

当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 上式右端是未定式 $\frac{\infty}{\infty}$, 应用洛必达法则, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-n}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-n x^{-n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-x^n}{n} \right) = 0.$$

例 8 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$.

解 这是未定式 $\infty - \infty$. 因为

$$\sec x - \tan x = \frac{1 - \sin x}{\cos x},$$

当 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时, 上式右端是未定式 $\frac{0}{0}$, 应用洛必达法则, 得

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

例 9 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$.

解 这是未定式 0^0 . 设 $y = x^x$, 取对数得

$$\ln y = x \ln x,$$

当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 上式右端是未定式 $0 \cdot \infty$. 应用例 7 的结果, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0.$$

因为 $y = e^{\ln y}$, 而 $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln y} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y}$ (当 $x \rightarrow 0^+$), 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} y = e^0 = 1.$$

洛必达法则是求未定式的一种有效方法, 但最好能与其他求极限的方法结合使用. 例如能化简时应尽可能先化简, 可以应用等价无穷小替代或重要极限时, 应尽可能应用, 这样可以使运算简捷.

例 10 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \sin x}$.

解 如果直接用洛必达法则, 那么分母的导数 (尤其是高阶导数) 较繁. 如果作一个等价无穷小替代, 那么运算就方便得多. 其运算如下:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sec^2 x \tan x}{6x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

最后, 我们指出, 本节定理给出的是求未定式的一种方法. 当定理条件满足时, 所求的极限当然存在 (或为 ∞), 但当定理条件不满足时, 所求极限却不一定不存在, 这就是说, 当 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{F'(x)}$ 不存在时 (等于无穷大的情况除外), $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{F(x)}$ 仍

可能存在(见本节习题第2题).

习 题 3-2

1. 用洛必达法则求下列极限:

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$;
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$;
- (4) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$;
- (5) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2}$;
- (6) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} (a \neq 0)$;
- (7) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \tan 7x}{\ln \tan 2x}$;
- (8) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 3x}$;
- (9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}$;
- (10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sec x - \cos x}$;
- (11) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot 2x$;
- (12) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{1/x^2}$;
- (13) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$;
- (14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x$;
- (15) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$;
- (16) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\tan x}$.

2. 验证极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$ 存在,但不能用洛必达法则得出.

3. 验证极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ 存在,但不能用洛必达法则得出.

*4. 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ e^{-\frac{1}{2}}, & x \leq 0 \end{cases}$$

在点 $x=0$ 处的连续性.

第三节 泰勒公式

对于一些较复杂的函数,为了便于研究,往往希望用一些简单的函数来近似表达.由于用多项式表示的函数,只要对自变量进行有限次加、减、乘三种算术运算,便能求出它的函数值来,因此我们经常用多项式来近似表达函数.

在微分的应用中已经知道,当 $|x|$ 很小时,有如下的近似等式:

$$e^x \approx 1+x, \ln(1+x) \approx x.$$

这些都是用一次多项式来近似表达函数的例子. 显然, 在 $x=0$ 处这些一次多项式及其一阶导数的值, 分别等于被近似表达的函数及其导数的相应值.

但是这种近似表达式的精确度不高, 它所产生的误差仅是关于 x 的高阶无穷小. 为了提高精确度, 自然想到用更高次的多项式来逼近函数. 于是, 提出如下问题:

设 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数, 试找出一个关于 $(x-x_0)$ 的 n 次多项式

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n \quad (3-1)$$

来近似表达 $f(x)$, 要求使得 $p_n(x)$ 与 $f(x)$ 之差是当 $x \rightarrow x_0$ 时比 $(x-x_0)^n$ 高阶的无穷小.

下面我们来讨论这个问题. 假设 $p_n(x)$ 在 x_0 处的函数值及它的直到 n 阶导数在 x_0 处的值依次与 $f(x_0), f'(x_0), \cdots, f^{(n)}(x_0)$ 相等, 即满足

$$p_n(x_0) = f(x_0), \quad p'_n(x_0) = f'(x_0),$$

$$p''_n(x_0) = f''(x_0), \quad \cdots, \quad p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0),$$

按这些等式来确定多项式(3-1)的系数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$. 为此, 对(3-1)式求各阶导数, 然后分别代入以上等式, 得

$$a_0 = f(x_0), \quad 1 \cdot a_1 = f'(x_0),$$

$$2! a_2 = f''(x_0), \quad \cdots, \quad n! a_n = f^{(n)}(x_0),$$

即得

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = f'(x_0), \quad a_2 = \frac{1}{2!} f''(x_0), \quad \cdots, \quad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

将求得的系数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 代入(3-1)式, 有

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \quad (3-2)$$

下面的定理表明, 多项式(3-2)的确是所要找的 n 次多项式.

泰勒(Taylor)中值定理 1 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数, 那么存在 x_0 的一个邻域, 对于该邻域内的任一 x , 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x), \quad (3-3)$$

其中

$$R_n(x) = o((x-x_0)^n). \quad (3-4)$$

证 记 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$, 则

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

由于 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数, 因此 $f(x)$ 必在 x_0 的某邻域内存在 $(n-1)$ 阶导

数,从而 $R_n(x)$ 也在该邻域内 $(n-1)$ 阶可导,反复应用洛必达法则,得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R'_n(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R''_n(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} \\ &= \cdots = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} \\ &= \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x) - R_n^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} \\ &= \frac{1}{n!} R_n^{(n)}(x_0) = 0,\end{aligned}$$

因此 $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$, 定理证毕.

多项式 (3-2) 称为函数 $f(x)$ 在 x_0 处 (或按 $(x-x_0)$ 的幂展开) 的 n 次泰勒多项式, 公式 (3-3) 称为 $f(x)$ 在 x_0 处 (或按 $(x-x_0)$ 的幂展开) 的带有佩亚诺 (Peano) 余项的 n 阶泰勒公式, 而 $R_n(x)$ 的表达式 (3-4) 称为佩亚诺余项, 它就是用 n 次泰勒多项式来近似表达 $f(x)$ 所产生的误差, 这一误差是当 $x \rightarrow x_0$ 时比 $(x-x_0)^n$ 高阶的无穷小, 但不能由它具体估算出误差的大小. 下面给出的具有另一种余项形式的泰勒定理则解决了这一问题.

泰勒 (Taylor) 中值定理 2 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内具有 $(n+1)$ 阶导数, 那么对任一 $x \in U(x_0)$, 有

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \\ &\quad \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),\end{aligned}\quad (3-5)$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad (3-6)$$

这里 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

证 记 $R_n(x) = f(x) - p_n(x)$. 只需证明

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}).$$

由假设可知, $R_n(x)$ 在 $U(x_0)$ 内具有 $(n+1)$ 阶导数, 且

$$R_n(x_0) = R'_n(x_0) = R''_n(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

对两个函数 $R_n(x)$ 及 $(x-x_0)^{n+1}$ 在以 x_0 及 x 为端点的区间上应用柯西中值定理 (显然, 这两个函数满足柯西中值定理的条件), 得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1} - 0} = \frac{R'_n(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} \quad (\xi_1 \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}),$$

再对两个函数 $R'_n(x)$ 与 $(n+1)(x-x_0)^n$ 在以 x_0 及 ξ_1 为端点的区间上应用柯西中值定理,得

$$\begin{aligned}\frac{R'_n(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} &= \frac{R'_n(\xi_1)-R'_n(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n-0} \\ &= \frac{R''_n(\xi_2)}{(n+1)n(\xi_2-x_0)^{n-1}} \quad (\xi_2 \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } \xi_1 \text{ 之间}).\end{aligned}$$

照此方法继续做下去,经过 $(n+1)$ 次后,得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } \xi_n \text{ 之间,因而也在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}).$$

注意到 $R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ (因 $p_n^{(n+1)}(x) = 0$), 则由上式得

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}),$$

定理证毕.

公式(3-5)称为 $f(x)$ 在 x_0 处(或按 $(x-x_0)$ 的幂展开)的带有拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式,而 $R_n(x)$ 的表达式(3-6)称为拉格朗日余项.

当 $n=0$ 时,泰勒公式(3-5)变成拉格朗日中值公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0) \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}).$$

因此,泰勒中值定理 2 是拉格朗日中值定理的推广.

由泰勒中值定理 2 可知,以多项式 $p_n(x)$ 近似表达函数 $f(x)$ 时,其误差为 $|R_n(x)|$. 如果对于某个固定的 n , 当 $x \in U(x_0)$ 时, $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, 那么有估计式

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-x_0|^{n+1} \quad (3-7)$$

在泰勒公式(3-3)中,如果取 $x_0=0$, 那么有带有佩亚诺余项的麦克劳林(Maclaurin)公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n). \quad (3-8)$$

在泰勒公式(3-5)中,如果取 $x_0=0$, 那么 ξ 在 0 与 x 之间. 因此可以令 $\xi = \theta x$ ($0 < \theta < 1$), 从而泰勒公式(3-5)变成较简单的形式,即所谓带有拉格朗日余项的麦克劳林公式

$$\begin{aligned}f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \\ &\quad \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).\end{aligned} \quad (3-9)$$

由(3-8)或(3-9)可得近似公式

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

误差估计式(3-7)相应地变成

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x|^{n+1}. \quad (3-10)$$

例 1 写出函数 $f(x) = e^x$ 的带有拉格朗日余项的 n 阶麦克劳林公式.

解 因为

$$f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x,$$

所以

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1.$$

把这些值代入公式(3-9), 并注意到 $f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x}$ 使得

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

从这个公式可知, 若把 e^x 用它的 n 次泰勒多项式表达为

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

这时所产生的误差为

$$|R_n(x)| = \left| \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

如果取 $x=1$, 则得无理数 e 的近似式为

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

其误差

$$|R_n| < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

当 $n=10$ 时, 可算出 $e \approx 2.718\,282$, 其误差不超过 10^{-6} .

例 2 求 $f(x) = \sin x$ 的带有拉格朗日余项的 n 阶麦克劳林公式.

解 因为

$$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x,$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x, \cdots, f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

所以

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1, f^{(4)}(0) = 0$$

等. 它们顺序循环地取四个数 $0, 1, 0, -1$, 于是按公式(3-9)得 (令 $n=2m$)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m},$$

其中

$$R_{2m}(x) = \frac{\sin\left[\theta x + (2m+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(2m+1)!} x^{2m+1} = (-1)^m \frac{\cos \theta x}{(2m+1)!} x^{2m+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

如果取 $m=1$, 那么得近似公式

$$\sin x \approx x,$$

这时误差为

$$|R_2| = \left| -\frac{\cos \theta x}{3!} x^3 \right| \leq \frac{|x|^3}{6} \quad (0 < \theta < 1).$$

如果 m 分别取 2 和 3, 那么可得 $\sin x$ 的 3 次和 5 次泰勒多项式

$$\sin x \approx x - \frac{1}{3!} x^3 \quad \text{和} \quad \sin x \approx x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5,$$

其误差的绝对值依次不超过 $\frac{1}{5!} |x|^5$ 和 $\frac{1}{7!} |x|^7$. 以上三个泰勒多项式及正弦函数的图形都画在图 3-3 中, 以便于比较.

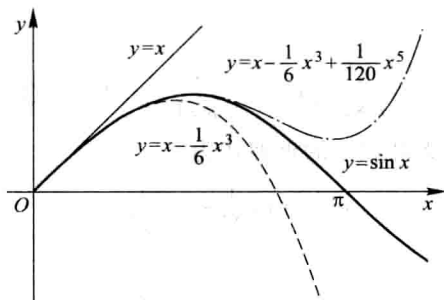


图 3-3

类似地, 还可以得到

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m)!} x^{2m} + R_{2m+1}(x),$$

$$\text{其中 } R_{2m+1}(x) = \frac{\cos[\theta x + (m+1)\pi]}{(2m+2)!} x^{2m+2} = (-1)^{m+1} \frac{\cos \theta x}{(2m+2)!} x^{2m+2} \quad (0 < \theta < 1);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n + R_n(x),$$

$$\text{其中 } R_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1);$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + R_n(x),$$

其中 $R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!} (1+\theta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1} \quad (0<\theta<1)$.

由以上带有拉格朗日余项的麦克劳林公式, 易得相应的带有佩亚诺余项的麦克劳林公式, 读者可自行写出.

例 3 利用带有佩亚诺余项的麦克劳林公式, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$.

解 由于分式的分母 $\sin^3 x \sim x^3 \quad (x \rightarrow 0)$, 我们只需将分子中的 $\sin x$ 和 $x \cos x$ 分别用带有佩亚诺余项的三阶麦克劳林公式表示, 即

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \quad x \cos x = x - \frac{x^3}{2!} + o(x^3).$$

于是

$$\sin x - x \cos x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x + \frac{x^3}{2!} - o(x^3) = \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

对上式作运算时, 把两个比 x^3 高阶的无穷小的代数和仍记作 $o(x^3)$, 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

习 题 3-3

- 按 $(x-4)$ 的幂展开多项式 $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$.
- 应用麦克劳林公式, 按 x 的幂展开函数 $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^3$.
- 求函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 按 $(x-4)$ 的幂展开的带有拉格朗日余项的 3 阶泰勒公式.
- 求函数 $f(x) = \ln x$ 按 $(x-2)$ 的幂展开的带有佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式.
- 求函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 按 $(x+1)$ 的幂展开的带有拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式.
- 求函数 $f(x) = \tan x$ 的带有佩亚诺余项的 3 阶麦克劳林公式.
- 求函数 $f(x) = xe^x$ 的带有佩亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式.
- 验证当 $0 < x \leq \frac{1}{2}$ 时, 按公式 $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ 计算 e^x 的近似值时, 所产生的误差小于 0.01, 并求 $\sqrt{e}$ 的近似值, 使误差小于 0.01.
- 应用 3 阶泰勒公式求下列各数的近似值, 并估计误差:
 - $\sqrt[3]{30}$;
 - $\sin 18^\circ$.
- 利用泰勒公式求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^4 - 2x^3})$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2 [x + \ln(1-x)]}$;

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{x^2}) \sin x^2};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right].$$

第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性

一、函数单调性的判定法

第一章第一节中已经介绍了函数在区间上单调的概念. 下面利用导数来对函数的单调性进行研究.

如果函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加(单调减少), 那么它的图形是一条沿 x 轴正向上升(下降)的曲线. 这时, 如图 3-4, 曲线上各点处的切线斜率是非负的(是非正的), 即 $y'=f'(x) \geq 0$ ($y'=f'(x) \leq 0$). 由此可见, 函数的单调性与导数的符号有着密切的联系.

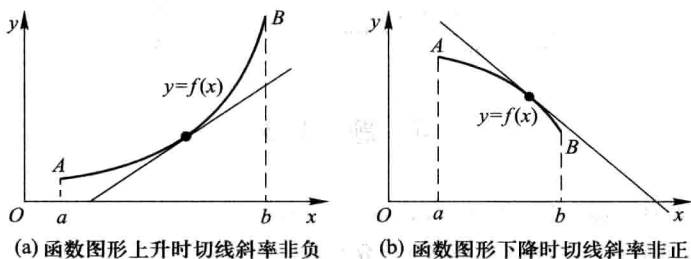


图 3-4

反过来, 能否用导数的符号来判定函数的单调性呢?

下面我们利用拉格朗日中值定理来进行讨论.

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 在 $[a, b]$ 上任取两点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 应用拉格朗日中值定理, 得到

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \quad (x_1 < \xi < x_2).$$

由于在上式中, $x_2 - x_1 > 0$, 因此, 如果在 (a, b) 内导数 $f'(x)$ 保持正号, 即 $f'(x) > 0$, 那么也有 $f'(\xi) > 0$. 于是

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0,$$

即

$$f(x_1) < f(x_2),$$

表明函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加. 同理, 如果在 (a, b) 内导数 $f'(x)$ 保持负

号, 即 $f'(x) < 0$, 那么 $f'(\xi) < 0$, 于是 $f(x_2) - f(x_1) < 0$, 即 $f(x_1) > f(x_2)$, 表明函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少.

此外, 如果 $f'(x)$ 在 (a, b) 内的某点 $x=c$ 处等于零, 而在其余各点处均为正(负), 那么 $f(x)$ 在区间 $[a, c]$ 和区间 $[c, b]$ 上都是单调增加(减少)的, 因此在区间 $[a, b]$ 上仍是单调增加(减少)的. 显然, 如果 $f'(x)$ 在 (a, b) 内等于零的点为有限多个, 只要它在其余各点处保持定号, 那么 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上仍是单调的.

归纳以上讨论, 即得

定理 1 设函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导.

(1) 如果在 (a, b) 内 $f'(x) \geq 0$, 且等号仅在有限多个点处成立, 那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加;

(2) 如果在 (a, b) 内 $f'(x) \leq 0$, 且等号仅在有限多个点处成立, 那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调减少.

如果把这个判定法中的闭区间换成其他各种区间(对于无穷区间, 要求在其任一有限的子区间上满足定理的条件), 那么结论也成立, 参阅本节习题 8.

例 1 判定函数 $y=x-\sin x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的单调性.

解 因为所给函数在 $[-\pi, \pi]$ 上连续, 在 $(-\pi, \pi)$ 内

$$y' = 1 - \cos x \geq 0,$$

且等号仅在 $x=0$ 处成立, 所以由定理 1 可知, 函数 $y=x-\sin x$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上单调增加.

例 2 讨论函数 $y=e^x-x-1$ 的单调性.

解 $y' = e^x - 1$.

函数 $y=e^x-x-1$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 因为在 $(-\infty, 0)$ 内 $y' < 0$, 所以函数 $y=e^x-x-1$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调减少; 因为在 $(0, +\infty)$ 内 $y' > 0$, 所以函数 $y=e^x-x-1$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加.

例 3 讨论函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调性.

解 这函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

当 $x \neq 0$ 时, 这函数的导数为

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}},$$

当 $x=0$ 时, 函数的导数不存在. 在 $(-\infty, 0)$ 内, $y' < 0$, 因此函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调减少. 在 $(0, +\infty)$ 内, $y' > 0$, 因此函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加. 函数的图形如图 3-5 所示.

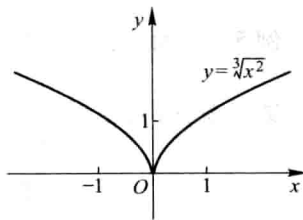


图 3-5

我们注意到,在例2中, $x=0$ 是函数 $y=e^x-x-1$ 的单调减少区间 $(-\infty, 0]$ 与单调增加区间 $[0, +\infty)$ 的分界点,而在该点处 $y'=0$.在例3中, $x=0$ 是函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 的单调减少区间 $(-\infty, 0]$ 与单调增加区间 $[0, +\infty)$ 的分界点,而在该点处导数不存在.

从例2中看出,有些函数在它的定义区间上不是单调的,但是当我们用函数的驻点来划分函数的定义区间以后,就可以使函数在各个部分区间上单调.从例3中可看出,如果函数在某些点处不可导,则划分函数的定义区间的分点,还应包括这些导数不存在的点.一般地,我们有如下结论:

如果函数 $f(x)$ 在定义区间上连续,除去有限个导数不存在的点外导数存在且在区间内只有有限个驻点,那么只要用函数的驻点及导数不存在的点来划分函数 $f(x)$ 的定义区间,就能保证 $f'(x)$ 在各个部分区间内保持固定符号,因而函数 $f(x)$ 在每个部分区间上单调.

例4 确定函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单调区间.

解 这函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.求这函数的导数

$$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2).$$

解方程 $f'(x)=0$,即解

$$6(x-1)(x-2)=0,$$

得出它在函数定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内的两个根 $x_1=1$ 、 $x_2=2$.这两个根把 $(-\infty, +\infty)$ 分成三个部分区间 $(-\infty, 1]$ 、 $[1, 2]$ 及 $[2, +\infty)$.

在区间 $(-\infty, 1)$ 内, $x-1<0$ 且 $x-2<0$,所以 $f'(x)>0$.因此,函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1]$ 内单调增加.在区间 $(1, 2)$ 内, $x-1>0$ 但 $x-2<0$,所以 $f'(x)<0$.因此,函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调减少.在区间 $(2, +\infty)$ 内, $x-1>0$ 且 $x-2>0$,所以 $f'(x)>0$.因此,函数 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调增加.

函数 $y=f(x)$ 的图形如图3-6所示.

下面我们举一个利用函数的单调性证明不等式的例子.

例5 证明:当 $x>1$ 时, $2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}$.

证 令 $f(x)=2\sqrt{x}-\left(3-\frac{1}{x}\right)$,则

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x^2}(x\sqrt{x}-1).$$

$f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上连续,在 $(1, +\infty)$ 内 $f'(x)>0$,因此在 $[1, +\infty)$ 上 $f(x)$ 单调

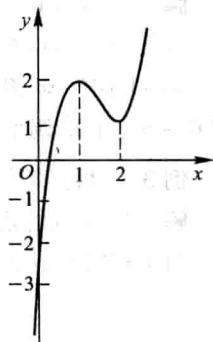


图 3-6

增加,从而当 $x > 1$ 时, $f(x) > f(1)$.

由于 $f(1) = 0$, 故 $f(x) > f(1) = 0$, 即

$$2\sqrt{x} - \left(3 - \frac{1}{x}\right) > 0,$$

亦即

$$2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x} \quad (x > 1).$$

二、曲线的凹凸性与拐点

在第一目中,我们研究了函数单调性的判定法. 函数的单调性反映在图形上,就是曲线的上升或下降. 但是,曲线在上升或下降的过程中,还有一个弯曲方向的问题. 例如,图3-7中有两条曲线弧,虽然它们都是上升的,但图形却有显著的不同, $\widehat{ACB}$ 是向上凸的曲线弧,而 $\widehat{ADB}$ 是向上凹的曲线弧,它们的凹凸性不同,下面我们就来研究曲线的凹凸性及其判定法.

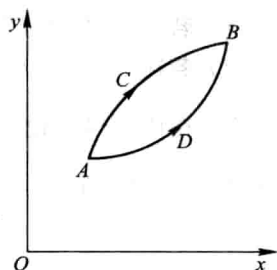


图 3-7

我们从几何上看到,在有的曲线弧上,如果任取两点,则联结这两点间的弦总位于这两点间的弧段的上方(图3-8(a)),而有的曲线弧,则正好相反(图3-8(b)). 曲线的这种性质就是曲线的凹凸性. 因此曲线的凹凸性可以用联结曲线弧上任意两点的弦的中点与曲线弧上相应点(即具有相同横坐标的点)的位置关系来描述,下面给出曲线凹凸性的定义.

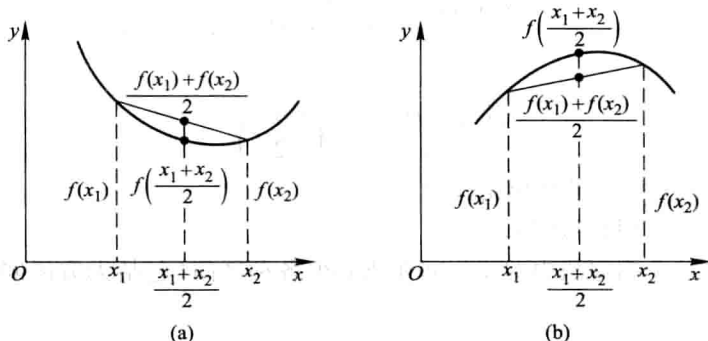


图 3-8

定义 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 如果对 I 上任意两点 x_1, x_2 恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是(向上)凹的(或凹弧); 如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是(向上)凸的(或凸弧).

如果函数 $f(x)$ 在 I 内具有二阶导数, 那么可以利用二阶导数的符号来判定曲线的凹凸性, 这就是下面的曲线凹凸性的判定定理.

定理 2 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内具有一阶和二阶导数, 那么

(1) 若在 (a, b) 内 $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形是凹的;

(2) 若在 (a, b) 内 $f''(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形是凸的.

证 在情形(1), 设 x_1 和 x_2 为 $[a, b]$ 内任意两点, 且 $x_1 < x_2$, 记 $\frac{x_1+x_2}{2} = x_0$, 并记 $x_2 - x_0 = x_0 - x_1 = h$, 则 $x_1 = x_0 - h, x_2 = x_0 + h$, 由拉格朗日中值公式, 得

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0+\theta_1 h)h,$$

$$f(x_0) - f(x_0-h) = f'(x_0-\theta_2 h)h,$$

其中 $0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1$. 两式相减, 即得

$$f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0) = [f'(x_0+\theta_1 h) - f'(x_0-\theta_2 h)]h.$$

对 $f'(x)$ 在区间 $[x_0-\theta_2 h, x_0+\theta_1 h]$ 上再利用拉格朗日中值公式, 得

$$[f'(x_0+\theta_1 h) - f'(x_0-\theta_2 h)]h = f''(\xi)(\theta_1+\theta_2)h^2,$$

其中 $x_0 - \theta_2 h < \xi < x_0 + \theta_1 h$. 按情形(1)的假设, $f''(\xi) > 0$, 故有

$$f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0) > 0,$$

即

$$\frac{f(x_0+h) + f(x_0-h)}{2} > f(x_0),$$

亦即

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right),$$

所以 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形是凹的.

类似地可证明情形(2).

如果把这个判定法中的闭区间换成其他各种区间(包括无穷区间), 那么结论也成立.

例 6 判定曲线 $y = \ln x$ 的凹凸性.

解 因为 $y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2}$, 所以在函数 $y = \ln x$ 的定义域 $(0, +\infty)$ 内, $y'' < 0$, 由

定理 2 可知, 曲线 $y = \ln x$ 是凸的.

例 7 判定曲线 $y = x^3$ 的凹凸性.

解 因为 $y' = 3x^2, y'' = 6x$. 当 $x < 0$ 时, $y'' < 0$, 所以曲线在 $(-\infty, 0]$ 内为凸弧; 当 $x > 0$ 时, $y'' > 0$, 所以曲线在 $[0, +\infty)$ 内为凹弧.

一般地, 设 $y = f(x)$ 在区间 I 上连续, x_0 是 I 内的点. 如果曲线 $y = f(x)$ 在经过点 $(x_0, f(x_0))$ 时, 曲线的凹凸性改变了, 那么就称点 $(x_0, f(x_0))$ 为这曲线的拐点.

如何来寻找曲线 $y = f(x)$ 的拐点呢?

从上面的定理知道, 由 $f''(x)$ 的符号可以判定曲线的凹凸性, 因此, 如果 $f''(x)$ 在 x_0 的左、右两侧邻近异号, 那么点 $(x_0, f(x_0))$ 就是曲线的一个拐点, 所以, 要寻找拐点, 只要找出 $f''(x)$ 符号发生变化的分界点即可, 也就是找出 $f'(x)$ 单调增减区间发生变化的分界点即可. 因此, 如果 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内具有二阶导数, 那么在这样的分界点处必然有 $f''(x) = 0$; 除此以外, $f(x)$ 的二阶导数不存在的点, 也有可能是 $f''(x)$ 的符号发生变化的分界点. 综合以上分析, 我们可以按下列步骤来判定区间 I 上的连续曲线 $y = f(x)$ 的拐点:

(1) 求 $f''(x)$;

(2) 令 $f''(x) = 0$, 解出这方程在区间 I 内的实根, 并求出在区间 I 内 $f''(x)$ 不存在的点^①;

(3) 对于(2)中求出的每一个实根或二阶导数不存在的点 x_0 , 检查 $f''(x)$ 在 x_0 左、右两侧邻近的符号, 那么当两侧的符号相反时, 点 $(x_0, f(x_0))$ 是拐点, 当两侧的符号相同时, 点 $(x_0, f(x_0))$ 不是拐点.

例 8 求曲线 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$ 的拐点.

解 $y' = 6x^2 + 6x - 12, y'' = 12x + 6 = 12\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

解方程 $y'' = 0$, 得 $x = -\frac{1}{2}$. 当 $x < -\frac{1}{2}$ 时, $y'' < 0$; 当 $x > -\frac{1}{2}$ 时, $y'' > 0$. 因此, 点 $\left(-\frac{1}{2}, 20\frac{1}{2}\right)$ 是这曲线的拐点.

例 9 求曲线 $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的拐点及凹、凸的区间.

解 函数 $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

$$y' = 12x^3 - 12x^2,$$

$$y'' = 36x^2 - 24x = 36x\left(x - \frac{2}{3}\right).$$

① 这里假设这两种点在区间 I 内的个数均为有限个.

解方程 $y''=0$, 得 $x_1=0, x_2=\frac{2}{3}$.

$x_1=0$ 及 $x_2=\frac{2}{3}$ 把函数的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 分成三个部分区间: $(-\infty, 0]$ 、 $[0, \frac{2}{3}]$ 、 $[\frac{2}{3}, +\infty)$.

在 $(-\infty, 0)$ 内, $y''>0$, 因此在区间 $(-\infty, 0]$ 上这曲线是凹的. 在 $(0, \frac{2}{3})$ 内, $y''<0$, 因此在区间 $[0, \frac{2}{3}]$ 上这曲线是凸的. 在 $(\frac{2}{3}, +\infty)$ 内, $y''>0$, 因此在区间 $[\frac{2}{3}, +\infty)$ 上这曲线是凹的.

当 $x=0$ 时, $y=1$, 点 $(0, 1)$ 是这曲线的一个拐点. 当 $x=\frac{2}{3}$ 时 $y=\frac{11}{27}$, 点 $(\frac{2}{3}, \frac{11}{27})$ 也是这曲线的拐点.

例 10 问曲线 $y=x^4$ 是否有拐点?

解 $y'=4x^3, y''=12x^2$.

显然, 只有 $x=0$ 是方程 $y''=0$ 的根. 但当 $x \neq 0$ 时, 无论 $x<0$ 或 $x>0$ 都有 $y''>0$, 因此点 $(0, 0)$ 不是这曲线的拐点. 曲线 $y=x^4$ 没有拐点, 它在 $(-\infty, +\infty)$ 内是凹的.

例 11 求曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的拐点.

解 这函数在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 当 $x \neq 0$ 时,

$$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad y'' = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}},$$

当 $x=0$ 时, y', y'' 都不存在. 故二阶导数在 $(-\infty, +\infty)$ 内不连续且不具有零点. 但 $x=0$ 是 y'' 不存在的点, 它把 $(-\infty, +\infty)$ 分成两个部分区间: $(-\infty, 0]$ 、 $[0, +\infty)$.

在 $(-\infty, 0)$ 内, $y''>0$, 这曲线在 $(-\infty, 0]$ 上是凹的. 在 $(0, +\infty)$ 内, $y''<0$, 这曲线在 $[0, +\infty)$ 上是凸的.

当 $x=0$ 时, $y=0$, 点 $(0, 0)$ 是这曲线的一个拐点.

习 题 3-4

1. 判定函数 $f(x) = \arctan x - x$ 的单调性.
2. 判定函数 $f(x) = x + \cos x$ 的单调性.
3. 确定下列函数的单调区间:

(1) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x - 7$;

(2) $y = 2x + \frac{8}{x} \quad (x > 0)$;

(3) $y = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$;

(4) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$;

(5) $y = (x-1)(x+1)^3$;

(6) $y = \sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2} \quad (a > 0)$;

(7) $y = x^n e^{-x} \quad (n > 0, x \geq 0)$;

(8) $y = x + |\sin 2x|$.

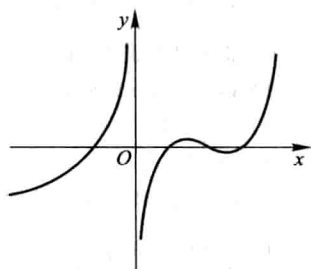


图 3-9

4. 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导, $y=f(x)$ 的图形如图 3-9 所示, 则导函数 $f'(x)$ 的图形为图 3-10 中所示的四个图形中的哪一个?

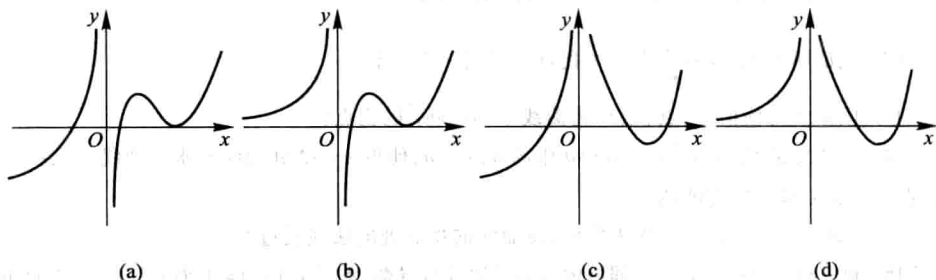


图 3-10

5. 证明下列不等式:

(1) 当 $x > 0$ 时, $1 + \frac{1}{2}x > \sqrt{1+x}$;

(2) 当 $x > 0$ 时, $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2}$;

(3) 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\sin x + \tan x > 2x$;

(4) 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\tan x > x + \frac{1}{3}x^3$;

(5) 当 $x > 4$ 时, $2^x > x^2$.

6. 讨论方程 $\ln x = ax$ (其中 $a > 0$) 有几个实根?

7. 单调函数的导函数是否必为单调函数? 研究下面的例子:

$$f(x) = x + \sin x.$$

8. 设 I 为任一无穷区间, 函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, I 内可导. 试证明: 如果 $f(x)$ 在 I 的任一有限的子区间上 $f'(x) \geq 0$ (或 $f'(x) \leq 0$), 且等号仅在有限多个点处成立, 那么 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加 (或单调减少).

9. 判定下列曲线的凹凸性:

(1) $y=4x-x^2$; (2) $y=\operatorname{sh} x$;

(3) $y=x+\frac{1}{x} \quad (x>0)$; (4) $y=x\arctan x$.

10. 求下列函数图形的拐点及凹或凸的区间:

(1) $y=x^3-5x^2+3x+5$; (2) $y=xe^{-x}$;

(3) $y=(x+1)^4+e^x$; (4) $y=\ln(x^2+1)$;

(5) $y=e^{\arctan x}$; (6) $y=x^4(12\ln x-7)$.

11. 利用函数图形的凹凸性,证明下列不等式:

(1) $\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad (x>0, y>0, x\neq y, n>1)$;

(2) $\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}} \quad (x\neq y)$;

(3) $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln \frac{x+y}{2} \quad (x>0, y>0, x\neq y)$.

* 12. 试证明曲线 $y=\frac{x-1}{x^2+1}$ 有三个拐点位于同一直线上.13. 问 a, b 为何值时, 点 $(1, 3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点?14. 试决定曲线 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 中的 a, b, c, d , 使得 $x=-2$ 处曲线有水平切线, $(1, -10)$ 为拐点, 且点 $(-2, 44)$ 在曲线上.15. 试决定 $y=k(x^2-3)^2$ 中 k 的值, 使曲线的拐点处的法线通过原点.* 16. 设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内具有三阶连续导数, 如果 $f''(x_0)=0$, 而 $f'''(x_0)\neq 0$, 试问 $(x_0, f(x_0))$ 是否为拐点? 为什么?

第五节 函数的极值与最大值最小值

一、函数的极值及其求法

在上节例4中我们看到, 点 $x=1$ 及 $x=2$ 是函数

$$f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$$

的单调区间的分界点. 例如, 在点 $x=1$ 的左侧邻近, 函数 $f(x)$ 是单调增加的, 在点 $x=1$ 的右侧邻近, 函数 $f(x)$ 是单调减少的. 因此, 存在点 $x=1$ 的一个去心邻域, 对于这去心邻域内的任何点 x , $f(x)<f(1)$ 均成立. 类似地, 关于点 $x=2$, 也存在着一个去心邻域, 对于这去心邻域内的任何点 x , $f(x)>f(2)$ 均成立 (参看图 3-6). 具有这种性质的点如 $x=1$ 及 $x=2$, 在应用上有着重要的意义, 值得我们对此作一般性的讨论.

定义 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义, 如果对于去心邻域 $\dot{U}(x_0)$ 内的任一 x , 有

$$f(x) < f(x_0) \quad (\text{或 } f(x) > f(x_0)),$$

那么就称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值 (或极小值).

函数的极大值与极小值统称为函数的极值, 使函数取得极值的点称为极值点. 例如, 上节例 4 中的函数

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$$

有极大值 $f(1) = 2$ 和极小值 $f(2) = 1$, 点 $x = 1$ 和 $x = 2$ 是函数 $f(x)$ 的极值点.

函数的极大值和极小值概念是局部性的. 如果 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值, 那只是就 x_0 附近的一个局部范围来说, $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的一个最大值; 如果就 $f(x)$ 的整个定义域来说, $f(x_0)$ 不见得是最大值. 关于极小值也类似.

在图 3-11 中, 函数 $f(x)$ 有两个极大值: $f(x_2)$ 、 $f(x_5)$, 三个极小值: $f(x_1)$ 、 $f(x_4)$ 、 $f(x_6)$, 其中极大值 $f(x_2)$ 比极小值 $f(x_6)$ 还小. 就整个区间 $[a, b]$ 来说, 只有一个极小值 $f(x_1)$ 同时也是最小值, 而没有一个极大值是最大值.

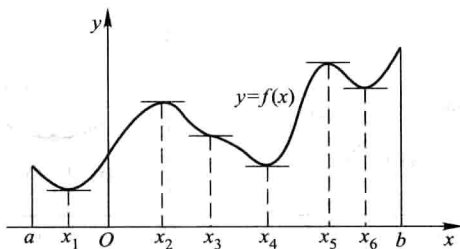


图 3-11

从图中还可看到, 在函数取得极值处, 曲线的切线是水平的. 但曲线上有水平切线的地方, 函数不一定取得极值. 例如图中 $x = x_3$ 处, 曲线上有水平切线, 但 $f(x_3)$ 不是极值.

由本章第一节费马引理可知, 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且 $f(x)$ 在 x_0 处取得极值, 那么 $f'(x_0) = 0$. 这就是可导函数取得极值的必要条件. 现将此结论叙述成如下定理:

定理 1 (必要条件) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且在 x_0 处取得极值, 则 $f'(x_0) = 0$.

定理 1 就是说: 可导函数 $f(x)$ 的极值点必定是它的驻点. 但反过来, 函数的驻点却不一定是极值点. 例如, $f(x) = x^3$ 的导数 $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$, 因此 $x = 0$ 是这可导函数的驻点, 但 $x = 0$ 却不是这函数的极值点. 所以, 函数的驻点只是可能的极值点. 此外, 函数在它的导数不存在的点处也可能取得极值. 例如, 函数

$f(x) = |x|$ 在点 $x=0$ 处不可导, 但函数在该点取得极小值.

怎样判定函数在驻点或不可导的点处究竟是否取得极值? 如果是的话, 究竟取得极大值还是极小值? 下面给出两个判定极值的充分条件:

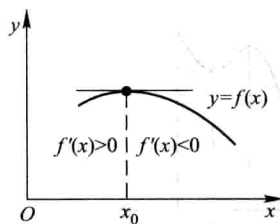
定理 2 (第一充分条件) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 且在 x_0 的某去心邻域 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 内可导.

(1) 若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x) > 0$, 而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;

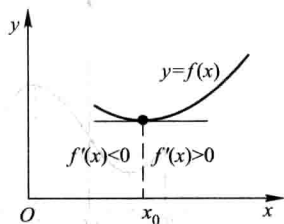
(2) 若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, 而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值;

(3) 若 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, $f'(x)$ 的符号保持不变, 则 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值.

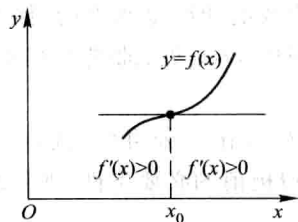
证 事实上, 就情形 (1) 来说, 根据函数单调性的判定法, 函数 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内单调增加, 而在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内单调减少, 又由于函数 $f(x)$ 在 x_0 处是连续的, 故当 $x \in \dot{U}(x_0, \delta)$ 时, 总有 $f(x) < f(x_0)$. 所以, $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的一个极大值 (图 3-12(a)).



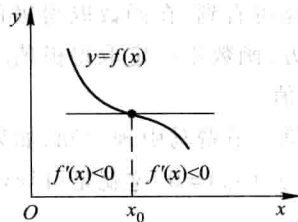
(a)



(b)



(c)



(d)

图 3-12

类似地可论证情形 (2) (图 3-12(b)) 及情形 (3) (图 3-12(c)、(d)).

定理 2 也可简单地这样说: 当 x 在 x_0 的邻近渐增地经过 x_0 时, 如果 $f'(x)$ 的符号由正变负, 那么 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值; 如果 $f'(x)$ 的符号由负变正, 那么 $f(x)$ 在 x_0

处取得极小值;如果 $f'(x)$ 的符号并不改变,那么 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值.

根据上面的两个定理,如果函数 $f(x)$ 在所讨论的区间内连续,除个别点外处处可导,那么就可以按下列步骤来求 $f(x)$ 在该区间内的极值点和相应的极值:

- (1) 求出导数 $f'(x)$;
- (2) 求出 $f(x)$ 的全部驻点与不可导点;
- (3) 考察 $f'(x)$ 的符号在每个驻点或不可导点的左、右邻近的情形,以确定该点是否为极值点;如果是极值点,进一步确定是极大值点还是极小值点;
- (4) 求出各极值点的函数值,就得函数 $f(x)$ 的全部极值.

例 1 求函数 $f(x) = (x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}$ 的极值.

解 (1) $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续,除 $x = -1$ 外处处可导,且

$$f'(x) = \frac{5(x-1)}{3\sqrt[3]{x+1}};$$

(2) 令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = 1, x = -1$ 为 $f(x)$ 的不可导点;

(3) 在 $(-\infty, -1)$ 内, $f'(x) > 0$; 在 $(-1, 1)$ 内, $f'(x) < 0$. 故不可导点 $x = -1$ 是一个极大值点; 又在 $(1, +\infty)$ 内, $f'(x) > 0$, 故驻点 $x = 1$ 是一个极小值点;

(4) 极大值为 $f(-1) = 0$, 极小值为 $f(1) = -3\sqrt[3]{4}$.

当函数 $f(x)$ 在驻点处的二阶导数存在且不为零时,也可以利用下述定理来判定 $f(x)$ 在驻点处取得极大值还是极小值.

定理 3 (第二充分条件) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数且 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, 则

(1) 当 $f''(x_0) < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值;

(2) 当 $f''(x_0) > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

证 在情形 (1), 由于 $f''(x_0) < 0$, 按二阶导数的定义有

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0.$$

根据函数极限的局部保号性, 当 x 在 x_0 的足够小的去心邻域内时,

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0.$$

但 $f'(x_0) = 0$, 所以上式即

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0.$$

从而知道, 对于这去心邻域内的 x 来说, $f'(x)$ 与 $x - x_0$ 符号相反. 因此, 当 $x - x_0 < 0$ 即 $x < x_0$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x - x_0 > 0$ 即 $x > x_0$ 时, $f'(x) < 0$. 于是根据定理 2 知道, $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值.

类似地可以证明情形(2).

定理3表明,如果函数 $f(x)$ 在驻点 x_0 处的二阶导数 $f''(x_0) \neq 0$,那么该驻点 x_0 一定是极值点,并且可以按二阶导数 $f''(x_0)$ 的符号来判定 $f(x_0)$ 是极大值还是极小值.但如果 $f''(x_0) = 0$,那么定理3就不能应用.事实上,当 $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$ 时, $f(x)$ 在 x_0 处可能有极大值,也可能有极小值,也可能没有极值.例如, $f_1(x) = -x^4$, $f_2(x) = x^4$, $f_3(x) = x^3$ 这三个函数在 $x=0$ 处就分别属于这三种情况.因此,如果函数在驻点处的二阶导数为零,那么可以用一阶导数在驻点左右邻近的符号来判定;如果函数在驻点处有 $f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$,那么也可利用具有佩亚诺余项的泰勒公式来讨论判定(参阅本节习题4).

例2 求函数 $f(x) = (x^2-1)^3+1$ 的极值.

解 $f'(x) = 6x(x^2-1)^2$.

令 $f'(x) = 0$,求得驻点 $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$.

$$f''(x) = 6(x^2-1)(5x^2-1).$$

因 $f''(0) = 6 > 0$,故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值,极小值为 $f(0) = 0$.

因 $f''(-1) = f''(1) = 0$,故用定理3无法判别.考察一阶导数 $f'(x)$ 在驻点 $x_1 = -1$ 及 $x_3 = 1$ 左右邻近的符号:

当 x 取 -1 左侧邻近的值时, $f'(x) < 0$;当 x 取 -1 右侧邻近的值时, $f'(x) < 0$;因为 $f'(x)$ 的符号没有改变,所以 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处没有极值.同理, $f(x)$ 在 $x = 1$ 处也没有极值(图3-13).

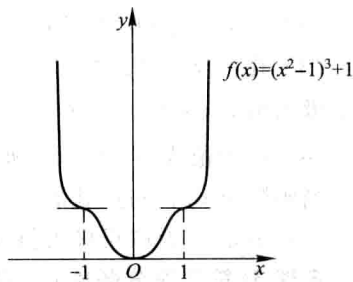


图 3-13

二、最大值最小值问题

在工农业生产、工程技术及科学实验中,常常会遇到这样一类问题:在一定条件下,怎样使“产品最多”“用料最省”“成本最低”“效率最高”等问题,这类问题在数学上有时可归结为求某一函数(通常称为目标函数)的最大值或最小值问题.

假定函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,在开区间 (a, b) 内除有限个点外可导,且至多有有限个驻点.在上述条件下,我们来讨论 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值的求法.

首先,由闭区间上连续函数的性质可知, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值一定存在.

其次,如果最大值(或最小值) $f(x_0)$ 在开区间 (a, b) 内的点 x_0 处取得,那么,

按 $f(x)$ 在开区间内除有限个点外可导且至多有有限个驻点的假定, 可知 $f(x_0)$ 一定也是 $f(x)$ 的极大值 (或极小值), 从而 x_0 一定是 $f(x)$ 的驻点或不可导点. 又 $f(x)$ 的最大值和最小值也可能在区间的端点处取得. 因此, 可用如下方法求 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值.

- (1) 求出 $f(x)$ 在 (a, b) 内的驻点^①及不可导点;
- (2) 计算 $f(x)$ 在上述驻点、不可导点处的函数值及 $f(a)$, $f(b)$;
- (3) 比较 (2) 中诸值的大小, 其中最大的便是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值, 最小的便是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值.

例 3 求函数 $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ 在 $[-3, 4]$ 上的最大值与最小值.

$$\text{解 } f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x \in [-3, 1] \cup [2, 4], \\ -x^2 + 3x - 2, & x \in (1, 2). \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \in (-3, 1) \cup (2, 4), \\ -2x + 3, & x \in (1, 2). \end{cases}$$

在 $(-3, 4)$ 内, $f(x)$ 的驻点为 $x = \frac{3}{2}$; 不可导点为 $x = 1, 2$.

由于 $f(-3) = 20$, $f(1) = 0$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$, $f(2) = 0$, $f(4) = 6$, 比较可得 $f(x)$ 在 $x = -3$ 处取得它在 $[-3, 4]$ 上的最大值 20, 在 $x = 1$ 和 $x = 2$ 处取得它在 $[-3, 4]$ 上的最小值 0.

例 4 铁路线上 AB 段的距离为 100 km. 工厂 C 距 A 处为 20 km, AC 垂直于 AB (图 3-14). 为了运输需要, 要在 AB 线上选定一点 D 向工厂修筑一条公路. 已知铁路每千米货运的运费与公路上每千米货运的运费之比为 3 : 5. 为了使货物从供应站 B 运到工厂 C 的运费最省, 问 D 点应选在何处?

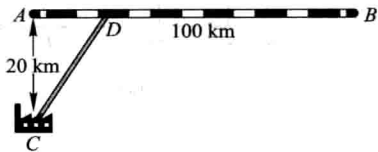


图 3-14

解 设 $AD = x$ km, 则 $DB = (100 - x)$ km,

$$CD = \sqrt{20^2 + x^2} = \sqrt{400 + x^2}.$$

由于铁路上每千米货运的运费与公路上每千米货运的运费之比为 3 : 5, 因此我们不妨设铁路上每千米的运费为 $3k$, 公路上每千米的运费为 $5k$ (k 为某个正数, 因它与本题的解无关, 所以不必定出). 设从 B 点到 C 点需要的总运费为 y , 则

$$y = 5k \cdot CD + 3k \cdot DB,$$

^① 当 $f(x)$ 在 (a, b) 内没有驻点时, 这个求驻点的步骤自动取消.

即

$$y = 5k\sqrt{400+x^2} + 3k(100-x) \quad (0 \leq x \leq 100).$$

现在,问题就归结为: x 在 $[0, 100]$ 内取何值时目标函数 y 的值最小.

先求 y 对 x 的导数

$$y' = k \left(\frac{5x}{\sqrt{400+x^2}} - 3 \right).$$

解方程 $y' = 0$, 得 $x = 15$ km.

由于 $y|_{x=0} = 400k$, $y|_{x=15} = 380k$, $y|_{x=100} = 500k\sqrt{1+\frac{1}{5^2}}$, 其中以 $y|_{x=15} = 380k$ 为最小, 因此, 当 $AD = x = 15$ km 时, 总运费为最省.

在求函数的最大值(或最小值)时, 特别值得指出的是下述情形: $f(x)$ 在一个区间(有限或无限, 开或闭)内可导且只有一个驻点 x_0 , 并且这个驻点 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点, 那么, 当 $f(x_0)$ 是极大值时, $f(x_0)$ 就是 $f(x)$ 在该区间上的最大值(图 3-15(a)); 当 $f(x_0)$ 是极小值时, $f(x_0)$ 就是 $f(x)$ 在该区间上的最小值(图 3-15(b)). 在应用问题中往往遇到这样的情形.

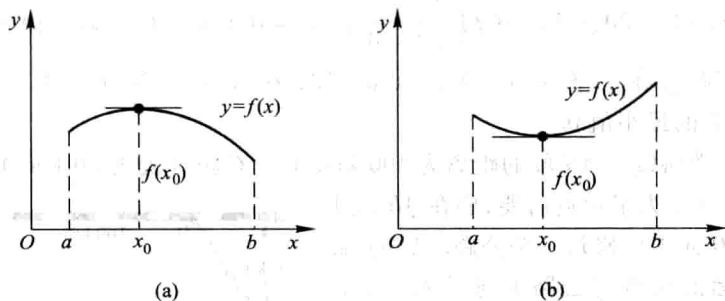


图 3-15

例 5 一束光线由空气中点 A 经过水面折射后到达水中点 B (图 3-16). 已知光在空气中和水中传播的速度分别是 v_1 和 v_2 , 光线在介质中总是沿着耗时最少的路径传播. 试确定光线传播的路径.

解 设点 A 到水面的垂直距离为 $AO = h_1$, 点 B 到水面的垂直距离为 $BQ = h_2$, x 轴沿水面过点 O 和 Q , OQ 的长度为 l .

由于光线总是沿着耗时最少的路径传播, 因此光线在同一均匀介质中必沿直线传播. 设光线的传播路径与 x 轴的交点为 P , $OP = x$, 则光线从

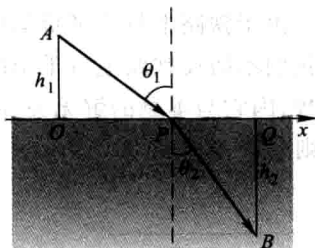


图 3-16

A 到 B 的传播路径必为折线 APB, 其所需要的传播时间为

$$T(x) = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (l-x)^2}}{v_2}, x \in [0, l].$$

下面来确定 x 满足什么条件时, $T(x)$ 在 $[0, l]$ 上取得最小值.

由于

$$T'(x) = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \cdot \frac{l-x}{\sqrt{h_2^2 + (l-x)^2}}, x \in [0, l],$$

$$T''(x) = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{h_1^2}{(h_1^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{h_2^2}{[h_2^2 + (l-x)^2]^{\frac{3}{2}}} > 0, x \in [0, l],$$

$$T'(0) < 0, T'(l) > 0,$$

又 $T'(x)$ 在 $[0, l]$ 上连续, 故 $T'(x)$ 在 $(0, l)$ 内存在唯一零点 x_0 , 且 x_0 是 $T(x)$ 在 $(0, l)$ 内的唯一极小值点, 从而也是 $T(x)$ 在 $[0, l]$ 上的最小值点.

设 x_0 满足 $T'(x) = 0$, 即

$$\frac{x_0}{v_1 \sqrt{h_1^2 + x_0^2}} = \frac{l-x_0}{v_2 \sqrt{h_2^2 + (l-x_0)^2}}.$$

记

$$\frac{x_0}{\sqrt{h_1^2 + x_0^2}} = \sin \theta_1, \quad \frac{l-x_0}{\sqrt{h_2^2 + (l-x_0)^2}} = \sin \theta_2,$$

就得到

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}.$$

这就是说, 当点 P 满足以上条件时, APB 就是光线的传播路径. 上式就是光学中著名的折射定律, 其中 θ_1, θ_2 分别是光线的入射角和折射角 (见图 3-16).

还要指出, 实际问题中, 往往根据问题的性质就可以断定可导函数 $f(x)$ 确有最大值或最小值, 而且一定在定义区间内部取得. 这时如果 $f(x)$ 在定义区间内部只有一个驻点 x_0 , 那么不必讨论 $f(x_0)$ 是不是极值, 就可以断定 $f(x_0)$ 是最大值或最小值.

例 6 把一根直径为 d 的圆木锯成截面为矩形的梁 (图 3-17). 问矩形截面的高 h 和宽 b 应如何选择才能使梁的抗弯截面模量最大?

解 由力学分析知道: 矩形梁的抗弯截面模量为

$$W = \frac{1}{6}bh^2.$$

由图 3-17 看出, b 与 h 有下面的关系:

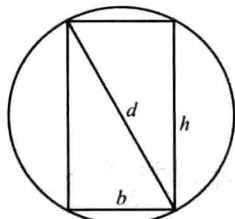


图 3-17

$$h^2 = d^2 - b^2,$$

因而

$$W = \frac{1}{6}(d^2 b - b^3).$$

这样, W 就与 b 存在函数关系, b 的变化范围是 $(0, d)$. 现在, 问题化为: b 等于多少时目标函数 $W = W(b)$ 取最大值? 为此, 求 W 对 b 的导数

$$W' = \frac{1}{6}(d^2 - 3b^2).$$

令 $W' = 0$, 解得

$$b = \sqrt{\frac{1}{3}}d.$$

由于梁的最大抗弯截面模量一定存在, 而且在 $(0, d)$ 内部取得; 现在, $W' = 0$ 在

$(0, d)$ 内只有一个根 $b = \sqrt{\frac{1}{3}}d$, 所以, 当 $b = \sqrt{\frac{1}{3}}d$ 时, W 的值最大. 这时,

$$h^2 = d^2 - b^2 = d^2 - \frac{1}{3}d^2 = \frac{2}{3}d^2,$$

即

$$h = \sqrt{\frac{2}{3}}d.$$

亦即

$$d : h : b = \sqrt{3} : \sqrt{2} : 1.$$

例 7 假设某工厂生产某产品 x 千件的成本是 $C(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$, 售出该产品 x 千件的收入是 $r(x) = 9x$. 问是否存在一个能取得最大利润的生产水平? 如果存在的话, 找出这个生产水平.

解 由题意知, 售出 x 千件产品的利润是

$$p(x) = r(x) - C(x).$$

如果 $p(x)$ 取得最大值, 那么它一定在使得 $p'(x) = 0$ 的生产水平处获得. 因此, 令

$$p'(x) = r'(x) - C'(x) = 0,$$

即

$$r'(x) = C'(x).$$

得

$$x^2 - 4x + 2 = 0.$$

解得 $x = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$, 即

$$x_1 = 2 - \sqrt{2} \approx 0.586, x_2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3.414.$$

又

$$p''(x) = -6x + 12, p''(x_1) > 0, p''(x_2) < 0.$$

故在 $x_2 = 3.414$ 处达到最大利润, 而在 $x_1 = 0.586$ 处发生局部最大亏损.

在经济学中, 称 $C'(x)$ 为边际成本, $r'(x)$ 为边际收入, $p'(x)$ 为边际利润. 上述结果表明: 在给出最大利润的生产水平上, $r'(x) = C'(x)$, 即边际收入等于边际成本. 上面的结果也可以从图 3-18 的成本曲线和收入曲线中看出.

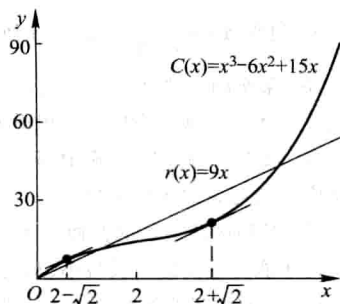


图 3-18

习 题 3-5

1. 求下列函数的极值:

(1) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$;

(2) $y = x - \ln(1+x)$;

(3) $y = -x^4 + 2x^2$;

(4) $y = x + \sqrt{1-x}$;

(5) $y = \frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$;

(6) $y = \frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$;

(7) $y = e^x \cos x$;

(8) $y = x^{\frac{1}{x}}$;

(9) $y = 3 - 2(x+1)^{\frac{1}{3}}$;

(10) $y = x + \tan x$.

2. 试证明: 如果函数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 满足条件 $b^2 - 3ac < 0$, 那么这函数没有极值.

3. 试问 a 为何值时, 函数 $f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$ 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 处取得极值? 它是极大值还是极小值? 并求此极值.

4. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数, 且 $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$, 证明:

(1) 当 n 为奇数时, $f(x)$ 在 x_0 处不取得极值;

(2) 当 n 为偶数时, $f(x)$ 在 x_0 处取得极值, 且当 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时, $f(x_0)$ 为极大值, 当 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时, $f(x_0)$ 为极小值.

5. 试利用习题 4 的结论, 讨论函数 $f(x) = e^x + e^{-x} + 2 \cos x$ 的极值.

6. 求下列函数的最大值、最小值;

(1) $y = 2x^3 - 3x^2, -1 \leq x \leq 4$;

(2) $y = x^4 - 8x^2 + 2, -1 \leq x \leq 3$;

(3) $y = x + \sqrt{1-x}, -5 \leq x \leq 1$.

7. 问函数 $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x - 7$ ($1 \leq x \leq 4$) 在何处取得最大值? 并求出它的最大值.

8. 问函数 $y = x^2 - \frac{54}{x}$ ($x < 0$) 在何处取得最小值?

9. 问函数 $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ ($x \geq 0$) 在何处取得最大值?

10. 某车间靠墙壁要盖一间长方形小屋, 现有存砖只够砌 20 m 长的墙壁. 问应围成怎样的长方形才能使这间小屋的面积最大?

11. 要造一圆柱形油罐, 体积为 V , 问底半径 r 和高 h 各等于多少时, 才能使表面积最小? 这时底直径与高的比是多少?

12. 某地区防空洞的截面拟建成矩形加半圆(图 3-19). 截面的面积为 5 m^2 . 问底宽 x 为多少时才能使截面的周长最小, 从而使建造时所用的材料最省?

13. 设有质量为 5 kg 的物体, 置于水平面上, 受力 F 的作用而开始移动(图 3-20). 设摩擦系数 $\mu = 0.25$, 问力 F 与水平线的交角 α 为多少时, 才可使力 F 的大小为最小.

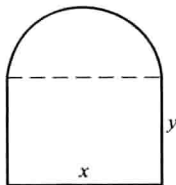


图 3-19

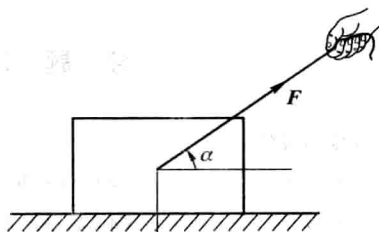


图 3-20

14. 有一杠杆, 支点在它的一端. 在距支点 0.1 m 处挂一质量为 49 kg 的物体. 加力于杠杆的另一端使杠杆保持水平(图 3-21). 如果杠杆的线密度为 5 kg/m, 求最省力的杆长?

15. 从一块半径为 R 的圆铁片上剪去一个扇形做成一个漏斗(图 3-22). 问留下的扇形的圆心角 φ 取多大时, 做成的漏斗的容积最大?

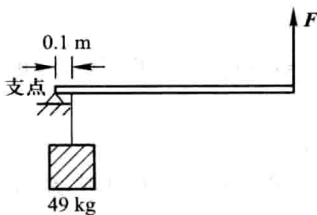


图 3-21

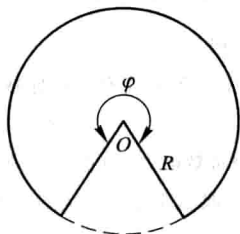


图 3-22

16. 某吊车的车身高为 1.5 m, 吊臂长 15 m. 现在要把一个 6 m 宽 2 m 高的屋架(如图 3-23(a)), 水平地吊到 6 m 高的柱子上去(如图 3-23(b)), 问能否吊得上去?

17. 一房地产公司有 50 套公寓要出租. 当月租金定为 4 000 元时, 公寓会全部租出去. 当月租金每增加 200 元时, 就会多一套公寓租不出去, 而租出去的公寓平均每月需花费 400 元的维修费. 试问房租定为多少可获得最大收入?

18. 已知制作一个背包的成本为 40 元. 如果每一个背包的售价为 x 元, 售出的背包数由

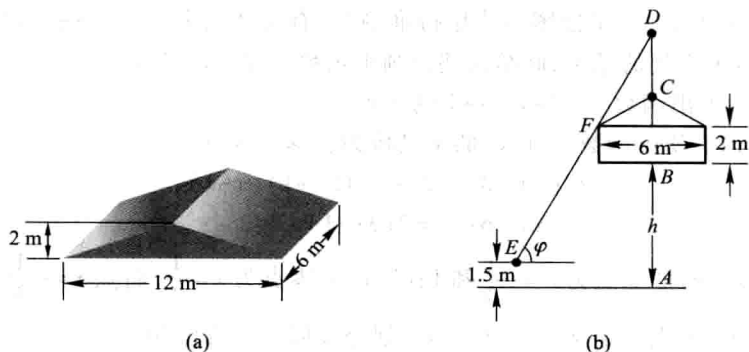


图 3-23

$$n = \frac{a}{x-40} + b(80-x)$$

给出, 其中 a, b 为正常数. 问什么样的售出价格能带来最大利润?

第六节 函数图形的描绘

借助于一阶导数的符号, 可以确定函数图形在哪个区间上上升, 在哪个区间上下降; 借助于二阶导数的符号, 可以确定函数图形在哪个区间上为凹, 在哪个区间上为凸, 在什么地方有拐点. 知道了函数图形的升降、凹凸以及拐点后, 也可以掌握函数的性态, 并把函数的图形画得比较准确.

现在, 随着现代计算机技术的发展, 借助于计算机和许多数学软件, 可以方便地画出各种函数的图形. 但是, 如何识别机器作图中的误差, 如何掌握图形上的关键点, 如何选择作图的范围等, 从而进行人工干预, 仍然需要我们有运用微分学的方法描绘函数图形的基本知识.

利用导数描绘函数图形的一般步骤如下:

第一步 确定函数 $y=f(x)$ 的定义域及函数所具有的某些特性 (如奇偶性、周期性等), 并求出函数的一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$;

第二步 求出一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$ 在函数定义域内的全部零点, 并求出函数 $f(x)$ 的间断点及 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 不存在的点, 用这些点把函数的定义域划分成几个部分区间;

第三步 确定在这些部分区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号, 并由此确定函数图形的升降、凹凸和拐点;

第四步 确定函数图形的水平、铅直渐近线以及其他变化趋势;

第五步 算出 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的零点以及不存在的点所对应的函数值, 定出

图形上相应的点;为了把图形描绘得准确些,有时还需要补充一些点,然后结合第三、四步中得到的结果,联结这些点画出函数 $y=f(x)$ 的图形.

例 1 画出函数 $y=x^3-x^2-x+1$ 的图形.

解 (1) 所给函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 而

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1),$$

$$f''(x) = 6x - 2 = 2(3x-1).$$

(2) $f'(x)$ 的零点为 $x = -\frac{1}{3}$ 和 1 ; $f''(x)$ 的零点为 $x = \frac{1}{3}$. 将点 $x = -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1$ 由小到大排列, 依次把定义域 $(-\infty, +\infty)$ 划分成四个部分区间

$$\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right], \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, 1\right], [1, +\infty).$$

(3) 在 $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ 内, $f'(x) > 0, f''(x) < 0$, 所以在 $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$ 上的曲线弧上升而且是凸的.

在 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 内, $f'(x) < 0, f''(x) < 0$, 所以在 $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ 上的曲线弧下降而且是凸的.

同样, 可以讨论在区间 $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ 及区间 $[1, +\infty)$ 上相应的曲线弧的升降和凹凸. 为了明确起见, 我们把所得的结论列成下表:

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$	$-\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}, 1\right)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+
$y=f(x)$ 的图形	↗		↘	拐点	↘		↗

这里记号 ↗ 表示曲线弧上升而且是凸的, ↘ 表示曲线弧下降而且是凸的, ↘ 表示曲线弧下降而且是凹的, ↗ 表示曲线弧上升而且是凹的.

(4) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow +\infty$; 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow -\infty$.

(5) 算出 $x = -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1$ 处的函数值

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{27}, f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{27}, f(1) = 0.$$

从而得到函数 $y=x^3-x^2-x+1$ 图形上的三个点

$$\left(-\frac{1}{3}, \frac{32}{27}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{16}{27}\right), (1, 0).$$

适当补充一些点. 例如, 计算出

$$f(-1) = 0, f(0) = 1, f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{8},$$

就可补充描出点 $(-1, 0)$, 点 $(0, 1)$ 和点 $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{8}\right)$. 结合(3)、(4)中得到的结果, 就可以画出

$$y = x^3 - x^2 - x + 1$$

的图形(图 3-24).

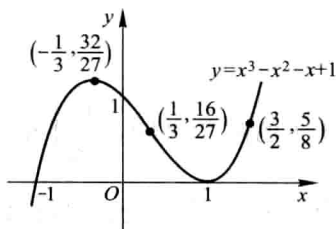


图 3-24

例 2 描绘函数 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的图形.

解 (1) 所给函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$. 由于

$$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = f(x),$$

所以 $f(x)$ 是偶函数, 它的图形关于 y 轴对称. 因此可以只讨论 $[0, +\infty)$ 上该函数的图形. 求出

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} [e^{-\frac{x^2}{2}} + x e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (x^2 - 1).$$

(2) 在 $[0, +\infty)$ 上, $f'(x)$ 的零点为 $x=0$; $f''(x)$ 的零点为 $x=1$. 用点 $x=1$ 把 $[0, +\infty)$ 划分成两个区间 $[0, 1]$ 和 $[1, +\infty)$.

(3) 在 $(0, 1)$ 内, $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$, 所以在 $[0, 1]$ 上的曲线弧下降而且是凸的.

在 $(1, +\infty)$ 内, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$, 所以在 $[1, +\infty)$ 上的曲线弧下降而且是凹的.

上述的这些结果, 可以列成下表:

x	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	0	-	-	-
$f''(x)$	-	-	0	+
$y=f(x)$ 的图形		↘	拐点	↘

(4) 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 所以图形有一条水平渐近线 $y=0$.

(5) 算出 $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $f(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}e}$. 从而得到函数

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

图形上的两点 $M_1\left(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$ 和 $M_2\left(1, \frac{1}{\sqrt{2\pi}e}\right)$. 又由 $f(2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}e^2}$ 得 $M_3\left(2, \frac{1}{\sqrt{2\pi}e^2}\right)$.

结合(3)、(4)的讨论, 画出函数 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ 在 $[0, +\infty)$ 上的图形. 最后, 利用图形的对称性, 便可得到函数在 $(-\infty, 0]$ 上的图形(图 3-25).

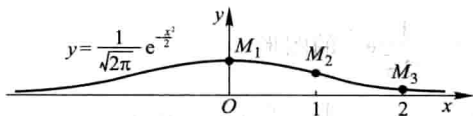


图 3-25

例 3 描绘函数 $y = 1 + \frac{36x}{(x+3)^2}$ 的图形.

解 (1) 所给函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -3), (-3, +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{36(3-x)}{(x+3)^3}, \quad f''(x) = \frac{72(x-6)}{(x+3)^4}.$$

(2) $f'(x)$ 的零点为 $x=3$; $f''(x)$ 的零点为 $x=6$; $x=-3$ 是函数的间断点. 点 $x=-3$, $x=3$ 和 $x=6$ 把定义域划分成四个部分区间:

$$(-\infty, -3), (-3, 3], [3, 6], [6, +\infty).$$

(3) 在各部分区间内 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 的符号、相应曲线弧的升降、凹凸和拐点等如下表:

x	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	3	$(3, 6)$	6	$(6, +\infty)$
$f'(x)$	-	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	-	-	-	0	+
$y=f(x)$ 的图形	↘	↗		↘	拐点	↘

(4) 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\infty$, 所以图形有一条水平渐近线 $y=1$ 和一条铅直渐近线 $x=-3$.

(5) 算出 $x=3, 6$ 处的函数值:

$$f(3)=4, f(6)=\frac{11}{3},$$

从而得到图形上的两个点

$$M_1(3, 4), M_2\left(6, \frac{11}{3}\right).$$

又由于

$$f(0)=1, f(-1)=-8, f(-9)=-8, f(-15)=-\frac{11}{4},$$

得图形上的四个点

$$M_3(0, 1), M_4(-1, -8), M_5(-9, -8), M_6\left(-15, -\frac{11}{4}\right).$$

结合(3)、(4)中得到的结果, 画出函数 $y = 1 + \frac{36x}{(x+3)^2}$ 的图形如图 3-26 所示.

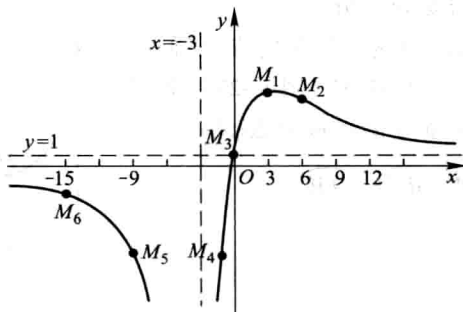


图 3-26

习 题 3-6

描绘下列函数的图形:

1. $y = \frac{1}{5}(x^4 - 6x^2 + 8x + 7);$

2. $y = \frac{x}{1+x^2};$

3. $y = e^{-(x-1)^2};$

4. $y = x^2 + \frac{1}{x};$

5. $y = \frac{\cos x}{\cos 2x}.$

第七节 曲 率

一、弧微分

作为曲率的预备知识,先介绍弧微分的概念.

设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内具有连续导数. 在曲线 $y=f(x)$ 上取固定点 $M_0(x_0, y_0)$ 作为度量弧长的基点(图 3-27), 并规定依 x 增大的方向作为曲线的正向. 对曲线上任一点 $M(x, y)$, 规定有向弧段 $\widehat{M_0M}$ 的值 s (简称为弧 s)^① 如下: s 的绝对值等于这弧段的长度, 当有向弧段 $\widehat{M_0M}$ 的方向与曲线的正向一致时 $s > 0$, 相反时 $s < 0$. 显然, 弧 s 与 x 存在函数关系: $s=s(x)$, 而且 $s(x)$ 是 x 的单调增加函数. 下面来求 $s(x)$ 的导数及微分.

设 $x, x+\Delta x$ 为 (a, b) 内两个邻近的点, 它们在曲线 $y=f(x)$ 上的对应点为 M, M' (图 3-27), 并设对应于 x 的增量为 Δx , 弧 s 的增量为 Δs , 那么

$$\Delta s = \widehat{M_0M'} - \widehat{M_0M} = \widehat{MM'}.$$

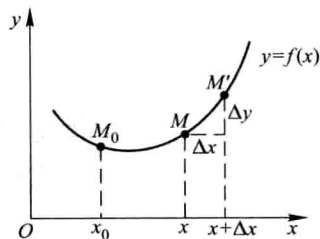


图 3-27

于是

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 &= \left(\frac{\widehat{MM'}}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\widehat{MM'}}{|MM'|}\right)^2 \cdot \frac{|MM'|^2}{(\Delta x)^2} \\ &= \left(\frac{\widehat{MM'}}{|MM'|}\right)^2 \cdot \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{(\Delta x)^2} \\ &= \left(\frac{\widehat{MM'}}{|MM'|}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right], \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \pm \sqrt{\left(\frac{\widehat{MM'}}{|MM'|}\right)^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right]}.$$

令 $\Delta x \rightarrow 0$ 取极限, 由于 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $M' \rightarrow M$, 这时弧的长度与弦的长度之比的极限

① 有向弧段 $\widehat{M_0M}$ 的值也常记作 $\widehat{M_0M}$, 即记号 $\widehat{M_0M}$ 既表示有向弧段, 又表示有向弧段的值.

等于 1, 即

$$\lim_{M' \rightarrow M} \frac{|\widehat{MM'}|}{|MM'|} = 1,$$

又

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y',$$

因此得

$$\frac{ds}{dx} = \pm \sqrt{1+y'^2}.$$

由于 $s=s(x)$ 是单调增加函数, 从而根号前应取正号, 于是有

$$ds = \sqrt{1+y'^2} dx. \quad (7-1)$$

这就是弧微分公式.

二、曲率及其计算公式

我们直觉地认识到: 直线不弯曲, 半径较小的圆弯曲得比半径较大的圆厉害些, 而其他曲线的不同部分有不同的弯曲程度, 例如抛物线 $y=x^2$ 在顶点附近弯曲得比远离顶点的部分厉害些.

在工程技术中, 有时需要研究曲线的弯曲程度. 例如, 船体结构中的钢梁、机床的转轴等, 它们在荷载作用下要产生弯曲变形, 在设计时对它们的弯曲必须有一定的限制, 这就要定量地研究它们的弯曲程度. 为此首先要讨论如何用数量来描述曲线的弯曲程度.

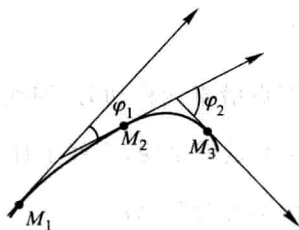


图 3-28

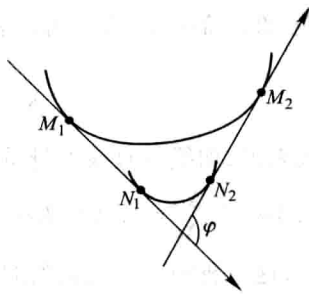


图 3-29

在图 3-28 中可以看出, 弧段 $\widehat{M_1M_2}$ 比较平直, 当动点沿这段弧从 M_1 移动到 M_2 时, 切线转过的角度 φ_1 不大, 而弧段 $\widehat{M_2M_3}$ 弯曲得比较厉害, 角 φ_2 就比较大.

但是,切线转过的角度的大小还不能完全反映曲线弯曲的程度.例如,从图 3-29 中可以看出,两段曲线弧 $\widehat{M_1M_2}$ 及 $\widehat{N_1N_2}$ 尽管切线转过的角度都是 φ ,然而弯曲程度并不相同,短弧段比长弧段弯曲得厉害些.由此可见,曲线弧的弯曲程度还与弧段的长度有关.

按上面的分析,我们引入描述曲线弯曲程度的曲率概念如下:

设曲线 C 是光滑的^①,在曲线 C 上选定一点 M_0 作为度量弧 s 的基点.设曲线上点 M 对应于弧 s ,在点 M 处切线的倾角为 α (这里假定曲线 C 所在的平面上已设立了 xOy 坐标系),曲线上另外一点 M' 对应于弧 $s+\Delta s$,在点 M' 处切线的倾角为 $\alpha+\Delta\alpha$ (图 3-30),则弧段 $\widehat{MM'}$ 的长度为 $|\Delta s|$,当动点从 M 移动到 M' 时切线转过的角度为 $|\Delta\alpha|$.

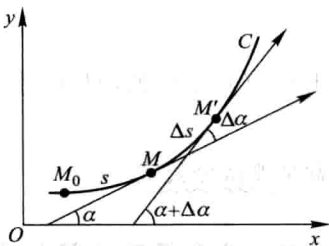


图 3-30

我们用比值 $\frac{|\Delta\alpha|}{|\Delta s|}$,即单位弧段上切线转过

的角度的大小来表达弧段 $\widehat{MM'}$ 的平均弯曲程度,把这比值叫做弧段 $\widehat{MM'}$ 的平均曲率,并记作 $\bar{K}$,即

$$\bar{K} = \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|.$$

类似于从平均速度引进瞬时速度的方法,当 $\Delta s \rightarrow 0$ 时(即 $M' \rightarrow M$ 时),上述平均曲率的极限叫做曲线 C 在点 M 处的曲率,记作 K ,即

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|.$$

在 $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$ 存在的条件下, K 也可以表示为

$$K = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|. \quad (7-2)$$

对于直线来说,切线与直线本身重合,当点沿直线移动时,切线的倾角 α 不变(图 3-31), $\Delta\alpha = 0$, $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = 0$,从而 $K = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| = 0$. 这就是说,直线上任意点 M 处的曲率都等于零,这与我们直觉认识到的“直线不弯曲”一致.

设圆的半径为 a ,由图 3-32 可见圆在点 M 、 M' 处的切线所夹的角 $\Delta\alpha$ 等于圆心角 $\angle MDM'$. 但 $\angle MDM' = \frac{\Delta s}{a}$,于是

① 当曲线上每一点处都具有切线,且切线随切点的移动而连续转动,这样的曲线称为光滑曲线.

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{\frac{\Delta s}{a}}{\Delta s} = \frac{1}{a},$$

从而

$$K = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| = \frac{1}{a}.$$

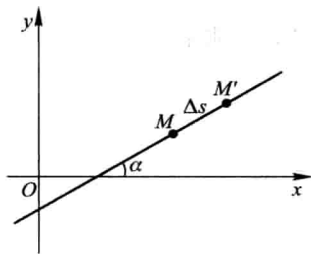


图 3-31

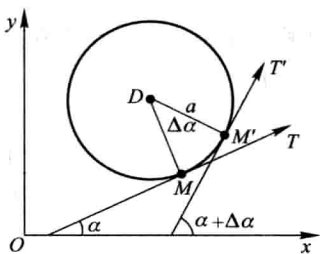


图 3-32

因为点 M 是圆上任意取定的一点, 上述结论表示圆上各点处的曲率都等于半径 a 的倒数 $\frac{1}{a}$, 这就是说, 圆的弯曲程度到处一样, 且半径越小曲率越大, 即圆弯曲得越厉害.

在一般情况下, 我们根据(7-2)式来导出便于实际计算曲率的公式.

设曲线的直角坐标方程是 $y=f(x)$, 且 $f(x)$ 具有二阶导数(这时 $f'(x)$ 连续, 从而曲线是光滑的). 因为 $\tan \alpha = y'$, 所以

$$\sec^2 \alpha \frac{d\alpha}{dx} = y'',$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{y''}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{y''}{1 + y'^2},$$

于是

$$d\alpha = \frac{y''}{1 + y'^2} dx.$$

又由(7-1)知道

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

从而, 根据曲率 K 的表达式(7-2), 有

$$K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}. \quad (7-3)$$

设曲线由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

给出,则可利用由参数方程所确定的函数的求导法,求出 y'_x 及 y''_x ,代入(7-3)便得

$$K = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]^{3/2}}. \quad (7-4)$$

例 1 计算等边双曲线 $xy=1$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率.

解 由 $y = \frac{1}{x}$, 得

$$y' = -\frac{1}{x^2}, \quad y'' = \frac{2}{x^3}.$$

因此,

$$y'|_{x=1} = -1, \quad y''|_{x=1} = 2.$$

把它们代入公式(7-3), 便得曲线 $xy=1$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率为

$$K = \frac{2}{[1+(-1)^2]^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 2 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上哪一点处的曲率最大?

解 由 $y=ax^2+bx+c$, 得

$$y' = 2ax+b, \quad y'' = 2a,$$

代入公式(7-3), 得

$$K = \frac{|2a|}{[1+(2ax+b)^2]^{3/2}}.$$

因为 K 的分子是常数 $|2a|$, 所以只要分母最小, K 就最大. 容易看出, 当 $2ax+b=0$, 即 $x=-\frac{b}{2a}$ 时, K 的分母最小, 因而 K 有最大值 $|2a|$. 而 $x=-\frac{b}{2a}$ 所对应的点为抛物线的顶点. 因此, 抛物线在顶点处的曲率最大.

在有些实际问题中, $|y'|$ 同 1 比较起来是很小的 (有的工程技术书上把这种关系记成 $|y'| \ll 1$), 可以忽略不计. 这时, 由

$$1+y'^2 \approx 1,$$

而有曲率的近似计算公式

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}} \approx |y''|.$$

这就是说, 当 $|y'| \ll 1$ 时, 曲率 K 近似于 $|y''|$. 经过这样简化之后, 对一些复杂问题的计算和讨论就方便多了.

三、曲率圆与曲率半径

设曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x, y)$ 处的曲率为 K ($K \neq 0$). 在点 M 处的曲线的法线上, 在凹的一侧取一点 D , 使 $|DM| = \frac{1}{K} = \rho$. 以 D

为圆心, ρ 为半径作圆 (图 3-33), 这个圆叫做曲线在点 M 处的曲率圆, 曲率圆的圆心 D 叫做曲线在点 M 处的曲率中心, 曲率圆的半径 ρ 叫做曲线在点 M 处的曲率半径.

按上述规定可知, 曲率圆与曲线在点 M 有相同的切线和曲率, 且在点 M 邻近有相同的凹向. 因此, 在实际问题中, 常常用曲率圆在点 M 邻近的一段圆弧来近似代替曲线弧, 以使问题简化.

按上述规定, 曲线在点 M 处的曲率 K ($K \neq 0$) 与曲线在点 M 处的曲率半径 ρ 有如下关系:

$$\rho = \frac{1}{K}, \quad K = \frac{1}{\rho}.$$

这就是说: 曲线上一点处的曲率半径与曲线在该点处的曲率互为倒数.

例 3 设工件内表面的截线为抛物线 $y = 0.4x^2$ (图 3-34). 现在要用砂轮磨削其内表面. 问用直径多大的砂轮才比较合适?

解 为了在磨削时不使砂轮与工件接触处附近的那部分工件磨去太多, 砂轮的半径应不大于抛物线上各点处曲率半径中的最小值.

由本节例 2 知道, 抛物线在其顶点处的曲率最大, 也就是说, 抛物线在其顶点处的曲率半径最小. 因此, 只要求出抛物线 $y = 0.4x^2$ 在顶点 $O(0, 0)$ 处的曲率半径. 由

$$y' = 0.8x, \quad y'' = 0.8,$$

而有

$$y'|_{x=0} = 0, \quad y''|_{x=0} = 0.8.$$

把它们代入公式 (7-3), 得

$$K = 0.8.$$

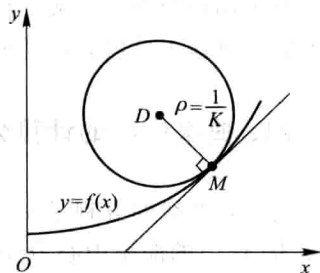


图 3-33

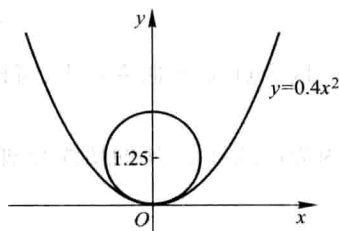


图 3-34

因而求得抛物线顶点处的曲率半径

$$\rho = \frac{1}{K} = 1.25.$$

所以选用砂轮的半径不得超过 1.25 单位长,即直径不得超过 2.50 单位长.

对于用砂轮磨削一般工件的内表面时,也有类似的结论,即选用的砂轮的半径不应超过这工件内表面的截线上各点处曲率半径中的最小值.

* 四、曲率中心的计算公式 渐屈线与渐伸线

设已知曲线的方程是 $y=f(x)$, 且其二阶导数 y'' 在点 x 不为零, 则曲线在对应点 $M(x, y)$ 的曲率中心 $D(\alpha, \beta)$ 的坐标为

$$\begin{cases} \alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \\ \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}. \end{cases} \quad (7-5)$$

这是因为, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x, y)$ 的曲率圆的方程为

$$(\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 = \rho^2,$$

其中 ξ, η 是曲率圆上的动点坐标, 且

$$\rho^2 = \frac{1}{K^2} = \frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}.$$

因为点 M 在曲率圆上, 所以

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \rho^2; \quad (7-6)$$

又因为曲线在点 M 的切线与曲率圆的半径 DM 相垂直(图 3-33), 所以

$$y' = -\frac{x - \alpha}{y - \beta}. \quad (7-7)$$

由式(7-6)和(7-7)消去 $x - \alpha$, 解出

$$(y - \beta)^2 = \frac{\rho^2}{1 + y'^2} = \frac{(1 + y'^2)^2}{y''^2}.$$

由于当 $y'' > 0$ 时曲线为凹弧, $y - \beta < 0$; 当 $y'' < 0$ 时曲线为凸弧, $y - \beta > 0$. 总之, y'' 与 $y - \beta$ 异号. 因此取上式两边的平方根, 得

$$y - \beta = -\frac{1 + y'^2}{y''},$$

又

$$x - \alpha = -y'(y - \beta) = \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}.$$

从而有公式(7-5).

当点 $(x, f(x))$ 沿曲线 C 移动时,相应的曲率中心 D 的轨迹曲线 G 称为曲线 C 的渐屈线,而曲线 C 称为曲线 G 的渐伸线(图3-35). 所以曲线 $y=f(x)$ 的渐屈线的参数方程为

$$\begin{cases} \alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \\ \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''}, \end{cases} \quad (7-8)$$

其中 $y=f(x)$, $y'=f'(x)$, $y''=f''(x)$, x 为参数,直角坐标系 $\alpha O \beta$ 与 $x O y$ 坐标系重合.

例4 求摆线

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

的渐屈线方程.

解 $\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$, $\frac{dy}{dt} = a \sin t$, 所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t - 1}{a(1 - \cos t)^2}$$

$$= -\frac{1}{a(1 - \cos t)^2}.$$

将这些结果代入(7-8)式并化简, 使得摆线的渐屈线的参数方程

$$\begin{cases} \alpha = a(t + \sin t), \\ \beta = a(\cos t - 1), \end{cases} \quad (7-9)$$

其中 t 为参数,直角坐标系 $\alpha O \beta$ 与 $x O y$ 坐标系重合. 为了作出渐屈线(7-9), 令 $t = \pi + \tau$, 代入(7-9)式得

$$\begin{cases} \alpha - \pi a = a(\tau - \sin \tau), \\ \beta + 2a = a(1 - \cos \tau), \end{cases}$$

再令 $\alpha - \pi a = \xi$, $\beta + 2a = \eta$, 则得

$$\begin{cases} \xi = a(\tau - \sin \tau), \\ \eta = a(1 - \cos \tau). \end{cases} \quad (7-10)$$

在新坐标系 $\xi O_1 \eta$ 中, 曲线(7-10)为一摆线, 其中新坐标系 $\xi O_1 \eta$ 由旧坐标系 $x O y$ 平移到新原点 $O_1(\pi a, -2a)$ 得到. 由此可知摆线的渐屈线仍为一摆线, 如图3-36所示.

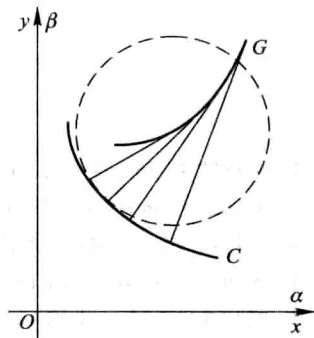


图 3-35

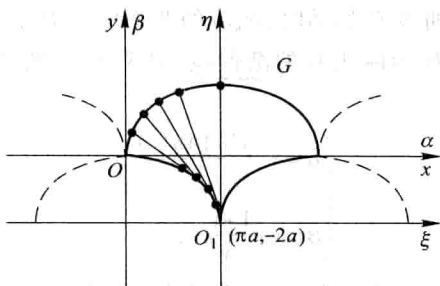


图 3-36

习 题 3-7

1. 求椭圆 $4x^2 + y^2 = 4$ 在点 $(0, 2)$ 处的曲率.
2. 求曲线 $y = \ln \sec x$ 在点 (x, y) 处的曲率及曲率半径.
3. 求抛物线 $y = x^2 - 4x + 3$ 在其顶点处的曲率及曲率半径.
4. 求曲线 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ 在 $t = t_0$ 相应的点处的曲率.
5. 对数曲线 $y = \ln x$ 上哪一点处的曲率半径最小? 求出该点处的曲率半径.
- * 6. 证明曲线 $y = a \cosh \frac{x}{a}$ 在点 (x, y) 处的曲率半径为 $\frac{y^2}{a}$.

7. 一飞机沿抛物线路径 $y = \frac{x^2}{10\,000}$ (y 轴铅直向上, 单位为 m) 做俯冲飞行. 在坐标原点 O 处飞机的速度为 $v = 200$ m/s. 飞行员体重 $G = 70$ kg. 求飞机俯冲至最低点即原点 O 处时座椅对飞行员的反力.

8. 汽车连同载重共 5 t, 在抛物线拱桥上行驶, 速度为 21.6 km/h, 桥的跨度为 10 m, 拱的矢高为 0.25 m (图 3-37). 求汽车越过桥顶时对桥的压力.

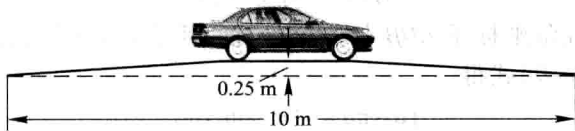


图 3-37

- * 9. 求曲线 $y = \ln x$ 在与 x 轴交点处的曲率圆方程.
- * 10. 求曲线 $y = \tan x$ 在点 $(\frac{\pi}{4}, 1)$ 处的曲率圆方程.
- * 11. 求抛物线 $y^2 = 2px$ 的渐屈线方程.

第八节 方程的近似解

在科学技术问题中,经常会遇到求解高次代数方程或其他类型的方程的问题.要求得这类方程的实根的精确值,往往比较困难,因此就需要寻求方程的近似解.

求方程的近似解,可分两步来做.

第一步是确定根的大致范围.具体地说,就是确定一个区间 $[a, b]$,使所求的根是位于这个区间内的唯一实根.这一步工作称为根的隔离,区间 $[a, b]$ 称为所求实根的隔离区间.由于方程 $f(x)=0$ 的实根在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴交点的横坐标,因此为了确定根的隔离区间,可以先较精确地画出 $y=f(x)$ 的图形,然后从图上定出它与 x 轴交点的大概位置.由于作图和读数的误差,这种做法得不出根的高精确度的近似值,但一般已可以确定出根的隔离区间.

第二步是以根的隔离区间的端点作为根的初始近似值,逐步改善根的近似值的精确度,直至求得满足精确度要求的近似解.完成这一步工作有多种方法,这里我们介绍三种常用的方法——二分法、切线法和割线法,按照这些方法,编出简单的程序,就可以在计算机上求出方程足够精确的近似解.

一、二分法

设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, $f(a) \cdot f(b) < 0$,且方程 $f(x)=0$ 在 (a, b) 内仅有一个实根 ξ ,于是 $[a, b]$ 即是这个根的一个隔离区间.

取 $[a, b]$ 的中点 $\xi_1 = \frac{a+b}{2}$,计算 $f(\xi_1)$.

如果 $f(\xi_1)=0$,那么 $\xi=\xi_1$;

如果 $f(\xi_1)$ 与 $f(a)$ 同号,那么取 $a_1=\xi_1, b_1=b$,由 $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$,即知 $a_1 < \xi < b_1$,且 $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b-a)$;

如果 $f(\xi_1)$ 与 $f(b)$ 同号,那么取 $a_1=a, b_1=\xi_1$,也有 $a_1 < \xi < b_1$ 及 $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b-a)$;

总之,当 $\xi \neq \xi_1$ 时,可求得 $a_1 < \xi < b_1$,且 $b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b-a)$.

以 $[a_1, b_1]$ 作为新的隔离区间,重复上述做法,当 $\xi \neq \xi_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$ 时,可求

得 $a_2 < \xi < b_2$, 且 $b_2 - a_2 = \frac{1}{2^2}(b-a)$.

如此重复 n 次, 可求得 $a_n < \xi < b_n$, 且 $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$. 由此可知, 如果以 a_n 或 b_n 作为 ξ 的近似值, 那么其误差小于 $\frac{1}{2^n}(b-a)$.

例 1 用二分法求方程 $x^3 + 1.1x^2 + 0.9x - 1.4 = 0$ 的实根的近似值, 使误差不超过 10^{-3} ①.

解 令 $f(x) = x^3 + 1.1x^2 + 0.9x - 1.4$, 显然 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

由 $f'(x) = 3x^2 + 2.2x + 0.9$, 根据判别式 $B^2 - 4AC = 2.2^2 - 4 \times 3 \times 0.9 = -5.96 < 0$, 知 $f'(x) > 0$. 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加, $f(x) = 0$ 至多有一个实根.

由 $f(0) = -1.4 < 0$, $f(1) = 1.6 > 0$, 知 $f(x) = 0$ 在 $[0, 1]$ 内有唯一的实根. 取 $a = 0$, $b = 1$, $[0, 1]$ 即是一个隔离区间.

计算得

$$\xi_1 = 0.5, f(\xi_1) = -0.55 < 0, \text{ 故 } a_1 = 0.5, b_1 = 1;$$

$$\xi_2 = 0.75, f(\xi_2) = 0.32 > 0, \text{ 故 } a_2 = 0.5, b_2 = 0.75;$$

$$\xi_3 = 0.625, f(\xi_3) = -0.16 < 0, \text{ 故 } a_3 = 0.625, b_3 = 0.75;$$

$$\xi_4 = 0.687, f(\xi_4) = 0.062 > 0, \text{ 故 } a_4 = 0.625, b_4 = 0.687;$$

$$\xi_5 = 0.656, f(\xi_5) = -0.054 < 0, \text{ 故 } a_5 = 0.656, b_5 = 0.687;$$

$$\xi_6 = 0.672, f(\xi_6) = 0.005 > 0, \text{ 故 } a_6 = 0.656, b_6 = 0.672;$$

$$\xi_7 = 0.664, f(\xi_7) = -0.025 < 0, \text{ 故 } a_7 = 0.664, b_7 = 0.672;$$

$$\xi_8 = 0.668, f(\xi_8) = -0.010 < 0, \text{ 故 } a_8 = 0.668, b_8 = 0.672;$$

$$\xi_9 = 0.670, f(\xi_9) = -0.002 < 0, \text{ 故 } a_9 = 0.670, b_9 = 0.672;$$

$$\xi_{10} = 0.671, f(\xi_{10}) = 0.001 > 0, \text{ 故 } a_{10} = 0.670, b_{10} = 0.671.$$

于是

$$0.670 < \xi < 0.671.$$

即 0.670 作为根的不足近似值, 0.671 作为根的过剩近似值, 其误差都小于 10^{-3} .

二、切线法

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有二阶导数, $f(a) \cdot f(b) < 0$ 且 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 在 $[a, b]$ 上保持定号. 在上述条件下, 方程 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内有唯一的实根 ξ ,

① 按本例误差不超过 10^{-3} 的要求, 计算时只取 3 位小数.

$[a, b]$ 为根的一个隔离区间. 此时, $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形 $\widehat{AB}$ 只有如图 3-38 所示的四种不同情形.

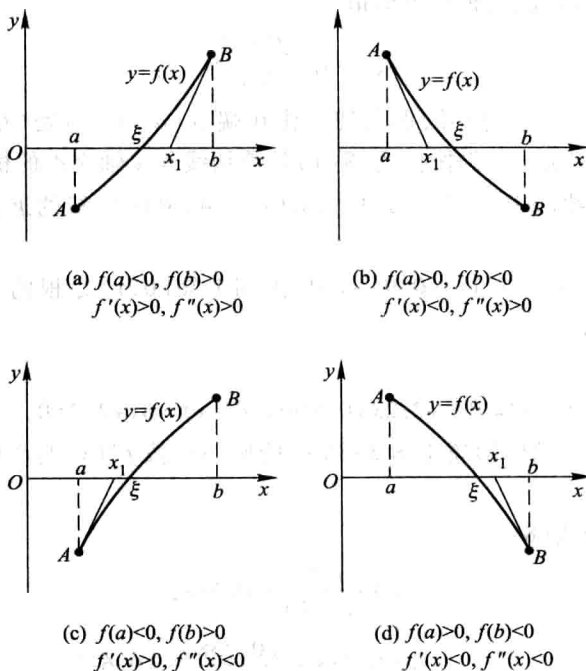


图 3-38

考虑用曲线弧一端的切线来代替曲线弧, 从而求出方程实根的近似值. 这种方法叫做切线法. 从图 3-38 中看出, 如果在纵坐标与 $f''(x)$ 同号的那个端点 (此端点记作 $(x_0, f(x_0))$) 处作切线, 这切线与 x 轴的交点的横坐标 x_1 就比 x_0 更接近方程的根 ξ .

下面以图 3-38 (a) : $f(a)<0, f(b)>0, f'(x)>0, f''(x)>0$ 的情形为例进行讨论. 此时, 因为 $f(b)$ 与 $f''(x)$ 同号, 所以令 $x_0 = b$, 在端点 $(x_0, f(x_0))$ 处作切线 (图 3-39), 这切线的方程为

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

令 $y=0$, 从上式中解出 x , 就得到切线与 x 轴交点的横坐标为

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

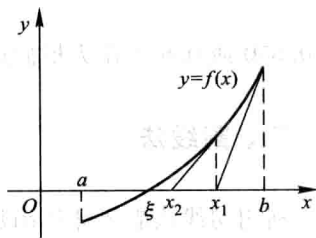


图 3-39

它比 x_0 更接近方程的根 ξ .

再在点 $(x_1, f(x_1))$ 处作切线, 可得根的近似值 x_2 . 如此继续, 一般地, 在点 $(x_n, f(x_n))$ 处作切线, 得根的近似值

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (8-1)$$

如果 $f(a)$ 与 $f''(x)$ 同号, 那么切线作在端点 $(a, f(a))$ 处 (如图 3-38 情形 (b) 及 (c)), 可记 $x_0 = a$, 仍按公式 (8-1) 计算切线与 x 轴交点的横坐标.

例 2 用切线法求方程 $x^3 + 1.1x^2 + 0.9x - 1.4 = 0$ 的实根的近似值, 使误差不超过 10^{-3} .

解 令 $f(x) = x^3 + 1.1x^2 + 0.9x - 1.4$. 由例 1 知 $[0, 1]$ 是根的一个隔离区间. $f(0) < 0, f(1) > 0$.

在 $[0, 1]$ 上,

$$f'(x) = 3x^2 + 2.2x + 0.9 > 0, \quad f''(x) = 6x + 2.2 > 0,$$

故 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的图形属于图 3-38 中情形 (a). 按 $f''(x)$ 与 $f(1)$ 同号, 所以令 $x_0 = 1$.

连续应用公式 (8-1), 得

$$x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} \approx 0.738,$$

$$x_2 = 0.738 - \frac{f(0.738)}{f'(0.738)} \approx 0.674,$$

$$x_3 = 0.674 - \frac{f(0.674)}{f'(0.674)} \approx 0.671,$$

$$x_4 = 0.671 - \frac{f(0.671)}{f'(0.671)} \approx 0.671.$$

至此, 计算不能再继续. 注意到 $f(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots$) 与 $f''(x)$ 同号, 知 $f(0.671) > 0$, 经计算可知 $f(0.670) < 0$, 于是有

$$0.670 < \xi < 0.671.$$

以 0.670 或 0.671 作为根的近似值, 其误差都小于 10^{-3} .

三、割线法

利用切线法需要计算函数的导数, 当 $f(x)$ 比较复杂时, 计算 $f'(x)$ 可能有困难. 这时, 可考虑用

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

来近似代替(8-1)式中的 $f'(x_n)$, 这时的迭代公式成为

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n), \quad (8-2)$$

其中, x_0, x_1 为初始值. 迭代公式(8-2)的几何意义是用过点 $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ 和点 $(x_n, f(x_n))$ 的割线来近似代替点 $(x_n, f(x_n))$ 处的切线, 将这条割线与 x 轴交点的横坐标作为新的近似值(见图3-40). 因此, 这个方法叫做割线法或弦截法.

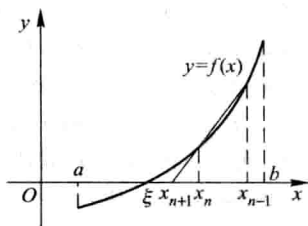


图 3-40

以下用割线法对例 2 中的方程求近似解.

取 $x_0 = 1, x_1 = 0.8$. 连续用迭代公式(8-2), 得

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \cdot f(x_1) \approx 0.699,$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} \cdot f(x_2) \approx 0.672,$$

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3 - x_2}{f(x_3) - f(x_2)} \cdot f(x_3) \approx 0.671,$$

$$x_5 = x_4 - \frac{x_4 - x_3}{f(x_4) - f(x_3)} \cdot f(x_4) \approx 0.671.$$

至此, 计算不能再继续. 因 x_4 与 x_5 小数前三位数字相同, 故以 0.671 作为根的近似值其误差小于 10^{-3} .

习 题 3-8

1. 试证明方程 $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内有唯一的实根, 并用二分法求这个根的近似值, 使误差不超过 0.01.

2. 试证明方程 $x^5 + 5x + 1 = 0$ 在区间 $(-1, 0)$ 内有唯一的实根, 并用切线法求这个根的近似值, 使误差不超过 0.01.

3. 用割线法求方程 $x^3 + 3x - 1 = 0$ 的近似根, 使误差不超过 0.01.

4. 求方程 $x \lg x = 1$ 的近似根, 使误差不超过 0.01.

总 习 题 三

1. 填空:

设常数 $k > 0$, 函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$ 在 $(0, +\infty)$ 内零点的个数为_____.

2. 以下两题中给出了四个结论, 从中选出一个正确的结论:

(1) 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$,则 $f'(0), f'(1), f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 几个数的大小顺序为();

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$ (B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$ (D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

(2) 设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0, f'''(x_0)>0$,则().

(A) $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值 (B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值 (D) $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

3. 列举一个函数 $f(x)$ 满足: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内除某一点外处处可导,但在 (a,b) 内不存在点 ξ ,使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

4. 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)=k$,求 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x+a)-f(x)]$.

5. 证明多项式 $f(x)=x^3-3x+a$ 在 $[0,1]$ 上不可能有两个零点.

6. 设 $a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$,证明多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

在 $(0,1)$ 内至少有一个零点.

*7. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续,在 $(0,a)$ 内可导,且 $f(a)=0$,证明存在一点 $\xi \in (0,a)$,使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

*8. 设 $0<a<b$,函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,试利用柯西中值定理,证明存在一点 $\xi \in (a,b)$,使

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi) \ln \frac{b}{a}.$$

9. 设 $f(x), g(x)$ 都是可导函数,且 $|f'(x)|<g'(x)$,证明:当 $x>a$ 时, $|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a)$.

10. 求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-x^2}{1-x+\ln x}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right]$;

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x$; (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} [(a_1^{\frac{1}{n}}+a_2^{\frac{1}{n}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{n}})/n]^n$ (其中 $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$).

11. 求下列函数在指定点 x_0 处具有指定阶数及余项的泰勒公式:

(1) $f(x)=x^3 \ln x, x_0=1, n=4$,拉格朗日余项;

(2) $f(x)=\arctan x, x_0=0, n=3$,佩亚诺余项;

(3) $f(x)=e^{\sin x}, x_0=0, n=3$,佩亚诺余项;

(4) $f(x)=\ln \cos x, x_0=0, n=6$,佩亚诺余项.

12. 证明下列不等式:

(1) 当 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}$;

(2) 当 $x>0$ 时, $\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}$;

(3) 当 $e < a < b < e^2$ 时, $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b-a)$.

13. 设 $a > 1$, $f(x) = a^x - ax$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的驻点为 $x(a)$. 问 a 为何值时, $x(a)$ 最小? 并求出最小值.

14. 求椭圆 $x^2 - xy + y^2 = 3$ 上纵坐标最大和最小的点.

15. 求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大项.

16. 曲线弧 $y = \sin x$ ($0 < x < \pi$) 上哪一点处的曲率半径最小? 求出该点处的曲率半径.

17. 证明方程 $x^3 - 5x - 2 = 0$ 只有一个正根, 并求此正根的近似值, 精确到 10^{-3} .

* 18. 设 $f''(x_0)$ 存在, 证明:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0).$$

19. 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内二阶可导, 且 $f''(x) \geq 0$. 证明对于 (a, b) 内任意两点 x_1, x_2 及 $0 \leq t \leq 1$, 有

$$f[(1-t)x_1 + tx_2] \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

20. 试确定常数 a 和 b , 使 $f(x) = x - (a + b \cos x) \sin x$ 为当 $x \rightarrow 0$ 时关于 x 的 5 阶无穷小.

第四章 不定积分

在第二章中,我们讨论了如何求一个函数的导函数问题,本章将讨论它的反问题,即要寻求一个可导函数,使它的导函数等于已知函数.这是积分学的基本问题之一.

第一节 不定积分的概念与性质

一、原函数与不定积分的概念

定义 1 如果在区间 I 上,可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$,即对任一 $x \in I$,都有

$$F'(x) = f(x) \text{ 或 } dF(x) = f(x) dx,$$

那么函数 $F(x)$ 就称为 $f(x)$ (或 $f(x) dx$) 在区间 I 上的一个原函数.

例如,因 $(\sin x)' = \cos x$,故 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数.

又如当 $x \in (1, +\infty)$ 时,

$$[\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})]' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

故 $\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ 是 $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内的一个原函数.

关于原函数,我们首先要问:一个函数具备什么条件,能保证它的原函数一定存在? 这个问题将在下一章中讨论,这里先介绍一个结论.

原函数存在定理 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续,那么在区间 I 上存在可导函数 $F(x)$,使对任一 $x \in I$ 都有

$$F'(x) = f(x).$$

简单地说就是:连续函数一定有原函数.

下面还要说明两点:

第一,如果 $f(x)$ 在区间 I 上有原函数,即有一个函数 $F(x)$,使对任一 $x \in I$,都有 $F'(x) = f(x)$,那么,对任何常数 C ,显然也有

$$[F(x) + C]' = f(x),$$

即对任何常数 C ,函数 $F(x) + C$ 也是 $f(x)$ 的原函数.这说明,如果 $f(x)$ 有一个原

函数,那么 $f(x)$ 就有无限多个原函数.

第二,如果在区间 I 上 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,那么 $f(x)$ 的其他原函数与 $F(x)$ 有什么关系?

设 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的另一个原函数,即对任一 $x \in I$ 有

$$\Phi'(x) = f(x),$$

于是

$$[\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

在第三章第一节中已经知道,在一个区间上导数恒为零的函数必为常数,所以

$$\Phi(x) - F(x) = C_0 \quad (C_0 \text{ 为某个常数}).$$

这表明 $\Phi(x)$ 与 $F(x)$ 只差一个常数.因此,当 C 为任意的常数时,表达式

$$F(x) + C$$

就可表示 $f(x)$ 的任意一个原函数.

由以上两点说明,我们引进下述定义.

定义 2 在区间 I 上,函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数称为 $f(x)$ (或 $f(x)dx$) 在区间 I 上的不定积分,记作

$$\int f(x) dx.$$

其中记号 $\int$ 称为积分号, $f(x)$ 称为被积函数, $f(x)dx$ 称为被积表达式, x 称为积分变量.

由此定义及前面的说明可知,如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数,那么 $F(x) + C$ 就是 $f(x)$ 的不定积分,即

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

因而不定积分 $\int f(x) dx$ 可以表示 $f(x)$ 的任意一个原函数.

例 1 求 $\int x^2 dx$.

解 由于 $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$,所以 $\frac{x^3}{3}$ 是 x^2 的一个原函数.因此

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

例 2 求 $\int \frac{1}{x} dx$.

解 当 $x > 0$ 时,由于 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,所以 $\ln x$ 是 $\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内的一个原函数.因此,在 $(0, +\infty)$ 内,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C.$$

当 $x < 0$ 时, 由于 $[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$, 所以 $\ln(-x)$ 是 $\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 内的一个原函数. 因此, 在 $(-\infty, 0)$ 内,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C.$$

把在 $x > 0$ 及 $x < 0$ 内的结果合起来, 可写作

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

例 3 设曲线通过点 $(1, 2)$, 且其上任一点处的切线斜率等于这点横坐标的两倍, 求此曲线的方程.

解 设所求的曲线方程为 $y = f(x)$, 按题设, 曲线上任一点 (x, y) 处的切线斜率为

$$\frac{dy}{dx} = 2x,$$

即 $f(x)$ 是 $2x$ 的一个原函数.

因为 $\int 2x dx = x^2 + C$, 故必有某个常数 C 使 $f(x) = x^2 + C$, 即曲线方程为 $y = x^2 + C$. 因所求曲线通过点 $(1, 2)$, 故

$$2 = 1 + C, \quad C = 1.$$

于是所求曲线方程为

$$y = x^2 + 1.$$

函数 $f(x)$ 的原函数的图形称为 $f(x)$ 的积分曲线. 本例即是求函数 $2x$ 的通过点 $(1, 2)$ 的那条积分曲线. 显然, 这条积分曲线可以由另一条积分曲线 (例如 $y = x^2$) 经 y 轴方向平移而得 (图 4-1).

例 4 质点以初速度 v_0 铅直上抛, 不计阻力, 求它的运动规律.

解 所谓运动规律, 是指质点的位置关于时间 t 的函数关系. 为表示质点的位置, 取坐标系如下: 把质点所在的铅直线取作坐标轴, 指向朝上, 轴与地面的交点取作坐标原点. 设质点抛出时刻为 $t=0$, 当 $t=0$ 时质点所在位置的坐标为 x_0 , 在时刻 t 时坐标为 x (图 4-2), $x = x(t)$ 就是要求的函数.

按导数的物理意义知道,

$$\frac{dx}{dt} = v(t),$$

即为质点在时刻 t 时向上运动的速度 (如果 $v(t) < 0$, 那么运动方向实际朝下).

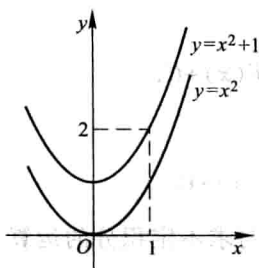


图 4-1

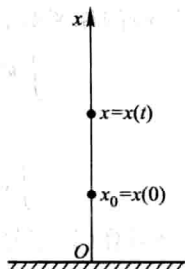


图 4-2

又知

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = a(t)$$

即为质点在时刻 t 时向上运动的加速度,按题意,有 $a(t) = -g$,即

$$\frac{dv}{dt} = -g \quad \text{或} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -g.$$

先求 $v(t)$. 由 $\frac{dv}{dt} = -g$, 即 $v(t)$ 是 $-g$ 的原函数,故

$$v(t) = \int (-g) dt = -gt + C_1,$$

由 $v(0) = v_0$, 得 $v_0 = C_1$, 于是

$$v(t) = -gt + v_0.$$

再求 $x(t)$. 由 $\frac{dx}{dt} = v(t)$, 即 $x(t)$ 是 $v(t)$ 的原函数,故

$$x(t) = \int v(t) dt = \int (-gt + v_0) dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + C_2,$$

由 $x(0) = x_0$, 得 $x_0 = C_2$, 于是所求运动规律为

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0, \quad t \in [0, T],$$

其中 T 表示质点落地的时刻.

从不定积分的定义,即可知下述关系:

由于 $\int f(x) dx$ 是 $f(x)$ 的原函数,所以

$$\frac{d}{dx} \left[\int f(x) dx \right] = f(x),$$

或

$$d \left[\int f(x) dx \right] = f(x) dx; \quad (1-1)$$

又由于 $F(x)$ 是 $F'(x)$ 的原函数, 所以

$$\int F'(x) dx = F(x) + C,$$

或记作

$$\int dF(x) = F(x) + C. \quad (1-2)$$

由此可见, 微分运算(以记号 d 表示)与求不定积分的运算(简称积分运算, 以记号 $\int$ 表示)是互逆的. 当记号 $\int$ 与 d 连在一起时, 或者抵消, 或者抵消后差一个常数.

二、基本积分表

既然积分运算是微分运算的逆运算, 那么很自然地可以从导数公式得到相应的积分公式.

例如, 因为 $\left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right)' = x^{\mu}$, 所以 $\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$ 是 x^{μ} 的一个原函数, 于是

$$\int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1).$$

类似地可以得到其他积分公式. 下面我们把一些基本的积分公式列成一个表, 这个表通常叫做基本积分表.

$$\textcircled{1} \int k dx = kx + C \quad (k \text{ 是常数}),$$

$$\textcircled{2} \int x^{\mu} dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1),$$

$$\textcircled{3} \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$\textcircled{4} \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C,$$

$$\textcircled{5} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$$

$$\textcircled{6} \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\textcircled{7} \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\textcircled{8} \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \tan x + C,$$

$$\textcircled{9} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C,$$

$$\textcircled{10} \int \sec x \tan x dx = \sec x + C,$$

$$\textcircled{11} \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C,$$

$$\textcircled{12} \int e^x dx = e^x + C,$$

$$\textcircled{13} \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

以上十三个基本积分公式是求不定积分的基础,必须熟记,下面举几个应用幂函数的积分公式②的例子.

例 5 求 $\int \frac{dx}{x^3}$.

解 $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$

例 6 求 $\int x^2 \sqrt{x} dx$.

解 $\int x^2 \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + C = \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x} + C.$

例 7 求 $\int \frac{dx}{x \sqrt[3]{x}}$.

解 $\int \frac{dx}{x \sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{4}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{4}{3}+1}}{-\frac{4}{3}+1} + C = -3x^{-\frac{1}{3}} + C = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + C.$

上面三个例子表明,有时被积函数实际是幂函数,但用分式或根式表示.遇此情形,应先把它化为 x^μ 的形式,然后应用幂函数的积分公式②来求不定积分.

三、不定积分的性质

根据不定积分的定义,可以推得它有如下两个性质:

性质 1 设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的原函数存在,则

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx. \quad (1-3)$$

证 将(1-3)式右端求导,得

$$\begin{aligned}\left[\int f(x) dx + \int g(x) dx\right]' &= \left[\int f(x) dx\right]' + \left[\int g(x) dx\right]' \\ &= f(x) + g(x).\end{aligned}$$

这表示, (1-3) 式右端是 $f(x) + g(x)$ 的原函数, 又 (1-3) 式右端有两个积分记号, 形式上含两个任意常数, 由于任意常数之和仍为任意常数, 故实际上含一个任意常数, 因此 (1-3) 式右端是 $f(x) + g(x)$ 的不定积分.

性质 1 对于有限个函数都是成立的.

类似地可以证明不定积分的第二个性.

性质 2 设函数 $f(x)$ 的原函数存在, k 为非零常数, 则

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx.$$

利用基本积分表以及不定积分的这两个性质, 可以求出一些简单函数的不定积分.

例 8 求 $\int \sqrt{x}(x^2-5) dx$.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \sqrt{x}(x^2-5) dx &= \int (x^{\frac{5}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}}) dx = \int x^{\frac{5}{2}} dx - \int 5x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \int x^{\frac{5}{2}} dx - 5 \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - 5 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x} - \frac{10}{3} x \sqrt{x} + C.\end{aligned}$$

注意 检验积分结果是否正确, 只要对结果求导, 看它的导数是否等于被积函数, 相等时结果是正确的, 否则结果是错误的. 如就例 8 的结果来看, 由于

$$\left(\frac{2}{7} x^3 \sqrt{x} - \frac{10}{3} x \sqrt{x} + C\right)' = \left(\frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - \frac{10}{3} x^{\frac{3}{2}} + C\right)' = x^{\frac{5}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}(x^2-5),$$

所以结果是正确的.

例 9 求 $\int \frac{(x-1)^3}{x^2} dx$.

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \frac{(x-1)^3}{x^2} dx &= \int \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2} dx \\ &= \int \left(x - 3 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= \int x dx - 3 \int dx + 3 \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} \\ &= \frac{x^2}{2} - 3x + 3 \ln |x| + \frac{1}{x} + C.\end{aligned}$$

例 10 求 $\int (e^x - 3\cos x) dx$.

解 $\int (e^x - 3\cos x) dx = \int e^x dx - 3 \int \cos x dx = e^x - 3\sin x + C$.

例 11 求 $\int 2^x e^x dx$.

解 因为

$$2^x e^x = (2e)^x,$$

所以可把 $2e$ 看作 a , 并利用积分公式⑬, 便得

$$\int 2^x e^x dx = \int (2e)^x dx = \frac{(2e)^x}{\ln(2e)} + C = \frac{2^x e^x}{1 + \ln 2} + C.$$

例 12 求 $\int \tan^2 x dx$.

解 基本积分表中没有这种类型的积分, 先利用三角恒等式化成表中所列类型的积分, 然后再逐项求积分.

$$\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \int \sec^2 x dx - \int dx = \tan x - x + C.$$

例 13 求 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$.

解 基本积分表中也没有这种类型的积分, 同上例一样, 可以先利用三角恒等式变形, 然后再逐项求积分.

$$\begin{aligned} \int \sin^2 \frac{x}{2} dx &= \int \frac{1}{2} (1 - \cos x) dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int dx - \int \cos x dx \right) = \frac{1}{2} (x - \sin x) + C. \end{aligned}$$

例 14 求 $\int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} dx$.

解 同上例一样, 先利用三角恒等式变形, 然后再求积分.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} dx &= \int \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{2}\right)^2} dx \\ &= 4 \int \csc^2 x dx = -4 \cot x + C. \end{aligned}$$

例 15 求 $\int \frac{2x^4 + x^2 + 3}{x^2 + 1} dx$.

解 被积函数的分子和分母都是多项式, 通过多项式的除法, 可以把它化成基本积分表中所列类型的积分, 然后再逐项求积分.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2x^4 + x^2 + 3}{x^2 + 1} dx &= \int \left(2x^2 - 1 + \frac{4}{x^2 + 1} \right) dx \\
 &= 2 \int x^2 dx - \int 1 dx + 4 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \\
 &= \frac{2}{3} x^3 - x + 4 \arctan x + C.
 \end{aligned}$$

习 题 4-1

1. 利用求导运算验证下列等式:

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C;$$

$$(2) \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C;$$

$$(3) \int \frac{2x}{(x^2 + 1)(x + 1)^2} dx = \arctan x + \frac{1}{x+1} + C;$$

$$(4) \int \sec x dx = \ln |\tan x + \sec x| + C;$$

$$(5) \int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C;$$

$$(6) \int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

2. 求下列不定积分:

$$(1) \int \frac{dx}{x^2}; \quad (2) \int x\sqrt{x} dx;$$

$$(3) \int \frac{dx}{\sqrt{x}}; \quad (4) \int x^2 \sqrt{x} dx;$$

$$(5) \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x}}; \quad (6) \int \sqrt[n]{x^n} dx;$$

$$(7) \int 5x^3 dx; \quad (8) \int (x^2 - 3x + 2) dx;$$

$$(9) \int \frac{dh}{\sqrt{2gh}} \quad (g \text{ 是常数}); \quad (10) \int (x^2 + 1)^2 dx;$$

$$(11) \int (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x^3} - 1) dx; \quad (12) \int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} dx;$$

$$(13) \int \left(2e^x + \frac{3}{x} \right) dx; \quad (14) \int \left(\frac{3}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx;$$

$$(15) \int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \right) dx; \quad (16) \int 3^x e^x dx;$$

(17) $\int \frac{2 \cdot 3^x - 5 \cdot 2^x}{3^x} dx;$

(18) $\int \sec x (\sec x - \tan x) dx;$

(19) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx;$

(20) $\int \frac{dx}{1 + \cos 2x};$

(21) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx;$

(22) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx;$

(23) $\int \cot^2 x dx;$

(24) $\int \cos \theta (\tan \theta + \sec \theta) d\theta;$

(25) $\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx;$

(26) $\int \frac{3x^4 + 2x^2}{x^2 + 1} dx.$

3. 含有未知函数的导数的方程称为微分方程, 例如方程 $\frac{dy}{dx} = f(x)$, 其中 $\frac{dy}{dx}$ 为未知函数的导数, $f(x)$ 为已知函数. 如果将函数 $y = \varphi(x)$ 代入微分方程, 使微分方程成为恒等式, 那么函数 $y = \varphi(x)$ 就称为该微分方程的解. 求下列微分方程满足所给条件的解:

(1) $\frac{dy}{dx} = (x-2)^2, \quad y|_{x=2} = 0;$

(2) $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2}{t^3}, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=1} = 1, x|_{t=1} = 1.$

4. 汽车以 20 m/s 的速度在直道上行驶, 刹车后匀减速行驶了 50 m 停住, 求刹车加速度. 可执行下列步骤:

(1) 求微分方程 $\frac{d^2s}{dt^2} = -k$ 满足条件 $\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0} = 20$ 及 $s|_{t=0} = 0$ 的解;

(2) 求使 $\frac{ds}{dt} = 0$ 的 t 值及相应的 s 值;

(3) 求使 $s = 50$ 的 k 值.

5. 一曲线通过点 $(e^2, 3)$, 且在任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数, 求该曲线的方程.

6. 一物体由静止开始运动, 经 t s 后的速度是 $3t^2$ m/s, 问

(1) 在 3 s 后物体离开出发点的距离是多少?

(2) 物体走完 360 m 需要多少时间?

7. 证明函数 $\arcsin(2x-1)$, $\arccos(1-2x)$ 和 $2\arctan \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ 都是 $\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 的原函数.

第二节 换元积分法

利用基本积分表与积分的性质, 所能计算的不定积分是非常有限的. 因此, 有必要进一步来研究不定积分的求法. 本节把复合函数的微分法反过来用于求不定积分, 利用中间变量的代换, 得到复合函数的积分法, 称为换元积分法, 简称换元法. 换元法通常分成两类, 下面先讲第一类换元法.

一、第一类换元法

设 $f(u)$ 具有原函数 $F(u)$, 即

$$F'(u) = f(u), \quad \int f(u) du = F(u) + C.$$

如果 u 是中间变量: $u = \varphi(x)$, 且设 $\varphi(x)$ 可微, 那么, 根据复合函数微分法, 有

$$dF[\varphi(x)] = f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx,$$

从而根据不定积分的定义就得

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = F[\varphi(x)] + C = \left[\int f(u) du \right]_{u=\varphi(x)}.$$

于是有下述定理:

定理 1 设 $f(u)$ 具有原函数, $u = \varphi(x)$ 可导, 则有换元公式

$$\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \left[\int f(u) du \right]_{u=\varphi(x)}. \quad (2-1)$$

由此定理可见, 虽然 $\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx$ 是一个整体的记号, 但从形式上看, 被积表达式中的 dx 也可当作变量 x 的微分来对待, 从而微分等式 $\varphi'(x) dx = du$ 可以方便地应用到被积表达式中来, 我们在上节第一目中已经这样用了, 那里把积分 $\int F'(x) dx$ 记作 $\int dF(x)$, 就是按微分 $F'(x) dx = dF(x)$, 把被积表达式 $F'(x) dx$ 记作 $dF(x)$.

如何应用公式(2-1)来求不定积分? 设要求 $\int g(x) dx$, 如果函数 $g(x)$ 可以化为 $g(x) = f[\varphi(x)] \varphi'(x)$ 的形式, 那么

$$\int g(x) dx = \int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \left[\int f(u) du \right]_{u=\varphi(x)},$$

这样, 函数 $g(x)$ 的积分即转化为函数 $f(u)$ 的积分. 如果能求得 $f(u)$ 的原函数, 那么也就得到了 $g(x)$ 的原函数.

例 1 求 $\int 2 \cos 2x dx$.

解 被积函数中, $\cos 2x$ 是一个由 $\cos 2x = \cos u$, $u = 2x$ 复合而成的复合函数, 常数因子恰好是中间变量 u 的导数. 因此, 作变换 $u = 2x$, 便有

$$\begin{aligned} \int 2 \cos 2x dx &= \int \cos 2x \cdot 2 dx = \int \cos 2x \cdot (2x)' dx \\ &= \int \cos u du = \sin u + C, \end{aligned}$$

再以 $u=2x$ 代入, 即得

$$\int 2\cos 2x dx = \sin 2x + C.$$

例 2 求 $\int \frac{1}{3+2x} dx$.

解 被积函数 $\frac{1}{3+2x} = \frac{1}{u}$, $u=3+2x$. 这里缺少 $\frac{du}{dx}=2$ 这样一个因子, 但由于 $\frac{du}{dx}$ 是个常数, 故可改变系数凑出这个因子:

$$\frac{1}{3+2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3+2x} \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3+2x} (3+2x)',$$

从而令 $u=3+2x$, 便有

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3+2x} dx &= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3+2x} (3+2x)' dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u} du \\ &= \frac{1}{2} \ln |u| + C = \frac{1}{2} \ln |3+2x| + C. \end{aligned}$$

一般地, 对于积分 $\int f(ax+b) dx$ ($a \neq 0$), 总可作变换 $u=ax+b$, 把它化为

$$\int f(ax+b) dx = \int \frac{1}{a} f(ax+b) d(ax+b) = \frac{1}{a} \left[\int f(u) du \right]_{u=ax+b}.$$

例 3 求 $\int \frac{x^2}{(x+2)^3} dx$.

解 令 $u=x+2$, 则 $x=u-2$, $dx=du$. 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x+2)^3} dx &= \int \frac{(u-2)^2}{u^3} du = \int (u^2 - 4u + 4) u^{-3} du \\ &= \int (u^{-1} - 4u^{-2} + 4u^{-3}) du \\ &= \ln |u| + 4u^{-1} - 2u^{-2} + C \\ &= \ln |x+2| + \frac{4}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2} + C. \end{aligned}$$

例 4 求 $\int 2xe^{x^2} dx$.

解 被积函数中的一个因子为 $e^{x^2} = e^u$, $u=x^2$, 剩下的因子 $2x$ 恰好是中间变量 $u=x^2$ 的导数, 于是有

$$\int 2xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} d(x^2) = \int e^u du = e^u + C = e^{x^2} + C.$$

例 5 求 $\int x\sqrt{1-x^2} dx$.

解 设 $u=1-x^2$, 则 $du=-2xdx$, 即 $-\frac{1}{2}du=xdx$, 因此,

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1-x^2}dx &= \int u^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)du = -\frac{1}{2} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C \\ &= -\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.\end{aligned}$$

在对变量代换比较熟练以后,就不一定写出中间变量 u .

例 6 求 $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$ ($a \neq 0$).

$$\begin{aligned}\text{解 } \int \frac{1}{a^2+x^2}dx &= \int \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}d\frac{x}{a} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.\end{aligned}$$

在上例中,我们实际上已经用了变量代换 $u=\frac{x}{a}$,并在求出积分 $\frac{1}{a} \int \frac{1}{1+u^2}du$ 之后,代回了原积分变量 x ,只是没有把这些步骤写出来而已.

例 7 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ ($a>0$).

$$\text{解 } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{1}{a} \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

例 8 求 $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx$ ($a \neq 0$).

解 由于

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right),$$

所以

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-a^2}dx &= \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx \\ &= \frac{1}{2a} \left(\int \frac{1}{x-a} dx - \int \frac{1}{x+a} dx \right) \\ &= \frac{1}{2a} \left[\int \frac{1}{x-a} d(x-a) - \int \frac{1}{x+a} d(x+a) \right]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2a} (\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

例9 求 $\int \frac{dx}{x(1+2\ln x)}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{x(1+2\ln x)} &= \int \frac{d(\ln x)}{1+2\ln x} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(1+2\ln x)}{1+2\ln x} = \frac{1}{2} \ln|1+2\ln x| + C. \end{aligned}$$

例10 求 $\int \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

解 由于 $d\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$, 因此,

$$\int \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int e^{\sqrt[3]{x}} d\sqrt{x} = \frac{2}{3} \int e^{\sqrt[3]{x}} d(3\sqrt{x}) = \frac{2}{3} e^{\sqrt[3]{x}} + C.$$

下面再举一些积分的例子, 它们的被积函数中含有三角函数, 在计算这种积分的过程中, 往往要用到一些三角恒等式.

例11 求 $\int \sin^3 x dx$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \sin^3 x dx &= \int \sin^2 x \sin x dx = - \int (1 - \cos^2 x) d(\cos x) \\ &= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C. \end{aligned}$$

例12 求 $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \sin^2 x \cos^5 x dx &= \int \sin^2 x \cos^4 x \cos x dx \\ &= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) \\ &= \int (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x) d(\sin x) \\ &= \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x + C. \end{aligned}$$

一般地, 对于 $\sin^{2k+1} x \cos^n x$ 或 $\sin^n x \cos^{2k+1} x$ (其中 $k \in \mathbf{N}$) 型函数的积分, 总可依次作变换 $u = \cos x$ 或 $u = \sin x$, 求得结果.

例13 求 $\int \tan x dx$.

$$\text{解} \quad \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{1}{\cos x} d(\cos x) = -\ln|\cos x| + C.$$

类似地可得

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + C.$$

例 14 求 $\int \cos^2 x dx$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \cos^2 x dx &= \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\int dx + \int \cos 2x dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{4} \int \cos 2x d(2x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C. \end{aligned}$$

例 15 求 $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)^2 dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x) dx \\ &= \frac{1}{8} \int (\cos 2x - \cos^3 2x) dx + \frac{1}{8} \int (1 - \cos^2 2x) dx \\ &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cdot \frac{1}{2} d(\sin 2x) + \frac{1}{8} \int \frac{1}{2} (1 - \cos 4x) dx \\ &= \frac{1}{48} \sin^3 2x + \frac{x}{16} - \frac{1}{64} \sin 4x + C. \end{aligned}$$

一般地, 对于 $\sin^{2k} x \cos^{2l} x$ ($k, l \in \mathbf{N}$) 型函数, 总可利用三角恒等式: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ 化成 $\cos 2x$ 的多项式, 然后采用例 15 中所用的方法求得积分的结果.

例 16 求 $\int \sec^6 x dx$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \sec^6 x dx &= \int (\sec^2 x)^2 \sec^2 x dx = \int (1 + \tan^2 x)^2 d(\tan x) \\ &= \int (1 + 2\tan^2 x + \tan^4 x) d(\tan x) \\ &= \tan x + \frac{2}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x + C. \end{aligned}$$

例 17 求 $\int \tan^5 x \sec^3 x dx$.

$$\text{解} \quad \int \tan^5 x \sec^3 x dx = \int \tan^4 x \sec^2 x \sec x \tan x dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x d(\sec x) \\
 &= \int (\sec^6 x - 2\sec^4 x + \sec^2 x) d(\sec x) \\
 &= \frac{1}{7} \sec^7 x - \frac{2}{5} \sec^5 x + \frac{1}{3} \sec^3 x + C.
 \end{aligned}$$

一般地, 对于 $\tan^n x \sec^{2k} x$ 或 $\tan^{2k-1} x \sec^n x$ ($n, k \in \mathbf{N}_+$) 型函数的积分, 可依次作变换 $u = \tan x$ 或 $u = \sec x$, 求得结果.

例 18 求 $\int \csc x dx$.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \csc x dx &= \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \\
 &= \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\tan \frac{x}{2}\right)}{\tan \frac{x}{2}} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.
 \end{aligned}$$

因为

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \csc x - \cot x,$$

所以上述不定积分又可表为

$$\int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C.$$

例 19 求 $\int \sec x dx$.

解 利用上例的结果, 有

$$\begin{aligned}
 \int \sec x dx &= \int \csc \left(x + \frac{\pi}{2} \right) d\left(x + \frac{\pi}{2} \right) \\
 &= \ln \left| \csc \left(x + \frac{\pi}{2} \right) - \cot \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right| + C \\
 &= \ln |\sec x + \tan x| + C.
 \end{aligned}$$

例 20 求 $\int \cos 3x \cos 2x dx$.

解 利用三角函数的积化和差公式

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

得

$$\cos 3x \cos 2x = \frac{1}{2} (\cos x + \cos 5x),$$

于是

$$\begin{aligned} \int \cos 3x \cos 2x dx &= \frac{1}{2} \int (\cos x + \cos 5x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int \cos x dx + \frac{1}{5} \int \cos 5x d(5x) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{10} \sin 5x + C. \end{aligned}$$

上面所举的例子,可以使我们认识到公式(2-1)在求不定积分中所起的作用.像复合函数的求导法则在微分学中一样,公式(2-1)在积分学中也是经常使用的.但利用公式(2-1)来求不定积分,一般却比利用复合函数的求导法则求函数的导数要来得困难,因为其中需要一定的技巧,而且如何适当地选择变量代换 $u = \varphi(x)$ 没有一般规律可循,因此要掌握换元法,除了熟悉一些典型的例子外,还要做较多的练习才行.

上述各例用的都是第一类换元法,即形如 $u = \varphi(x)$ 的变量代换.下面介绍另一种形式的变量代换 $x = \psi(t)$,即所谓第二类换元法.

二、第二类换元法

上面介绍的第一类换元法是通过变量代换 $u = \varphi(x)$,将积分 $\int f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) dx$ 化为积分 $\int f(u) du$.

下面将介绍的第二类换元法是:适当地选择变量代换 $x = \psi(t)$,将积分 $\int f(x) dx$ 化为积分 $\int f[\psi(t)] \psi'(t) dt$.这是另一种形式的变量代换,换元公式可表达为

$$\int f(x) dx = \int f[\psi(t)] \psi'(t) dt.$$

这公式的成立是需要一定条件的.首先,等式右边的不定积分要存在,即 $f[\psi(t)] \psi'(t)$ 有原函数;其次, $\int f[\psi(t)] \psi'(t) dt$ 求出后必须用 $x = \psi(t)$ 的反函数 $t = \psi^{-1}(x)$ 代回去,为了保证这反函数存在而且是可导的,我们假定直接函数 $x = \psi(t)$ 在 t 的某一个区间(这区间和所考虑的 x 的积分区间相对应)上是单调的、可导的,并且 $\psi'(t) \neq 0$.

归纳上述,我们给出下面的定理:

定理 2 设 $x=\psi(t)$ 是单调的可导函数,并且 $\psi'(t) \neq 0$. 又设 $f[\psi(t)]\psi'(t)$ 具有原函数,则有换元公式

$$\int f(x) dx = \left[\int f[\psi(t)]\psi'(t) dt \right]_{t=\psi^{-1}(x)}, \quad (2-2)$$

其中 $\psi^{-1}(x)$ 是 $x=\psi(t)$ 的反函数.

证 设 $f[\psi(t)]\psi'(t)$ 的原函数为 $\Phi(t)$, 记 $\Phi[\psi^{-1}(x)] = F(x)$, 利用复合函数及反函数的求导法则, 得到

$$F'(x) = \frac{d\Phi}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = f[\psi(t)]\psi'(t) \cdot \frac{1}{\psi'(t)} = f[\psi(t)] = f(x),$$

即 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数. 所以有

$$\int f(x) dx = F(x) + C = \Phi[\psi^{-1}(x)] + C = \left[\int f[\psi(t)]\psi'(t) dt \right]_{t=\psi^{-1}(x)},$$

这就证明了公式(2-2).

下面举例说明换元公式(2-2)的应用.

例 21 求 $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0)$.

解 求这个积分的困难在于有根式 $\sqrt{a^2 - x^2}$, 但我们可以利用三角公式

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

来化去根式.

设 $x = a \sin t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 则 $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a \cos t, dx = a \cos t dt$, 于是根式化成了三角式, 所求积分化为

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int a \cos t \cdot a \cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt.$$

利用例 14 的结果得

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) + C = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{2} \sin t \cos t + C.$$

由于 $x = a \sin t, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 所以

$$t = \arcsin \frac{x}{a},$$

$$\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a},$$

于是所求积分为

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

例 22 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} \quad (a>0)$.

解 和上例类似,可以利用三角公式

$$1+\tan^2 t = \sec^2 t$$

来化去根式.

设 $x = a \tan t \quad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$, 则

$$\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2 \tan^2 t + a^2} = a \sqrt{\tan^2 t + 1} = a \sec t, \quad dx = a \sec^2 t dt,$$

于是

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{a \sec^2 t}{a \sec t} dt = \int \sec t dt.$$

利用例 19 的结果得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln |\sec t + \tan t| + C.$$

为了要把 $\sec t$ 及 $\tan t$ 换成 x 的函数,可以根据 $\tan t = \frac{x}{a}$ 作辅助三角形(图 4-3),便有

$$\sec t = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a},$$

且 $\sec t + \tan t > 0$, 因此,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} &= \ln \left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a} \right) + C \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C_1, \end{aligned}$$

其中 $C_1 = C - \ln a$.

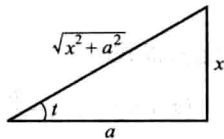


图 4-3

例 23 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad (a>0)$.

解 和以上两例类似,可以利用公式

$$\sec^2 t - 1 = \tan^2 t$$

来化去根式. 注意到被积函数的定义域是 $x>a$ 和 $x<-a$ 两个区间,我们在两个区间内分别求不定积分.

当 $x>a$ 时,设 $x = a \sec t \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$, 则

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-a^2} &= \sqrt{a^2 \sec^2 t - a^2} = a \sqrt{\sec^2 t - 1} = a \tan t, \\ dx &= a \sec t \tan t dt, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} &= \int \frac{a \sec t \tan t}{a \tan t} dt = \int \sec t dt \\ &= \ln(\sec t + \tan t) + C.\end{aligned}$$

为了把 $\sec t$ 及 $\tan t$ 换成 x 的函数, 我们根据

$\sec t = \frac{x}{a}$ 作辅助三角形(图4-4), 得到

$$\tan t = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a},$$

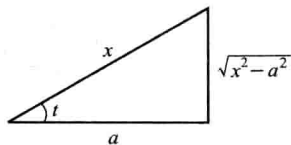


图 4-4

因此

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} &= \ln \left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a} \right) + C \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2-a^2}) + C_1,\end{aligned}$$

其中 $C_1 = C - \ln a$.

当 $x < -a$ 时, 令 $x = -u$, 那么 $u > a$. 由上段结果, 有

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} &= - \int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = -\ln(u + \sqrt{u^2-a^2}) + C \\ &= -\ln(-x + \sqrt{x^2-a^2}) + C = \ln \frac{-x - \sqrt{x^2-a^2}}{a^2} + C \\ &= \ln(-x - \sqrt{x^2-a^2}) + C_1,\end{aligned}$$

其中 $C_1 = C - 2\ln a$.

把在 $x > a$ 及 $x < -a$ 内的结果合起来, 可写作

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C.$$

从上面的三个例子可以看出: 如果被积函数含有 $\sqrt{a^2-x^2}$, 可以作代换 $x = a \sin t$ 化去根式; 如果被积函数含有 $\sqrt{x^2+a^2}$, 可以作代换 $x = a \tan t$ 化去根式; 如果被积函数含有 $\sqrt{x^2-a^2}$, 可以作代换 $x = \pm a \sec t$ 化去根式. 但具体解题时要分析被积函数的具体情况, 选取尽可能简捷的代换, 不要拘泥于上述的变量代换(如例5、例7).

当被积函数含有 $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ 时, 为了化去根式, 除采用三角代换 $x = a \tan t$ 或 $x = \pm a \sec t$ 外, 还可利用公式

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1,$$

采用双曲代换 $x = a \operatorname{sh} t, x = \pm a \operatorname{ch} t$ 来化去根式.

例如, 在例 22 中, 可设 $x = a \operatorname{sh} t$, 则

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 t + a^2} = a \operatorname{ch} t, \quad dx = a \operatorname{ch} t dt,$$

于是

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} &= \int \frac{a \operatorname{ch} t}{a \operatorname{ch} t} dt = \int dt = t + C \\ &= \operatorname{arsh} \frac{x}{a} + C = \ln \left[\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} \right] + C \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C_1, \end{aligned}$$

其中 $C_1 = C - \ln a$.

在例 23 中, 当 $x > a$ 时, 可设 $x = a \operatorname{ch} t$ ($t > 0$), 则

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - a^2} &= \sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 t - a^2} = a \operatorname{sh} t, \\ dx &= a \operatorname{sh} t dt, \end{aligned}$$

于是当 $x > a$ 时,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \int \frac{a \operatorname{sh} t}{a \operatorname{sh} t} dt = \int dt = t + C = \operatorname{arch} \frac{x}{a} + C \\ &= \ln \left[\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} \right] + C = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C_1, \end{aligned}$$

其中 $C_1 = C - \ln a$.

当 $x < -a$ 时, 令 $x = -a \operatorname{ch} t$ ($t > 0$), 类似可得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln(-x - \sqrt{x^2 - a^2}) + C_1.$$

上节所列基本积分表中没有双曲函数的积分公式, 现添加两个常用的双曲函数积分公式:

$$\textcircled{14} \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C,$$

$$\textcircled{15} \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

下面我们通过例子来介绍一种也很有用的代换——倒代换, 利用它常可消去被积函数的分母中的变量因子 x .

例 24 求 $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4} dx$ ($a \neq 0$).

解 设 $x = \frac{1}{t}$, 则 $dx = -\frac{dt}{t^2}$, 于是

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4} dx = \int \frac{\sqrt{a^2-\frac{1}{t^2}} \cdot \left(-\frac{dt}{t^2}\right)}{\frac{1}{t^4}} = - \int (a^2 t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} |t| dt,$$

当 $x > 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4} dx &= -\frac{1}{2a^2} \int (a^2 t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} d(a^2 t^2 - 1) \\ &= -\frac{(a^2 t^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} a^2} + C = -\frac{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2 x^3} + C, \end{aligned}$$

当 $x < 0$ 时, 有相同的结果.

在本节的例题中, 有几个积分是以后经常会遇到的, 所以它们通常也被当作公式使用. 这样, 常用的积分公式, 除了基本积分表中的几个外, 再添加下面几个 (其中常数 $a > 0$):

$$\textcircled{16} \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C,$$

$$\textcircled{17} \int \cot x dx = \ln |\sin x| + C,$$

$$\textcircled{18} \int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C,$$

$$\textcircled{19} \int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C,$$

$$\textcircled{20} \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C,$$

$$\textcircled{21} \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C,$$

$$\textcircled{22} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,$$

$$\textcircled{23} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C,$$

$$\textcircled{24} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C.$$

例 25 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 9}}$.

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 9}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x)^2 + 3^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x)}{\sqrt{(2x)^2 + 3^2}},$

利用公式②③, 使得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}} = \frac{1}{2} \ln(2x + \sqrt{4x^2+9}) + C.$$

例 26 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$.

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}} = \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}},$$

利用公式②, 使得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}} = \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C.$$

在例 22 中, 我们用变换 $x = a \tan t$ 消去被积函数中的根式 $\sqrt{x^2+a^2}$, 这个变换还能消去被积函数分母中的 (x^2+a^2) 的高次幂. 请看下例.

例 27 求 $\int \frac{x^3}{(x^2-2x+2)^2} dx$.

解 分母是二次质因式的平方, 把二次质因式配方成 $(x-1)^2+1$, 令 $x-1 = \tan t$ $\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$, 则

$$x^2-2x+2 = \sec^2 t, \quad dx = \sec^2 t dt.$$

于是

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^3}{(x^2-2x+2)^2} dx \\ &= \int \frac{(\tan t + 1)^3}{\sec^4 t} \cdot \sec^2 t dt \\ &= \int (\sin^3 t \cos^{-1} t + 3 \sin^2 t + 3 \sin t \cos t + \cos^2 t) dt \\ &= \int (\sin^2 t \cos^{-1} t + 3 \cos t) \sin t dt + \int (3 \sin^2 t + \cos^2 t) dt \\ &= \int [(1 - \cos^2 t) \cos^{-1} t + 3 \cos t] [-d(\cos t)] + \int (2 - \cos 2t) dt \\ &= -\int (\cos^{-1} t + 2 \cos t) d(\cos t) + 2t - \frac{1}{2} \sin 2t \\ &= -\ln \cos t - \cos^2 t + 2t - \sin t \cos t + C, \end{aligned}$$

按 $\tan t = x-1$ 作辅助三角形 (图 4-5), 便有

$$\cos t = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}, \quad \sin t = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}},$$

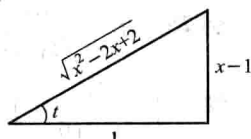


图 4-5

于是

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^3}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 2) + 2 \arctan(x - 1) - \frac{x}{x^2 - 2x + 2} + C. \end{aligned}$$

习 题 4-2

1. 在下列各式等号右端的横线处填入适当的系数,使等式成立(例如: $dx = \frac{1}{4} d(4x+7)$):

(1) $dx = \underline{\hspace{1cm}} d(ax)$;

(2) $dx = \underline{\hspace{1cm}} d(7x-3)$;

(3) $x dx = \underline{\hspace{1cm}} d(x^2)$;

(4) $x dx = \underline{\hspace{1cm}} d(5x^2)$;

(5) $x dx = \underline{\hspace{1cm}} d(1-x^2)$;

(6) $x^3 dx = \underline{\hspace{1cm}} d(3x^4-2)$;

(7) $e^{2x} dx = \underline{\hspace{1cm}} d(e^{2x})$;

(8) $e^{-\frac{x}{2}} dx = \underline{\hspace{1cm}} d(1+e^{-\frac{x}{2}})$;

(9) $\sin \frac{3}{2} x dx = \underline{\hspace{1cm}} d\left(\cos \frac{3}{2} x\right)$;

(10) $\frac{dx}{x} = \underline{\hspace{1cm}} d(5 \ln |x|)$;

(11) $\frac{dx}{x} = \underline{\hspace{1cm}} d(3-5 \ln |x|)$;

(12) $\frac{dx}{1+9x^2} = \underline{\hspace{1cm}} d(\arctan 3x)$;

(13) $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \underline{\hspace{1cm}} d(1-\arcsin x)$;

(14) $\frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \underline{\hspace{1cm}} d(\sqrt{1-x^2})$.

2. 求下列不定积分(其中 a, b, ω, φ 均为常数):

(1) $\int e^{5t} dt$;

(2) $\int (3-2x)^3 dx$;

(3) $\int \frac{dx}{1-2x}$;

(4) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$;

(5) $\int (\sin ax - e^{\frac{x}{b}}) dx$;

(6) $\int \frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt$;

(7) $\int x e^{-x^2} dx$;

(8) $\int x \cos(x^2) dx$;

(9) $\int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}} dx$;

(10) $\int \frac{3x^3}{1-x^4} dx$;

(11) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5} dx$;

(12) $\int \cos^2(\omega t + \varphi) \sin(\omega t + \varphi) dt$;

(13) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$;

(14) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin x - \cos x}} dx$;

(15) $\int \tan^{10} x \cdot \sec^2 x dx$;

(16) $\int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x}$;

(17) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}$;

(18) $\int \frac{10^{2 \arccos x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

$$(19) \int \tan \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}; \quad (20) \int \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx;$$

$$(21) \int \frac{1+\ln x}{(x \ln x)^2} dx; \quad (22) \int \frac{dx}{\sin x \cos x};$$

$$(23) \int \frac{\ln \tan x}{\cos x \sin x} dx; \quad (24) \int \cos^3 x dx$$

$$(25) \int \cos^2(\omega t + \varphi) dt; \quad (26) \int \sin 2x \cos 3x dx;$$

$$(27) \int \cos x \cos \frac{x}{2} dx; \quad (28) \int \sin 5x \sin 7x dx;$$

$$(29) \int \tan^3 x \sec x dx; \quad (30) \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}};$$

$$(31) \int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}} dx; \quad (32) \int \frac{x^3}{9+x^2} dx;$$

$$(33) \int \frac{dx}{2x^2-1}; \quad (34) \int \frac{dx}{(x+1)(x-2)};$$

$$(35) \int \frac{x}{x^2-x-2} dx; \quad (36) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a>0);$$

$$(37) \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}; \quad (38) \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}};$$

$$(39) \int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx; \quad (40) \int \frac{dx}{1+\sqrt{2x}};$$

$$(41) \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}; \quad (42) \int \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}};$$

$$(43) \int \frac{x-1}{x^2+2x+3} dx; \quad (44) \int \frac{x^3+1}{(x^2+1)^2} dx.$$

第三节 分部积分法

前面我们在复合函数求导法则的基础上,得到了换元积分法.现在我们利用两个函数乘积的求导法则,来推得另一个求积分的基本方法——分部积分法.

设函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 具有连续导数,则两个函数乘积的导数公式为

$$(uv)' = u'v + uv',$$

移项,得

$$uv' = (uv)' - u'v.$$

对这个等式两边求不定积分,得

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx. \quad (3-1)$$

公式(3-1)称为分部积分公式. 如果求 $\int uv' dx$ 有困难, 而求 $\int u' v dx$ 比较容易时, 分部积分公式就可以发挥作用了.

为简便起见, 也可把公式(3-1)写成下面的形式:

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (3-2)$$

现在通过例子说明如何运用这个重要公式.

例 1 求 $\int x \cos x dx$.

解 这个积分用换元积分法不易求得结果, 现在试用分部积分法来求它. 但是怎样选取 u 和 dv 呢? 如果设 $u = x, dv = \cos x dx$, 则 $du = dx, v = \sin x$, 代入分部积分公式(3-2), 得

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx,$$

而 $\int v du = \int \sin x dx$ 容易积出, 所以

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

求这个积分时, 如果设 $u = \cos x, dv = x dx$, 则

$$du = -\sin x dx, v = \frac{x^2}{2}.$$

于是

$$\int x \cos x dx = \frac{x^2}{2} \cos x + \int \frac{x^2}{2} \sin x dx.$$

上式右端的积分比原积分更不容易求出.

由此可见, 如果 u 和 dv 选取不当, 就求不出结果, 所以应用分部积分法时, 恰当选取 u 和 dv 是一个关键. 选取 u 和 dv 一般要考虑下面两点:

(1) v 要容易求得;

(2) $\int v du$ 要比 $\int u dv$ 容易积出.

例 2 求 $\int x e^x dx$.

解 设 $u = x, dv = e^x dx$, 则 $du = dx, v = e^x$. 于是

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = e^x (x - 1) + C.$$

运用分部积分公式(3-2)的形式, 例 1、例 2 的求解过程也可表述为

$$\int x \cos x dx = \int x d(\sin x) = x \sin x - \int \sin x dx$$

$$= x \sin x + \cos x + C.$$

$$\begin{aligned}\int x e^x dx &= \int x d(e^x) = x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x + C = (x-1) e^x + C.\end{aligned}$$

例3 求 $\int x^2 e^x dx$.

解 设 $u = x^2$, $dv = e^x dx = d(e^x)$, 则

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 d(e^x) = x^2 e^x - \int e^x d(x^2) = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$$

这里 $\int x e^x dx$ 比 $\int x^2 e^x dx$ 容易积出, 因为被积函数中 x 的幂次前者比后者降低了一次. 由例2可知, 对 $\int x e^x dx$ 再使用一次分部积分法就可以了. 于是

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x d(e^x) \\ &= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.\end{aligned}$$

总结上面三个例子可以知道, 如果被积函数是幂函数和正(余)弦函数或幂函数和指数函数的乘积, 就可以考虑用分部积分法, 并设幂函数为 u . 这样用一次分部积分法就可以使幂函数的幂次降低一次. 这里假定幂指数是正整数.

例4 求 $\int x \ln x dx$.

解 设 $u = \ln x$, $dv = x dx$, 则

$$\begin{aligned}\int x \ln x dx &= \int \ln x d \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} d(\ln x) \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.\end{aligned}$$

例5 求 $\int \arccos x dx$.

解 设 $u = \arccos x$, $dv = dx$, 则

$$\begin{aligned}\int \arccos x dx &= x \arccos x - \int x d(\arccos x) \\ &= x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \arccos x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} d(1-x^2) \\ &= x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned}$$

在分部积分法运用比较熟练以后, 就不必再写出哪一部分选作 u , 哪一部分

选作 dv . 只要把被积表达式凑成 $\varphi(x)d\psi(x)$ 的形式, 便可使用分部积分公式.

例 6 求 $\int x \arctan x dx$.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int x \arctan x dx &= \frac{1}{2} \int \arctan x d(x^2) \\
 &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\
 &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx \\
 &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\
 &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} (x - \arctan x) + C \\
 &= \frac{1}{2} (x^2 + 1) \arctan x - \frac{1}{2} x + C.
 \end{aligned}$$

总结上面三个例子可以知道, 如果被积函数是幂函数和对数函数或幂函数和反三角函数的乘积, 就可以考虑用分部积分法, 并设对数函数或反三角函数为 u .

下面几个例子中所用的方法也是比较典型的.

例 7 求 $\int e^x \sin x dx$.

$$\text{解} \quad \int e^x \sin x dx = \int \sin x d(e^x) = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx,$$

等式右端的积分与等式左端的积分是同一类型的. 对右端的积分再用一次分部积分法, 得

$$\begin{aligned}
 \int e^x \sin x dx &= e^x \sin x - \int \cos x d(e^x) \\
 &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx,
 \end{aligned}$$

由于上式右端的第三项就是所求的积分 $\int e^x \sin x dx$, 把它移到等号左端去, 等式两端再同除以 2, 使得

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

因上式右端已不包含积分项, 所以必须加上任意常数 C .

例 8 求 $\int \sec^3 x dx$.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \sec^3 x \, dx &= \int \sec x \, d(\tan x) \\
 &= \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x \, dx \\
 &= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \, dx \\
 &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx \\
 &= \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x \, dx.
 \end{aligned}$$

由于上式右端的第三项就是所求的积分 $\int \sec^3 x \, dx$, 把它移到等号左端去, 等式两端再同时除以 2, 便得

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} (\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|) + C.$$

在积分的过程中往往要兼用换元法与分部积分法, 如例 5, 下面再来举一个例子.

例 9 求 $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$.

解 令 $\sqrt{x} = t$, 则 $x = t^2$, $dx = 2t \, dt$. 于是

$$\int e^{\sqrt{x}} \, dx = 2 \int t e^t \, dt.$$

利用例 2 的结果, 并用 $t = \sqrt{x}$ 代回, 便得所求积分:

$$\int e^{\sqrt{x}} \, dx = 2 \int t e^t \, dt = 2e^t (t - 1) + C = 2e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1) + C.$$

习 题 4-3

求下列不定积分:

- $\int x \sin x \, dx.$
- $\int \ln x \, dx.$
- $\int \arcsin x \, dx.$
- $\int x e^{-x} \, dx.$
- $\int x^2 \ln x \, dx.$
- $\int e^{-x} \cos x \, dx.$
- $\int e^{-2x} \sin \frac{x}{2} \, dx.$
- $\int x \cos \frac{x}{2} \, dx.$
- $\int x^2 \arctan x \, dx.$
- $\int x \tan^2 x \, dx.$

11. $\int x^2 \cos x dx.$

12. $\int t e^{-2t} dt.$

13. $\int \ln^2 x dx.$

14. $\int x \sin x \cos x dx.$

15. $\int x^2 \cos^2 \frac{x}{2} dx.$

16. $\int x \ln(x-1) dx.$

17. $\int (x^2-1) \sin 2x dx.$

18. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx.$

19. $\int e^{\sqrt{x}} dx.$

20. $\int \cos \ln x dx.$

21. $\int (\arcsin x)^2 dx.$

22. $\int e^x \sin^2 x dx.$

23. $\int x \ln^2 x dx.$

24. $\int e^{\sqrt{3x+9}} dx.$

第四节 有理函数的积分

前面已经介绍了求不定积分的两个基本方法——换元积分法和分部积分法,下面简要地介绍有理函数的积分及可化为有理函数的积分.

一、有理函数的积分

两个多项式的商 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 称为有理函数, 又称有理分式. 我们总假定分子多项式 $P(x)$ 与分母多项式 $Q(x)$ 之间没有公因式. 当分子多项式 $P(x)$ 的次数小于分母多项式 $Q(x)$ 的次数时, 称这有理函数为真分式, 否则称为假分式.

利用多项式的除法, 总可以将一个假分式化成一个多项式与一个真分式之和的形式, 例如第一节例 15 中的被积函数

$$\frac{2x^4+x^2+3}{x^2+1} = 2x^2-1 + \frac{4}{x^2+1}.$$

对于真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$, 如果分母可分解为两个多项式的乘积

$$Q(x) = Q_1(x) Q_2(x),$$

且 $Q_1(x)$ 与 $Q_2(x)$ 没有公因式, 那么它可分拆成两个真分式之和

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)},$$

上述步骤称为把真分式化成部分分式之和. 如果 $Q_1(x)$ 或 $Q_2(x)$ 还能再分解成两个没有公因式的多项式的乘积, 那么就可再分拆成更简单的部分分式. 最后,

有理函数的分解式中只出现多项式、 $\frac{P_1(x)}{(x-a)^k}$ 、 $\frac{P_2(x)}{(x^2+px+q)^l}$ 等三类函数 (这里 $p^2-4q<0$, $P_1(x)$ 为小于 k 次的多项式, $P_2(x)$ 为小于 $2l$ 次的多项式). 多项式的积分容易求得, 后两类真分式的积分可参看第二节例 3 和例 27.

下面举几个真分式的积分的例子.

例 1 求 $\int \frac{x+1}{x^2-5x+6} dx$.

解 被积函数的分母分解成 $(x-3)(x-2)$, 故可设

$$\frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2},$$

其中 A, B 为待定系数. 上式两端去分母后, 得

$$x+1 = A(x-2) + B(x-3),$$

即

$$x+1 = (A+B)x - 2A - 3B.$$

比较上式两端同次幂的系数, 即有

$$\begin{cases} A+B=1, \\ 2A+3B=-1, \end{cases}$$

从而解得 $A=4, B=-3$. 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2-5x+6} dx &= \int \left(\frac{4}{x-3} - \frac{3}{x-2} \right) dx \\ &= 4 \ln|x-3| - 3 \ln|x-2| + C. \end{aligned}$$

例 2 求 $\int \frac{x+2}{(2x+1)(x^2+x+1)} dx$.

解 设 $\frac{x+2}{(2x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{Bx+D}{x^2+x+1}$, 则

$$x+2 = A(x^2+x+1) + (Bx+D)(2x+1),$$

即

$$x+2 = (A+2B)x^2 + (A+B+2D)x + A+D,$$

比较上式两端同次幂的系数, 即有

$$\begin{cases} A+2B=0, \\ A+B+2D=1, \\ A+D=2, \end{cases}$$

从而解得 $\begin{cases} A=2, \\ B=-1, \\ D=0. \end{cases}$ 于是

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{x+2}{(2x+1)(x^2+x+1)} dx \\
 &= \int \left(\frac{2}{2x+1} - \frac{x}{x^2+x+1} \right) dx = \ln|2x+1| - \frac{1}{2} \int \frac{(2x+1)-1}{x^2+x+1} dx \\
 &= \ln|2x+1| - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\
 &= \ln|2x+1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.
 \end{aligned}$$

例3 求 $\int \frac{x-3}{(x-1)(x^2-1)} dx$.

解 被积函数分母的两个因式 $x-1$ 与 x^2-1 有公因式, 故需再分解成 $(x-1)^2(x+1)$. 设

$$\frac{x-3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{Ax+B}{(x-1)^2} + \frac{D}{x+1},$$

则

$$x-3 = (Ax+B)(x+1) + D(x-1)^2,$$

即

$$x-3 = (A+D)x^2 + (A+B-2D)x + B+D,$$

比较上式两端同次幂的系数, 即有

$$\begin{cases} A+D=0, \\ A+B-2D=1, \\ B+D=-3, \end{cases}$$

从而解得 $\begin{cases} A=1, \\ B=-2, \\ D=-1. \end{cases}$ 于是

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{x-3}{(x-1)(x^2-1)} dx \\
 &= \int \frac{x-3}{(x-1)^2(x+1)} dx = \int \left[\frac{x-2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} \right] dx \\
 &= \int \frac{x-1-1}{(x-1)^2} dx - \ln|x+1| \\
 &= \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - \ln|x+1| + C.
 \end{aligned}$$

二、可化为有理函数的积分举例

例 4 求 $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)} dx$.

解 由三角函数知道, $\sin x$ 与 $\cos x$ 都可以用 $\tan \frac{x}{2}$ 的有理式表示, 即

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{\sec^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{\sec^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}.$$

如果作变换 $u = \tan \frac{x}{2}$ ($-\pi < x < \pi$)^①, 那么

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

而 $x = 2 \arctan u$, 从而

$$dx = \frac{2}{1+u^2} du.$$

于是

$$\begin{aligned} & \int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)} dx \\ &= \int \frac{\left(1 + \frac{2u}{1+u^2}\right) \frac{2du}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2} \left(1 + \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)} = \frac{1}{2} \int \left(u + 2 + \frac{1}{u}\right) du \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{u^2}{2} + 2u + \ln |u|\right) + C = \frac{1}{4} \tan^2 \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

本例所用的变量代换 $u = \tan \frac{x}{2}$ 对三角函数有理式的积分都可以应用.

① 当 $x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$ 时, 作变换 $u = \tan \frac{x-2k\pi}{2} = \tan \frac{x}{2}$, $x = 2k\pi + 2 \arctan u$, 以下所得结果相同.

例5 求 $\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$.

解 为了去掉根号, 可以设 $\sqrt{x-1} = u$, 于是 $x = u^2 + 1$, $dx = 2u du$, 从而所求积分为

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx &= \int \frac{u}{u^2+1} \cdot 2u du = 2 \int \frac{u^2}{u^2+1} du \\ &= 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+u^2} \right) du = 2(u - \arctan u) + C \\ &= 2(\sqrt{x-1} - \arctan \sqrt{x-1}) + C.\end{aligned}$$

例6 求 $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$.

解 为了去掉根号, 可以设 $\sqrt[3]{x+2} = u$. 于是 $x = u^3 - 2$, $dx = 3u^2 du$, 从而所求积分为

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}} &= \int \frac{3u^2}{1+u} du \\ &= 3 \int \left(u - 1 + \frac{1}{1+u} \right) du = 3 \left(\frac{u^2}{2} - u + \ln |1+u| \right) + C \\ &= \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x+2)^2} - 3\sqrt[3]{x+2} + 3 \ln |1+\sqrt[3]{x+2}| + C.\end{aligned}$$

例7 求 $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$.

解 被积函数中出现了两个根式 $\sqrt{x}$ 及 $\sqrt[3]{x}$, 为了能同时消去这两个根式, 可令 $x = u^6$, 于是 $dx = 6u^5 du$, 从而所求积分为

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}} &= \int \frac{6u^5}{(1+u^2)u^3} du = 6 \int \frac{u^2}{1+u^2} du \\ &= 6 \int \left(1 - \frac{1}{1+u^2} \right) du = 6(u - \arctan u) + C \\ &= 6(\sqrt[6]{x} - \arctan \sqrt[6]{x}) + C.\end{aligned}$$

例8 求 $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx$.

解 为了去掉根号, 可以设 $\sqrt{\frac{1+x}{x}} = u$, 于是 $\frac{1+x}{x} = u^2$, $x = \frac{1}{u^2-1}$, $dx = -\frac{2u du}{(u^2-1)^2}$, 从而所求积分为

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx &= \int (u^2-1)u \cdot \frac{-2u}{(u^2-1)^2} du = -2 \int \frac{u^2}{u^2-1} du \\
 &= -2 \int \left(1 + \frac{1}{u^2-1} \right) du = -2u - \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C \\
 &= -2u + 2\ln(u+1) - \ln|u^2-1| + C \\
 &= -2\sqrt{\frac{1+x}{x}} + 2\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}} + 1\right) + \ln|x| + C.
 \end{aligned}$$

以上四个例子表明, 如果被积函数中含有简单根式 $\sqrt[n]{ax+b}$ 或 $\sqrt[n]{cx+d}$, 可以令这个简单根式为 u . 由于这样的变换具有反函数, 且反函数是 u 的有理函数, 因此原积分即可化为有理函数的积分.

习 题 4-4

求下列不定积分:

- $\int \frac{x^3}{x+3} dx.$
- $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-10} dx.$
- $\int \frac{x+1}{x^2-2x+5} dx.$
- $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}.$
- $\int \frac{3}{x^3+1} dx.$
- $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx.$
- $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$
- $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-x} dx.$
- $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}.$
- $\int \frac{1}{x^4-1} dx.$
- $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}.$
- $\int \frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2} dx.$
- $\int \frac{-x^2-2}{(x^2+x+1)^2} dx.$
- $\int \frac{dx}{3+\sin^2 x}.$
- $\int \frac{dx}{2+\sin x}.$
- $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}.$
- $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}.$
- $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}.$
- $\int \frac{(\sqrt{x})^3-1}{\sqrt{x}+1} dx.$
- $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} dx.$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}.$

$$23. \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}.$$

$$24. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$$

第五节 积分表的使用

通过前面的讨论可以看出,积分的计算要比导数的计算来得灵活、复杂.为了实用的方便,往往把常用的积分公式汇集成表,这种表叫做积分表.积分表是按照被积函数的类型来排列的.求积分时,可根据被积函数的类型直接地或经过简单的变形后,在表内查得所需的结果.

本书末附录IV有一个简单的积分表,以供查阅.

我们先举几个可以直接从积分表中查得结果的积分例子.

例1 求 $\int \frac{x}{(3x+4)^2} dx$.

解 被积函数含有 $ax+b$,在积分表(一)中查得公式7

$$\int \frac{x}{(ax+b)^2} dx = \frac{1}{a^2} \left(\ln |ax+b| + \frac{b}{ax+b} \right) + C.$$

现在 $a=3, b=4$, 于是

$$\int \frac{x}{(3x+4)^2} dx = \frac{1}{9} \left(\ln |3x+4| + \frac{4}{3x+4} \right) + C.$$

例2 求 $\int \frac{dx}{5-4\cos x}$.

解 被积函数含有三角函数,在积分表(十一)中查得关于积分 $\int \frac{dx}{a+b\cos x}$ 的公式,但是公式有两个,要看 $a^2 > b^2$ 或 $a^2 < b^2$ 而决定采用哪一个.

现在 $a=5, b=-4, a^2 > b^2$, 所以用公式 105

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{a+b\cos x} \\ &= \frac{2}{a+b} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \arctan \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} \right) + C \quad (a^2 > b^2). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{5-4\cos x} \\ &= \frac{2}{5+(-4)} \sqrt{\frac{5+(-4)}{5-(-4)}} \arctan \left(\sqrt{\frac{5-(-4)}{5+(-4)}} \tan \frac{x}{2} \right) + C \\ &= \frac{2}{3} \arctan \left(3 \tan \frac{x}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

下面再举一个需要先进行变量代换,然后再查表求积分的例子.

例 3 求 $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}}$.

解 这个积分不能在表中直接查到,需要先进行变量代换.

令 $2x=u$, 那么 $\sqrt{4x^2+9}=\sqrt{u^2+3^2}$, $x=\frac{u}{2}$, $dx=\frac{1}{2}du$. 于是

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} = \int \frac{\frac{1}{2}du}{\frac{u}{2}\sqrt{u^2+3^2}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2+3^2}}.$$

被积函数中含有 $\sqrt{u^2+3^2}$, 在积分表(六)中查到公式 37

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a} \ln \frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{|x|} + C.$$

现在 $a=3$, x 相当于 u , 于是

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+3^2}} = \frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{u^2+3^2}-3}{|u|} + C.$$

再把 $u=2x$ 代入, 最后得到

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} &= \int \frac{du}{u\sqrt{u^2+3^2}} = \frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{u^2+3^2}-3}{|u|} + C. \\ &= \frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{4x^2+9}-3}{2|x|} + C. \end{aligned}$$

最后, 举一个用递推公式求积分的例子.

例 4 求 $\int \sin^4 x dx$.

解 在积分表(十一)中查到公式 95

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx.$$

利用这个公式可以使被积函数中正弦的幂次减少两次, 只要重复使用这个公式, 可以使正弦的幂次继续减少, 直到求出最后结果为止, 这种公式叫做递推公式.

现在 $n=4$, 于是

$$\int \sin^4 x dx = -\frac{\sin^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4} \int \sin^2 x dx.$$

对积分 $\int \sin^2 x dx$ 用公式 93

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C,$$

从而所求积分为

$$\int \sin^4 x dx = -\frac{\sin^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right) + C.$$

一般说来,查积分表可以节省计算积分的时间,但是,只有掌握了前面学过的基本积分方法才能灵活地使用积分表,而且对一些比较简单的积分,应用基本积分方法来计算比查表更快些,例如,对 $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$, 用变换 $u = \sin x$ 很快就得到结果. 所以,求积分时究竟是直接计算,还是查表,或是两者结合使用,应该作具体分析,不能一概而论.

在本章结束之前,我们还要指出:对初等函数来说,在其定义区间上,它的原函数一定存在,但原函数不一定是初等函数,如

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}},$$

等等,它们的原函数就都不是初等函数.

习 题 4-5

利用积分表计算下列不定积分:

$$1. \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}.$$

$$2. \int \frac{1}{x^2+2x+5} dx.$$

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x+x^2}}.$$

$$4. \int \sqrt{2x^2+9} dx.$$

$$5. \int \sqrt{3x^2-2} dx.$$

$$6. \int e^{2x} \cos x dx.$$

$$7. \int x \arcsin \frac{x}{2} dx.$$

$$8. \int \frac{dx}{(x^2+9)^2}.$$

$$9. \int \frac{dx}{\sin^3 x}.$$

$$10. \int e^{-2x} \sin 3x dx.$$

$$11. \int \sin 3x \sin 5x dx.$$

$$12. \int \ln^3 x dx.$$

$$13. \int \frac{1}{x^2(1-x)} dx.$$

$$14. \int \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx.$$

$$15. \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx.$$

$$16. \int \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}} dx.$$

$$17. \int \frac{x}{(2+3x)^2} dx.$$

$$18. \int \cos^6 x dx.$$

19. $\int x^2 \sqrt{x^2-2} dx.$

20. $\int \frac{1}{2+5\cos x} dx.$

21. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{2x-1}}.$

22. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx.$

23. $\int \frac{x+5}{x^2-2x-1} dx.$

24. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x-x^2}}.$

25. $\int \frac{x^4}{25+4x^2} dx.$

总习题四

1. 填空:

(1) $\int x^3 e^x dx =$ _____.

(2) $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13} dx =$ _____.

2. 以下两题中给出了四个结论, 从中选出一个正确的结论:

(1) 已知 $f'(x) = \frac{1}{x(1+2\ln x)}$, 且 $f(1) = 1$, 则 $f(x)$ 等于();

(A) $\ln(1+2\ln x) + 1$

(B) $\frac{1}{2}\ln(1+2\ln x) + 1$

(C) $\frac{1}{2}\ln(1+2\ln x) + \frac{1}{2}$

(D) $2\ln(1+2\ln x) + 1$

(2) 在下列等式中, 正确的结果是().

(A) $\int f'(x) dx = f(x)$

(B) $\int df(x) = f(x)$

(C) $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$

(D) $d \int f(x) = f(x)$

3. 已知 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\int x^3 f'(x) dx$.4. 求下列不定积分(其中 a, b 为常数):

(1) $\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}};$

(2) $\int \frac{x}{(1-x)^3} dx;$

(3) $\int \frac{x^2}{a^6 - x^6} dx \quad (a > 0);$

(4) $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x} dx;$

(5) $\int \frac{\ln \ln x}{x} dx;$

(6) $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^4 x} dx;$

(7) $\int \tan^4 x dx;$

(8) $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx;$

(9) $\int \frac{dx}{x(x^6+4)};$

(10) $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx \quad (a > 0);$

(11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}};$

(13) $\int e^{ax} \cos bx \, dx;$

(15) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}};$

(17) $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}};$

(19) $\int \ln(1+x^2) \, dx;$

(21) $\int \arctan \sqrt{x} \, dx;$

(23) $\int \frac{x^3}{(1+x^8)^2} \, dx;$

(25) $\int \frac{dx}{16-x^4};$

(27) $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x} \, dx;$

(29) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} \, dx;$

(31) $\int \frac{e^{3x}+e^x}{e^{4x}-e^{2x}+1} \, dx;$

(33) $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) \, dx;$

(35) $\int \sqrt{1-x^2} \arcsin x \, dx;$

(37) $\int \frac{\cot x}{1+\sin x} \, dx;$

(39) $\int \frac{dx}{(2+\cos x) \sin x};$

(12) $\int x \cos^2 x \, dx;$

(14) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}};$

(16) $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{5/2}};$

(18) $\int \sqrt{x} \sin \sqrt{x} \, dx;$

(20) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \, dx;$

(22) $\int \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x} \, dx;$

(24) $\int \frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2} \, dx;$

(26) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x} \, dx;$

(28) $\int e^{\sin x} \frac{x \cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} \, dx;$

(30) $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2};$

(32) $\int \frac{x e^x}{(e^x+1)^2} \, dx;$

(34) $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \, dx;$

(36) $\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx;$

(38) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x};$

(40) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} \, dx.$

第五章 定 积 分

本章讨论积分学的另一个基本问题——定积分问题. 我们先从几何与力学问题出发引进定积分的定义, 然后讨论它的性质与计算方法. 关于定积分的应用, 将在第六章讨论.

第一节 定积分的概念与性质

一、定积分问题举例

1. 曲边梯形的面积

设 $y=f(x)$ 在区间上 $[a, b]$ 上非负、连续. 由直线 $x=a$ 、 $x=b$ 、 $y=0$ 及曲线 $y=f(x)$ 所围成的图形 (如图 5-1) 称为曲边梯形, 其中曲线弧称为曲边.

我们知道, 矩形的高是不变的, 它的面积可按公式

$$\text{矩形面积} = \text{高} \times \text{底}$$

来定义和计算. 而曲边梯形在底边上各点处的高 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是变动的, 故它的面积不能直接按上述公式来定义和计算. 然

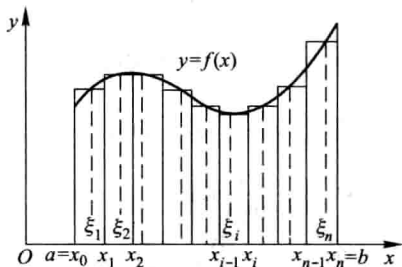


图 5-1

而, 由于曲边梯形的高 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是连续变化的, 在很小一段区间上它的变化很小, 近似于不变. 因此, 如果把区间 $[a, b]$ 划分为许多小区间, 在每个小区间上用其中某一点处的高来近似代替同一个小区间上的窄曲边梯形的变高, 那么, 每个窄曲边梯形就可近似地看成这样得到的窄矩形. 我们就以所有这些窄矩形面积之和作为曲边梯形面积的近似值, 并把区间 $[a, b]$ 无限细分下去, 即使每个小区间的长度都趋于零, 这时所有窄矩形面积之和的极限就可定义为曲边梯形的面积. 这个定义同时也给出了计算曲边梯形面积的方法, 现详述于下.

在区间 $[a, b]$ 中任意插入若干个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

把 $[a, b]$ 分成 n 个小区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n],$$

它们的长度依次为

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

经过每一个分点作平行于 y 轴的直线段, 把曲边梯形分成 n 个窄曲边梯形. 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i , 以 $[x_{i-1}, x_i]$ 为底 $f(\xi_i)$ 为高的窄矩形近似替代第 i 个窄曲边梯形 ($i=1, 2, \dots, n$), 把这样得到的 n 个窄矩形面积之和作为所求曲边梯形面积 A 的近似值, 即

$$A \approx f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

为了保证所有小区间的长度都无限缩小, 我们要求小区间长度中的最大者趋于零, 如记 $\lambda = \max \{ \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n \}$, 则上述条件可表示为 $\lambda \rightarrow 0$. 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时 (这时分段数 n 无限增多, 即 $n \rightarrow \infty$), 取上述和式的极限, 便得曲边梯形的面积

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

2. 变速直线运动的路程

设某物体做直线运动, 已知速度 $v=v(t)$ 是时间间隔 $[T_1, T_2]$ 上 t 的连续函数, 且 $v(t) \geq 0$, 计算在这段时间内物体所经过的路程 s .

我们知道, 对于等速直线运动, 有公式

$$\text{路程} = \text{速度} \times \text{时间}.$$

但是, 在现在讨论的问题中, 速度不是常量而是随时间变化的变量, 因此, 所求路程 s 不能直接按等速直线运动的路程公式来计算. 然而, 物体运动的速度函数 $v=v(t)$ 是连续变化的, 在很短一段时间内, 速度的变化很小, 近似于等速. 因此, 如果把时间间隔分小, 在小段时间内, 以等速运动代替变速运动, 那么, 就可算出部分路程的近似值; 再求和, 得到整个路程的近似值; 最后, 通过对时间间隔无限细分的极限过程, 这时所有部分路程的近似值之和的极限, 就是所求变速直线运动的路程的精确值.

具体计算步骤如下:

在时间间隔 $[T_1, T_2]$ 内任意插入若干个分点

$$T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = T_2,$$

把 $[T_1, T_2]$ 分成 n 个小时段

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n],$$

各小时段时间的长依次为

$$\Delta t_1 = t_1 - t_0, \Delta t_2 = t_2 - t_1, \dots, \Delta t_n = t_n - t_{n-1}.$$

相应地,在各段时间内物体经过的路程依次为

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n.$$

在时间间隔 $[t_{i-1}, t_i]$ 上任取一个时刻 τ_i ($t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$), 以 τ_i 时的速度 $v(\tau_i)$ 来代替 $[t_{i-1}, t_i]$ 上各个时刻的速度, 得到部分路程 Δs_i 的近似值, 即

$$\Delta s_i \approx v(\tau_i) \Delta t_i \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

于是这 n 段部分路程的近似值之和就是所求变速直线运动路程 s 的近似值, 即

$$s \approx v(\tau_1) \Delta t_1 + v(\tau_2) \Delta t_2 + \dots + v(\tau_n) \Delta t_n = \sum_{i=1}^n v(\tau_i) \Delta t_i.$$

记 $\lambda = \max \{ \Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n \}$, 当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 取上述和式的极限, 即得变速直线运动的路程

$$s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v(\tau_i) \Delta t_i.$$

二、定积分的定义

从上面两个例子可以看到: 所要计算的量, 即曲边梯形的面积 A 及变速直线运动的路程 s 的实际意义虽然不同, 前者是几何量, 后者是物理量, 但是它们都由一个函数及其自变量的变化区间所决定, 如:

曲边梯形的高度 $y=f(x)$ 及其底边上的点 x 的变化区间 $[a, b]$,

直线运动的速度 $v=v(t)$ 及时间 t 的变化区间 $[T_1, T_2]$.

其次, 计算这些量的方法与步骤都是相同的, 并且它们都归结为具有相同结构的一种特定和的极限, 如

$$\text{面积 } A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

$$\text{路程 } s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v(\tau_i) \Delta t_i.$$

抛开这些问题的具体意义, 抓住它们在数量关系上共同的本质与特性加以概括, 我们就可以抽象出下述定积分的定义:

定义 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 在 $[a, b]$ 中任意插入若干个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

把区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n],$$

各个小区间的长度依次为

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i ($x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$), 作函数值 $f(\xi_i)$ 与小区间长

度 Δx_i 的乘积 $f(\xi_i) \Delta x_i (i=1, 2, \dots, n)$, 并作出和

$$S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (1-1)$$

记 $\lambda = \max \{ \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n \}$, 如果当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 这的和的极限总存在, 且与闭区间 $[a, b]$ 的分法及点 ξ_i 的取法无关, 那么称这个极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分 (简称积分), 记作 $\int_a^b f(x) dx$, 即

$$\int_a^b f(x) dx = I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (1-2)$$

其中 $f(x)$ 叫做被积函数, $f(x) dx$ 叫做被积表达式, x 叫做积分变量, a 叫做积分下限, b 叫做积分上限, $[a, b]$ 叫做积分区间.

利用“ ε - δ ”的说法, 上述定积分的定义可以表述如下:

设有常数 I , 如果对于任意给定的正数 ε , 总存在一个正数 δ , 使得对于区间 $[a, b]$ 的任何分法, 不论 ξ_i 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 中怎样选取, 只要 $\lambda = \max \{ \Delta x_1, \dots, \Delta x_n \} < \delta$, 总有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - I \right| < \varepsilon$$

成立, 那么称 I 是 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分, 记作 $\int_a^b f(x) dx$.

注意 当和式 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 的极限存在时, 其极限 I 仅与被积函数 $f(x)$ 及积分区间 $[a, b]$ 有关. 如果既不改变被积函数 f , 也不改变积分区间 $[a, b]$, 而只把积分变量 x 改写成其他字母, 例如 t 或 u , 那么, 这时和的极限 I 不变, 也就是定积分的值不变, 即

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du.$$

这就是说, 定积分的值只与被积函数及积分区间有关, 而与积分变量的记法无关.

和式 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 通常称为 $f(x)$ 的积分和. 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分存在, 那么就称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

对于定积分, 有这样一个重要问题: 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足怎样的条件, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一定可积? 这个问题我们不作深入讨论, 而只给出以下两个充分条件:

定理 1 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

定理 2 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界, 且只有有限个间断点, 则 $f(x)$ 在 $[a,$

b) 上可积.

利用定积分的定义,前面所讨论的两个实际问题可以分别表述如下:

曲线 $y=f(x)$ ($f(x) \geq 0$)、 x 轴及两条直线 $x=a$ 、 $x=b$ 所围成的曲边梯形的面积 A 等于函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分,即

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

物体以变速 $v=v(t)$ ($v(t) \geq 0$) 做直线运动,从时刻 $t=T_1$ 到时刻 $t=T_2$,这物体经过的路程 s 等于函数 $v(t)$ 在区间 $[T_1, T_2]$ 上的定积分,即

$$s = \int_{T_1}^{T_2} v(t) dt.$$

下面讨论定积分的几何意义.在 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq 0$ 时,我们已经知道,定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 表示由曲线 $y=f(x)$ 、两条直线 $x=a$ 、 $x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积;在 $[a, b]$ 上 $f(x) \leq 0$ 时,由曲线 $y=f(x)$ 、两条直线 $x=a$ 、 $x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形位于 x 轴的下方,定积分

$$\int_a^b f(x) dx$$

表示上述曲边梯形面积的负值;在 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 既取得正值又取得负值时,函数 $f(x)$ 的图形某些部分在 x 轴的上方,而其他部分在 x 轴下方

(图 5-2), 此时定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 表示 x 轴上方图形面积减去 x 轴下方图形面积所得之差.

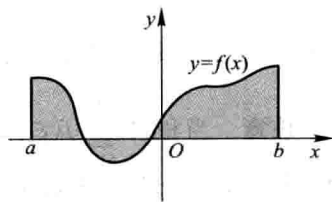


图 5-2

最后,举一个按定义计算定积分的例子.

例 1 利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2 dx$.

解 因为被积函数 $f(x)=x^2$ 在积分区间 $[0, 1]$ 上连续,而连续函数是可积的,所以积分与区间 $[0, 1]$ 的分法及点 ξ_i 的取法无关. 因此,为了便于计算,不妨把区间 $[0, 1]$ 分成 n 等份,分点为 $x_i = \frac{i}{n}, i=1, 2, \dots, n-1$. 这样,每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 的长度 $\Delta x_i = \frac{1}{n}, i=1, 2, \dots, n$. 取 $\xi_i = x_i, i=1, 2, \dots, n$. 于是,得和式

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \Delta x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \textcircled{1} \\
 &= \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right).
 \end{aligned}$$

当 $\lambda \rightarrow 0$ 即 $n \rightarrow \infty$ 时, 取上式右端的极限. 由定积分的定义, 即得所要计算的积分为

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}.$$

三、定积分的近似计算

从例 1 的计算过程中可以看到, 对于任一确定的正整数 n , 积分和

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

都是定积分 $\int_0^1 x^2 dx$ 的近似值. 当 n 取不同值时, 可得到定积分 $\int_0^1 x^2 dx$ 精度不同的近似值. 一般说来, n 取得越大, 近似程度越好.

下面就一般情形, 讨论定积分的近似计算问题. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 这时定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 存在. 如同例 1, 采取把区间 $[a, b]$ 等分的分法, 即用分点 $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ 将 $[a, b]$ 分成 n 个长度相等的小区间, 每个小区间的长为

$$\Delta x = \frac{b-a}{n},$$

① 利用恒等式 $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$, 得

$$\begin{cases} (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1, \\ n^3 - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1, \\ \dots\dots\dots \\ 3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1, \\ 2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1. \end{cases}$$

把这 n 个等式两端分别相加, 得

$$(n+1)^3 - 1 = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + \dots + n) + n.$$

由于 $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$, 代入上式, 得

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + \frac{3}{2}n(n+1) + n.$$

整理后, 得

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

在小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上, 取 $\xi_i = x_{i-1}$, 应有

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}),$$

从而对于任一确定的正整数 n , 有

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}).$$

记 $f(x_i) = y_i$ ($i=0, 1, 2, \dots, n$), 上式可记作

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}). \quad (1-3)$$

如果取 $\xi_i = x_i$, 则可得近似公式

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n). \quad (1-4)$$

以上求定积分近似值的方法称为矩形法, 公式 (1-3)、(1-4) 称为矩形公式。

矩形法的几何意义是: 用窄条矩形的面积作为窄条曲边梯形面积的近似值。整体上用台阶形的面积作为曲边梯形面积的近似值。如图 5-3 所示。

求定积分近似值的方法, 常用的还有梯形法和抛物线法 (又称辛普森 (Simpson) 法), 简单介绍如下:

和矩形法一样, 将区间 $[a, b]$ n 等分。设 $f(x_i) = y_i$, 曲线 $y=f(x)$ 上的点 (x_i, y_i) 记作 M_i ($i=0, 1, 2, \dots, n$)。

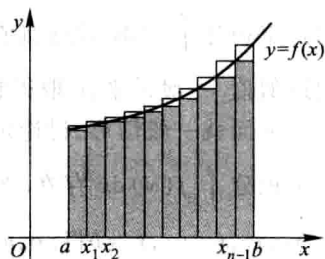


图 5-3

梯形法的原理是: 将曲线 $y=f(x)$ 上的小弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 用直线段 $\overline{M_{i-1}M_i}$ 代替, 也就是把窄条曲边梯形用窄条梯形代替 (图 5-4 (a)), 由此得到定积分的近似值为

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right) \\ &= \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right). \end{aligned} \quad (1-5)$$

显然, 梯形法公式 (1-5) 所得近似值就是矩形法公式 (1-3) 和 (1-4) 所得两个近似值的平均值。

抛物线法的原理是: 将曲线 $y=f(x)$ 上的两个小弧段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 和 $\widehat{M_iM_{i+1}}$ 合起来, 用过 M_{i-1}, M_i, M_{i+1} 三点的抛物线 $y=px^2+qx+r$ 代替 (图 5-4 (b)). 经推导可

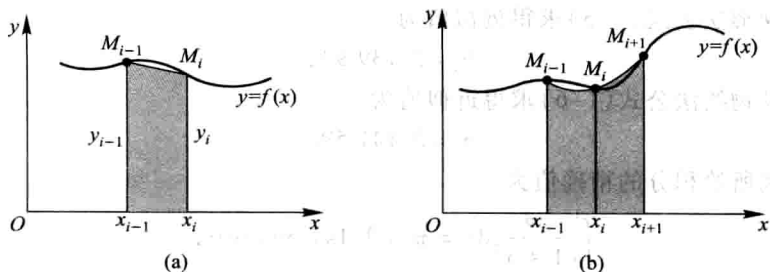


图 5-4

得, 以此抛物线弧段为曲边、以 $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ 为底的曲边梯形面积为

$$\frac{1}{6}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}) \cdot 2\Delta x = \frac{b-a}{3n}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}).$$

取 n 为偶数, 得到定积分的近似值为

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{b-a}{3n} [(y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)] \\ &= \frac{b-a}{3n} [y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2})]. \end{aligned} \quad (1-6)$$

例 2 按梯形法公式(1-5)和抛物线法公式(1-6)计算定积分 $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$ 的近似值(取 $n=10$, 计算时取 5 位小数).

解 计算 y_i 并列表:

i	x_i	y_i
0	0.0	4.000 00
1	0.1	3.960 40
2	0.2	3.846 15
3	0.3	3.669 72
4	0.4	3.448 28
5	0.5	3.200 00
6	0.6	2.941 18
7	0.7	2.684 56
8	0.8	2.439 02
9	0.9	2.209 94
10	1.0	2.000 00

按梯形法公式(1-5)求得近似值为

$$S_1 = 3.139\,93,$$

按抛物线法公式(1-6)求得近似值为

$$S_2 = 3.141\,59.$$

本例所给积分的精确值为

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = \pi = 3.141\,592\,6\cdots,$$

用 S_2 作为所给积分的近似值,误差小于 10^{-5} .

计算定积分的近似值的方法很多,这里不再作介绍.随着计算机应用的普及,定积分的近似计算已变得更为方便,现在已有很多现成的数学软件可用于定积分的近似计算.

四、定积分的性质

为了以后计算及应用方便起见,对定积分作以下两点补充规定:

(1) 当 $b=a$ 时, $\int_a^a f(x) dx = 0$;

(2) 当 $a > b$ 时, $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.

由上式可知,交换定积分的上下限时,定积分的绝对值不变而符号相反.

下面讨论定积分的性质.下列各性质中积分上下限的大小,如不特别指明,均不加限制,并假定各性质中所列出的定积分都是存在的.

性质 1 设 α 与 β 均为常数,则

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)] \Delta x_i \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \alpha \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \beta \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i \\ &= \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

性质 1 对于任意有限个函数的线性组合也是成立的.

性质 2 设 $a < c < b$, 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

证 因为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积, 所以不论把 $[a, b]$ 怎样分, 积分和的极限总是不变的. 因此, 在分区间时, 可以使 c 永远是个分点. 那么, $[a, b]$ 上的积分和等于 $[a, c]$ 上的积分和加 $[c, b]$ 上的积分和, 记为

$$\sum_{[a, b]} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{[a, c]} f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_{[c, b]} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

令 $\lambda \rightarrow 0$, 上式两端同时取极限, 即得

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

这个性质表明定积分对于积分区间具有可加性.

按定积分的补充规定, 我们有: 不论 a, b, c 的相对位置如何, 总有等式

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

成立. 例如, 当 $a < b < c$ 时, 由于

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx,$$

于是得

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

性质 3 如果在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \equiv 1$, 那么

$$\int_a^b 1 dx = \int_a^b dx = b - a.$$

这个性质的证明请读者自己完成.

性质 4 如果在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq 0$, 那么

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad (a < b).$$

证 因为 $f(x) \geq 0$, 所以

$$f(\xi_i) \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

又由于 $\Delta x_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$, 因此

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq 0,$$

令 $\lambda = \max \{ \Delta x_1, \dots, \Delta x_n \} \rightarrow 0$, 便得要证的不等式.

推论 1 如果在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \leq g(x)$, 那么

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad (a < b).$$

证 因为 $g(x) - f(x) \geq 0$, 由性质 4 得

$$\int_a^b [g(x) - f(x)] dx \geq 0.$$

再利用性质 1, 便得要证的不等式.

推论 2 $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a < b).$

证 因为

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|,$$

所以由推论 1 及性质 1 可得

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

即

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

性质 5 设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值及最小值, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad (a < b).$$

证 因为 $m \leq f(x) \leq M$, 所以由性质 4 的推论 1, 得

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx.$$

再由性质 1 及性质 3, 即得所要证的不等式.

这个性质说明, 由被积函数在积分区间上的最大值及最小值, 可以估计积分值的大致范围. 例如, 定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^4 dx$, 它的被积函数 $f(x) = x^4$ 在积分区间 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上是单调增加的, 于是有最小值 $m = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ 、最大值 $M = (1)^4 = 1$. 由性质 5, 得

$$\frac{1}{16} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \leq \int_{\frac{1}{2}}^1 x^4 dx \leq 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right),$$

即

$$\frac{1}{32} \leq \int_{\frac{1}{2}}^1 x^4 dx \leq \frac{1}{2}.$$

性质 6 (定积分中值定理) 如果函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a, b]$ 上连续, 那么在 $[a, b]$ 上至少存在一个点 ξ , 使下式成立:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) \quad (a \leq \xi \leq b).$$

这个公式叫做积分中值公式①.

证 把性质 5 中的不等式两边各除以 $b-a$, 得

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

这表明, 确定的数值 $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \in [m, M]$. 根据闭区间上连续函数的介值定理 (第一章第十节定理 3) 的推论, 在 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ , 使得函数 $f(x)$ 在点 ξ 处的值与这个确定的数值相等, 即应有

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b).$$

两端各乘 $b-a$, 即得所要证的等式.

显然, 积分中值公式

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) \quad (\xi \text{ 在 } a \text{ 与 } b \text{ 之间})$$

不论 $a < b$ 或 $a > b$ 都是成立的.

积分中值公式有如下的几何解释: 在区间 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ , 使得以区间 $[a, b]$ 为底边、以曲线 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积等于同一底边而高为 $f(\xi)$ 的一个矩形的面积 (图 5-5).

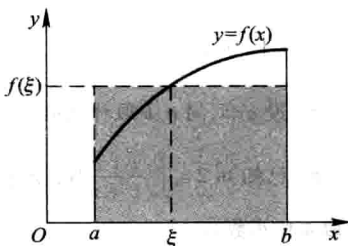


图 5-5

按积分中值公式所得

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的平均值. 例如按图 5-5, $f(\xi)$ 可看作图中曲边梯形的平均高度. 又如物体以变速 $v(t)$ 做直线运动, 在时间区间 $[T_1, T_2]$ 上经过的路程为 $\int_{T_1}^{T_2} v(t) dt$, 因此,

$$v(\xi) = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} v(t) dt, \quad \xi \in [T_1, T_2]$$

便是运动物体在 $[T_1, T_2]$ 这段时间内的平均速度.

① 可以证明 $\xi \in (a, b)$, 参阅同济大学数学系编《高等数学附册 学习辅导与习题选解 同济·第七版》第五章第一节释疑解难 2.

习 题 5-1

* 1. 利用定积分的定义计算由抛物线 $y=x^2+1$ 、两直线 $x=a$ 、 $x=b$ ($b>a$) 及 x 轴所围成的图形的面积.

* 2. 利用定积分的定义计算下列积分:

$$(1) \int_a^b x dx \quad (a < b); \quad (2) \int_0^1 e^x dx.$$

3. 利用定积分的几何意义, 证明下列等式:

$$(1) \int_0^1 2x dx = 1; \quad (2) \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4};$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0; \quad (4) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx.$$

4. 利用定积分的几何意义, 求下列积分:

$$(1) \int_0^t x dx \quad (t > 0); \quad (2) \int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2} + 3 \right) dx;$$

$$(3) \int_{-1}^2 |x| dx; \quad (4) \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx.$$

5. 设 $a < b$, 问 a, b 取什么值时, 积分 $\int_a^b (x-x^2) dx$ 取得最大值?

6. 已知 $\ln 2 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$, 试用抛物线法公式(1-6), 求出 $\ln 2$ 的近似值(取 $n=10$, 计算时取 4 位小数).

$$7. \text{ 设 } \int_{-1}^1 3f(x) dx = 18, \quad \int_{-1}^3 f(x) dx = 4, \quad \int_{-1}^3 g(x) dx = 3. \text{ 求}$$

$$(1) \int_{-1}^1 f(x) dx; \quad (2) \int_1^3 f(x) dx;$$

$$(3) \int_3^{-1} g(x) dx; \quad (4) \int_{-1}^3 \frac{1}{5} [4f(x) + 3g(x)] dx.$$

8. 水利工程中要计算拦水闸门所受的水压力. 已知闸门上水的压强 p 与水深 h 存在函数关系, 且有 $p=9.8h \text{ kN/m}^2$. 若闸门高 $H=3 \text{ m}$, 宽 $L=2 \text{ m}$, 求水面与闸门顶相齐时闸门所受的水压力 P .

9. 证明定积分的性质:

$$(1) \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k \text{ 是常数});$$

$$(2) \int_a^b 1 \cdot dx = \int_a^b dx = b - a.$$

10. 估计下列各积分的值:

$$(1) \int_1^4 (x^2 + 1) dx; \quad (2) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (1 + \sin^2 x) dx;$$

$$(3) \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x \arctan x dx; \quad (4) \int_2^0 e^{x^2-x} dx.$$

11. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 证明 $\int_0^1 f^2(x) dx \geq \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2$.

12. 设 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明:

(1) 若在 $[a, b]$ 上, $f(x) \geq 0$, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\int_a^b f(x) dx > 0$;

(2) 若在 $[a, b]$ 上, $f(x) \geq 0$, 且 $\int_a^b f(x) dx = 0$, 则在 $[a, b]$ 上 $f(x) \equiv 0$;

(3) 若在 $[a, b]$ 上, $f(x) \leq g(x)$, 且 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$, 则在 $[a, b]$ 上 $f(x) \equiv g(x)$.

13. 根据定积分的性质及第 12 题的结论, 说明下列各对积分中哪一个的值较大:

(1) $\int_0^1 x^2 dx$ 还是 $\int_0^1 x^3 dx$?

(2) $\int_1^2 x^2 dx$ 还是 $\int_1^2 x^3 dx$?

(3) $\int_1^2 \ln x dx$ 还是 $\int_1^2 (\ln x)^2 dx$?

(4) $\int_0^1 x dx$ 还是 $\int_0^1 \ln(1+x) dx$?

(5) $\int_0^1 e^x dx$ 还是 $\int_0^1 (1+x) dx$?

第二节 微积分基本公式

在第一节中有一个应用定积分的定义计算积分的例子. 从这个例子我们看到, 被积函数虽然是简单的幂函数 $f(x) = x^2$, 但直接按定义来计算它的定积分已经不是很容易的事. 如果被积函数是其他复杂的函数, 其困难就更大了. 因此, 我们必须寻求计算定积分的新方法.

下面先从实际问题中寻找解决问题的线索. 为此, 我们对变速直线运动中遇到的位置函数 $s(t)$ 及速度函数 $v(t)$ 之间的联系作进一步的研究.

一、变速直线运动中位置函数与速度函数之间的联系

有一物体在一直线上运动. 在这直线上取定原点、正方向及长度单位, 使它成一数轴. 设时刻 t 时物体所在位置为 $s(t)$, 速度为 $v(t)$ (为了讨论方便起见, 可以设 $v(t) \geq 0$).

从第一节知道: 物体在时间间隔 $[T_1, T_2]$ 内经过的路程可以用速度函数 $v(t)$ 在 $[T_1, T_2]$ 上的定积分

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t) dt$$

来表达;另一方面,这段路程又可以通过位置函数 $s(t)$ 在区间 $[T_1, T_2]$ 上的增量 $s(T_2) - s(T_1)$

来表达.由此可见,位置函数 $s(t)$ 与速度函数 $v(t)$ 之间有如下关系:

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t) dt = s(T_2) - s(T_1). \quad (2-1)$$

因为 $s'(t) = v(t)$, 即位置函数 $s(t)$ 是速度函数 $v(t)$ 的原函数, 所以关系式 (2-1) 表示, 速度函数 $v(t)$ 在区间 $[T_1, T_2]$ 上的定积分等于 $v(t)$ 的原函数 $s(t)$ 在区间 $[T_1, T_2]$ 上的增量

$$s(T_2) - s(T_1).$$

上述从变速直线运动的路程这个特殊问题中得出来的关系, 在一定条件下具有普遍性. 事实上, 我们将在第三目中证明, 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 那么, $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分就等于 $f(x)$ 的原函数 (设为 $F(x)$) 在区间 $[a, b]$ 上的增量

$$F(b) - F(a).$$

二、积分上限的函数及其导数

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 并且设 x 为 $[a, b]$ 上的一点. 我们来考察 $f(x)$ 在部分区间 $[a, x]$ 上的定积分

$$\int_a^x f(x) dx.$$

首先, 由于 $f(x)$ 在 $[a, x]$ 上仍旧连续, 因此这个定积分存在. 这里, x 既表示定积分的上限, 又表示积分变量. 因为定积分与积分变量的记法无关, 所以, 为了明确起见, 可以把积分变量改用其他符号, 例如用 t 表示, 则上面的定积分可以写成

$$\int_a^x f(t) dt.$$

如果上限 x 在区间 $[a, b]$ 上任意变动, 那么对于每一个取定的 x 值, 定积分有一个对应值, 所以它在 $[a, b]$ 上定义了一个函数, 记作 $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (a \leq x \leq b).$$

这个函数 $\Phi(x)$ 具有下面定理 1 所指出的重要性质.

定理 1 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 那么积分上限的函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

在 $[a, b]$ 上可导, 并且它的导数

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (a \leq x \leq b). \quad (2-2)$$

证 若 $x \in (a, b)$, 设 x 获得增量 Δx , 其绝对值足够地小, 使得 $x + \Delta x \in (a, b)$, 则 $\Phi(x)$

(图 5-6, 图中 $\Delta x > 0$) 在 $x + \Delta x$ 处的函数值为

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x + \Delta x} f(t) dt.$$

由此得函数的增量

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) \\ &= \int_a^{x + \Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x + \Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_x^{x + \Delta x} f(t) dt. \end{aligned}$$

再应用积分中值定理, 即有等式

$$\Delta \Phi = f(\xi) \Delta x,$$

这里, ξ 在 x 与 $x + \Delta x$ 之间. 把上式两端各除以 Δx , 得函数增量与自变量增量的比值

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = f(\xi).$$

由于假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 而 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\xi \rightarrow x$, 因此 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(x)$. 于是, 令 $\Delta x \rightarrow 0$ 对上式两端取极限时, 左端的极限也应该存在且等于 $f(x)$. 这就是说, 函数 $\Phi(x)$ 的导数存在, 并且

$$\Phi'(x) = f(x).$$

若 $x = a$, 取 $\Delta x > 0$, 则同理可证 $\Phi'_+(a) = f(a)$; 若 $x = b$, 取 $\Delta x < 0$, 则同理可证 $\Phi'_-(b) = f(b)$.

定理 1 证毕.

这个定理指出了一个重要结论: 连续函数 $f(x)$ 取变上限 x 的定积分然后求导, 其结果还原为 $f(x)$ 本身. 联想到原函数的定义, 就可以从定理 1 推知 $\Phi(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数. 因此, 我们引出如下的原函数的存在定理.

定理 2 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 那么函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (2-3)$$

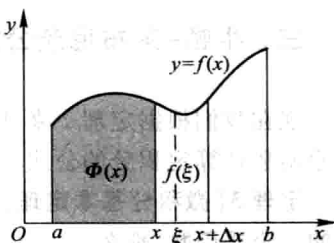


图 5-6

就是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数.

这个定理的重要意义是:一方面肯定了连续函数的原函数是存在的,另一方面初步地揭示了积分学中的定积分与原函数之间的联系.因此,我们就有可能通过原函数来计算定积分.

三、牛顿-莱布尼茨公式

现在我们根据定理 2 来证明一个重要定理——微积分基本定理,它给出了用原函数计算定积分的公式.

定理 3(微积分基本定理) 如果函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个原函数,那么

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (2-4)$$

证 已知函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数,又根据定理 2 知道,积分上限的函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

也是 $f(x)$ 的一个原函数.于是这两个原函数之差 $F(x) - \Phi(x)$ 在 $[a, b]$ 上必定是某一个常数 C (第四章第一节),即

$$F(x) - \Phi(x) = C \quad (a \leq x \leq b). \quad (2-5)$$

在上式中令 $x=a$,得 $F(a) - \Phi(a) = C$. 又由 $\Phi(x)$ 的定义式(2-3)及上节定积分的补充规定(1)可知 $\Phi(a) = 0$,因此, $C = F(a)$. 以 $F(a)$ 代入(2-5)式中的 C ,以 $\int_a^x f(t) dt$ 代入(2-5)式中的 $\Phi(x)$,可得

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$$

在上式中令 $x=b$,就得到所要证明的公式(2-4).

由上节定积分的补充规定(2)可知,(2-4)式对 $a > b$ 的情形同样成立.

为了方便起见,以后把 $F(b) - F(a)$ 记成 $[F(x)]_a^b$,于是(2-4)式又可写成

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b.$$

公式(2-4)叫做牛顿(Newton)-莱布尼茨(Leibniz)公式^①,也叫做微积分基

① 牛顿(Isaac Newton, 1642—1727) 英国数学家、物理学家,微积分的奠基者.牛顿的微积分学说最早的公开表述是在 1687 年出版的巨著《自然哲学之数学原理》中.

莱布尼茨(Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646—1716) 德国数学家,微积分的另一个奠基者.微积分基本定理的陈述最早出现在莱布尼茨 1677 年的一篇手稿中.

本公式. 这个公式进一步揭示了定积分与被积函数的原函数或不定积分之间的联系. 它表明: 一个连续函数在区间 $[a, b]$ 上的定积分等于它的任一个原函数在区间 $[a, b]$ 上的增量. 这就给定积分提供了一个有效而简便的计算方法, 大大简化了定积分的计算手续.

下面我们举几个应用公式(2-4)来计算定积分的简单例子.

例 1 计算第一节中的定积分 $\int_0^1 x^2 dx$.

解 由于 $\frac{x^3}{3}$ 是 x^2 的一个原函数, 所以按牛顿-莱布尼茨公式, 有

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

例 2 计算 $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$.

解 由于 $\arctan x$ 是 $\frac{1}{1+x^2}$ 的一个原函数, 所以

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} &= [\arctan x]_{-1}^{\sqrt{3}} = \arctan \sqrt{3} - \arctan(-1) \\ &= \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7}{12}\pi. \end{aligned}$$

例 3 计算 $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$.

解 当 $x < 0$ 时, $\frac{1}{x}$ 的一个原函数是 $\ln|x|$, 现在积分区间是 $[-2, -1]$, 所以按牛顿-莱布尼茨公式, 有

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x} = [\ln|x|]_{-2}^{-1} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2.$$

通过例 3, 我们应该特别注意: 公式(2-4)中的函数 $F(x)$ 必须是 $f(x)$ 在该积分区间 $[a, b]$ 上的原函数.

例 4 计算正弦曲线 $y = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上与 x 轴所围成的平面图形(图 5-7)的面积.

解 这图形是曲边梯形的一个特例. 它的面积

$$A = \int_0^{\pi} \sin x dx.$$

由于 $-\cos x$ 是 $\sin x$ 的一个原函数, 所以

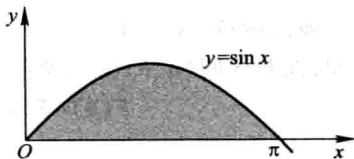


图 5-7

$$A = \int_0^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -(-1) - (-1) = 2.$$

例 5 汽车以每小时 36 km 速度在直道上行驶,到某处需要减速停车.设汽车以等加速度 $a = -5 \text{ m/s}^2$ 刹车.问从开始刹车到停车,汽车驶过了多少距离?

解 首先要算出从开始刹车到停车经过的时间.设开始刹车的时刻为 $t=0$,此时汽车速度

$$v_0 = 36 \text{ km/h} = \frac{36 \times 1000}{3600} \text{ m/s} = 10 \text{ m/s}.$$

刹车后汽车减速行驶,其速度为

$$v(t) = v_0 + at = 10 - 5t.$$

当汽车停住时,速度 $v(t) = 0$,故从

$$v(t) = 10 - 5t = 0$$

解得

$$t = \frac{10}{5} = 2 (\text{s}).$$

于是在这段时间内,汽车所驶过的距离为

$$s = \int_0^2 v(t) dt = \int_0^2 (10 - 5t) dt = \left[10t - 5 \times \frac{t^2}{2} \right]_0^2 = 10 (\text{m}),$$

即在刹车后,汽车需驶过 10 m 才能停住.

例 6 证明积分中值定理:若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ ,使

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) \quad (a < \xi < b).$$

证 因 $f(x)$ 连续,故它的原函数存在,设为 $F(x)$,即设在 $[a, b]$ 上 $F'(x) = f(x)$. 根据牛顿-莱布尼茨公式,有

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

显然函数 $F(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上满足微分中值定理的条件,因此按微分中值定理,在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ ,使

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a), \quad \xi \in (a, b),$$

故

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a), \quad \xi \in (a, b).$$

本例的结论是上一节所述积分中值定理的改进.从本例的证明中不难看出积分中值定理与微分中值定理的联系.

下面再举几个应用公式(2-2)的例子.

例7 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内连续且 $f(x) > 0$. 证明函数

$$F(x) = \frac{\int_0^x tf(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$$

在 $(0, +\infty)$ 内为单调增加函数.

证 由公式(2-2), 得

$$\frac{d}{dx} \int_0^x tf(t) dt = xf(x), \quad \frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt = f(x).$$

故

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{xf(x) \int_0^x f(t) dt - f(x) \int_0^x tf(t) dt}{\left(\int_0^x f(t) dt \right)^2} \\ &= \frac{f(x) \int_0^x (x-t)f(t) dt}{\left(\int_0^x f(t) dt \right)^2}. \end{aligned}$$

按假设, 当 $0 < t < x$ 时 $f(t) > 0$, $(x-t)f(t) > 0$, 按例6所述积分中值定理可知

$$\int_0^x f(t) dt > 0, \quad \int_0^x (x-t)f(t) dt > 0,$$

所以 $F'(x) > 0$ ($x > 0$), 从而 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内为单调增加函数.

例8 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt}{x^2}$.

解 易知这是一个 $\frac{0}{0}$ 型的未定式, 我们利用洛必达法则来计算. 分子可写成

$$-\int_1^{\cos x} e^{-t^2} dt,$$

它是以 $\cos x$ 为上限的积分, 作为 x 的函数可看成是以 $u = \cos x$ 为中间变量的复合函数, 故由公式(2-2)有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt &= -\frac{d}{dx} \int_1^{\cos x} e^{-t^2} dt \\ &= -\frac{d}{du} \int_1^u e^{-t^2} dt \Big|_{u=\cos x} \cdot (\cos x)' \\ &= -e^{-\cos^2 x} \cdot (-\sin x) = \sin x e^{-\cos^2 x}. \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2} dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x e^{-\cos^2 x}}{2x} = \frac{1}{2e}.$$

习 题 5-2

1. 试求函数 $y = \int_0^x \sin t dt$ 当 $x=0$ 及 $x=\frac{\pi}{4}$ 时的导数.

2. 求由参数表达式 $x = \int_0^t \sin u du, y = \int_0^t \cos u du$ 所确定的函数对 x 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

3. 求由 $\int_0^y e^t dt + \int_0^x \cos t dt = 0$ 所确定的隐函数对 x 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

4. 当 x 为何值时, 函数 $I(x) = \int_0^x t e^{-t^2} dt$ 有极值?

5. 计算下列各导数:

$$(1) \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt; \quad (2) \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}};$$

$$(3) \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt.$$

6. 证明 $f(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^3} dt$ 在 $[-1, +\infty)$ 上是单调增加函数, 并求 $(f^{-1})'(0)$.

7. 设 $f(x)$ 具有三阶连续导数, $y=f(x)$ 的图形如图 5-8 所示. 问下列积分中的哪一个积分值为负?

$$(A) \int_{-1}^3 f(x) dx$$

$$(B) \int_{-1}^3 f'(x) dx$$

$$(C) \int_{-1}^3 f''(x) dx$$

$$(D) \int_{-1}^3 f'''(x) dx$$

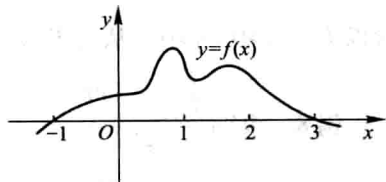


图 5-8

8. 计算下列各定积分:

$$(1) \int_0^a (3x^2 - x + 1) dx;$$

$$(2) \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx;$$

$$(3) \int_4^9 \sqrt{x} (1 + \sqrt{x}) dx;$$

$$(4) \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2};$$

$$(5) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(6) \int_0^{\sqrt{3}a} \frac{dx}{a^2+x^2};$$

$$(7) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$(8) \int_{-1}^0 \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{x^2 + 1} dx;$$

$$(9) \int_{-e^{-1}}^{-2} \frac{dx}{1+x};$$

$$(10) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 \theta d\theta;$$

$$(11) \int_0^{2\pi} |\sin x| dx;$$

$$(12) \int_0^2 f(x) dx, \text{ 其中 } f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1, \\ \frac{1}{2}x^2, & x > 1. \end{cases}$$

9. 设 $k \in \mathbf{N}_+$. 试证下列各题:

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = 0;$$

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = 0;$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \pi;$$

$$(4) \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \pi.$$

10. 设 $k, l \in \mathbf{N}_+$, 且 $k \neq l$. 证明:

$$(1) \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin lx dx = 0;$$

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx dx = 0;$$

$$(3) \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx dx = 0.$$

11. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x t e^{2t^2} dt}.$$

12. 设

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1), \\ x, & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

求 $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt$ 在 $[0, 2]$ 上的表达式, 并讨论 $\Phi(x)$ 在 $(0, 2)$ 内的连续性.

13. 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x < 0 \text{ 或 } x > \pi. \end{cases}$$

求 $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的表达式.

14. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导且 $f'(x) \leq 0$,

$$F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt.$$

证明在 (a, b) 内有 $F'(x) \leq 0$.

$$15. \text{ 设 } F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \text{ 求 } F'(0).$$

16. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. 证明函数

$$y = e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt$$

满足方程 $\frac{dy}{dx} + y = f(x)$, 并求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$.

第三节 定积分的换元法和分部积分法

由上节结果知道,计算定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 的简便方法是把它转化为求 $f(x)$ 的原函数的增量. 在第四章中,我们知道用换元积分法和分部积分法可以求出一些函数的原函数. 因此,在一定条件下,可以用换元积分法和分部积分法来计算定积分. 下面就讨论定积分的这两种计算方法.

一、定积分的换元法

为了说明如何用换元法来计算定积分,先证明下面的定理:

定理 假设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 函数 $x = \varphi(t)$ 满足条件:

- (1) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$;
- (2) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ (或 $[\beta, \alpha]$) 上具有连续导数, 且其值域 $R_\varphi = [a, b]$ ①,

则有

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (3-1)$$

公式(3-1)叫做定积分的换元公式.

证 由假设可以知道,上式两边的被积函数都是连续的,因此不仅上式两边的定积分都存在,而且由上节的定理2知道,被积函数的原函数也都存在. 所以, (3-1)式两边的定积分都可应用牛顿-莱布尼茨公式. 假设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

另一方面,记 $\Phi(t) = F[\varphi(t)]$, 它是由 $F(x)$ 与 $x = \varphi(t)$ 复合而成的函数. 由复合函数求导法则,得

$$\Phi'(t) = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = f(x) \varphi'(t) = f[\varphi(t)] \varphi'(t).$$

这表明 $\Phi(t)$ 是 $f[\varphi(t)] \varphi'(t)$ 的一个原函数. 因此有

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

又由 $\Phi(t) = F[\varphi(t)]$ 及 $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ 可知

① 当 $\varphi(t)$ 的值域 R_φ 超出 $[a, b]$, 但 $\varphi(t)$ 满足其余条件时,只要 $f(x)$ 在 R_φ 上连续,则定理的结论仍成立.

$$\Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a).$$

所以

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= F(b) - F(a) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) \\ &= \int_a^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \end{aligned}$$

这就证明了换元公式.

在定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 中的 dx , 本来是整个定积分记号中不可分割的一部分, 但由上述定理可知, 在一定条件下, 它确实可以作为微分记号来对待. 这就是说, 应用换元公式时, 如果把 $\int_a^b f(x) dx$ 中的 x 换成 $\varphi(t)$, 则 dx 就换成 $\varphi'(t) dt$, 这正好是 $x = \varphi(t)$ 的微分 dx .

应用换元公式时有两点值得注意: (1) 用 $x = \varphi(t)$ 把原来变量 x 代换成新变量 t 时, 积分限也要换成相应于新变量 t 的积分限; (2) 求出 $f[\varphi(t)] \varphi'(t)$ 的一个原函数 $\Phi(t)$ 后, 不必像计算不定积分那样再要把 $\Phi(t)$ 变换成原来变量 x 的函数, 而只要把新变量 t 的上、下限分别代入 $\Phi(t)$ 中然后相减就行了.

例 1 计算 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0).$

解 设 $x = a \sin t$, 则 $dx = a \cos t dt$,

当 $x = 0$ 时, 取 $t = 0$; 当 $x = a$ 时, 取 $t = \frac{\pi}{2}$.

于是

$$\begin{aligned} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{a^2}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}. \end{aligned}$$

换元公式也可反过来使用. 为使用方便起见, 把换元公式中左右两边对调位置, 同时把 t 改记为 x , 而 x 改记为 t , 得

$$\int_a^b f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \int_a^\beta f(t) dt.$$

这样, 我们可用 $t = \varphi(x)$ 来引入新变量 t , 而 $\alpha = \varphi(a)$, $\beta = \varphi(b)$.

例 2 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx$.

解 设 $t = \cos x$, 则 $dt = -\sin x dx$, 且

当 $x = 0$ 时, $t = 1$; 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $t = 0$.

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx = - \int_1^0 t^5 dt = \int_0^1 t^5 dt = \left[\frac{t^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

在例2中,如果我们不明显地写出新变量 t ,那么定积分的上、下限就不要变更.现在用这种记法写出计算过程如下:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin x dx &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x d(\cos x) \\ &= - \left[\frac{\cos^6 x}{6} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = - \left(0 - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

例3 计算 $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx$.

解 由于 $\sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} = \sqrt{\sin^3 x (1 - \sin^2 x)} = \sin^{\frac{3}{2}} x \cdot |\cos x|$, 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上, $|\cos x| = \cos x$; 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上, $|\cos x| = -\cos x$, 所以

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x (-\cos x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x d(\sin x) - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x d(\sin x) \\ &= \left[\frac{2}{5} \sin^{\frac{5}{2}} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{2}{5} \sin^{\frac{5}{2}} x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= \frac{2}{5} - \left(-\frac{2}{5} \right) = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

注意 如果忽略 $\cos x$ 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上非正, 而按

$$\sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} = \sin^{\frac{3}{2}} x \cos x$$

计算, 将导致错误.

例4 计算 $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx$.

解 设 $\sqrt{2x+1} = t$, 则 $x = \frac{t^2-1}{2}$, $dx = t dt$, 且

当 $x=0$ 时, $t=1$; 当 $x=4$ 时, $t=3$.

于是

$$\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}} dx = \int_1^3 \frac{\frac{t^2-1}{2} + 2}{t} t dt = \frac{1}{2} \int_1^3 (t^2 + 3) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{3} + 3t \right]_1^3 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{27}{3} + 9 \right) - \left(\frac{1}{3} + 3 \right) \right] = \frac{22}{3}.$$

例 5 证明:

(1) 若 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续且为偶函数, 则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx;$$

(2) 若 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ 上连续且为奇函数, 则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

证 因为

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx,$$

对积分 $\int_{-a}^0 f(x) dx$ 作代换 $x = -t$, 则得

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt = \int_0^a f(-x) dx,$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx. \end{aligned}$$

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数, 则

$$f(x) + f(-x) = 2f(x),$$

从而

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

(2) 若 $f(x)$ 为奇函数, 则

$$f(x) + f(-x) = 0,$$

从而

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

利用例 5 的结论, 常可简化计算偶函数、奇函数在对称于原点的区间上的定积分.

例 6 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 证明:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx;$$

$$(2) \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx, \text{ 由此计算}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

证 (1) 设 $x = \frac{\pi}{2} - t$, 则 $dx = -dt$, 且

当 $x=0$ 时, $t = \frac{\pi}{2}$; 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $t=0$.

于是

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right] dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx. \end{aligned}$$

(2) 设 $x = \pi - t$, 则 $dx = -dt$, 且

当 $x=0$ 时, $t = \pi$; 当 $x = \pi$ 时, $t=0$.

于是

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx &= - \int_{\pi}^0 (\pi - t) f[\sin(\pi - t)] dt \\ &= \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t) dt \\ &= \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) dt - \int_0^{\pi} t f(\sin t) dt \\ &= \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx - \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx, \end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

利用上述结论, 即得

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = - \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{d(\cos x)}{1 + \cos^2 x} \\ &= - \frac{\pi}{2} [\arctan(\cos x)]_0^{\pi} \\ &= - \frac{\pi}{2} \left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

例 7 设 $f(x)$ 是连续的周期函数, 周期为 T , 证明:

$$(1) \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx;$$

$$(2) \int_a^{a+nT} f(x) dx = n \int_0^T f(x) dx \quad (n \in \mathbf{N}), \text{ 由此计算}$$

$$\int_0^{n\pi} \sqrt{1 + \sin 2x} dx.$$

证 (1) 记 $\Phi(a) = \int_a^{a+T} f(x) dx$, 则

$$\Phi'(a) = \left[\int_0^{a+T} f(x) dx - \int_0^a f(x) dx \right]' = f(a+T) - f(a) = 0,$$

知 $\Phi(a)$ 与 a 无关, 因此 $\Phi(a) = \Phi(0)$, 即

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

$$(2) \int_a^{a+nT} f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+kT}^{a+kT+T} f(x) dx, \text{ 由 (1) 知}$$

$$\int_{a+kT}^{a+kT+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx,$$

因此

$$\int_a^{a+nT} f(x) dx = n \int_0^T f(x) dx.$$

由于 $\sqrt{1 + \sin 2x}$ 是以 π 为周期的周期函数, 利用上述结论, 有

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} \sqrt{1 + \sin 2x} dx &= n \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \sin 2x} dx = n \int_0^{\pi} |\sin x + \cos x| dx \\ &= \sqrt{2} n \int_0^{\pi} \left| \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right| dx = \sqrt{2} n \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} |\sin t| dt \\ &= \sqrt{2} n \int_0^{\pi} |\sin t| dt = \sqrt{2} n \int_0^{\pi} \sin t dt = 2\sqrt{2} n. \end{aligned}$$

例 8 计算 $\int_0^3 \frac{x^2}{(x^2 - 3x + 3)^2} dx$.

解 $x^2 - 3x + 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, 令 $x - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan u$ ($|u| < \frac{\pi}{2}$), 则

$$(x^2 - 3x + 3)^2 = \left(\frac{3}{4} \sec^2 u\right)^2 = \frac{9}{16} \sec^4 u, dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \sec^2 u du.$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } u = -\frac{\pi}{3}; x = 3 \text{ 时, } u = \frac{\pi}{3}.$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{x^2}{(x^2 - 3x + 3)^2} dx &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{3}{4} \tan^2 u + \frac{3\sqrt{3}}{2} \tan u + \frac{9}{4} \right) \cdot \frac{16}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos^2 u du \\ &= \frac{8}{3\sqrt{3}} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{3}{4} \tan^2 u + \frac{9}{4} \right) \cos^2 u du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin^2 u + 3 \cos^2 u) du = \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 + \cos 2u) du \\
 &= \frac{4}{\sqrt{3}} \left[2u + \frac{1}{2} \sin 2u \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}} + 1.
 \end{aligned}$$

例 9 设函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+\cos x}, & -\pi < x < 0, \\ x e^{-x^2}, & x \geq 0, \end{cases}$$

计算 $\int_1^4 f(x-2) dx$.

解 设 $x-2=t$, 则 $dx=dt$, 且

当 $x=1$ 时, $t=-1$; 当 $x=4$ 时, $t=2$.

于是

$$\begin{aligned}
 \int_1^4 f(x-2) dx &= \int_{-1}^2 f(t) dt = \int_{-1}^0 \frac{dt}{1+\cos t} + \int_0^2 t e^{-t^2} dt \\
 &= \left[\tan \frac{t}{2} \right]_{-1}^0 - \left[\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^2 = \tan \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-4} + \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

二、定积分的分部积分法

依据不定积分的分部积分法, 可得

$$\begin{aligned}
 \int_a^b u(x) v'(x) dx &= \left[\int u(x) v'(x) dx \right]_a^b \\
 &= \left[u(x) v(x) - \int v(x) u'(x) dx \right]_a^b \\
 &= [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx, \quad (3-2)
 \end{aligned}$$

简记作

$$\int_a^b uv' dx = [uv]_a^b - \int_a^b vu' dx,$$

或

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du.$$

公式(3-2)叫做定积分的分部积分公式. 公式表明原函数已经积出的部分可以先用上、下限代入.

例 10 计算 $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx &= [x \arcsin x]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + [\sqrt{1-x^2}]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1. \end{aligned}$$

例 11 计算 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$.

解 先用换元法. 令 $\sqrt{x}=t$, 则 $x=t^2$, $dx=2tdt$, 且
当 $x=0$ 时, $t=0$; 当 $x=1$ 时, $t=1$.

于是

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx &= 2 \int_0^1 t e^t dt = 2 \int_0^1 t d(e^t) = 2([te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t dt) \\ &= 2(e - [e^t]_0^1) = 2[e - (e-1)] = 2. \end{aligned}$$

例 12 证明定积分公式(见附录 IV 积分表公式 147):

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \left(= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \right) \\ &= \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, n \text{ 为正偶数,} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}, n \text{ 为大于 1 的正奇数.} \end{cases} \end{aligned}$$

证

$$\begin{aligned} I_n &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d(\cos x) \\ &= [-\cos x \sin^{n-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx. \end{aligned}$$

右端第一项等于零; 将第二项里的 $\cos^2 x$ 写成 $1 - \sin^2 x$, 并把积分分成两个, 得

$$\begin{aligned} I_n &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \\ &= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n, \end{aligned}$$

由此得

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

这个等式叫做积分 I_n 关于下标的递推公式.

如果把 n 换成 $n-2$, 那么得

$$I_{n-2} = \frac{n-3}{n-2} I_{n-4}.$$

同样地依次进行下去,直到 I_n 的下标递减到 0 或 1 为止. 于是,

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \dots \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0,$$

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \dots \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1 \quad (m=1, 2, \dots),$$

而

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1,$$

因此

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \dots \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \dots \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \quad (m=1, 2, \dots).$$

至于定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ 相等,由本节例 6(1) 即可知道,证毕.

习 题 5-3

1. 计算下列定积分:

$$(1) \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) dx;$$

$$(2) \int_{-2}^1 \frac{dx}{(11+5x)^3};$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos^3 \varphi d\varphi;$$

$$(4) \int_0^{\pi} (1 - \sin^3 \theta) d\theta;$$

$$(5) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du;$$

$$(6) \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx;$$

$$(7) \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{8-2y^2} dy;$$

$$(8) \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx;$$

$$(9) \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0);$$

$$(10) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}};$$

$$(11) \int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}};$$

$$(12) \int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}};$$

$$(13) \int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x} - 1};$$

$$(14) \int_0^{\sqrt{2}a} \frac{xdx}{\sqrt{3a^2-x^2}} \quad (a>0);$$

$$(15) \int_0^1 t e^{-\frac{t^2}{2}} dt;$$

$$(17) \int_{-2}^0 \frac{(x+2) dx}{x^2 + 2x + 2};$$

$$(19) \int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x dx;$$

$$(21) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$(23) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 2x dx;$$

$$(25) \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos 2x} dx;$$

$$(16) \int_1^{e^2} \frac{dx}{x \sqrt{1 + \ln x}};$$

$$(18) \int_0^2 \frac{x dx}{(x^2 - 2x + 2)^2};$$

$$(20) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^4 \theta d\theta;$$

$$(22) \int_{-5}^5 \frac{x^3 \sin^2 x}{x^4 + 2x^2 + 1} dx;$$

$$(24) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx;$$

$$(26) \int_0^{2\pi} |\sin(x+1)| dx.$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx.$$

3. 证明: $\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^x \frac{dt}{1+t^2} \quad (x > 0).$

4. 证明: $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx \quad (m, n \in \mathbf{N}).$

5. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $n \in \mathbf{Z}$, 证明:

$$\int_{-\frac{n}{2}}^{\frac{n+1}{2}} f(|\sin x|) dx = \int_{\frac{n}{2}}^{\frac{n+1}{2}} f(|\cos x|) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx.$$

6. 若 $f(t)$ 是连续的奇函数, 证明 $\int_0^x f(t) dt$ 是偶函数; 若 $f(t)$ 是连续的偶函数, 证明

$\int_0^x f(t) dt$ 是奇函数.

7. 计算下列定积分:

$$(1) \int_0^1 x e^{-x} dx;$$

$$(2) \int_1^e x \ln x dx;$$

$$(3) \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} t \sin \omega t dt \quad (\omega \text{ 为常数});$$

$$(4) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx;$$

$$(5) \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx;$$

$$(6) \int_0^1 x \arctan x dx;$$

$$(7) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx;$$

$$(8) \int_1^2 x \log_2 x dx;$$

$$(9) \int_0^{\pi} (x \sin x)^2 dx;$$

$$(10) \int_1^e \sin(\ln x) dx;$$

$$(11) \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx;$$

$$(12) \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{m}{2}} dx \quad (m \in \mathbf{N}_+);$$

$$(13) J_m = \int_0^{\pi} x \sin^m x dx \quad (m \in \mathbf{N}_+).$$

第四节 反常积分

在一些实际问题中,常会遇到积分区间为无穷区间,或者被积函数为无界函数的积分,它们已经不属于前面所说的定积分了.因此,我们对定积分作如下两种推广,从而形成反常积分的概念.

一、无穷限的反常积分

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续,任取 $t > a$, 作定积分 $\int_a^t f(x) dx$, 再求极限:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx, \quad (4-1)$$

这个对变上限定积分的算式(4-1)称为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $[a, +\infty)$ 上的反常积分, 记为 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, 即

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx, \quad (4-1')$$

根据算式(4-1)的结果是否存在,可引入反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛与发散的定义如下:

定义 1 (1) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续,如果极限(4-1)存在,那么称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛,并称此极限为该反常积分的值;如果极限(4-1)不存在,那么称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

类似地,设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, b]$ 上连续,任取 $t < b$, 算式

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx \quad (4-2)$$

称为函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty, b]$ 上的反常积分, 记为 $\int_{-\infty}^b f(x) dx$, 即

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx. \quad (4-2')$$

于是有

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, b]$ 上连续,如果极限(4-2)存在,那么称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ 收敛,并称此极限为该反常积分的值;如果极限(4-2)不存在,

那么称反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ 发散.

设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 反常积分 $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ 与反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 之和称为 函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的反常积分, 记为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx. \quad (4-3)$$

(3) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 如果反常积分 $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ 与反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 均收敛, 那么称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 并称反常积分 $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ 的值与反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 的值之和为反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 的值, 否则就称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

上述反常积分统称为无穷限的反常积分.

由上述定义及牛顿-莱布尼茨公式, 可得如下结果:

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的一个原函数, 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ 存在, 则反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(a);$$

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ 不存在, 则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

若记 $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$, $[F(x)]_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$, 则当 $F(+\infty)$ 存在时,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = [F(x)]_a^{+\infty};$$

当 $F(+\infty)$ 不存在时, 反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

类似地, 若在 $(-\infty, b]$ 上 $F'(x) = f(x)$, 则当 $F(-\infty)$ 存在时,

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = [F(x)]_{-\infty}^b;$$

当 $F(-\infty)$ 不存在时, 反常积分 $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ 发散.

若在 $(-\infty, +\infty)$ 内 $F'(x) = f(x)$, 则当 $F(-\infty)$ 与 $F(+\infty)$ 都存在时,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = [F(x)]_{-\infty}^{+\infty};$$

当 $F(-\infty)$ 与 $F(+\infty)$ 有一个不存在时, 反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

例 1 计算反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= [\arctan x]_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x - \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi. \end{aligned}$$

这个反常积分值的几何意义是: 当 $a \rightarrow -\infty$ 、 $b \rightarrow +\infty$ 时, 虽然图 5-9 中阴影部分向左、右无限延伸, 但其面积却有极限值 π . 简单地说, 它是位于曲线 $y = \frac{1}{1+x^2}$ 的下方, x 轴上方的图形面积.

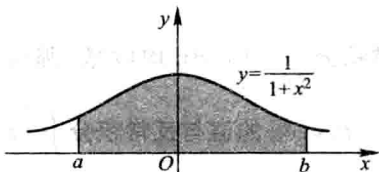


图 5-9

例 2 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} t e^{-pt} dt$, 其中 p 是常数, 且 $p > 0$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^{+\infty} t e^{-pt} dt &= \left[\int t e^{-pt} dt \right]_0^{+\infty} = \left[-\frac{1}{p} \int t d(e^{-pt}) \right]_0^{+\infty} \\ &= \left[-\frac{t}{p} e^{-pt} + \frac{1}{p} \int e^{-pt} dt \right]_0^{+\infty} \\ &= \left[-\frac{t}{p} e^{-pt} \right]_0^{+\infty} - \left[\frac{1}{p^2} e^{-pt} \right]_0^{+\infty} \\ &= -\frac{1}{p} \lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-pt} - 0 - \frac{1}{p^2} (0 - 1) = \frac{1}{p^2}. \end{aligned}$$

注意, 上式中的极限 $\lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-pt}$ 是未定式, 可用洛必达法则确定.

例 3 证明反常积分 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ ($a > 0$) 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散.

证 当 $p = 1$ 时,

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = [\ln x]_a^{+\infty} = +\infty,$$

当 $p \neq 1$ 时,

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & p < 1, \\ \frac{a^{1-p}}{p-1}, & p > 1. \end{cases}$$

因此,当 $p > 1$ 时,这反常积分收敛,其值为 $\frac{a^{1-p}}{p-1}$; 当 $p \leq 1$ 时,这反常积分发散.

二、无界函数的反常积分

现在我们把定积分推广到被积函数为无界函数的情形.

如果函数 $f(x)$ 在点 a 的任一邻域内都无界,那么点 a 称为函数 $f(x)$ 的瑕点 (也称为无界间断点). 无界函数的反常积分又称为瑕积分.

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上连续,点 a 为 $f(x)$ 的瑕点. 任取 $t > a$, 作定积分 $\int_t^b f(x) dx$, 再求极限

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx, \quad (4-4)$$

这个对变下限的定积分求极限的算式(4-4)称为函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上的反常积分, 仍然记为 $\int_a^b f(x) dx$, 即

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx. \quad (4-4')$$

根据算式(4-4)的结果是否存在,可引入反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛与发散的定义如下:

定义 2 (1) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上连续,点 a 为 $f(x)$ 的瑕点,如果极限(4-4)存在,那么称反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛,并称此极限为该反常积分的值;如果极限(4-4)不存在,那么称反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 发散.

类似地,设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b)$ 上连续,点 b 为 $f(x)$ 的瑕点. 任取 $t < b$, 算式

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx \quad (4-5)$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b)$ 上的反常积分, 仍然记为 $\int_a^b f(x) dx$, 即

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx. \quad (4-5')$$

于是有

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b)$ 上连续,点 b 为 $f(x)$ 的瑕点,如果极限(4-5)存在,那么称反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛,并称此极限为该反常积分的值;如果极限

(4-5) 不存在, 那么称反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 发散.

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, c]$ 及区间 $(c, b]$ 上连续, 点 c 为 $f(x)$ 的瑕点. 反常积分 $\int_a^c f(x) dx$ 与反常积分 $\int_c^b f(x) dx$ 之和称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的反常积分, 仍然记为 $\int_a^b f(x) dx$, 即

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (4-6)$$

(3) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, c]$ 及区间 $(c, b]$ 上连续, 点 c 为 $f(x)$ 的瑕点. 如果反常积分 $\int_a^c f(x) dx$ 与反常积分 $\int_c^b f(x) dx$ 均收敛, 那么称反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛, 并称反常积分 $\int_a^c f(x) dx$ 的值与反常积分 $\int_c^b f(x) dx$ 的值之和为反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 的值; 否则, 就称反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 发散.

计算无界函数的反常积分, 也可借助于牛顿-莱布尼茨公式.

设 $x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点, 在 $(a, b]$ 上 $F'(x)=f(x)$, 如果极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$ 存在, 那么反常积分

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = F(b) - F(a^+);$$

如果 $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$ 不存在, 那么反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 发散.

我们仍用记号 $[F(x)]_a^b$ 来表示 $F(b) - F(a^+)$, 从而形式上仍有

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b.$$

对于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, b 为瑕点的反常积分, 也有类似的计算公式, 这里不再详述.

例 4 计算反常积分

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a > 0).$$

解 因为

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = +\infty,$$

所以点 a 是瑕点, 于是

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left[\arcsin \frac{x}{a} \right]_0^a = \lim_{x \rightarrow a^-} \arcsin \frac{x}{a} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

这个反常积分值的几何意义是: 位于曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 之下, x 轴之上, 直线 $x=0$ 与 $x=a$ 之间的图形面积(图 5-10).

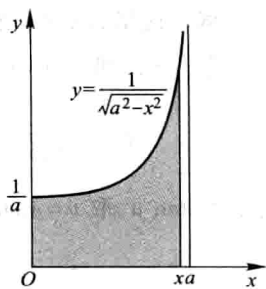


图 5-10

例 5 讨论反常积分 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ 的收敛性.

解 被积函数 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 在积分区间 $[-1, 1]$ 上除 $x=0$ 外连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$. 由于

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{x} \right) - 1 = +\infty,$$

即反常积分 $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2}$ 发散, 所以反常积分 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ 发散.

注意 如果疏忽了 $x=0$ 是被积函数的瑕点, 就会得到以下的错误结果:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -1 - 1 = -2.$$

例 6 证明反常积分 $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$ 当 $0 < q < 1$ 时收敛, 当 $q \geq 1$ 时发散.

证 当 $q=1$ 时,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q} &= \int_a^b \frac{dx}{x-a} = [\ln(x-a)]_a^b \\ &= \ln(b-a) - \lim_{x \rightarrow a^+} \ln(x-a) = +\infty. \end{aligned}$$

当 $q \neq 1$ 时,

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q} = \left[\frac{(x-a)^{1-q}}{1-q} \right]_a^b = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & 0 < q < 1, \\ +\infty, & q > 1. \end{cases}$$

因此, 当 $0 < q < 1$ 时, 这反常积分收敛, 其值为 $\frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}$; 当 $q \geq 1$ 时, 这反常积分发散.

设有反常积分 $\int_a^b f(x) dx$, 其中 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续, a 可以是 $-\infty$, b 可以是 $+\infty$, a, b 也可以是 $f(x)$ 的瑕点. 对于这样的反常积分, 在另加换元函数单调的假定下, 可以像定积分一样作换元.

例 7 求反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)^3}}$.

解 这里,积分上限为 $+\infty$,且下限 $x=0$ 为被积函数的瑕点.

令 $\sqrt{x}=t$,则 $x=t^2$, $x \rightarrow 0^+$ 时 $t \rightarrow 0$, $x \rightarrow +\infty$ 时 $t \rightarrow +\infty$.于是

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)^3} = \int_0^{+\infty} \frac{2t dt}{t(t^2+1)^{3/2}} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^{3/2}}.$$

再令 $t = \tan u$,取 $u = \arctan t$, $t=0$ 时 $u=0$, $t \rightarrow +\infty$ 时 $u \rightarrow \frac{\pi}{2}$.于是

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)^3} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 u du}{\sec^3 u} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u du = 2.$$

本例如用变换 $\frac{1}{x}=t$ 或 $\frac{1}{x+1}=t$,计算会更简单些,读者可自行解之.

习 题 5-4

1. 判定下列各反常积分的收敛性,如果收敛,计算反常积分的值:

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4};$

(2) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}};$

(3) $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx \ (a > 0);$

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)};$

(5) $\int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin \omega t dt \ (p > 0, \omega > 0);$

(6) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2};$

(7) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}};$

(8) $\int_0^2 \frac{dx}{(1-x)^2};$

(9) $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}};$

(10) $\int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{1-(\ln x)^2}}.$

2. 当 k 为何值时,反常积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 收敛? 当 k 为何值时,这反常积分发散? 又当 k 为何值时,这反常积分取得最小值?

3. 利用递推公式计算反常积分 $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx \ (n \in \mathbf{N})$.

4. 计算反常积分 $\int_0^1 \ln x dx$.

* 第五节 反常积分的审敛法 Γ 函数

反常积分的收敛性,可以通过求被积函数的原函数,然后按定义取极限,根据极限的存在与否来判定.本节中我们来建立不通过被积函数的原函数判定反常积分收敛性的判定法.

一、无有限反常积分的审敛法

定理 1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $f(x) \geq 0$. 若函数

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

在 $[a, +\infty)$ 上有上界, 则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.

事实上, 因为 $f(x) \geq 0$, $F(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调增加, 又 $F(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有上界, 故 $F(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上是单调有界的函数. 按照“ $[a, +\infty)$ 上的单调有界函数 $F(x)$ 必有极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ ”的准则, 就可知道极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$$

存在, 即反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.

根据定理 1, 对于非负函数的无有限的反常积分, 有以下的比较审敛原理:

定理 2 (比较审敛原理) 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续. 如果 $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ($a \leq x < +\infty$), 并且 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 收敛, 那么 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 也收敛; 如果 $0 \leq g(x) \leq f(x)$ ($a \leq x < +\infty$), 并且 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 发散, 那么 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 也发散.

证 设 $a < t < +\infty$, 由 $0 \leq f(x) \leq g(x)$ 及 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 收敛, 得

$$\int_a^t f(x) dx \leq \int_a^t g(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

这表明作为积分上限 t 的函数

$$F(t) = \int_a^t f(x) dx$$

在 $[a, +\infty)$ 上有上界. 由定理 1 即知反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.

如果 $0 \leq g(x) \leq f(x)$, 且 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 发散, 那么 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 必定发散. 因为如果 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 由定理的第一部分即知 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 也收敛, 这与假设相矛盾. 证毕.

由上节例 3 知道, 反常积分 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ ($a > 0$) 当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散. 因

此,取 $g(x) = \frac{A}{x^p}$ ($A > 0$), 立即可得下面的反常积分的比较审敛法.

定理 3 (比较审敛法 1) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ ($a > 0$) 上连续, 且 $f(x) \geq 0$. 如果存在常数 $M > 0$ 及 $p > 1$, 使得 $f(x) \leq \frac{M}{x^p}$ ($a \leq x < +\infty$), 那么反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛; 如果存在常数 $N > 0$, 使得 $f(x) \geq \frac{N}{x}$ ($a \leq x < +\infty$), 那么反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

例 1 判定反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$ 的收敛性.

解 由于

$$0 < \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{1}{x^{4/3}},$$

根据比较审敛法 1, 这个反常积分收敛.

以比较审敛法 1 为基础, 可以得到在应用上较为方便的极限审敛法.

定理 4 (极限审敛法 1) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $f(x) \geq 0$. 如果存在常数 $p > 1$, 使得 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x) = c < +\infty$, 那么, 反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛; 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = d > 0$ (或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = +\infty$), 那么反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

证 由假设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x) = c$ ($p > 1$). 根据极限的定义, 存在充分大的 x_1 ($x_1 \geq a, x_1 > 0$), 当 $x > x_1$ 时, 必有

$$|x^p f(x) - c| < 1,$$

由此得

$$0 \leq x^p f(x) < 1 + c.$$

令 $1 + c = M > 0$, 于是在区间 $x_1 < x < +\infty$ 内不等式 $0 \leq f(x) < \frac{M}{x^p}$ 成立. 由比较审敛法 1

知 $\int_{x_1}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 而

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^t f(x) dx \right] \\ &= \int_a^{x_1} f(x) dx + \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{x_1}^t f(x) dx = \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{+\infty} f(x) dx, \end{aligned}$$

故反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

收敛.

如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = d > 0$ (或 $+\infty$), 那么存在充分大的 x_1 , 当 $x > x_1$ 时, 必有

$$|xf(x) - d| < \frac{d}{2},$$

由此得

$$xf(x) > \frac{d}{2}.$$

(当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = +\infty$ 时, 可取任意正数作为 d .) 令 $\frac{d}{2} = N > 0$, 于是在区间 $x_1 < x < +\infty$

内不等式 $f(x) \geq \frac{N}{x}$ 成立. 根据比较审敛法 1 知 $\int_{x_1}^{+\infty} f(x) dx$ 发散, 从而反常积分

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

例 2 判定反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ 的收敛性.

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} = 1,$$

根据极限审敛法 1, 知所给反常积分收敛.

例 3 判定反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^{3/2}}{1+x^2} dx$ 的收敛性.

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{x^{3/2}}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sqrt{x}}{1+x^2} = +\infty,$$

根据极限审敛法 1, 知所给反常积分发散.

例 4 判定反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} dx$ 的收敛性.

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2},$$

根据极限审敛法 1, 知所给反常积分发散.

假定反常积分的被积函数在所讨论的区间上可取正值也可取负值, 对于这类反常积分的收敛性, 有如下的结论:

定理 5 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续. 如果反常积分

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

收敛, 那么反常积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

也收敛.

证 令 $\varphi(x) = \frac{1}{2}(f(x) + |f(x)|)$. 于是 $\varphi(x) \geq 0$, 且 $\varphi(x) \leq |f(x)|$, 而 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛, 由比较审敛法 1 即知 $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ 也收敛. 但 $f(x) = 2\varphi(x) - |f(x)|$, 因此

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = 2 \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx - \int_a^{+\infty} |f(x)| dx.$$

可见反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 是两个收敛的反常积分的差, 因此它是收敛的. 证毕.

通常称满足定理 5 条件的反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 绝对收敛. 于是, 定理 5 可简单地表达为: 绝对收敛的反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 必定收敛.

例 5 判定反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx$ (a, b 都是常数, 且 $a > 0$) 的收敛性.

解 因为 $|e^{-ax} \sin bx| \leq e^{-ax}$, 而 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$ 收敛, 根据比较审敛法 1, 反常积分 $\int_0^{+\infty} |e^{-ax} \sin bx| dx$ 收敛. 由定理 5 可知所给反常积分收敛.

二、无界函数的反常积分的审敛法

对于无界函数的反常积分, 也有类似的审敛法.

由上节例 6 知道, 反常积分

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$$

当 $q < 1$ 时收敛, 当 $q \geq 1$ 时发散. 于是, 与定理 3、定理 4 类似可得如下两个审敛法:

定理 6 (比较审敛法 2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上连续, 且 $f(x) \geq 0, x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点. 如果存在常数 $M > 0$ 及 $q < 1$, 使得

$$f(x) \leq \frac{M}{(x-a)^q} \quad (a < x \leq b),$$

那么反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛; 如果存在常数 $N > 0$, 使得

$$f(x) \geq \frac{N}{x-a} \quad (a < x \leq b),$$

那么反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 发散.

定理 7 (极限审敛法 2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a, b]$ 上连续, 且 $f(x) \geq 0, x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点. 如果存在常数 $0 < q < 1$, 使得

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (x-a)^q f(x)$$

存在, 那么反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛; 如果

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (x-a) f(x) = d > 0 \quad (\text{或 } \lim_{x \rightarrow a^+} (x-a) f(x) = +\infty),$$

那么反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 发散.

例 6 判定反常积分 $\int_1^3 \frac{dx}{\ln x}$ 的收敛性.

解 这里 $x=1$ 是被积函数的瑕点. 由洛必达法则知

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \frac{1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1 > 0,$$

根据极限审敛法 2, 所给反常积分发散.

例 7 判定椭圆积分

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad (k^2 < 1)$$

的收敛性.

解 这里 $x=1$ 是被积函数的瑕点. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}},$$

根据极限审敛法 2, 所给反常积分收敛.

对于无界函数的反常积分, 当被积函数在所讨论的区间上可取正值也可取负值时, 有与定理 5 相类似的结论, 在此不再详述.

例 8 判定反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} dx$ 的收敛性.

解 因为 $\left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$, 而 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 收敛, 根据比较审敛法 2, 反常积分 $\int_0^1 \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} \right| dx$ 收敛, 从而反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} dx$ 也收敛.

三、 Γ 函数

下面介绍在理论上和应用上都有重要意义的 Γ 函数. 这函数的定义是

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0). \quad (5-1)$$

首先讨论(5-1)式右端积分的收敛性问题. 这个积分的积分区间为无穷, 又当 $s-1 < 0$ 时 $x=0$ 是被积函数的瑕点. 为此, 分别讨论下列两个积分

$$I_1 = \int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

的收敛性.

先讨论 I_1 . 当 $s \geq 1$ 时, I_1 是定积分; 当 $0 < s < 1$ 时, 因为

$$e^{-x} \cdot x^{s-1} = \frac{1}{e^x} \frac{1}{x^{1-s}} < \frac{1}{x^{1-s}},$$

而 $1-s < 1$, 根据比较审敛法 2, 反常积分 I_1 收敛.

再讨论 I_2 . 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot (e^{-x} x^{s-1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{s+1}}{e^x} = 0,$$

根据极限审敛法 1, I_2 也收敛.

由以上讨论即得反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$ 对 $s > 0$ 均收敛. Γ 函数的图形如图 5-11 所示.

其次讨论 Γ 函数的几个重要性质.

1. 递推公式 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad (s > 0)$.

证 应用分部积分法, 有

$$\begin{aligned} \Gamma(s+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s dx = - \int_0^{+\infty} x^s d(e^{-x}) \\ &= [-x^s e^{-x}]_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx = s\Gamma(s), \end{aligned}$$

其中 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^s e^{-x} = 0$ 可由洛必达法则求得.

$$\text{显然, } \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

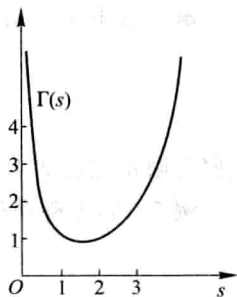


图 5-11

反复运用递推公式,便有

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1,$$

$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2!,$$

$$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3!,$$

.....

一般地,对任何正整数 n ,有

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

所以,我们可以把 Γ 函数看成是阶乘的推广.

2. 当 $s \rightarrow 0^+$ 时, $\Gamma(s) \rightarrow +\infty$.

证 因为

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}, \quad \Gamma(1) = 1,$$

所以当 $s \rightarrow 0^+$ 时, $\Gamma(s) \rightarrow +\infty$ ①.

$$3. \Gamma(s) \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} \quad (0 < s < 1).$$

这个公式称为余元公式,在此我们不作证明.

当 $s = \frac{1}{2}$ 时,由余元公式可得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

4. 在 $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$ 中,作代换 $x = u^2$,有

$$\Gamma(s) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{2s-1} du. \quad (5-2)$$

再令 $2s-1=t$ 或 $s = \frac{1+t}{2}$, 即有

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^t du = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1+t}{2}\right) \quad (t > -1).$$

上式左端是实际应用中常见的积分,它的值可以通过上式用 Γ 函数计算出来.

在(5-2)中,令 $s = \frac{1}{2}$, 得

$$2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

从而

① Γ 函数在 $s > 0$ 时连续.

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

上式左端的积分是在概率论中常用的积分.

* 习 题 5-5

1. 判定下列反常积分的收敛性:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx;$$

$$(2) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt[3]{x^2 + 1}};$$

$$(3) \int_1^{+\infty} \sin \frac{1}{x^2} dx;$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x|\sin x|};$$

$$(5) \int_1^{+\infty} \frac{x \arctan x}{1+x^3} dx;$$

$$(6) \int_1^2 \frac{dx}{(\ln x)^3};$$

$$(7) \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^4}} dx;$$

$$(8) \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}}.$$

2. 设反常积分 $\int_1^{+\infty} f^2(x) dx$ 收敛, 证明反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 绝对收敛.

3. 用 Γ 函数表示下列积分, 并指出这些积分的收敛范围:

$$(1) \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx \quad (n > 0);$$

$$(2) \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x} \right)^p dx;$$

$$(3) \int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n} dx \quad (n \neq 0).$$

4. 证明 $\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k-1)\sqrt{\pi}}{2^k}$, 其中 $k \in \mathbf{N}_+$.

5. 证明以下各式 (其中 $n \in \mathbf{N}_+$):

$$(1) 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2n = 2^n \Gamma(n+1); \quad (2) 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1) = \frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1} \Gamma(n)};$$

$$(3) \sqrt{\pi} \Gamma(2n) = 2^{2n-1} \Gamma(n) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (\text{勒让德 (Legendre) 倍量公式}).$$

总 习 题 五

1. 填空:

(1) 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的 _____ 条件, 而 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积的 _____ 条件;

(2) 对 $[a, +\infty)$ 上非负、连续的函数 $f(x)$, 它的变上限积分 $\int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界是反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛的 _____ 条件;

* (3) 绝对收敛的反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 一定 _____;

(4) 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义且 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上可积, 此时积分 $\int_a^b f(x) dx$ _____ 存在.

(5) 设函数 $f(x)$ 连续, 则 $\frac{d}{dx} \int_0^x tf(t^2 - x^2) dt =$ _____.

2. 以下两题中给出了四个结论, 从中选出一个正确的结论:

(1) 设 $I = \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1+x}} dx$, 则估计 I 值的大致范围为 ();

(A) $0 \leq I \leq \frac{\sqrt{2}}{10}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{10} \leq I \leq \frac{1}{5}$

(C) $\frac{1}{5} < I < 1$ (D) $I \geq 1$

(2) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, 则必有 ().

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数

3. 回答下列问题:

(1) 设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) \geq g(x)$, 则 $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ 在几何上表示什么?

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) \geq 0$, 则 $\int_a^b \pi f^2(x) dx$ 在几何上表示什么?

(3) 如果在时刻 t 以 $\varphi(t)$ 的流量 (单位时间内流过的流体的体积或质量) 向一水池注水, 那么 $\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) dt$ 表示什么?

(4) 如果某国人口增长的速率为 $u(t)$, 那么 $\int_{t_1}^{t_2} u(t) dt$ 表示什么?

(5) 如果一公司经营某种产品的边际利润函数为 $P'(x)$, 那么 $\int_{1000}^{2000} P'(x) dx$ 表示什么?

* 4. 利用定积分的定义计算下列极限:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \frac{i}{n}}$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} (p > 0)$.

5. 求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x}{x-a} \int_a^x f(t) dt$, 其中 $f(x)$ 连续; (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

6. 下列计算是否正确, 试说明理由:

$$(1) \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = - \int_{-1}^1 \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \left[-\arctan \frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -\frac{\pi}{2};$$

$$(2) \text{ 因为 } \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+x+1} \stackrel{x=\frac{1}{t}}{=} \int_{-1}^1 \frac{dt}{t^2+t+1}, \text{ 所以}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+x+1} = 0;$$

$$(3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \frac{x}{1+x^2} dx = 0.$$

7. 设 $x > 0$, 证明:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

8. 设 $p > 0$, 证明:

$$\frac{p}{p+1} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^p} < 1.$$

9. 设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上均连续, 证明:

$$(1) \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx \quad (\text{柯西-施瓦茨不等式});$$

$$(2) \left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{闵可夫斯基不等式}).$$

10. 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$. 证明:

$$\int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b-a)^2.$$

11. 计算下列积分:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx;$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx;$$

$$(3) \int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a > 0);$$

$$(4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin 2x} dx;$$

$$(5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos^2 x};$$

$$(6) \int_0^{\pi} x \sqrt{\cos^2 x - \cos^4 x} dx;$$

$$(7) \int_0^{\pi} x^2 |\cos x| dx;$$

$$(8) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{x+1} + e^{3-x}};$$

$$(9) \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x^2 - x|}};$$

$$(10) \int_0^x \max\{t^3, t^2, 1\} dt.$$

12. 设 $f(x)$ 为连续函数, 证明:

$$\int_0^x f(t)(x-t) dt = \int_0^x \left(\int_0^t f(u) du \right) dt.$$

13. 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$,

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + \int_b^x \frac{dt}{f(t)}, \quad x \in [a, b].$$

证明:

- (1) $F'(x) \geq 2$;
 (2) 方程 $F(x) = 0$ 在区间 (a, b) 内有且仅有一个根.

14. 求 $\int_0^2 f(x-1) dx$, 其中

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^x}, & x < 0, \\ \frac{1}{1+x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

15. 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续且不变号. 证明至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使下式成立

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx \quad (\text{积分第一中值定理}).$$

- * 16. 证明: $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx = \frac{n-1}{2} \int_0^{+\infty} x^{n-2} e^{-x^2} dx \quad (n > 1)$, 并用它证明:

$$\int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma(n+1) \quad (n \in \mathbf{N}).$$

- * 17. 判定下列反常积分的收敛性:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} dx;$$

$$(2) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}};$$

$$(3) \int_2^{+\infty} \frac{\cos x}{\ln x} dx;$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(x-1)(x-2)}}.$$

- * 18. 计算下列反常积分:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx;$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} \quad (\alpha \geq 0).$$

第六章 定积分的应用

本章中我们将应用前面学过的定积分理论来分析和解决一些几何、物理中的问题,其目的不仅在于建立计算这些几何、物理量的公式,更重要的还在于介绍运用元素法将一个量表达成为定积分的分析方法.

第一节 定积分的元素法

在定积分的应用中,经常采用所谓元素法.为了说明这种方法,我们先回顾一下第五章中讨论过的曲边梯形的面积问题.

设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续且 $f(x) \geq 0$, 求以曲线 $y=f(x)$ 为曲边、底为 $[a, b]$ 的曲边梯形的面积 A . 把这个面积 A 表示为定积分

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

的步骤是:

(1) 用任意一组分点把区间 $[a, b]$ 分成长度为 Δx_i ($i=1, 2, \dots, n$) 的 n 个小区间,相应地把曲边梯形分成 n 个窄曲边梯形,第 i 个窄曲边梯形的面积设为 ΔA_i ,于是有

$$A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i;$$

(2) 计算 ΔA_i 的近似值

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i) \Delta x_i \quad (x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i);$$

(3) 求和,得 A 的近似值

$$A \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i;$$

(4) 求极限,记 $\lambda = \max \{ \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n \}$, 得

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

在上述问题中我们注意到,所求量(即面积 A)与区间 $[a, b]$ 有关.如果把区间 $[a, b]$ 分成许多部分区间,那么所求量相应地分成许多部分量(即 ΔA_i),而所求量等于所有部分量之和(即 $A = \sum_{i=1}^n \Delta A_i$),这一性质称为所求量对于区间 $[a, b]$ 具有可加性.此外,以 $f(\xi_i) \Delta x_i$ 近似代替部分量 ΔA_i 时,要求它们只相差一

个比 Δx_i 高阶的无穷小, 以使和式 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 的极限是 A 的精确值, 从而 A 可以表示为定积分

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

在引出 A 的积分表达式的四个步骤中, 主要的是第二步, 这一步是要确定 ΔA_i 的近似值 $f(\xi_i) \Delta x_i$, 使得

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

在实用上, 为了简便起见, 省略下标 i , 用 ΔA 表示任一小区间 $[x, x+dx]$ 上的窄曲边梯形的面积, 这样,

$$A = \sum \Delta A.$$

取 $[x, x+dx]$ 的左端点 x 为 ξ , 以点 x 处的函数值 $f(x)$ 为高, dx 为底的矩形的面积 $f(x) dx$ 为 ΔA 的近似值 (如图 6-1 阴影部分所示), 即

$$\Delta A \approx f(x) dx.$$

上式右端 $f(x) dx$ 叫做面积元素, 记为 $dA = f(x) dx$. 于是

$$A \approx \sum f(x) dx,$$

因此

$$A = \lim \sum f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

一般地, 如果某一实际问题中的所求量 U 符合下列条件:

(1) U 是与一个变量 x 的变化区间 $[a, b]$ 有关的量;

(2) U 对于区间 $[a, b]$ 具有可加性, 就是说, 如果把区间 $[a, b]$ 分成许多部分区间, 则 U 相应地分成许多部分量, 而 U 等于所有部分量之和;

(3) 部分量 ΔU_i 的近似值可表示为 $f(\xi_i) \Delta x_i$, 那么就可考虑用定积分来表达这个量 U . 通常写出这个量 U 的积分表达式的步骤是:

1) 根据问题的具体情况, 选取一个变量例如 x 为积分变量, 并确定它的变化区间 $[a, b]$;

2) 设想把区间 $[a, b]$ 分成 n 个小区间, 取其中任一小区间并记作 $[x, x+dx]$, 求出相应于这个小区间的部分量 ΔU 的近似值. 如果 ΔU 能近似地表示为

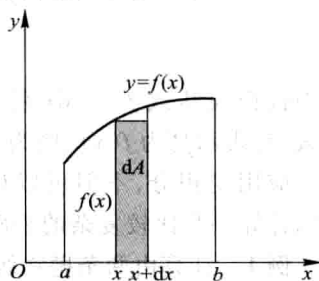


图 6-1

$[a, b]$ 上的一个连续函数在 x 处的值 $f(x)$ 与 dx 的乘积^①, 就把 $f(x)dx$ 称为量 U 的元素且记作 dU , 即

$$dU = f(x)dx;$$

3) 以所求量 U 的元素 $f(x)dx$ 为被积表达式, 在区间 $[a, b]$ 上作定积分, 得

$$U = \int_a^b f(x)dx.$$

这就是所求量 U 的积分表达式.

这个方法通常叫做元素法. 下面两节中我们将应用这个方法来讨论几何、物理中的一些问题.

第二节 定积分在几何学上的应用

一、平面图形的面积

1. 直角坐标情形

在第五章中我们已经知道, 由曲线 $y=f(x)$ ($f(x) \geq 0$) 及直线 $x=a$, $x=b$ ($a < b$) 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积 A 是定积分

$$A = \int_a^b f(x)dx,$$

其中被积表达式 $f(x)dx$ 就是直角坐标下的面积元素, 它表示高为 $f(x)$ 、底为 dx 的一个矩形面积.

应用定积分, 不但可以计算曲边梯形面积, 还可以计算一些比较复杂的平面图形的面积.

例 1 计算由两条抛物线: $y^2=x$ 、 $y=x^2$ 所围成的图形的面积.

解 这两条抛物线所围成的图形如图 6-2 所示. 为了具体定出图形的所在范围, 先求出这两条抛物线的交点. 为此, 解方程组

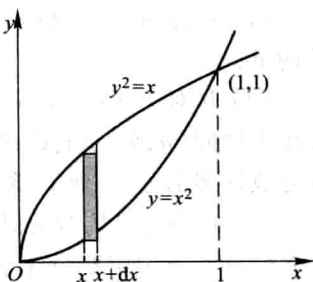


图 6-2

^① 这里 ΔU 与 $f(x)dx$ 相差一个比 dx 高阶的无穷小.

$$\begin{cases} y^2 = x, \\ y = x^2, \end{cases}$$

得到两个解

$$x=0, y=0 \quad \text{及} \quad x=1, y=1.$$

即这两抛物线的交点为 $(0,0)$ 及 $(1,1)$, 从而知道这图形在直线 $x=0$ 与 $x=1$ 之间.

取横坐标 x 为积分变量, 它的变化区间为 $[0,1]$. 相应于 $[0,1]$ 上的任一小区间 $[x, x+dx]$ 的窄条的面积近似于高为 $\sqrt{x}-x^2$ 、底为 dx 的窄矩形的面积, 从而得到面积元素

$$dA = (\sqrt{x} - x^2) dx.$$

以 $(\sqrt{x} - x^2) dx$ 为被积表达式, 在闭区间 $[0,1]$ 上作定积分, 便得所求面积为

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

例 2 计算抛物线 $y^2 = 2x$ 与直线 $y = x - 4$ 所围成的图形的面积.

解 这个图形如图 6-3 所示. 为了定出这图形所在的范围, 先求出所给抛物线和直线的交点. 解方程组

$$\begin{cases} y^2 = 2x, \\ y = x - 4, \end{cases}$$

得交点 $(2, -2)$ 和 $(8, 4)$, 从而知道这图形在直线 $y = -2$ 及 $y = 4$ 之间.

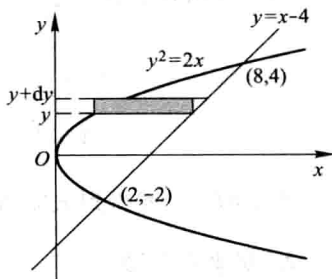


图 6-3

现在, 选取纵坐标 y 为积分变量, 它的变化区间为 $[-2, 4]$ (读者可以思考一下, 取横坐标 x 为积分变量, 有什么不方便的地方). 相应于 $[-2, 4]$ 上任一小区间 $[y, y+dy]$ 的窄条面积近似于高为 dy 、底为 $(y+4) - \frac{1}{2}y^2$ 的窄矩形的面积, 从而得到面积元素

$$dA = \left(y + 4 - \frac{1}{2}y^2 \right) dy.$$

以 $\left(y + 4 - \frac{1}{2}y^2 \right) dy$ 为被积表达式, 在闭区间 $[-2, 4]$ 上作定积分, 便得所求的面积为

$$A = \int_{-2}^4 \left(y + 4 - \frac{1}{2}y^2 \right) dy = \left[\frac{y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{6} \right]_{-2}^4 = 18.$$

由例 2 可以看到, 积分变量选得适当, 可使计算方便.

例 3 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所围成的图形的面积.

解 该椭圆关于两坐标轴都对称(图6-4), 所以椭圆所围成的图形的面积为

$$A = 4A_1,$$

其中 A_1 为该椭圆在第一象限部分与两坐标轴所围图形的面积, 因此

$$A = 4A_1 = 4 \int_0^a y dx.$$

利用椭圆的参数方程

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t \end{cases} \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

应用定积分换元法, 令 $x = a \cos t$, 则

$$y = b \sin t, \quad dx = -a \sin t dt.$$

当 x 由 0 变到 a 时, t 由 $\frac{\pi}{2}$ 变到 0, 所以

$$\begin{aligned} A &= 4 \int_{\pi/2}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = -4ab \int_{\pi/2}^0 \sin^2 t dt \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = 4ab \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi ab. \end{aligned}$$

当 $a = b$ 时, 就得到大家所熟悉的圆面积的公式 $A = \pi a^2$.

2. 极坐标情形

某些平面图形, 用极坐标来计算它们的面积比较方便.

设由曲线 $\rho = \rho(\theta)$ 及射线 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 围成一图形(简称为曲边扇形), 现在要计算它的面积(图6-5). 这里, $\rho(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 且 $\rho(\theta) \geq 0, 0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$.

由于当 θ 在 $[\alpha, \beta]$ 上变动时, 极径 $\rho = \rho(\theta)$ 也随之变动, 因此所求图形的面积不能直接利用扇形面积的公式 $A = \frac{1}{2} R^2 \theta$ 来计算.

取极角 θ 为积分变量, 它的变化区间为 $[\alpha, \beta]$. 相应于任一小区间 $[\theta, \theta + d\theta]$ 的窄曲边扇形的面积可以用半径为 $\rho = \rho(\theta)$ 、中心角为 $d\theta$ 的扇形的面积来近似代替, 从而得到这窄曲边扇形面积的近似值, 即曲边扇形的面积元素

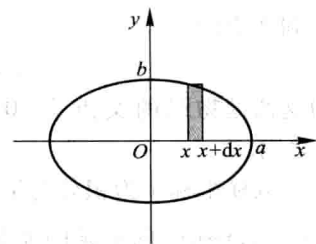


图 6-4

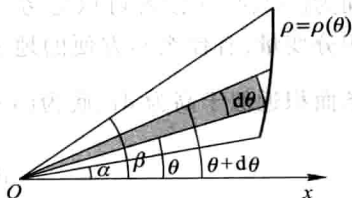


图 6-5

$$dA = \frac{1}{2} [\rho(\theta)]^2 d\theta.$$

以 $\frac{1}{2} [\rho(\theta)]^2 d\theta$ 为被积表达式, 在闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上作定积分, 使得所求曲边扇形的面积为

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [\rho(\theta)]^2 d\theta.$$

例4 计算阿基米德螺线

$$\rho = a\theta \quad (a > 0)$$

上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形(图 6-6)的面积.

解 在指定的这段螺线上, θ 的变化区间为 $[0, 2\pi]$. 相应于 $[0, 2\pi]$ 上任一小区间 $[\theta, \theta + d\theta]$ 的窄曲边扇形的面积近似于半径为 $a\theta$ 、中心角为 $d\theta$ 的扇形的面积, 从而得到面积元素

$$dA = \frac{1}{2} (a\theta)^2 d\theta.$$

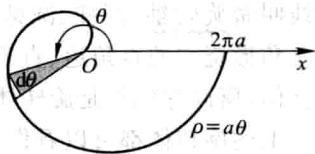


图 6-6

于是所求面积为

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2} \theta^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \left[\frac{\theta^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3} a^2 \pi^3.$$

例5 计算心形线

$$\rho = a(1 + \cos \theta) \quad (a > 0)$$

所围成的图形的面积.

解 心形线所围成的图形如图 6-7 所示. 这个图形对称于极轴, 因此所求图形的面积 A 是极轴以上部分图形面积 A_1 的 2 倍.

对于极轴以上部分的图形, θ 的变化区间为 $[0, \pi]$. 相应于 $[0, \pi]$ 上任一小区间 $[\theta, \theta + d\theta]$ 的窄曲边扇形的面积近似于半径为 $a(1 + \cos \theta)$ 、中心角为 $d\theta$ 的扇形的面积. 从而得到面积元素

$$dA = \frac{1}{2} a^2 (1 + \cos \theta)^2 d\theta,$$

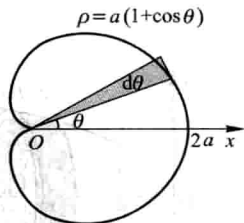


图 6-7

于是

$$A_1 = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} a^2 (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi} (1 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a^2}{2} \int_0^\pi \left(\frac{3}{2} + 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta \right) d\theta \\
 &= \frac{a^2}{2} \left[\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^\pi = \frac{3}{4}\pi a^2,
 \end{aligned}$$

因而所求面积为

$$A = 2A_1 = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

二、体积

1. 旋转体的体积

旋转体就是由一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体. 这直线叫做旋转轴. 圆柱、圆锥、圆台、球可以分别看成是由矩形绕它的一条边、直角三角形绕它的直角边、直角梯形绕它的直角腰、半圆绕它的直径旋转一周而成的立体, 所以它们都是旋转体.

上述旋转体都可以看作是由连续曲线 $y=f(x)$ 、直线 $x=a$ 、 $x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成的立体. 现在我们考虑用定积分来计算这种旋转体的体积.

取横坐标 x 为积分变量, 它的变化区间为 $[a, b]$. 相应于 $[a, b]$ 上的任一小区间 $[x, x+dx]$ 的窄曲边梯形绕 x 轴旋转而成的薄片的体积近似于以 $f(x)$ 为底半径、 dx 为高的扁圆柱体的体积(图 6-8), 即体积元素

$$dV = \pi [f(x)]^2 dx.$$

以 $\pi [f(x)]^2 dx$ 为被积表达式, 在闭区间 $[a, b]$ 上作定积分, 便得所求旋转体体积为

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx.$$

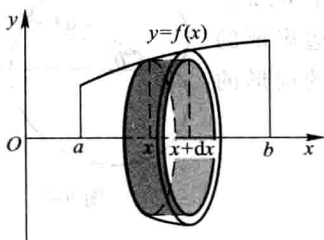


图 6-8

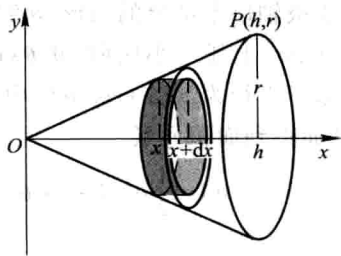


图 6-9

例 6 连接坐标原点 O 及点 $P(h, r)$ 的直线、直线 $x=h$ 及 x 轴围成一个直角

三角形(图 6-9). 将它绕 x 轴旋转一周构成一个底半径为 r 、高为 h 的圆锥体. 计算这圆锥体的体积.

解 过原点 O 及点 $P(h, r)$ 的直线方程为

$$y = \frac{r}{h}x.$$

取横坐标 x 为积分变量, 它的变化区间为 $[0, h]$. 圆锥体中相应于 $[0, h]$ 上任一小区间 $[x, x+dx]$ 的薄片的体积近似于底半径为 $\frac{r}{h}x$ 、高为 dx 的扁圆柱体的体积, 即体积元素

$$dV = \pi \left[\frac{r}{h}x \right]^2 dx.$$

于是所求圆锥体的体积为

$$V = \int_0^h \pi \left(\frac{r}{h}x \right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

例 7 计算由椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

所围成的图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体(叫做旋转椭球体)的体积.

解 这个旋转椭球体也可以看作是由半个椭圆

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

及 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转一周而成的立体.

取 x 为积分变量, 它的变化区间为 $[-a, a]$. 旋转椭球体中相应于 $[-a, a]$ 上任一小区间 $[x, x+dx]$ 的薄片的体积, 近似于底半

径为 $\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ 、高为 dx 的扁圆柱体的体积

(图 6-10), 即体积元素

$$dV = \frac{\pi b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx.$$

于是所求旋转椭球体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^a \pi \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx = \frac{2\pi b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx \\ &= 2\pi \frac{b^2}{a^2} \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{4}{3} \pi a b^2. \end{aligned}$$

当 $a=b$ 时, 旋转椭球体就成为半径为 a 的球, 它的体积为 $\frac{4}{3} \pi a^3$.

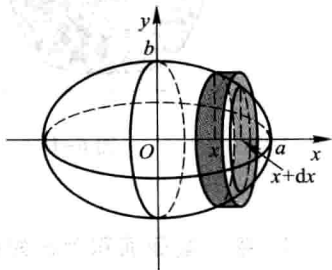


图 6-10

用与上面类似的方法可以推出:由曲线 $x=\varphi(y)$ 、直线 $y=c$ 、 $y=d$ ($c<d$) 与 y 轴所围成的曲边梯形,绕 y 轴旋转一周而成的旋转体(图 6-11)的体积为

$$V=\pi \int_c^d [\varphi(y)]^2 dy.$$

例 8 计算由摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ 相应于 $0 \leq t \leq 2\pi$ 的一拱与直线 $y=0$ 所围成的图形分别绕 x 轴、 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

解 按旋转体的体积公式,所述图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V_x &= \int_0^{2\pi a} \pi y^2(x) dx = \pi \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 \cdot a(1-\cos t) dt \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t) dt = 5\pi^2 a^3. \end{aligned}$$

所述图形绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积可看成平面图形 $OABC$ 与 OBC (图 6-12) 分别绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积之差. 因此所求的体积为

$$\begin{aligned} V_y &= \int_0^{2a} \pi x_2^2(y) dy - \int_0^{2a} \pi x_1^2(y) dy \\ &= \pi \int_{2\pi}^{\pi} a^2(t-\sin t)^2 \cdot a \sin t dt - \pi \int_0^{\pi} a^2(t-\sin t)^2 \cdot a \sin t dt \\ &= -\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t-\sin t)^2 \sin t dt = 6\pi^3 a^3. \end{aligned}$$

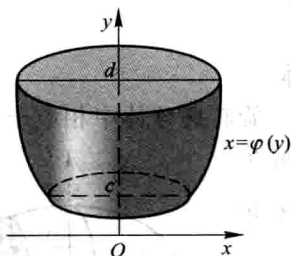


图 6-11

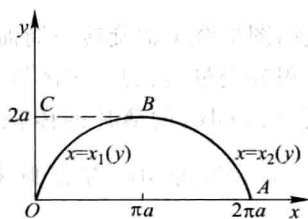


图 6-12

2. 平行截面面积为已知的立体的体积

从计算旋转体体积的过程中可以看出:如果一个立体不是旋转体,但却知道该立体上垂直于一定轴的各个截面的面积,那么,这个立体的体积也可以用定积分来计算.

如图 6-13 所示,取上述定轴为 x 轴,并设该立体在过点 $x=a$ 、 $x=b$ 且垂直于 x 轴的两个平面之间. 以 $A(x)$ 表示过点 x 且垂直于 x 轴的截面面积. 假定 $A(x)$

为已知的 x 的连续函数. 这时, 取 x 为积分变量, 它的变化区间为 $[a, b]$; 立体中相应于 $[a, b]$ 上任一小区间 $[x, x+dx]$ 的一薄片的体积, 近似于底面积为 $A(x)$ 、高为 dx 的扁柱体的体积, 即体积元素

$$dV = A(x) dx.$$

以 $A(x) dx$ 为被积表达式, 在闭区间 $[a, b]$ 上作定积分, 便得所求立体的体积

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

例 9 一平面经过半径为 R 的圆柱体的底圆中心, 并与底面交成角 α (图 6-14). 计算这平面截圆柱体所得立体的体积.

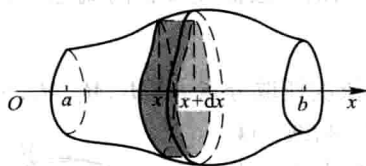


图 6-13

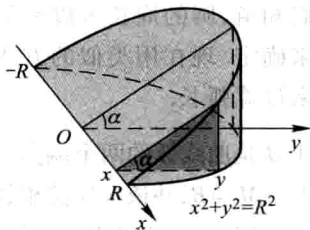


图 6-14

解 取这平面与圆柱体的底面的交线为 x 轴, 底面上过圆中心、且垂直于 x 轴的直线为 y 轴. 那么, 底圆的方程为 $x^2 + y^2 = R^2$. 立体中过 x 轴上的点 x 且垂直于 x 轴的截面是一个直角三角形. 它的两条直角边的长分别为 y 及 $y \tan \alpha$, 即 $\sqrt{R^2 - x^2}$ 及 $\sqrt{R^2 - x^2} \tan \alpha$. 因而截面积为 $A(x) = \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \tan \alpha$, 于是所求立体体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^R \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \tan \alpha dx = \int_0^R (R^2 - x^2) \tan \alpha dx \\ &= \tan \alpha \left[R^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^R = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha. \end{aligned}$$

例 10 求以半径为 R 的圆为底、平行且等于底圆直径的线段为顶、高为 h 的正劈锥体的体积.

解 取底圆所在的平面为 xOy 平面, 圆心 O 为原点, 并使 x 轴与正劈锥的顶平行 (图 6-15). 底圆的方程为 $x^2 + y^2 = R^2$. 过 x 轴上的点 x ($-R \leq x \leq R$) 作垂直于 x 轴的平面, 截正劈锥体得等腰三角形. 这截面的面积为

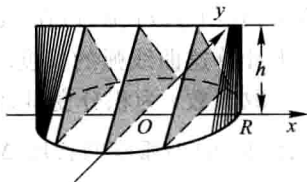


图 6-15

$$A(x) = h \cdot y = h \sqrt{R^2 - x^2},$$

于是所求正劈锥体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_{-R}^R A(x) dx = h \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = 2h \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx \\ &= 2R^2 h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi R^2 h}{2}. \end{aligned}$$

由此可知正劈锥体的体积等于同底同高的圆柱体体积的一半.

三、平面曲线的弧长

我们知道,圆的周长可以利用圆的内接正多边形的周长当边数无限增多时的极限来确定.现在用类似的方法来建立平面的连续曲线弧长的概念,从而应用定积分来计算弧长.

设 A, B 是曲线弧的两个端点. 在弧 $\widehat{AB}$ 上依次任取分点 $A=M_0, M_1, M_2, \dots, M_{i-1}, M_i, \dots, M_{n-1}, M_n=B$, 并依次连接相邻的分点得一折线 (图 6-16). 当分点的数目无限增加且每个小段 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 都缩向一点时, 如果此折线的长 $\sum_{i=1}^n |M_{i-1}M_i|$ 的极限存在, 那么称此极限为 曲线弧 $\widehat{AB}$ 的弧长, 并称此曲线弧 $\widehat{AB}$ 是 可求长的.

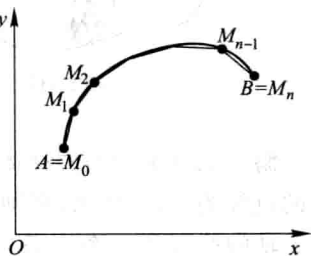


图 6-16

对光滑的曲线弧 (参看第 170 页上的脚注), 有如下结论:

定理 光滑曲线弧是可求长的.

这个定理我们不加证明. 由于光滑曲线弧是可求长的, 故可应用定积分来计算弧长. 下面我们利用定积分的元素法来讨论平面光滑曲线弧长的计算公式.

设曲线弧由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

给出, 其中 $\varphi(t), \psi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有连续导数, 且 $\varphi'(t), \psi'(t)$ 不同时为零. 现在来计算这曲线弧的长度.

取参数 t 为积分变量, 它的变化区间为 $[\alpha, \beta]$. 相应于 $[\alpha, \beta]$ 上任一小区间 $[t, t+dt]$ 的小弧段的长度 Δs 近似等于对应的弦的长度 $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, 因为

$$\Delta x = \varphi(t+dt) - \varphi(t) \approx dx = \varphi'(t) dt,$$

$$\Delta y = \psi(t+dt) - \psi(t) \approx dy = \psi'(t) dt,$$

所以, Δs 的近似值 (弧微分) 即弧长元素为

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\varphi'^2(t)(dt)^2 + \psi'^2(t)(dt)^2} \\ &= \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt. \end{aligned}$$

于是所求弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

当曲线弧由直角坐标方程

$$y=f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

给出, 其中 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有一阶连续导数, 这时曲线弧有参数方程

$$\begin{cases} x=x, \\ y=f(x) \end{cases} \quad (a \leq x \leq b),$$

从而所求的弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2} dx.$$

当曲线弧由极坐标方程

$$\rho=\rho(\theta) \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta)$$

给出, 其中 $\rho(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有连续导数, 则由直角坐标与极坐标的关系可得

$$\begin{cases} x=x(\theta)=\rho(\theta)\cos\theta, \\ y=y(\theta)=\rho(\theta)\sin\theta \end{cases} \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta),$$

这就是以极角 θ 为参数的曲线弧的参数方程. 于是, 弧长元素为

$$ds = \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)} d\theta = \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta,$$

从而所求弧长为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta.$$

例 11 计算曲线 $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ 上相应于 $a \leq x \leq b$ 的一段弧 (图 6-17) 的长度.

解 因 $y' = x^{1/2}$, 从而弧长元素

$$ds = \sqrt{1+(x^{1/2})^2} dx = \sqrt{1+x} dx.$$

因此, 所求弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \sqrt{1+x} dx = \left[\frac{2}{3}(1+x)^{3/2} \right]_a^b \\ &= \frac{2}{3}[(1+b)^{3/2} - (1+a)^{3/2}]. \end{aligned}$$

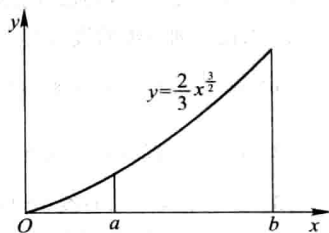


图 6-17

例 12 计算摆线 (图 6-18)

$$\begin{cases} x=a(\theta-\sin\theta), \\ y=a(1-\cos\theta) \end{cases}$$