $|\Delta x|$ 很小时，我们有

$$\Delta y\approx \mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x.$$

这个式子也可以写为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x, \tag{5-4}$$

或

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x. \tag{5-5}$$

在(5-5)式中令 $x=x_0+\Delta x$，即 $\Delta x=x-x_0$，那么(5-5)式可改写为

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0). \tag{5-6}$$

如果 $f(x_0)$ 与 $f'(x_0)$ 都容易计算，那么可利用(5-4)式来近似计算 Δy，利用(5-5)式来近似计算 $f(x_0+\Delta x)$，或利用(5-6)式来近似计算 $f(x)$. 这种近似计算的实质就是用 x 的线性函数 $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 来近似表达函数 $f(x)$. 从导数的几何意义可知，这也就是用曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线来近似代替该曲线(就切点邻近部分来说).

例 7　有一批半径为 1 cm 的球，为了提高球面的光洁度，要镀上一层铜，厚度定为 0.01 cm. 估计一下每只球需用铜多少克(铜的密度是 8.9 g/cm^3)?

解　先求出镀层的体积，再乘密度就得到每只球需用铜的质量.

因为镀层的体积等于两个球体体积之差，所以它就是球体体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ 当 R 自 R_0 取得增量 ΔR 时的增量 ΔV. 我们求 V 对 R 的导数

$$V'\Big|_{R=R_0}=\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)'\Big|_{R=R_0}=4\pi R_0^2,$$

由(5-4)式得

$$\Delta V\approx 4\pi R_0^2\Delta R.$$

将 $R_0=1$，$\Delta R=0.01$ 代入上式，得

$$\Delta V\approx 4\times 3.14\times 1^2\times 0.01\approx 0.13(\mathrm{cm}^3),$$

于是镀每只球需用的铜约为

$$0.13\times 8.9\approx 1.16(\mathrm{g}).$$

例 8　利用微分计算 sin 30°30′的近似值.

解　把 30°30′化为弧度，得

$$30°30'=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{360}.$$

由于所求的是正弦函数的值，故设 $f(x)=\sin x$. 此时 $f'(x)=\cos x$. 如果取 x_0

$=\frac{\pi}{6}$，那么$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$与$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$都容易计算，并且$\Delta x=\frac{\pi}{360}$比较小. 应用(5-5)式便得

$$\sin 30°30'=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{360}\right)\approx\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{360}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{360}\approx 0.500\,0+0.007\,6=0.507\,6.$$

下面我们来推导一些常用的近似公式. 为此，在(5-6)式中取$x_0=0$，于是得

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x. \tag{5-7}$$

应用(5-7)式可以推得以下几个在工程上常用的近似公式(下面都假定$|x|$是较小的数值)：

(i) $(1+x)^{\alpha}\approx 1+\alpha x$　($\alpha\in\mathbf{R}$)；

(ii) $\sin x\approx x$　(x用弧度作单位来表达)；

(iii) $\tan x\approx x$　(x用弧度作单位来表达)；

(iv) $e^{x}\approx 1+x$；

(v) $\ln(1+x)\approx x$.

证　(i) 在第一章第九节例7中我们已经知道$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$　($x\to 0$)，从而得出这个近似公式. 在这里，我们利用微分证明. 取$f(x)=(1+x)^{\alpha}$，那么$f(0)=1$，$f'(0)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}\Big|_{x=0}=\alpha$，代入(5-7)式便得

$$(1+x)^{\alpha}\approx 1+\alpha x.$$

证　(ii) 取$f(x)=\sin x$，那么$f(0)=0$，$f'(0)=\cos x\Big|_{x=0}=1$，代入(5-7)式便得

$$\sin x\approx x.$$

其他几个近似公式可用类似方法证明，这里从略了.

例9　计算$\sqrt{1.05}$的近似值.

解

$$\sqrt{1.05}=\sqrt{1+0.05},$$

这里$x=0.05$，其值较小，利用近似公式(i)($\alpha=\frac{1}{2}$的情形)，便得

$$\sqrt{1.05}\approx 1+\frac{1}{2}(0.05)=1.025.$$

如果直接开方，可得

$$\sqrt{1.05}=1.024\,70.$$

将两个结果比较一下，可以看出，用1.025作为$\sqrt{1.05}$的近似值，其误差不超过

0.001，这样的近似值在一般应用上已够精确了. 如果开方次数较高，就更能体现出用微分进行近似计算的优越性.

*2. 误差估计

在生产实践中，经常要测量各种数据. 但是有的数据不易直接测量，这时我们就通过测量其他有关数据后，根据某种公式算出所要的数据. 例如，要计算圆钢的截面积 A，可先用卡尺测量圆钢截面的直径 D，然后根据公式 $A=\frac{\pi}{4}D^2$ 算出 A.

由于测量仪器的精度、测量的条件和测量的方法等各种因素的影响，测得的数据往往带有误差，而根据带有误差的数据计算所得的结果也会有误差，我们把它叫做间接测量误差.

下面就讨论怎样利用微分来估计间接测量误差.

先说明绝对误差、相对误差的概念.

如果某个量的精确值为 A，它的近似值为 a，那么 $|A-a|$ 叫做 a 的绝对误差，而绝对误差与 $|a|$ 的比值 $\frac{|A-a|}{|a|}$ 叫做 a 的相对误差.

在实际工作中，某个量的精确值往往是无法知道的，于是绝对误差和相对误差也就无法求得. 但是根据测量仪器的精度等因素，有时能够确定误差在某一个范围内. 如果某个量的精确值是 A，测得它的近似值是 a，又知道它的误差不超过 δ_A，即

$$|A-a|\leqslant\delta_A,$$

那么 δ_A 叫做测量 A 的绝对误差限，而 $\frac{\delta_A}{|a|}$ 叫做测量 A 的相对误差限.

例 10　设测得圆钢截面的直径 $D=60.03$ mm，测量 D 的绝对误差限 $\delta_D=0.05$ mm. 利用公式

$$A=\frac{\pi}{4}D^2$$

计算圆钢的截面积时，试估计面积的误差.

解　如果我们把测量 D 时所产生的误差当作自变量 D 的增量 ΔD，那么，利用公式 $A=\frac{\pi}{4}D^2$ 来计算 A 时所产生的误差就是函数 A 的对应增量 ΔA. 当 $|\Delta D|$ 很小时，可以利用微分 $\mathrm{d}A$ 近似地代替增量 ΔA，即

$$\Delta A\approx\mathrm{d}A=A'\cdot\Delta D=\frac{\pi}{2}D\cdot\Delta D.$$

由于 D 的绝对误差限为 $\delta_D=0.05$ mm，所以

$$|\Delta D|\leqslant\delta_D=0.05,$$

而

$$|\Delta A|\approx|\mathrm{d}A|=\frac{\pi}{2}D\cdot|\Delta D|\leqslant\frac{\pi}{2}D\cdot\delta_D,$$

因此得出 A 的绝对误差限约为

$$\delta_A=\frac{\pi}{2}D\cdot\delta_D=\frac{\pi}{2}\times60.03\times0.05\approx4.712(\mathrm{mm}^2);$$

A 的相对误差限约为

$$\frac{\delta_A}{A}=\frac{\frac{\pi}{2}D\cdot\delta_D}{\frac{\pi}{4}D^2}=2\frac{\delta_D}{D}=2\times\frac{0.05}{60.03}\approx0.17\%.$$

一般地，根据直接测量的 x 值按公式 $y=f(x)$ 计算 y 值时，如果已知测量 x 的绝对误差限是 δ_x，即

$$|\Delta x|\leqslant\delta_x,$$

那么，当 $y'\neq0$ 时，y 的绝对误差

$$|\Delta y|\approx|\mathrm{d}y|=|y'|\cdot|\Delta x|\leqslant|y'|\cdot\delta_x,$$

即 y 的绝对误差限约为

$$\delta_y=|y'|\cdot\delta_x;\tag{5-8}$$

y 的相对误差限约为

$$\frac{\delta_y}{|y|}=\left|\frac{y'}{y}\right|\cdot\delta_x.\tag{5-9}$$

以后常把绝对误差限与相对误差限简称为绝对误差与相对误差.

习　题　2-5

1. 已知 $y=x^3-x$，计算在 $x=2$ 处当 Δx 分别等于 1，0.1，0.01 时的 Δy 及 $\mathrm{d}y$.

2. 设函数 $y=f(x)$ 的图形如图 2-12，试在图 2-12(a)、(b)、(c)、(d)中分别标出在点 x_0 的 $\mathrm{d}y$、Δy 及 $\Delta y-\mathrm{d}y$，并说明其正负.

3. 求下列函数的微分：

(1) $y=\frac{1}{x}+2\sqrt{x}$；　　(2) $y=x\sin2x$；

(3) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$；　　(4) $y=\ln^2(1-x)$；

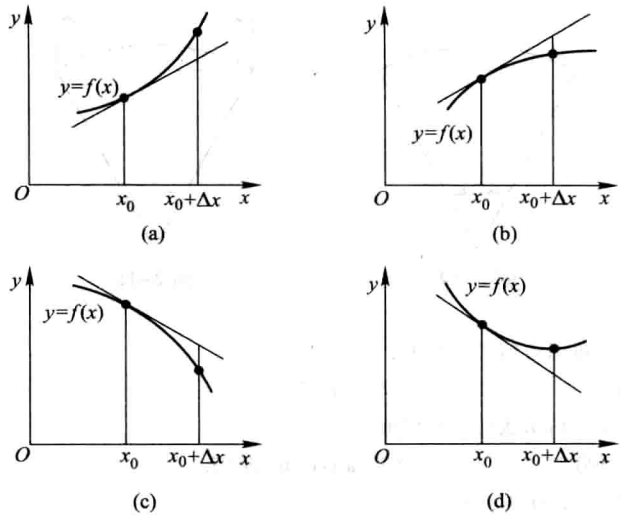


图 2-12

(5) $y=x^2e^{2x}$;　　(6) $y=e^{-x}\cos(3-x)$;

(7) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$;　　(8) $y=\tan^2(1+2x^2)$;

(9) $y=\arctan\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;　　(10) $s=A\sin(\omega t+\varphi)$ (A、ω、φ 是常数).

4. 将适当的函数填入下列括号内,使等式成立:

(1) d(　　)$=2\mathrm{d}x$;　　(2) d(　　)$=3x\mathrm{d}x$;

(3) d(　　)$=\cos t\mathrm{d}t$;　　(4) d(　　)$=\sin\omega x\mathrm{d}x$ ($\omega\neq0$);

(5) d(　　)$=\dfrac{1}{1+x}\mathrm{d}x$;　　(6) d(　　)$=e^{-2x}\mathrm{d}x$;

(7) d(　　)$=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;　　(8) d(　　)$=\sec^2 3x\mathrm{d}x$.

5. 如图 2-13 所示的电缆$\overset{\frown}{AOB}$的长为 s,跨度为 $2l$,电缆的最低点 O 与杆顶连线 AB 的距离为 f,则电缆长可按下面公式计算

$$s=2l\left(1+\frac{2f^2}{3l^2}\right),$$

当 f 变化了 Δf 时,电缆长的变化约为多少?

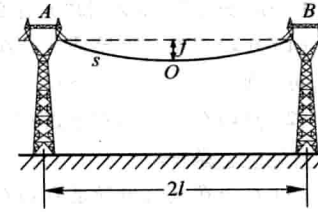


图 2-13

6. 设扇形的圆心角 $\alpha=60°$,半径 $R=100$ cm (图 2-14). 如果 R 不变,α 减少 30′,问扇形面积大约改变了多少?又如果 α 不变,R 增加 1 cm,问扇形面积大约改变了多少?

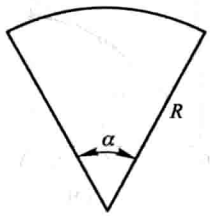


图 2-14

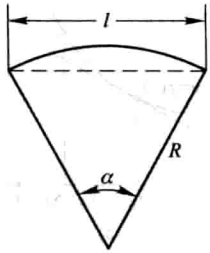


图 2-15

7. 计算下列三角函数值的近似值：

(1) cos 29°；　　(2) tan 136°.

8. 计算下列反三角函数值的近似值：

(1) arcsin 0.500 2；　　(2) arccos 0.499 5.

9. 当$|x|$较小时，证明下列近似公式：

(1) $\tan x \approx x$(x 是角的弧度值)；(2) $\ln(1+x) \approx x$；

(3) $\sqrt[n]{1+x} \approx 1+\frac{1}{n}x$；　　(4) $e^x \approx 1+x$.

并计算 tan 45′和 ln 1.002 的近似值.

10. 计算下列各根式的近似值：

(1) $\sqrt[3]{996}$；　　(2) $\sqrt[6]{65}$.

*11. 计算球体体积时，要求精确度在 2% 以内. 问这时测量直径 D 的相对误差不能超过多少？

*12. 某厂生产如图 2-15 所示的扇形板，半径 $R=200$ mm，要求中心角 α 为 55°. 产品检验时，一般用测量弦长 l 的办法来间接测量中心角 α. 如果测量弦长 l 时的误差 $\delta_l=0.1$ mm，问由此而引起的中心角测量误差 δ_α 是多少？

总习题二

1. 在“充分”“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内：

(1) $f(x)$在点 x_0 可导是 $f(x)$在点 x_0 连续的_____条件. $f(x)$在点 x_0 连续是 $f(x)$在点 x_0 可导的_____条件.

(2) $f(x)$在点 x_0 的左导数 $f'_-(x_0)$及右导数 $f'_+(x_0)$都存在且相等是 $f(x)$在点 x_0 可导的_____条件.

(3) $f(x)$在点 x_0 可导是 $f(x)$在点 x_0 可微的_____条件.

2. 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$ $(n\geqslant 2)$，则 $f'(0)=$_____.

3. 下述题中给出了四个结论，从中选出一个正确的结论：

设 $f(x)$在 $x=a$ 的某个邻域内有定义，则 $f(x)$在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是

(　　).

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty} h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$ 存在.

(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在.

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在.

(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在.

4. 设有一根细棒,取棒的一端作为原点,棒上任意点的坐标为 x,于是分布在区间 $[0,x]$ 上细棒的质量 m 与 x 存在函数关系 $m=m(x)$. 应怎样确定细棒在点 x_0 处的线密度(对于均匀细棒来说,单位长度细棒的质量叫做这细棒的线密度)?

5. 根据导数的定义,求 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的导数.

6. 求下列函数 $f(x)$ 的 $f'_-(0)$ 及 $f'_+(0)$,又 $f'(0)$ 是否存在:

(1) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ \ln(1+x), & x\geqslant 0;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

7. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

8. 求下列函数的导数:

(1) $y=\arcsin(\sin x)$;　　(2) $y=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$;

(3) $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\tan x$;　　(4) $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$;

(5) $y=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$.

9. 求下列函数的二阶导数:

(1) $y=\cos^2 x\cdot\ln x$;　　(2) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

*10. 求下列函数的 n 阶导数:

(1) $y=\sqrt[m]{1+x}$;　　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

11. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+xy=e$ 所确定,求 $y''(0)$.

12. 求下列由参数方程所确定的函数的一阶导数$\frac{dy}{dx}$及二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$：

(1) $\begin{cases} x=a\cos^3\theta, \\ y=a\sin^3\theta; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2}, \\ y=\arctan t. \end{cases}$

13. 求曲线$\begin{cases} x=2e^t, \\ y=e^{-t} \end{cases}$在$t=0$相应的点处的切线方程及法线方程.

14. 已知$f(x)$是周期为5的连续函数，它在$x=0$的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x),$$

且$f(x)$在$x=1$处可导，求曲线$y=f(x)$在点$(6,f(6))$处的切线方程.

15. 当正在高度H水平飞行的飞机开始向机场跑道下降时，如图2-16所示从飞机到机场的水平地面距离为L. 假设飞机下降的路径为三次函数$y=ax^3+bx^2+cx+d$的图形，其中$y|_{x=-L}=H, y|_{x=0}=0$. 试确定飞机的降落路径.

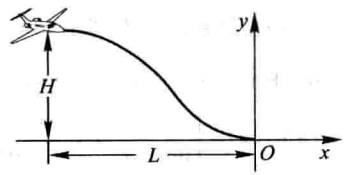


图 2-16

16. 甲船以6 km/h的速率向东行驶，乙船以8 km/h的速率向南行驶. 在中午十二点整，乙船位于甲船之北16 km处. 问下午一点整两船相离的速率为多少？

17. 利用函数的微分代替函数的增量求$\sqrt[3]{1.02}$的近似值.

18. 已知单摆的振动周期$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，其中$g=980\ \text{cm/s}^2$，l为摆长(单位为cm). 设原摆长为20 cm，为使周期T增大0.05 s，摆长约需加长多少？

第三章　微分中值定理与导数的应用

上一章里，从分析实际问题中因变量相对于自变量的变化快慢出发，引进了导数概念，并讨论了导数的计算方法. 本章中，我们将应用导数来研究函数以及曲线的某些性态，并利用这些知识解决一些实际问题. 为此，先要介绍微分学的几个中值定理，它们是导数应用的理论基础.

第一节　微分中值定理

我们先讲罗尔(Rolle)定理，然后根据它推出拉格朗日(Lagrange)中值定理和柯西(Cauchy)中值定理.

一、罗尔定理

首先，我们观察图 3-1. 设曲线弧$\overset{\frown}{AB}$是函数 $y=f(x)$ $(x\in[a,b])$ 的图形. 这是一条连续的曲线弧，除端点外处处有不垂直于 x 轴的切线，且两个端点的纵坐标相等，即 $f(a)=f(b)$. 可以发现在曲线弧的最高点 C 处或最低点 D 处，曲线有水平的切线. 如果记点 C 的横坐标为 ξ，那么就有 $f'(\xi)=0$. 现在用分析语言把这个几何现象描述出来，就可得下面的罗尔定理. 为了应用方便，先介绍费马(Fermat)引理.

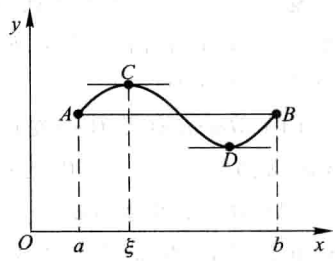


图 3-1

费马引理　**设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，并且在 x_0 处可导，如果对任意的 $x\in U(x_0)$，有**

$$f(x)\leqslant f(x_0)\quad (\text{或 } f(x)\geqslant f(x_0)),$$

那么 $f'(x_0)=0$.

证　不妨设 $x\in U(x_0)$ 时，$f(x)\leqslant f(x_0)$（如果 $f(x)\geqslant f(x_0)$，可以类似地证明）. 于是，对于 $x_0+\Delta x\in U(x_0)$，有

$$f(x_0+\Delta x)\leqslant f(x_0),$$

从而当 $\Delta x>0$ 时，

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leqslant 0;$$

当 $\Delta x<0$ 时，

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geqslant 0.$$

根据函数 $f(x)$ 在 x_0 可导的条件及极限的保号性，便得到

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leqslant 0,$$

$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geqslant 0.$$

所以，$f'(x_0)=0$. 证毕.

通常称导数等于零的点为函数的驻点（或稳定点，临界点）.

罗尔定理　如果函数 $f(x)$ 满足

（1）在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

（2）在开区间 (a,b) 内可导；

（3）在区间端点处的函数值相等，即 $f(a)=f(b)$，

那么在 (a,b) 内至少有一点 ξ $(a<\xi<b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证　由于 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，根据闭区间上连续函数的最大值最小值定理，$f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上必定取得它的最大值 M 和最小值 m. 这样，只有两种可能情形：

（1）$M=m$. 这时 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上必然取相同的数值 M：$f(x)=M$. 由此，$\forall x\in(a,b)$，有 $f'(x)=0$. 因此，任取 $\xi\in(a,b)$，有 $f'(\xi)=0$.

（2）$M>m$. 因为 $f(a)=f(b)$，所以 M 和 m 这两个数中至少有一个不等于 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的端点处的函数值. 为确定起见，不妨设 $M\neq f(a)$（如果设 $m\neq f(a)$，证法完全类似），那么必定在开区间 (a,b) 内有一点 ξ 使 $f(\xi)=M$. 因此，$\forall x\in[a,b]$，有 $f(x)\leqslant f(\xi)$，从而由费马引理可知 $f'(\xi)=0$.

定理证毕.

二、拉格朗日中值定理

罗尔定理中 $f(a)=f(b)$ 这个条件是相当特殊的，它使罗尔定理的应用受到限制. 如果把 $f(a)=f(b)$ 这个条件取消，但仍保留其余两个条件，并相应地改变结论，那么就得到微分学中十分重要的拉格朗日中值定理.

拉格朗日中值定理　如果函数 $f(x)$ 满足

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续；

(2) 在开区间(a,b)内可导，

那么在(a,b)内至少有一点ξ $(a<\xi<b)$，使等式

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a) \tag{1-1}$$

成立.

在证明之前，先看一下定理的几何意义. 如果把(1-1)式改写成

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),$$

由图 3-2 可看出，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$为弦 AB 的斜率，而 $f'(\xi)$为曲线在点 C 处的切线的斜率. 因此拉格朗日中值定理的几何意义是：如果连续曲线 $y=f(x)$的弧$\overset{\frown}{AB}$上除端点外处处具有不垂直于 x 轴的切线，那么这弧上至少有一点 C，使曲线在点 C 处的切线平行于弦 AB.

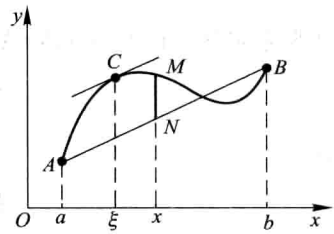


图 3-2

从图 3-1 看出，在罗尔定理中，由于$f(a)=f(b)$，弦 AB 是平行于 x 轴的，因此点 C 处的切线实际上也平行于弦 AB. 由此可见，罗尔定理是拉格朗日中值定理的特殊情形.

从上述拉格朗日中值定理与罗尔定理的关系，自然想到利用罗尔定理来证明拉格朗日中值定理. 但在拉格朗日中值定理中，函数$f(x)$不一定具备$f(a)=f(b)$这个条件，为此我们设想构造一个与$f(x)$有密切联系的函数$\varphi(x)$(称为辅助函数)，使$\varphi(x)$满足条件$\varphi(a)=\varphi(b)$. 然后对$\varphi(x)$应用罗尔定理，再把对$\varphi(x)$所得的结论转化到$f(x)$上，证得所要的结果. 我们从拉格朗日中值定理的几何解释中来寻找辅助函数，从图 3-2 中看到，有向线段 NM 的值是 x 的函数，把它表示为$\varphi(x)$，它与$f(x)$有密切的联系，且当$x=a$及$x=b$时，点 M 与点 N 重合，即有$\varphi(a)=\varphi(b)=0$. 为求得函数$\varphi(x)$的表达式，设直线 AB 的方程为 $y=L(x)$，则

$$L(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

由于点 M、N 的纵坐标依次为$f(x)$及$L(x)$，故表示有向线段 NM 的值的函数

$$\varphi(x)=f(x)-L(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

下面就利用这个辅助函数来证明拉格朗日中值定理.

定理的证明　引进辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

容易验证函数 $\varphi(x)$ 适合罗尔定理的条件：$\varphi(a)=\varphi(b)=0$，$\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

根据罗尔定理，可知在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $\varphi'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0.$$

由此得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),$$

即

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

定理证毕.

显然，公式(1-1)对于 $b<a$ 也成立. (1-1)式叫做拉格朗日中值公式.

设 x 为区间 $[a,b]$ 内一点，$x+\Delta x$ 为这区间内的另一点($\Delta x>0$ 或 $\Delta x<0$)，则公式(1-1)在区间 $[x, x+\Delta x]$(当 $\Delta x>0$ 时)或在区间 $[x+\Delta x, x]$(当 $\Delta x<0$ 时)上就成为

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1). \tag{1-2}$$

这里数值 θ 在 0 与 1 之间，所以 $x+\theta\Delta x$ 是在 x 与 $x+\Delta x$ 之间.

如果记 $f(x)$ 为 y，那么(1-2)式又可写成

$$\Delta y=f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1). \tag{1-3}$$

我们知道，函数的微分 $\mathrm{d}y=f'(x)\cdot\Delta x$ 是函数的增量 Δy 的近似表达式，一般说来，以 $\mathrm{d}y$ 近似代替 Δy 时所产生的误差只有当 $\Delta x\to 0$ 时才趋于零；而(1-3)式却给出了自变量取得有限增量 Δx($|\Delta x|$ 不一定很小)时，函数增量 Δy 的准确表达式. 因此，这个定理也叫做有限增量定理，(1-3)式称为有限增量公式. 拉格朗日中值定理在微分学中占有重要地位，有时也称这定理为微分中值定理. 在某些问题中当自变量 x 取得有限增量 Δx 而需要函数增量的准确表达式时，拉格朗日中值定理就显出它的价值.

作为拉格朗日中值定理的一个应用，我们来导出以后讲积分学时很有用的一个定理. 我们知道，如果函数 $f(x)$ 在某一区间上是一个常数，那么 $f(x)$ 在该区间上的导数恒为零. 它的逆命题也是成立的，这就是：

定理　**如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，I 内①可导且导数恒为零，那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.**

证　在区间 I 上任取两点 x_1、x_2 $(x_1<x_2)$，应用(1-1)式就得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\quad (x_1<\xi<x_2).$$

由假定，$f'(\xi)=0$，所以 $f(x_2)-f(x_1)=0$，即

$$f(x_2)=f(x_1).$$

因为 x_1、x_2 是 I 上任意两点，所以上面的等式表明：$f(x)$ 在 I 上的函数值总是相等的，这就是说，$f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

从上述论证中可以看出，虽然拉格朗日中值定理中的 ξ 的准确数值不知道，但在这里并不妨碍它的应用.

例　证明当 $x>0$ 时，

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

证　设 $f(t)=\ln(1+t)$，显然 $f(t)$ 在区间 $[0,x]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，根据定理，应有

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0),\ 0<\xi<x.$$

由于 $f(0)=0$，$f'(t)=\dfrac{1}{1+t}$，因此上式即为

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi}.$$

又由 $0<\xi<x$，有

$$\frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\xi}<x,$$

即

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x\ (x>0).$$

三、柯西中值定理

上面已经指出，如果连续曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上除端点外处处具有不垂直于横轴的切线，那么这段弧上至少有一点 C，使曲线在点 C 处的切线平行于弦 AB. 设 $\overset{\frown}{AB}$ 由参数方程

① x 在区间 I 内指 $x\in I$，且 x 不是 I 的端点.

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (a\leqslant t\leqslant b)$$

表示，其中 t 为参数，则曲线上点 (x,y) 处的切线斜率为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

弦 AB 的斜率为

$$\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}.$$

假定点 C 对应于参数 $t=\xi$，那么曲线上点 C 处的切线平行于弦 AB，可表示为

$$\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{\psi'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

这是函数在参数方程形式下的拉格朗日中值定理的表达形式. 通过对这个特殊问题的思考，可以得到以下一般性的结论.

柯西中值定理　如果函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 满足

(1) **在闭区间** $[a,b]$ **上连续**；

(2) **在开区间** (a,b) **内可导**；

(3) **对任一** $x\in(a,b)$，$F'(x)\neq 0$，

那么在 (a,b) **内至少有一点** ξ，**使等式**

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \tag{1-4}$$

成立.

在定理证明之前，先对要证的结论作一些分析，以便寻找证明的思路.

要证在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使等式(1-4)成立，即成立

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F'(\xi)=f'(\xi)$$

或

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F'(\xi)=0$$

若设函数

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F(x),$$

则要证成立

$$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F'(\xi)=0.$$

由此联想到：是否可以利用罗尔定理来证明. 而要做到这一点，关键是需要检查函数 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 两端点处的函数值是否相等？

因为

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F(x)=\frac{[F(b)-F(a)]f(x)-[f(b)-f(a)]F(x)}{F(b)-F(a)},$$

$$\varphi(a)=\frac{[F(b)-F(a)]f(a)-[f(b)-f(a)]F(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{F(b)f(a)-F(a)f(b)}{F(b)-F(a)},$$

$$\varphi(b)=\frac{[F(b)-F(a)]f(b)-[f(b)-f(a)]F(b)}{F(b)-F(a)}=\frac{F(b)f(a)-F(a)f(b)}{F(b)-F(a)},$$

所以

$$\varphi(a)=\varphi(b)=\frac{F(b)f(a)-F(a)f(b)}{F(b)-F(a)}.$$

由以上分析可知，可以通过引入辅助函数 $\varphi(x)$，对 $\varphi(x)$ 应用罗尔定理来证明本定理.

证　首先注意到 $F(b)-F(a)\neq 0$. 这是由于

$$F(b)-F(a)=F'(\eta)(b-a),$$

其中 $a<\eta<b$，根据假定 $F'(\eta)\neq 0$，又 $b-a\neq 0$，所以

$$F(b)-F(a)\neq 0.$$

设辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F(x),$$

显然，$\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且

$$\varphi(a)=\varphi(b)=\frac{F(b)f(a)-F(a)f(b)}{F(b)-F(a)},$$

故 $\varphi(x)$ 适合罗尔定理的条件，因此在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使

$$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F'(\xi)=0,$$

由此得

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

定理证毕.

很明显，如果取 $F(x)=x$，那么 $F(b)-F(a)=b-a$，$F'(x)=1$，因而公式(1-4)就可以写成：

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)\quad(a<\xi<b),$$

这样就变成拉格朗日中值公式了.

习　题　3-1

1. 验证罗尔定理对函数 $y=\ln \sin x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上的正确性.

2. 验证拉格朗日中值定理对函数 $y=4x^3-5x^2+x-2$ 在区间 $[0,1]$ 上的正确性.

3. 对函数 $f(x)=\sin x$ 及 $F(x)=x+\cos x$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上验证柯西中值定理的正确性.

4. 试证明对函数 $y=px^2+qx+r$ 应用拉格朗日中值定理时所求得的点 ξ 总是位于区间的正中间.

5. 不用求出函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数，说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根，并指出它们所在的区间.

6. 证明恒等式：$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

7. 若方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x=0$ 有一个正根 $x=x_0$，证明方程 $a_0nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0$ 必有一个小于 x_0 的正根.

8. 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数，且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，其中 $a<x_1<x_2<x_3<b$，证明：在 (x_1,x_3) 内至少有一点 ξ，使得 $f''(\xi)=0$.

9. 设 $a>b>0$，$n>1$，证明：

$$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b).$$

10. 设 $a>b>0$，证明：

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}.$$

11. 证明下列不等式：

(1) $|\arctan a-\arctan b|\leqslant|a-b|$；

(2) 当 $x>1$ 时，$e^x>ex$.

12. 证明方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根.

*13. 设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明在 (a,b) 内有一点 ξ，使

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

14. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足关系式 $f'(x)=f(x)$，且 $f(0)=1$，则 $f(x)=e^x$.

*15. 设函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有 n 阶导数，且 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$，试用柯西中值定理证明：

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\quad(0<\theta<1).$$

第二节　洛必达法则

如果当 $x\to a$ （或 $x\to\infty$）时，两个函数 $f(x)$ 与 $F(x)$ 都趋于零或都趋于无穷

大，那么极限 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{F(x)}$ 可能存在、也可能不存在. 通常把这种极限叫做未定式，并分别简记为 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$. 在第一章第六节中讨论过的极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ 就是未定式 $\dfrac{0}{0}$ 的一个例子. 对于这类极限，即使它存在也不能用“商的极限等于极限的商”这一法则. 下面我们将根据柯西中值定理来推出求这类极限的一种简便且重要的方法.

我们着重讨论 $x\to a$ 时的未定式 $\dfrac{0}{0}$ 的情形，关于这情形有以下定理：

定理 1　设

(1) 当 $x\to a$ 时，函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零；

(2) 在点 a 的某去心邻域内，$f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在（或为无穷大），

则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

这就是说，当 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在时，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}$ 也存在且等于 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$；当 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 为无穷大时，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}$ 也是无穷大. 这种在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式的值的方法称为洛必达（L'Hospital）法则.

证　因为求 $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ 当 $x\to a$ 时的极限与 $f(a)$ 及 $F(a)$ 无关，所以可以假定 $f(a)=F(a)=0$，于是由条件(1)、(2)知道，$f(x)$ 及 $F(x)$ 在点 a 的某一邻域内是连续的. 设 x 是这邻域内的一点，那么在以 x 及 a 为端点的区间上，柯西中值定理的条件均满足，因此有

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{F(x)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}\quad(\xi\text{ 在 }x\text{ 与 }a\text{ 之间}).$$

令 $x\to a$，并对上式两端求极限，注意到 $x\to a$ 时 $\xi\to a$，再根据条件(3)便得要证明的结论.

如果 $\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 当 $x\to a$ 时仍属 $\dfrac{0}{0}$ 型，且这时 $f'(x)$，$F'(x)$ 能满足定理中 $f(x)$，$F(x)$ 所要满足的条件，那么可以继续使用洛必达法则先确定 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$，从而确定 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}$，即

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{F''(x)}.$$

且可以以此类推.

例 1　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$ $(b\neq 0)$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cos ax}{b\cos bx}=\dfrac{a}{b}$.

例 2　求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

解　$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{6x-2}=\dfrac{3}{2}$.

注意,上式中的$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x}{6x-2}$已不是未定式,不能对它应用洛必达法则,否则要导致错误结果. 以后使用洛必达法则时应当经常注意这一点,如果不是未定式,那么就不能应用洛必达法则.

例 3　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\dfrac{1}{6}$.

我们指出,对于 $x\to\infty$ 时的未定式$\dfrac{0}{0}$以及对于 $x\to a$ 或 $x\to\infty$ 时的未定式$\dfrac{\infty}{\infty}$,也有相应的洛必达法则. 例如,对于 $x\to\infty$ 时的未定式$\dfrac{0}{0}$有以下定理.

定理 2　**设**

(1) **当** $x\to\infty$ **时,函数** $f(x)$ **及** $F(x)$ **都趋于零;**

(2) **当** $|x|>N$ **时** $f'(x)$ **与** $F'(x)$ **都存在,且** $F'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$**存在(或为无穷大),**

则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

例 4　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$.

解　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1.$

例 5　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}(n>0)$.

解　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{nx^n}=0.$

例 6　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}$（$n$ 为正整数，$\lambda>0$）.

解　相继应用洛必达法则 n 次，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}}=0.$$

事实上，如果例 6 中的 n 不是正整数而是任何正数，那么极限仍为零.

对数函数 $\ln x$、幂函数 x^n（$n>0$）、指数函数 $e^{\lambda x}$（$\lambda>0$）均为当 $x\to+\infty$ 时的无穷大，但从例 5、例 6 可以看出，这三个函数增大的“速度”是很不一样的，幂函数增大的“速度”比对数函数快得多，而指数函数增大的“速度”又比幂函数快得多.

下表列出了 x 分别取 10，100，1 000 时，函数 $\ln x$，$\sqrt{x}$，x^2 及 e^x 相应的函数值. 从中可以看出当 x 增大时这几个函数增大“速度”快慢的情况.

x	10	100	1 000
$\ln x$	2.3	4.6	6.9
$\sqrt{x}$	3.2	10	31.6
x^2	100	10^4	10^6
e^x	2.20×10^4	2.69×10^{43}	1.97×10^{434}

其他还有一些 $0\cdot\infty$、$\infty-\infty$、0^0、1^∞、∞^0 型的未定式，也可通过 $\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的未定式来计算，下面用例子说明.

例 7　求 $\lim\limits_{x\to0^+}x^n\ln x$（$n>0$）.

解　这是未定式 $0\cdot\infty$. 因为

$$x^n\ln x=\frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}},$$