

的一拱($0 \leq \theta \leq 2\pi$)的长度.

解 弧长元素为

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta} d\theta \\ &= a\sqrt{2(1-\cos\theta)} d\theta = 2a\sin\frac{\theta}{2} d\theta. \end{aligned}$$

从而,所求弧长

$$s = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{\theta}{2} d\theta = 2a \left[-2\cos\frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = 8a.$$

例 13 求阿基米德螺线 $\rho = a\theta$ ($a > 0$) 相应于 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 一段 (图 6-19) 的弧长.

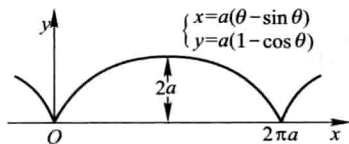


图 6-18

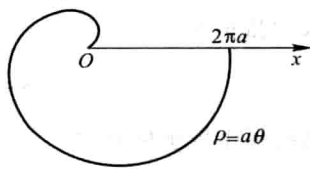


图 6-19

解 弧长元素为

$$ds = \sqrt{a^2\theta^2 + a^2} d\theta = a\sqrt{1+\theta^2} d\theta,$$

于是所求弧长为

$$s = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\theta^2} d\theta = \frac{a}{2} [2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})].$$

习 题 6-2

1. 求图 6-20 中各阴影部分的面积.

2. 求由下列各组曲线所围成的图形的面积:

(1) $y = \frac{1}{2}x^2$ 与 $x^2 + y^2 = 8$ (两部分都要计算);

(2) $y = \frac{1}{x}$ 与直线 $y = x$ 及 $x = 2$;

(3) $y = e^x$, $y = e^{-x}$ 与直线 $x = 1$;

(4) $y = \ln x$, y 轴与直线 $y = \ln a$, $y = \ln b$ ($b > a > 0$).

3. 求抛物线 $y = -x^2 + 4x - 3$ 及其在点 $(0, -3)$ 和 $(3, 0)$ 处的切线所围成的图形的面积.

4. 求抛物线 $y^2 = 2px$ 及其在点 $(\frac{p}{2}, p)$ 处的法线所围成的图形的面积.

5. 求由下列各曲线所围成的图形的面积:

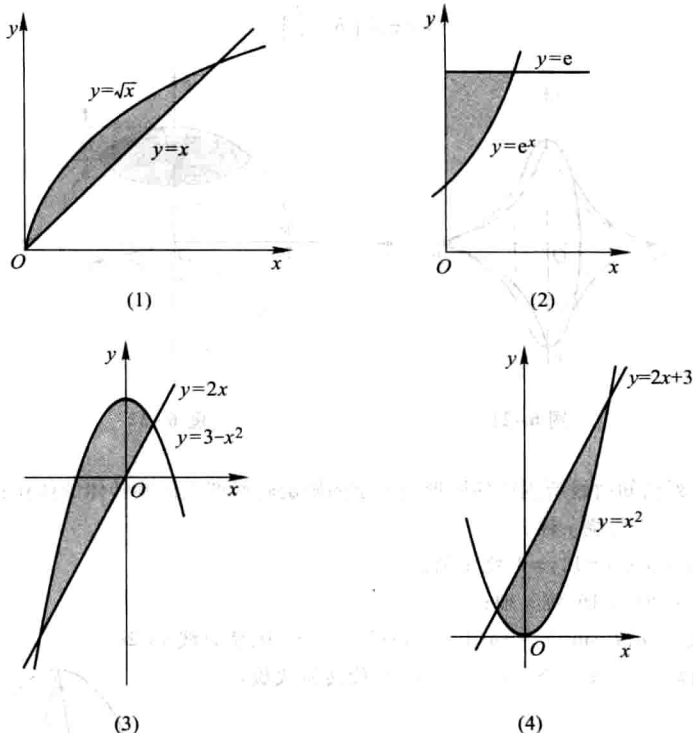


图 6-20

(1) $\rho = 2a \cos \theta$;

(2) $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$;

(3) $\rho = 2a(2 + \cos \theta)$.

 6. 求由摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ 的一拱 ($0 \leq t \leq 2\pi$) 与横轴所围成的图形的面积.

 7. 求对数螺线 $\rho = ae^\theta$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$) 及射线 $\theta = \pi$ 所围成的图形的面积.

8. 求下列各曲线所围成图形的公共部分的面积:

(1) $\rho = 3 \cos \theta$ 及 $\rho = 1 + \cos \theta$;

(2) $\rho = \sqrt{2} \sin \theta$ 及 $\rho^2 = \cos 2\theta$.

 9. 求位于曲线 $y = e^x$ 下方、该曲线过原点的切线的左方以及 x 轴上方之间的图形的面积.

 10. 求由抛物线 $y^2 = 4ax$ 与过焦点的弦所围成的图形面积的最小值.

 11. 已知抛物线 $y = px^2 + qx$ (其中 $p < 0, q > 0$) 在第一象限内与直线 $x + y = 5$ 相切, 且此抛物线与 x 轴所围成的图形的面积为 A . 问 p 和 q 为何值时, A 达到最大值, 并求出此最大值.

 12. 由 $y = x^3, x = 2, y = 0$ 所围成的图形分别绕 x 轴及 y 轴旋转, 计算所得两个旋转体的体积.

 13. 把星形线 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ 所围成的图形绕 x 轴旋转 (图 6-21), 计算所得旋转体的体积.

14. 用积分方法证明图 6-22 中球缺的体积为

$$V = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3} \right).$$

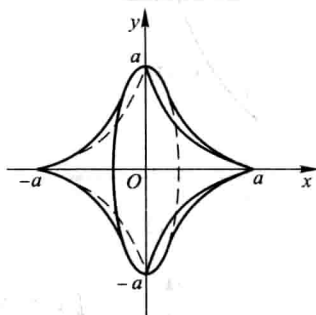


图 6-21

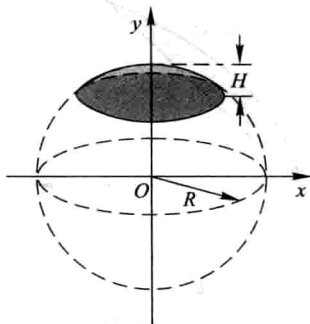


图 6-22

15. 求下列已知曲线所围成的图形按指定的轴旋转所产生的旋转体的体积:

- (1) $y = x^2, x = y^2$, 绕 y 轴;
- (2) $y = \arcsin x, x = 1, y = 0$, 绕 x 轴;
- (3) $x^2 + (y-5)^2 = 16$, 绕 x 轴;
- (4) 摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ 的一拱, $y = 0$, 绕直线 $y = 2a$.

16. 求圆盘 $x^2 + y^2 \leq a^2$ 绕 $x = -b$ ($b > a > 0$) 旋转所成旋转体的体积.

17. 设有一截锥体, 其高为 h , 上、下底均为椭圆, 椭圆的轴长分别为 $2a, 2b$ 和 $2A, 2B$, 求这截锥体的体积.

18. 计算底面是半径为 R 的圆, 而垂直于底面上一条固定直径的所有截面都是等边三角形的立体体积 (图 6-23).

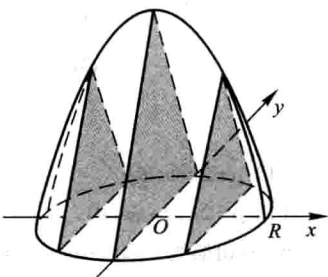


图 6-23

19. 证明: 由平面图形 $0 \leq a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)$ 绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

20. 利用题 19 的结论, 计算曲线 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 和 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积.

21. 设由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x = a, x = 2$ 及 $y = 0$ 所围成的平面图形为 D_1 , 由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x = a$ 及 $y = 0$ 所围成的平面图形为 D_2 , 其中 $0 < a < 2$ (图 6-24).

(1) 试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1, D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2 ;

(2) 问当 a 为何值时, $V_1 + V_2$ 取得最大值? 试求此最大值.

22. 计算曲线 $y = \ln x$ 上相应于 $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$ 的一段弧的长度.

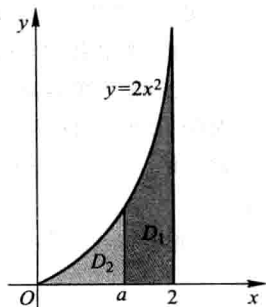


图 6-24

23. 计算半立方抛物线 $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$ 被抛物线 $y^2 = \frac{x}{3}$ 截得的一段弧的长度.

24. 计算抛物线 $y^2 = 2px$ 从顶点到这曲线上的一点 $M(x, y)$ 的弧长.

25. 计算星形线 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ (图 6-25) 的全长.

26. 将绕在圆(半径为 a)上的细线放开拉直,使细线与圆周始终相切(图 6-26),细线端点画出的轨迹叫做圆的渐伸线,它的方程为

$$x = a(\cos t + t\sin t), y = a(\sin t - t\cos t).$$

算出这曲线上相应于 $0 \leq t \leq \pi$ 的一段弧的长度.

27. 在摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ 上求分摆线第一拱成 1 : 3 的点的坐标.

28. 求对数螺线 $\rho = e^{a\theta}$ 相应于 $0 \leq \theta \leq \varphi$ 的一段弧长.

29. 求曲线 $\rho\theta = 1$ 相应于 $\frac{3}{4} \leq \theta \leq \frac{4}{3}$ 的一段弧长.

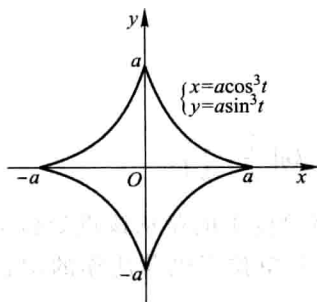


图 6-25

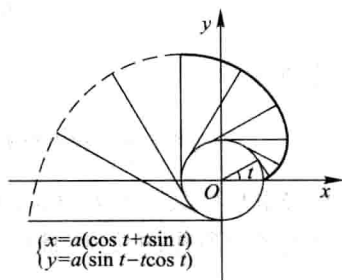


图 6-26

30. 求心形线 $\rho = a(1 + \cos \theta)$ 的全长.

第三节 定积分在物理学上的应用

一、变力沿直线所作的功

从物理学知道,如果物体在做直线运动的过程中有一个不变的力 F 作用在这物体上,且这力的方向与物体运动的方向一致,那么,在物体移动了距离 s 时,力 F 对物体所作的功为

$$W = F \cdot s.$$

如果物体在运动过程中所受到的力是变化的,这就会遇到变力对物体作功的问题.下面通过具体例子说明如何计算变力所作的功.

例 1 把一个带电荷量 $+q$ 的点电荷放在 r 轴上坐标原点 O 处,它产生一个

电场. 这个电场对周围的电荷有作用力. 由物理学知道, 如果有一个单位正电荷放在这个电场中距离原点 O 为 r 的地方, 那么电场对它的作用力的大小为

$$F = k \frac{q}{r^2} \quad (k \text{ 是常数}).$$

见图 6-27, 当这个单位正电荷在电场中从 $r=a$ 处沿 r 轴移动到 $r=b$ ($a < b$) 处时, 计算电场力 F 对它所作的功.

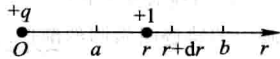


图 6-27

解 在上述移动过程中, 电场对这单位正电荷的作用力是变的. 取 r 为积分变量, 它的变化区间为 $[a, b]$. 设 $[r, r+dr]$ 为 $[a, b]$ 上的任一小区间. 当单位正电荷从 r 移动到 $r+dr$ 时, 电场力对它所作的功近似于 $\frac{kq}{r^2}dr$, 即功元素为

$$dW = \frac{kq}{r^2} dr,$$

于是所求的功为

$$W = \int_a^b \frac{kq}{r^2} dr = kq \left[-\frac{1}{r} \right]_a^b = kq \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

在计算静电场中某点的电位时, 要考虑将单位正电荷从该点处 ($r=a$) 移到无穷远处时电场力所作的功 W . 此时, 电场力对单位正电荷所作的功就是反常积分

$$W = \int_a^{+\infty} \frac{kq}{r^2} dr = \left[-\frac{kq}{r} \right]_a^{+\infty} = \frac{kq}{a}.$$

例 2 在底面积为 S 的圆柱形容器中盛有一定量的气体. 在等温条件下, 由于气体的膨胀, 把容器中的一个活塞 (面积为 S) 从点 a 处推移到点 b 处 (图 6-28). 计算在移动过程中, 气体压力所作的功.

解 取坐标系如图 6-28 所示. 活塞的位置可以用坐标 x 来表示. 由物理学知道, 一定量的气体在等温条件下, 压强 p 与体积 V 的乘积是常数 k , 即

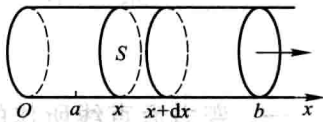


图 6-28

$$pV = k \quad \text{或} \quad p = \frac{k}{V}.$$

因为 $V = xS$, 所以

$$p = \frac{k}{xS}.$$

于是, 作用在活塞上的力

$$F = p \cdot S = \frac{k}{xS} \cdot S = \frac{k}{x}.$$

在气体膨胀过程中, 体积 V 是变的, 因而 x 也是变的, 所以作用在活塞上的力也是变的.

取 x 为积分变量, 它的变化区间为 $[a, b]$. 设 $[x, x+dx]$ 为 $[a, b]$ 上任一小区间, 当活塞从 x 移动到 $x+dx$ 时, 变力 F 所作的功近似于 $\frac{k}{x}dx$, 即功元素为

$$dW = \frac{k}{x} dx,$$

于是所求的功为

$$W = \int_a^b \frac{k}{x} dx = k [\ln x]_a^b = k \ln \frac{b}{a}.$$

下面再举一个计算功的例子, 它虽不是一个变力作功问题, 但也可用积分来计算.

例 3 一圆柱形的贮水桶高为 5 m, 底圆半径为 3 m, 桶内盛满了水. 试问要把桶内的水全部吸出需作多少功?

解 作 x 轴如图 6-29 所示. 取深度 x (单位为 m) 为积分变量, 它的变化区间为 $[0, 5]$. 相应于 $[0, 5]$ 上任一小区间 $[x, x+dx]$ 的一薄层水的高度为 dx , 若重力加速度 g 取 9.8 m/s^2 , 则这薄层水的重力为 $9.8\pi \cdot 3^2 dx \text{ kN}$. 把这薄层水吸出桶外需作的功近似地为

$$dW = 88.2\pi x dx,$$

此即功元素. 于是所求的功为

$$W = \int_0^5 88.2\pi x dx = 88.2\pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^5 = 88.2\pi \cdot \frac{25}{2} \approx 3462 \text{ (kJ)}.$$

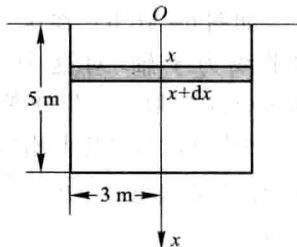


图 6-29

二、水压力

从物理学知道, 在水深为 h 处的压强为 $p = \rho gh$, 这里 ρ 是水的密度, g 是重力加速度. 如果有一面积为 A 的平板水平地放置在水深为 h 处, 那么, 平板一侧所受的水压力为

$$P = p \cdot A.$$

如果平板铅直放置在水中, 那么, 由于水深不同的点处压强 p 不相等, 平板一侧所受的水压力就不能用上述方法计算. 下面举例说明它的计算方法.

例 4 一个横放着的圆柱形水桶,桶内盛有半桶水(图 6-30(a)). 设桶的底半径为 R , 水的密度为 ρ , 计算桶的一个端面上所受的压力.

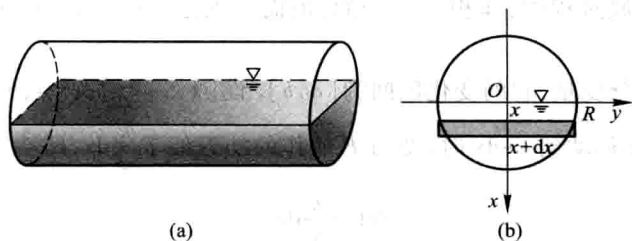


图 6-30

解 桶的一个端面是圆片,所以现在要计算的是当水平面通过圆心时,铅直放置的一个半圆片的一侧所受到的水压力.

如图 6-30(b),在这个圆片上取过圆心且铅直向下的直线为 x 轴,过圆心的水平线为 y 轴. 对这个坐标系来讲,所讨论的半圆的方程为 $x^2 + y^2 = R^2$ ($0 \leq x \leq R$). 取 x 为积分变量,它的变化区间为 $[0, R]$. 设 $[x, x+dx]$ 为 $[0, R]$ 上的任一小区间,半圆片上相应于 $[x, x+dx]$ 的窄条上各点处的压强近似于 $\rho g x$,这窄条的面积近似于 $2\sqrt{R^2 - x^2} dx$. 因此,这窄条一侧所受水压力的近似值,即压力元素为

$$dP = 2\rho g x \sqrt{R^2 - x^2} dx.$$

于是所求压力为

$$\begin{aligned} P &= \int_0^R 2\rho g x \sqrt{R^2 - x^2} dx = -\rho g \int_0^R (R^2 - x^2)^{1/2} d(R^2 - x^2) \\ &= -\rho g \left[\frac{2}{3} (R^2 - x^2)^{3/2} \right]_0^R = \frac{2\rho g R^3}{3}. \end{aligned}$$

三、引力

从物理学知道,质量分别为 m_1, m_2 , 相距为 r 的两质点间的引力的大小为

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

其中 G 为引力系数,引力的方向沿着两质点的连线方向.

如要计算一根细棒对一个质点的引力,那么,由于细棒上各点与该质点的距离是变化的,且各点对该质点的引力的方向也是变化的,因此就不能用上述公式来计算. 下面举例说明它的计算方法.

例 5 设有一长度为 l 、线密度为 μ 的均匀细直棒,在其中垂线上距棒 a 单位处有一质量为 m 的质点 M . 试计算该棒对质点 M 的引力.

解 取坐标系如图 6-31 所示,使棒位于 y 轴上,质点 M 位于 x 轴上,棒的中点为原点 O . 取 y 为积分变量,它的变化区间为 $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$. 设 $[y, y+dy]$ 为

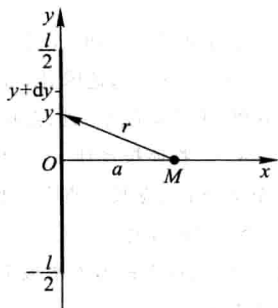


图 6-31

$\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$ 上任一小区间,把细直棒上相应于 $[y, y+dy]$ 的一小段近似地看成质点,其质量为 μdy ,与 M 相距 $r =$

$\sqrt{a^2 + y^2}$. 因此可以按照两质点间的引力计算公式求出这小段细直棒对质点 M 的引力 ΔF 的大小为

$$\Delta F \approx G \frac{m\mu dy}{a^2 + y^2},$$

从而求出 ΔF 在水平方向分力 ΔF_x 的近似值,即细直棒对质点 M 的引力在水平方向分力 F_x 的元素为

$$dF_x = -G \frac{am\mu dy}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

于是得引力在水平方向分力为

$$F_x = - \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{Gam\mu}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dy = -\frac{2Gm\mu l}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{4a^2 + l^2}}.$$

由对称性知,引力在铅直方向分力为 $F_y = 0$.

当细直棒的长度 l 很大时,可视 l 趋于无穷. 此时,引力的大小为 $\frac{2Gm\mu}{a}$,方向与细棒垂直且由 M 指向细棒.

习 题 6-3

1. 由实验知道,弹簧在拉伸过程中,需要的力 F (单位: N) 与伸长量 s (单位: cm) 成正比,即

$$F = ks \quad (k \text{ 是比例常数}).$$

如果把弹簧由原长拉伸 6 cm, 计算所作的功.

2. 直径为 20 cm、高为 80 cm 的圆筒内充满压强为 10 N/cm^2 的蒸汽. 设温度保持不变,要使蒸汽体积缩小一半,问需要作多少功?

3. (1) 证明:把质量为 m 的物体从地球表面升高到 h 处所作的功是

$$W = \frac{mgRh}{R+h},$$

其中 g 是重力加速度, R 是地球的半径;

(2) 一颗人造地球卫星的质量为 173 kg, 在高于地面 630 km 处进入轨道. 问把这颗卫星从地面送到 630 km 的高空处, 克服地球引力要作多少功? 已知 $g=9.8 \text{ m/s}^2$, 地球半径 $R=6370 \text{ km}$.

4. 一物体按规律 $x=ct^3$ 做直线运动, 介质的阻力与速度的平方成正比. 计算物体由 $x=0$ 移至 $x=a$ 时, 克服介质阻力所作的功.

5. 用铁锤将一铁钉击入木板, 设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比, 在击第一次时, 将铁钉击入木板 1 cm. 如果铁锤每次锤击铁钉所作的功相等, 问锤击第二次时, 铁钉又击入木板多少?

6. 设一圆锥形贮水池, 深 15 m, 口径 20 m, 盛满水, 今以泵将水吸尽, 问要作多少功?

7. 有一闸门, 它的形状和尺寸如图 6-32 所示, 水面超过门顶 2 m. 求闸门上所受的水压力.

8. 洒水车上的水箱是一个横放的椭圆柱体, 尺寸如图 6-33 所示. 当水箱装满水时, 计算水箱的一个端面所受的压力.

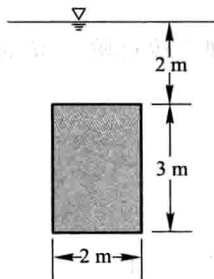


图 6-32

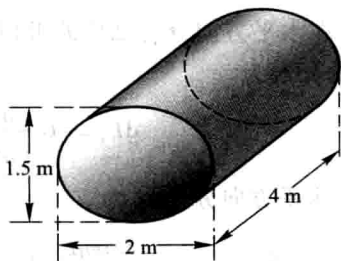


图 6-33

9. 有一等腰梯形闸门, 它的两条底边各长 10 m 和 6 m, 高为 20 m. 较长的底边与水面相齐. 计算闸门的一侧所受的水压力.

10. 一底为 8 cm、高为 6 cm 的等腰三角形片, 铅直地沉没在水中, 顶在上, 底在下且与水面平行, 而顶离水面 3 cm, 试求它每面所受的压力.

11. 设有一长度为 l 、线密度为 μ 的均匀细直棒, 在与棒的一端垂直距离为 a 单位处有一质量为 m 的质点 M , 试求这细棒对质点 M 的引力.

12. 设有一半径为 R 、中心角为 φ 的圆弧形细棒, 其线密度为常数 μ . 在圆心处有一质量为 m 的质点 M . 试求这细棒对质点 M 的引力.

总习题六

1. 填空:

(1) 曲线 $y=x^3-5x^2+6x$ 与 x 轴所围成的图形的面积 $A=$ _____;

(2) 曲线 $y = \frac{\sqrt{x}}{3}(3-x)$ 上相应于 $1 \leq x \leq 3$ 的一段弧的长度 $s =$ _____.

2. 以下两题中给出了四个结论, 从中选出一个正确的结论:

(1) 设 x 轴上有一长度为 l 、线密度为常数 μ 的细棒, 在与细棒右端的距离为 a 处有一质量为 m 的质点 M (图 6-34), 已知万有引力常量为 G , 则质点 M 与细棒之间的引力的大小为 ();

(A) $\int_{-l}^0 \frac{Gm\mu}{(a-x)^2} dx$

(B) $\int_0^l \frac{Gm\mu}{(a-x)^2} dx$

(C) $2 \int_{-\frac{l}{2}}^0 \frac{Gm\mu}{(a+x)^2} dx$

(D) $2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{Gm\mu}{(a+x)^2} dx$

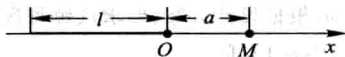


图 6-34

(2) 设在区间 $[a, b]$ 上, $f(x) > 0, f'(x) > 0, f''(x) < 0$. 令 $A_1 = \int_a^b f(x) dx, A_2 = f(a)(b-a), A_3 = \frac{1}{2}[f(a) + f(b)](b-a)$, 则有 ().

(A) $A_1 < A_2 < A_3$

(B) $A_2 < A_1 < A_3$

(C) $A_3 < A_1 < A_2$

(D) $A_2 < A_3 < A_1$

3. 一金属棒长 3 m, 离棒左端 x m 处的线密度为 $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ kg/m. 问 x 为何值时, $[0, x]$ 一段的质量为全棒质量的一半.

4. 求由曲线 $\rho = a \sin \theta, \rho = a(\cos \theta + \sin \theta)$ ($a > 0$) 所围图形公共部分的面积.

5. 如图 6-35 所示, 从下到上依次有三条曲线: $y = x^2, y = 2x^2$ 和 C . 假设对曲线 $y = 2x^2$ 上的任一点 P , 所对应的面积 A 和 B 恒相等, 求曲线 C 的方程.

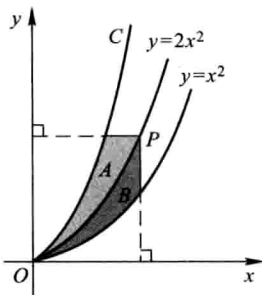


图 6-35

6. 设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 通过点 $(0, 0)$, 且当 $x \in [0, 1]$ 时, $y \geq 0$. 试确定 a, b, c 的值, 使得抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $x = 1, y = 0$ 所围图形的面积为 $\frac{4}{9}$, 且使该图形绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积最小.

7. 过坐标原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线, 该切线与曲线 $y = \ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D .

(1) 求平面图形 D 的面积 A ;

(2) 求平面图形 D 绕直线 $x = e$ 旋转一周所得旋转体的体积 V .

8. 求由曲线 $y = x^{\frac{3}{2}}$, 直线 $x = 4$ 及 x 轴所围图形绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

9. 求圆盘 $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$ 绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

10. 求抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 被圆 $x^2 + y^2 = 3$ 所截下的有限部分的弧长.

11. 半径为 r 的球沉入水中, 球的上部与水面相切, 球的密度与水相同, 现将球从水中取出, 需作多少功?

12. 边长为 a 和 b 的矩形薄板, 与液面成 α 角斜沉于液体中, 长边平行于液面而位于深 h 处, 设 $a > b$, 液体的密度为 ρ , 试求薄板每面所受的压力.

13. 设星形线 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ 上每一点处的线密度的大小等于该点到原点距离的立方, 在原点 O 处有一单位质点, 求星形线在第一象限的弧段对这质点的引力.

14. 某建筑工程打地基时, 需用汽锤将桩打进土层. 汽锤每次击打, 都要克服土层对桩的阻力做功. 设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比 (比例系数为 $k, k > 0$). 汽锤第一次击打将桩打进地下 a m. 根据设计方案, 要求汽锤每次击打桩时所作的功与前一次击打时所作的功之比为常数 r ($0 < r < 1$). 问

(1) 汽锤击打桩 3 次后, 可将桩打进地下多深?

(2) 若击打次数不限, 则汽锤至多能将桩打进地下多深?

第七章 微分方程

函数是客观事物的内部联系在数量方面的反映,利用函数关系又可以对客观事物的规律性进行研究.因此如何寻求函数关系,在实践中具有重要意义.在许多问题中,往往不能直接找出所需要的函数关系,但是根据问题所提供的情况,有时可以列出含有要找的函数及其导数的关系式.这样的关系式就是所谓微分方程.微分方程建立以后,对它进行研究,找出未知函数来,这就是解微分方程.本章主要介绍微分方程的一些基本概念和几种常用的微分方程的解法.

第一节 微分方程的基本概念

下面我们通过几何、力学及物理学中的几个具体例题来说明微分方程的基本概念.

例 1 一曲线通过点 $(1,2)$,且在该曲线上任一点 $M(x,y)$ 处的切线的斜率为 $2x$,求这曲线的方程.

解 设所求曲线的方程为 $y=\varphi(x)$.根据导数的几何意义,可知未知函数 $y=\varphi(x)$ 应满足关系式

$$\frac{dy}{dx}=2x. \quad (1-1)$$

此外,未知函数 $y=\varphi(x)$ 还应满足下列条件:

$$x=1 \text{ 时, } y=2. \quad (1-2)$$

把(1-1)式两端积分,得

$$y=\int 2x dx \quad \text{即} \quad y=x^2+C, \quad (1-3)$$

其中 C 是任意常数.

把条件“ $x=1$ 时, $y=2$ ”代入(1-3)式,得

$$2=1^2+C,$$

由此定出 $C=1$.把 $C=1$ 代入(1-3)式,即得所求曲线方程

$$y=x^2+1. \quad (1-4)$$

例 2 列车在平直线路路上以 20 m/s (相当于 72 km/h)的速度行驶,当制动时列车获得加速度 -0.4 m/s^2 .问开始制动后多少时间列车才能停住以及列车在这段时间里行驶了多少路程?

解 设列车在开始制动后 $t \text{ s}$ 时行驶了 $s \text{ m}$.根据题意,反映制动阶段列车运

动规律的函数 $s=s(t)$ 应满足关系式

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -0.4. \quad (1-5)$$

此外,未知函数 $s=s(t)$ 还应满足下列条件:

$$t=0 \text{ 时}, s=0, v=\frac{ds}{dt}=20. \quad (1-6)$$

把(1-5)式两端积分一次,得

$$v=\frac{ds}{dt} = -0.4t+C_1, \quad (1-7)$$

再积分一次,得

$$s = -0.2t^2 + C_1t + C_2, \quad (1-8)$$

这里 C_1, C_2 都是任意常数.

把条件“ $t=0$ 时, $v=20$ ”代入(1-7)式,得

$$20 = C_1,$$

把条件“ $t=0$ 时, $s=0$ ”代入(1-8)式,得

$$0 = C_2.$$

把 C_1, C_2 的值代入(1-7)及(1-8)式,得

$$v = -0.4t + 20, \quad (1-9)$$

$$s = -0.2t^2 + 20t. \quad (1-10)$$

在(1-9)式中令 $v=0$, 得到列车从开始制动到完全停住所需的时间

$$t = \frac{20}{0.4} = 50 (\text{s}).$$

再把 $t=50$ 代入(1-10)式,得到列车在制动阶段行驶的路程

$$s = -0.2 \times 50^2 + 20 \times 50 = 500 (\text{m}).$$

上述两个例子中的关系式(1-1)和(1-5)都含有未知函数的导数,它们都是微分方程.一般地,凡表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程,叫做微分方程,有时也简称方程.

微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数,叫做微分方程的阶.例如,方程(1-1)是一阶微分方程,方程(1-5)是二阶微分方程.又如,方程

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 4xy' = 3x^2$$

是三阶微分方程,方程

$$y^{(4)} - 4y''' + 10y'' - 12y' + 5y = \sin 2x$$

是四阶微分方程.

一般地, n 阶微分方程的形式是

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1-11)$$

这里必须指出,在方程(1-11)中, $y^{(n)}$ 是必须出现的,而 $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ 等变量则可以不出现. 例如 n 阶微分方程

$$y^{(n)} + 1 = 0$$

中,除 $y^{(n)}$ 外,其他变量都没有出现.

如果能从方程(1-11)中解出最高阶导数,则可得微分方程

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (1-12)$$

以后我们讨论的微分方程都是已解出最高阶导数的方程或能解出最高阶导数的方程.

由前面的例子我们看到,在研究某些实际问题时,首先要建立微分方程,然后找出满足微分方程的函数(解微分方程),就是说,找出这样的函数,把这函数代入微分方程能使该方程成为恒等式. 这个函数就叫做该微分方程的解. 确切地说,设函数 $y = \varphi(x)$ 在区间 I 上有 n 阶连续导数,如果在区间 I 上,

$$F[x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)] \equiv 0,$$

那么函数 $y = \varphi(x)$ 就叫做微分方程(1-11)在区间 I 上的解.

例如,函数(1-3)和(1-4)都是微分方程(1-1)的解,函数(1-8)和(1-10)都是微分方程(1-5)的解.

如果微分方程的解中含有任意常数,且任意常数的个数与微分方程的阶数相同^①,这样的解叫做微分方程的通解. 例如,函数(1-3)是方程(1-1)的解,它含有一个任意常数,而方程(1-1)是一阶的,所以函数(1-3)是方程(1-1)的通解. 又如,函数(1-8)是方程(1-5)的解,它含有两个任意常数,而方程(1-5)是二阶的,所以函数(1-8)是方程(1-5)的通解.

由于通解中含有任意常数,所以它还不能完全确定地反映某一客观事物的规律性. 要完全确定地反映客观事物的规律性,必须确定这些常数的值. 为此,要根据问题的实际情况,提出确定这些常数的条件. 例如,例1中的条件(1-2)及例2中的条件(1-6)便是这样的条件.

设微分方程中的未知函数为 $y = \varphi(x)$, 如果微分方程是一阶的,通常用来确定任意常数的条件是

$$x = x_0 \text{ 时, } y = y_0,$$

或写成

$$y|_{x=x_0} = y_0,$$

其中 x_0, y_0 都是给定的值;如果微分方程是二阶的,通常用来确定任意常数的条

^① 这里所说的任意常数是相互独立的,就是说,它们不能合并而使得任意常数的个数减少(参看本章第六节关于函数组的线性相关性).

件是

$$x = x_0 \text{ 时, } y = y_0, y' = y'_0,$$

或写成

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0,$$

其中 x_0, y_0 和 y'_0 都是给定的值. 上述这种条件叫做初值条件.

确定了通解中的任意常数以后, 就得到微分方程的特解. 例如(1-4)式是方程(1-1)满足条件(1-2)的特解, (1-10)式是方程(1-5)满足条件(1-6)的特解.

求微分方程 $y' = f(x, y)$ 满足初值条件 $y|_{x=x_0} = y_0$ 的特解这样一个问题, 叫做一阶微分方程的初值问题, 记作

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y|_{x=x_0} = y_0. \end{cases} \quad (1-13)$$

微分方程的解的图形是一条曲线, 叫做微分方程的积分曲线. 初值问题(1-13)的几何意义, 就是求微分方程的通过点 (x_0, y_0) 的那条积分曲线. 二阶微分方程的初值问题

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0 \end{cases}$$

的几何意义, 是求微分方程的通过点 (x_0, y_0) 且在该点处的切线斜率为 y'_0 的那条积分曲线.

例3 验证: 函数

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \quad (1-14)$$

是微分方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0 \quad (1-15)$$

的解.

解 求出所给函数(1-14)的导数

$$\frac{dx}{dt} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt, \quad (1-16)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 C_1 \cos kt - k^2 C_2 \sin kt = -k^2 (C_1 \cos kt + C_2 \sin kt).$$

把 $\frac{d^2 x}{dt^2}$ 及 x 的表达式代入方程(1-15), 得

$$-k^2 (C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) + k^2 (C_1 \cos kt + C_2 \sin kt) \equiv 0.$$

函数(1-14)及其二阶导数代入方程(1-15)后成为一个恒等式, 因此函数(1-14)是微分方程(1-15)的解.

例 4 已知函数(1-14)当 $k \neq 0$ 时是微分方程(1-15)的通解,求满足初值条件

$$x|_{t=0} = A, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0$$

的特解.

解 将条件“ $t=0$ 时, $x=A$ ”代入(1-14)式得

$$C_1 = A.$$

将条件“ $t=0$ 时, $\frac{dx}{dt}=0$ ”代入(1-16)式,得

$$C_2 = 0.$$

把 C_1, C_2 的值代入(1-14)式,就得所求的特解

$$x = A \cos kt.$$

习 题 7-1

1. 试说出下列各微分方程的阶数:

(1) $x(y')^2 - 2yy' + x = 0;$

(2) $x^2 y'' - xy' + y = 0;$

(3) $xy''' + 2y'' + x^2 y = 0;$

(4) $(7x-6y)dx + (x+y)dy = 0;$

(5) $L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0;$

(6) $\frac{dp}{d\theta} + p = \sin^2 \theta.$

2. 指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解:

(1) $xy' = 2y, y = 5x^2;$

(2) $y'' + y = 0, y = 3\sin x - 4\cos x;$

(3) $y'' - 2y' + y = 0, y = x^2 e^x;$

(4) $y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1 \lambda_2 y = 0, y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$

3. 在下列各题中,验证所给二元方程所确定的函数为所给微分方程的解:

(1) $(x-2y)y' = 2x-y, x^2 - xy + y^2 = C;$

(2) $(xy-x)y'' + xy'^2 + yy' - 2y' = 0, y = \ln(xy).$

4. 在下列各题中,确定函数关系式中所含的参数,使函数满足所给的初值条件:

(1) $x^2 - y^2 = C, y|_{x=0} = 5;$

(2) $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1;$

(3) $y = C_1 \sin(x - C_2), y|_{x=\pi} = 1, y'|_{x=\pi} = 0.$

5. 写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程:

(1) 曲线在点 (x, y) 处的切线的斜率等于该点横坐标的平方;

(2) 曲线上点 $P(x, y)$ 处的法线与 x 轴的交点为 Q , 且线段 PQ 被 y 轴平分.

6. 用微分方程表示一物理命题:某种气体的压强 p 对于温度 T 的变化率与压强成正比, 与温度的平方成反比.

7. 一个半球体形状的雪堆,其体积融化率与半球面面积 A 成正比,比例系数 $k>0$. 假设在融化过程中雪堆始终保持半球体状,已知半径为 r_0 的雪堆在开始融化的 3 小时内,融化了其体积的 $\frac{7}{8}$,问雪堆全部融化需要多少小时?

第二节 可分离变量的微分方程

本节至第四节,我们讨论一阶微分方程

$$y' = f(x, y) \quad (2-1)$$

的一些解法.

一阶微分方程有时也写成如下的对称形式:

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0. \quad (2-2)$$

在方程(2-2)中,变量 x 与 y 对称,它既可看作是以 x 为自变量 y 为因变量的方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

(这时 $Q(x, y) \neq 0$),也可看作是以 y 为自变量 x 为因变量的方程

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

(这时 $P(x, y) \neq 0$).

在第一节例 1 中,我们遇到一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = 2x,$$

或

$$dy = 2x dx.$$

把上式两端积分就得到这个方程的通解

$$y = x^2 + C.$$

但是并不是所有的一阶微分方程都能这样求解. 例如,对于一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2 \quad (2-3)$$

就不能像上面那样用直接对两端积分的方法求出它的通解. 这是什么缘故呢? 原因是方程(2-3)的右端含有与 x 存在函数关系的变量 y , 积分

$$\int 2xy^2 dx$$

求不出来,这是困难所在. 为了解决这个困难,在方程(2-3)的两端同时乘 $\frac{dx}{y^3}$, 使

方程(2-3)变为

$$\frac{dy}{y^2} = 2x dx,$$

这样,变量 x 与 y 已分离在等式的两端,然后两端积分得

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C,$$

或

$$y = -\frac{1}{x^2 + C}, \quad (2-4)$$

其中 C 是任意常数.

可以验证,函数(2-4)确实满足一阶微分方程(2-3),且含有一个任意常数,所以它是方程(2-3)的通解.

一般地,如果一个一阶微分方程能写成

$$g(y) dy = f(x) dx \quad (2-5)$$

的形式,就是说,能把微分方程写成一端只含 y 的函数和 dy ,另一端只含 x 的函数和 dx ,那么原方程就称为可分离变量的微分方程.

假定方程(2-5)中的函数 $g(y)$ 和 $f(x)$ 是连续的. 设 $y = \varphi(x)$ 是方程(2-5)的解,将它代入(2-5)中得到恒等式

$$g[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = f(x) dx.$$

将上式两端积分,并由 $y = \varphi(x)$ 引进变量 y ,得

$$\int g(y) dy = \int f(x) dx.$$

设 $G(y)$ 及 $F(x)$ 依次为 $g(y)$ 及 $f(x)$ 的原函数,于是有

$$G(y) = F(x) + C. \quad (2-6)$$

因此,方程(2-5)的解满足关系式(2-6). 反之,如果 $y = \Phi(x)$ 是由关系式(2-6)所确定的隐函数,那么在 $g(y) \neq 0$ 的条件下, $y = \Phi(x)$ 也是方程(2-5)的解,事实上,由隐函数的求导法可知,当 $g(y) \neq 0$ 时,

$$\Phi'(x) = \frac{F'(x)}{G'(\Phi)} = \frac{f(x)}{g(\Phi)},$$

这就表示函数 $y = \Phi(x)$ 满足方程(2-5). 所以,如果已分离变量的方程(2-5)中, $g(y)$ 和 $f(x)$ 是连续的,且 $g(y) \neq 0$, 那么(2-5)式两端积分后得到的关系式(2-6),就用隐式给出了方程(2-5)的解,(2-6)式就叫做微分方程(2-5)的隐式解. 又由于关系式(2-6)中含有任意常数,因此(2-6)式所确定的隐函数是方程(2-5)的通解,所以(2-6)式叫做微分方程(2-5)的隐式通解(当 $f(x) \neq 0$ 时,(2-6)式所确定的隐函数 $x = \Psi(y)$ 也可认为是方程(2-5)的解).

例1 求微分方程

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \quad (2-7)$$

的通解.

解 方程(2-7)是可分离变量的,分离变量后得

$$\frac{dy}{y} = 2x dx,$$

两端积分

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx,$$

得

$$\ln |y| = x^2 + C_1,$$

从而

$$y = \pm e^{x^2 + C_1} = \pm e^{C_1} e^{x^2}.$$

因 $\pm e^{C_1}$ 是任意非零常数,又 $y=0$ 也是方程(2-7)的解,故得方程(2-7)的通解

$$y = Ce^{x^2}.$$

例2 放射性元素铀由于不断地有原子放射出微粒子而变成其他元素,铀的含量就不断减少,这种现象叫做衰变.由原子物理学知道,铀的衰变速度与当时未衰变的铀原子的含量 M 成正比.已知 $t=0$ 时铀的含量为 M_0 ,求在衰变过程中铀含量 $M(t)$ 随时间 t 变化的规律.

解 铀的衰变速度就是 $M(t)$ 对时间 t 的导数 $\frac{dM}{dt}$.由于铀的衰变速度与其含量成正比,故得微分方程

$$\frac{dM}{dt} = -\lambda M, \quad (2-8)$$

其中 λ ($\lambda > 0$)是常数,叫做衰变系数, λ 前置负号是由于当 t 增加时 M 单调减少,即 $\frac{dM}{dt} < 0$ 的缘故.

按题意,初值条件为

$$M|_{t=0} = M_0.$$

方程(2-8)是可分离变量的.分离变量后得

$$\frac{dM}{M} = -\lambda dt.$$

两端积分

$$\int \frac{dM}{M} = \int (-\lambda) dt,$$

以 $\ln C$ 表示任意常数, 考虑到 $M > 0$, 得

$$\ln M = -\lambda t + \ln C,$$

即

$$M = Ce^{-\lambda t}.$$

这就是方程(2-8)的通解. 以初值条件代入上式, 得

$$M_0 = Ce^0 = C,$$

所以

$$M = M_0 e^{-\lambda t},$$

这就是所求铀的衰变规律. 由此可见, 铀的含量随时间的增加而按指数规律衰减 (图 7-1).

例 3 设降落伞从跳伞塔下落后, 所受空气阻力与速度成正比, 并设降落伞离开跳伞塔时 ($t=0$) 速度为零, 求降落伞下落速度与时间的函数关系.

解 设降落伞下落速度为 $v(t)$. 降落伞在空中下落时, 同时受到重力 P 与阻力 R 的作用 (图 7-2). 重力大小为 mg , 方向与 v 一致; 阻力大小为 kv (k 为比例系数), 方向与 v 相反, 从而降落伞所受外力为

$$F = mg - kv.$$

根据牛顿第二运动定律

$$F = ma$$

(其中 a 为加速度), 得函数 $v(t)$ 应满足的方程为

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv. \quad (2-9)$$

按题意, 初值条件为

$$v|_{t=0} = 0.$$

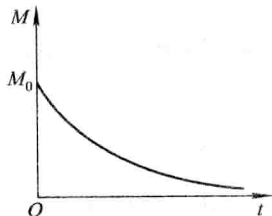


图 7-1

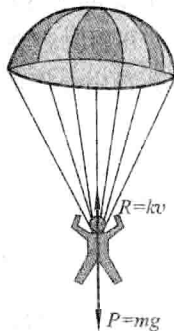


图 7-2

方程(2-9)是可分离变量的. 分离变量后得

$$\frac{dv}{mg-kv} = \frac{dt}{m},$$

两端积分

$$\int \frac{dv}{mg-kv} = \int \frac{dt}{m},$$

考虑到 $mg-kv>0$, 得

$$-\frac{1}{k} \ln(mg-kv) = \frac{t}{m} + C_1,$$

即

$$mg-kv = e^{-\frac{k}{m}t - kC_1},$$

或

$$v = \frac{mg}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}t} \quad \left(C = -\frac{e^{-kC_1}}{k} \right), \quad (2-10)$$

这就是方程(2-9)的通解.

将初值条件 $v|_{t=0}=0$ 代入(2-10)式, 得

$$C = -\frac{mg}{k}.$$

于是所求的特解为

$$v = \frac{mg}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}). \quad (2-11)$$

由(2-11)可以看出, 随着时间 t 的增大, 速度 v 逐渐接近于常数 $\frac{mg}{k}$, 且不会超过 $\frac{mg}{k}$, 也就是说, 跳伞后开始阶段是加速运动, 但以后逐渐接近于等速运动.

例 4 有高为 1 m 的半球形容器, 水从它的底部小孔流出, 小孔横截面面积为 1 cm^2 (图 7-3). 开始时容器内盛满了水, 求水从小孔流出过程中容器里水面的高度 h (水面与孔口中心间的距离) 随时间 t 变化的规律, 并求水流完所需的时间.

解 由力学知道, 水从孔口流出的流量 (即通过孔口横截面的水的体积 V 对时间 t 的变化率) Q 可用下列公式计算:

$$Q = \frac{dV}{dt} = kS\sqrt{2gh}, \quad (2-12)$$

其中 k 为流量系数, 由实验测得 $k=0.62$, S 为孔口横截面面积, g 为重力加速度.

另一方面, 设在微小时间间隔 $[t, t+dt]$ 内, 水面高度由 h 降至 $h+dh$ ($dh<0$), 则又可得到

$$dV = -\pi r^2 dh, \quad (2-13)$$

其中 r 是时刻 t 时的水面半径(图 7-3),右端置负号是由于 $dh < 0$ 而 $dV > 0$ 的缘故. 又因

$$r = \sqrt{1^2 - (1-h)^2} = \sqrt{2h-h^2},$$

所以(2-13)式变成

$$dV = -\pi(2h-h^2)dh. \quad (2-14)$$

比较(2-12)和(2-14)两式,得

$$kS\sqrt{2gh}dt = -\pi(2h-h^2)dh, \quad (2-15)$$

这就是未知函数 $h=h(t)$ 应满足的微分方程.

此外,开始时容器内的水是满的,所以未知函数 $h=h(t)$ 还应满足下列初值条件:

$$h|_{t=0} = 1. \quad (2-16)$$

方程(2-15)是可分离变量的. 分离变量后得

$$dt = -\frac{\pi}{kS\sqrt{2g}}(2h^{\frac{1}{2}}-h^{\frac{3}{2}})dh.$$

两端积分,得

$$t = -\frac{\pi}{kS\sqrt{2g}}\left(\frac{4}{3}h^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}h^{\frac{5}{2}} + C\right), \quad (2-17)$$

其中 C 是任意常数.

把初值条件(2-16)代入(2-17)式,得

$$C = -\frac{4}{3} + \frac{2}{5} = -\frac{14}{15}.$$

把所得的 C 值代入(2-17)式并化简,就得

$$t = \frac{14\pi}{15kS\sqrt{2g}}\left(1 - \frac{10}{7}h^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{7}h^{\frac{5}{2}}\right).$$

以 $k=0.62$, $S=10^{-4} \text{ m}^2$, $g=9.8 \text{ m/s}^2$ 代入上式,计算后可得

$$t = 1.068 \times 10^4 \left(1 - \frac{10}{7}h^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{7}h^{\frac{5}{2}}\right) (\text{s}).$$

上式表达了水从小孔流出的过程中容器内水面高度 h 与时间 t 之间的函数关系. 由此可知水流完所需的时间为

$$t = 1.068 \times 10^4 \text{ s} = 2 \text{ h } 58 \text{ min}.$$

这里还要指出,在例 4 中我们是通过微分 dV 的分析得到微分方程(2-15)的. 这种微分量的方法,也是建立微分方程的一种常用方法.

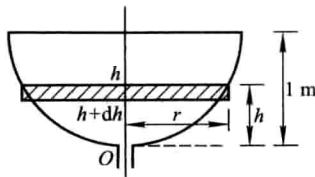


图 7-3

习 题 7-2

1. 求下列微分方程的通解:

$$(1) xy' - y \ln y = 0;$$

$$(2) 3x^2 + 5x - 5y' = 0;$$

$$(3) \sqrt{1-x^2} y' = \sqrt{1-y^2};$$

$$(4) y' - xy' = a(y^2 + y');$$

$$(5) \sec^2 x \tan y dx + \sec^2 y \tan x dy = 0;$$

$$(6) \frac{dy}{dx} = 10^{xy};$$

$$(7) (e^{xy} - e^x) dx + (e^{xy} + e^y) dy = 0;$$

$$(8) \cos x \sin y dx + \sin x \cos y dy = 0;$$

$$(9) (y+1)^2 \frac{dy}{dx} + x^3 = 0;$$

$$(10) y dx + (x^2 - 4x) dy = 0.$$

2. 求下列微分方程满足所给初值条件的特解:

$$(1) y' = e^{2x-y}, y|_{x=0} = 0;$$

$$(2) \cos x \sin y dy = \cos y \sin x dx, y|_{x=0} = \frac{\pi}{4};$$

$$(3) y' \sin x = y \ln y, y|_{x=\frac{\pi}{2}} = e;$$

$$(4) \cos y dx + (1 + e^{-x}) \sin y dy = 0, y|_{x=0} = \frac{\pi}{4};$$

$$(5) x dy + 2y dx = 0, y|_{x=2} = 1.$$

3. 有一盛满了水的圆锥形漏斗, 高为 10 cm, 顶角为 60° , 漏斗下面有面积为 0.5 cm^2 的孔, 求水面高度变化的规律及水流完所需的时间.

4. 质量为 1 g 的质点受外力作用做直线运动, 这外力和时间成正比, 和质点运动的速度成反比. 在 $t=10 \text{ s}$ 时, 速度等于 50 cm/s , 外力为 $4 \text{ g} \cdot \text{cm/s}^2$, 问从运动开始经过了 1 min 后的速度是多少?

5. 镭的衰变有如下的规律: 镭的衰变速度与它的现存量 R 成正比. 由经验材料得知, 镭经过 1 600 年后, 只余原始量 R_0 的一半. 试求镭的现存量 R 与时间 t 的函数关系.

6. 一曲线通过点 (2, 3), 它在两坐标轴间的任一切线段均被切点所平分, 求这曲线方程.

7. 小船从河边点 O 处出发驶向对岸 (两岸为平行直线). 设船速为 a , 船行方向始终与河岸垂直, 又设河宽为 h , 河中任一点处的水流速度与该点到两岸距离的乘积成正比 (比例系数为 k). 求小船的航行路线.

第三节 齐次方程

一、齐次方程

如果一阶微分方程可化成

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad (3-1)$$

的形式,那么就称这方程为齐次方程,例如

$$(xy - y^2) dx - (x^2 - 2xy) dy = 0$$

是齐次方程,因为它可化成

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy},$$

即

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1 - 2\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

在齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

中,引进新的未知函数

$$u = \frac{y}{x}, \quad (3-2)$$

就可把它化为可分离变量的方程. 因为由(3-2)有

$$y = ux, \quad \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx},$$

代入方程(3-1),便得方程

$$u + x \frac{du}{dx} = \varphi(u),$$

即

$$x \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u.$$

分离变量,得

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

两端积分,得

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}.$$

求出积分后,再以 $\frac{y}{x}$ 代替 u ,便得所给齐次方程的通解.

例 1 解方程

$$y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}.$$

解 原方程可写成

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x} - 1},$$

因此是齐次方程. 令 $\frac{y}{x} = u$, 则

$$y = xu, \quad \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx},$$

于是原方程变为

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{u^2}{u - 1},$$

即

$$x \frac{du}{dx} = \frac{u}{u - 1}.$$

分离变量, 得

$$\left(1 - \frac{1}{u}\right) du = \frac{dx}{x}.$$

两端积分, 得

$$u - \ln |u| + C_1 = \ln |x|,$$

或写为

$$\ln |xu| = u + C_1.$$

以 $\frac{y}{x}$ 代上式中的 u , 使得所给方程的通解为

$$\ln |y| = \frac{y}{x} + C_1 \quad \text{或} \quad y = Ce^{\frac{y}{x}} \quad (C = \pm e^{C_1}).$$

例 2 探照灯的聚光镜的镜面是一张旋转曲面, 它的形状由 xOy 坐标面上的一条曲线 L 绕 x 轴旋转而成. 按聚光镜性能的要求, 在其旋转轴 (x 轴) 上一点 O 处发出的一切光线, 经它反射后都与旋转轴平行. 求曲线 L 的方程.

解 将光源所在之 O 点取作坐标原点 (如图 7-4), 且曲线 L 位于 $y \geq 0$ 范围内.

设点 $M(x, y)$ 为 L 上的任一点, 点 O 发出的某条光

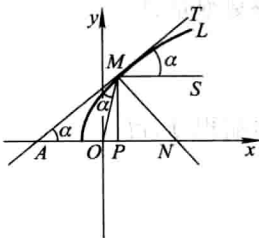


图 7-4

线经点 M 反射后是一条与 x 轴平行的直线 MS . 又设过点 M 的切线 AT 与 x 轴的夹角为 α . 根据题意, $\angle SMT = \alpha$. 另一方面, $\angle OMA$ 是入射角的余角, $\angle SMT$ 是反射角的余角, 于是由光学中的反射定律有 $\angle OMA = \angle SMT = \alpha$. 从而 $AO = OM$, 但

$AO = AP - OP = PM \cot \alpha - OP = \frac{y}{y'} - x$, 而 $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$. 于是得微分方程

$$\frac{y}{y'} - x = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

把 x 看作因变量, y 看作自变量, 当 $y > 0$ 时, 上式即为

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1},$$

这是齐次方程. 令 $\frac{x}{y} = v$, 则 $x = yv$, $\frac{dx}{dy} = v + y \frac{dv}{dy}$, 代入上式, 得

$$v + y \frac{dv}{dy} = v + \sqrt{v^2 + 1},$$

即

$$y \frac{dv}{dy} = \sqrt{v^2 + 1}.$$

分离变量, 得

$$\frac{dv}{\sqrt{v^2 + 1}} = \frac{dy}{y}.$$

积分, 得

$$\ln(v + \sqrt{v^2 + 1}) = \ln y - \ln C,$$

或

$$v + \sqrt{v^2 + 1} = \frac{y}{C}.$$

由

$$\left(\frac{y}{C} - v\right)^2 = v^2 + 1,$$

得

$$\frac{y^2}{C^2} - \frac{2yv}{C} = 1,$$

以 $yv = x$ 代入上式, 得

$$y^2 = 2C\left(x + \frac{C}{2}\right).$$

这是以 x 轴为轴、焦点在原点的抛物线.

* 二、可化为齐次的方程

方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1} \quad (3-3)$$

当 $c=c_1=0$ 时是齐次的, 否则不是齐次的. 在非齐次的情形, 可用下列变换把它化为齐次方程: 令

$$x=X+h, \quad y=Y+k,$$

其中 h 及 k 是待定的常数. 于是

$$dx=dX, \quad dy=dY,$$

从而方程(3-3)成为

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX+bY+ah+bk+c}{a_1X+b_1Y+a_1h+b_1k+c_1}.$$

如果方程组

$$\begin{cases} ah+bk+c=0, \\ a_1h+b_1k+c_1=0 \end{cases}$$

的系数行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$, 即 $\frac{a_1}{a} \neq \frac{b_1}{b}$, 那么可以定出 h 及 k 使它们满足上述方程组. 这样, 方程(3-3)便化为齐次方程

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX+bY}{a_1X+b_1Y}.$$

求出这齐次方程的通解后, 在通解中以 $x-h$ 代 X , $y-k$ 代 Y , 便得方程(3-3)的通解.

当 $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}$ 时, h 及 k 无法求得, 因此上述方法不能应用. 但这时令 $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$, 从而方程(3-3)可写成

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}.$$

引入新变量 $v=ax+by$, 则

$$\frac{dv}{dx} = a+b \frac{dy}{dx} \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \left(\frac{dv}{dx} - a \right).$$

于是方程(3-3)成为

$$\frac{1}{b} \left(\frac{dv}{dx} - a \right) = \frac{v+c}{\lambda v+c_1},$$

这是可分离变量的方程.

以上所介绍的方法可以应用于更一般的方程

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right).$$

例 3 解方程

$$(2x+y-4)dx+(x+y-1)dy=0.$$

解 所给方程属方程(3-3)的类型. 令 $x=X+h, y=Y+k$, 则 $dx=dX, dy=dY$, 代入原方程得

$$(2X+Y+2h+k-4)dX+(X+Y+h+k-1)dY=0.$$

解方程组

$$\begin{cases} 2h+k-4=0, \\ h+k-1=0 \end{cases}$$

得 $h=3, k=-2$. 令 $x=X+3, y=Y-2$, 原方程成为

$$(2X+Y)dX+(X+Y)dY=0,$$

或

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{2X+Y}{X+Y} = -\frac{2+\frac{Y}{X}}{1+\frac{Y}{X}},$$

这是齐次方程.

令 $\frac{Y}{X}=u$, 则 $Y=Xu, \frac{dY}{dX}=u+X\frac{du}{dX}$, 于是方程变为

$$u+X\frac{du}{dX} = -\frac{2+u}{1+u},$$

或

$$X\frac{du}{dX} = -\frac{2+2u+u^2}{1+u}.$$

分离变量得

$$-\frac{u+1}{u^2+2u+2}du = \frac{dX}{X}.$$

积分得

$$\ln C_1 - \frac{1}{2}\ln(u^2+2u+2) = \ln|X|,$$

于是

$$\frac{C_1}{\sqrt{u^2+2u+2}} = |X|,$$

或

$$C_2 = X^2(u^2 + 2u + 2) \quad (C_2 = C_1^2),$$

即

$$Y^2 + 2XY + 2X^2 = C_2.$$

以 $X = x - 3, Y = y + 2$ 代入上式并化简, 得

$$2x^2 + 2xy + y^2 - 8x - 2y = C \quad (C = C_2 - 10).$$

习 题 7-3

1. 求下列齐次方程的通解:

$$(1) xy' - y - \sqrt{y^2 - x^2} = 0;$$

$$(2) x \frac{dy}{dx} = y \ln \frac{y}{x};$$

$$(3) (x^2 + y^2) dx - xy dy = 0;$$

$$(4) (x^3 + y^3) dx - 3xy^2 dy = 0;$$

$$(5) \left(2x \sin \frac{y}{x} + 3y \cos \frac{y}{x} \right) dx - 3x \cos \frac{y}{x} dy = 0;$$

$$(6) (1 + 2e^{x/y}) dx + 2e^{x/y} \left(1 - \frac{x}{y} \right) dy = 0.$$

2. 求下列齐次方程满足所给初值条件的特解:

$$(1) (y^2 - 3x^2) dy + 2xy dx = 0, y|_{x=0} = 1;$$

$$(2) y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, y|_{x=1} = 2;$$

$$(3) (x^2 + 2xy - y^2) dx + (y^2 + 2xy - x^2) dy = 0, y|_{x=1} = 1.$$

3. 设有联结点 $O(0,0)$ 和 $A(1,1)$ 的一段向上凸的曲线弧 $\widehat{OA}$, 对于 $\widehat{OA}$ 上任一点 $P(x,y)$, 曲线弧 $\widehat{OP}$ 与直线段 OP 所围图形的面积为 x^2 , 求曲线弧 $\widehat{OA}$ 的方程.

* 4. 化下列方程为齐次方程, 并求出通解:

$$(1) (2x - 5y + 3) dx - (2x + 4y - 6) dy = 0;$$

$$(2) (x - y - 1) dx + (4y + x - 1) dy = 0;$$

$$(3) (3y - 7x + 7) dx + (7y - 3x + 3) dy = 0;$$

$$(4) (x + y) dx + (3x + 3y - 4) dy = 0.$$

第四节 一阶线性微分方程

一、线性方程

方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (4-1)$$

叫做一阶线性微分方程,因为它对于未知函数 y 及其导数是一次方程. 如果 $Q(x) \equiv 0$, 那么方程(4-1)称为齐次的; 如果 $Q(x) \neq 0$, 那么方程(4-1)称为非齐次的.

设(4-1)为非齐次线性方程. 为了求出非齐次线性方程(4-1)的解, 我们先把 $Q(x)$ 换成零而写出方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0. \quad (4-2)$$

方程(4-2)叫做对应于非齐次线性方程(4-1)的齐次线性方程. 方程(4-2)是可分离变量的, 分离变量后得

$$\frac{dy}{y} = -P(x) dx,$$

两端积分, 得

$$\ln |y| = -\int P(x) dx + C_1,$$

或

$$y = Ce^{-\int P(x) dx} \quad (C = \pm e^{C_1}),$$

这是对应的齐次线性方程(4-2)的通解①.

现在我们使用所谓常数变易法来求非齐次线性方程(4-1)的通解. 这方法是把(4-2)的通解中的 C 换成 x 的未知函数 $u(x)$, 即作变换

$$y = ue^{-\int P(x) dx}, \quad (4-3)$$

于是

$$\frac{dy}{dx} = u'e^{-\int P(x) dx} - uP(x)e^{-\int P(x) dx}. \quad (4-4)$$

将(4-3)和(4-4)代入方程(4-1)得

$$u'e^{-\int P(x) dx} - uP(x)e^{-\int P(x) dx} + P(x)ue^{-\int P(x) dx} = Q(x),$$

即

$$u'e^{-\int P(x) dx} = Q(x), \quad u' = Q(x)e^{\int P(x) dx}.$$

两端积分, 得

$$u = \int Q(x)e^{\int P(x) dx} dx + C.$$

把上式代入(4-3), 便得非齐次线性方程(4-1)的通解

① 这里记号 $\int P(x) dx$ 表示 $P(x)$ 的某个确定的原函数.

$$y = e^{-\int P(x) dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right). \quad (4-5)$$

将(4-5)式改写成两项之和

$$y = C e^{-\int P(x) dx} + e^{-\int P(x) dx} \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx,$$

上式右端第一项是对应的齐次线性方程(4-2)的通解,第二项是非齐次线性方程(4-1)的一个特解(在(4-1)的通解(4-5)中取 $C=0$ 便得到这个特解).由此可知,一阶非齐次线性方程的通解等于对应的齐次方程的通解与非齐次方程的一个特解之和.

例 1 求方程

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^{\frac{5}{2}}$$

的通解.

解 这是一个非齐次线性方程.先求对应的齐次方程的通解.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = 0,$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x+1},$$

$$\ln|y| = 2\ln|x+1| + C_1,$$

$$y = C(x+1)^2 \quad (C = \pm e^{C_1}).$$

用常数变易法,把 C 换成 u ,即令

$$y = u(x+1)^2, \quad (4-6)$$

那么

$$\frac{dy}{dx} = u'(x+1)^2 + 2u(x+1),$$

代入所给非齐次方程,得

$$u' = (x+1)^{\frac{1}{2}}.$$

两端积分,得

$$u = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

再把上式代入(4-6)式,即得所求方程的通解为

$$y = (x+1)^2 \left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C \right].$$

例 2 有一个电路如图 7-5 所示,其中电源电动势为 $E = E_m \sin \omega t$ (E_m, ω 都是常量),电阻 R 和电感 L 都是常量.求电流 $i(t)$.

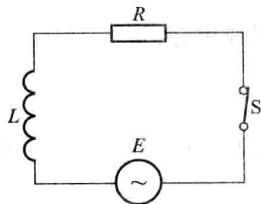


图 7-5

解 (i) 列方程 由电学知道, 当电流变化时, L 上有感应电动势 $-L \frac{di}{dt}$. 由回路电压定律得出

$$E - L \frac{di}{dt} - iR = 0,$$

即

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}.$$

把 $E = E_m \sin \omega t$ 代入上式, 得

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E_m}{L} \sin \omega t. \quad (4-7)$$

未知函数 $i(t)$ 应满足方程 (4-7). 此外, 设开关 S 闭合的时刻为 $t=0$, 这时 $i(t)$ 还应该满足初值条件

$$i|_{t=0} = 0. \quad (4-8)$$

(ii) 解方程 方程 (4-7) 是一个非齐次线性方程. 可以先求出对应的齐次方程的通解, 然后用常数变易法求非齐次方程的通解. 但是, 也可以直接应用通解公式 (4-5) 来求解. 这里 $P(t) = \frac{R}{L}$, $Q(t) = \frac{E_m}{L} \sin \omega t$, 代入公式 (4-5), 得

$$i(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \left(\int \frac{E_m}{L} e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t dt + C \right).$$

应用分部积分法, 得

$$\int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t dt = \frac{e^{\frac{R}{L}t}}{R^2 + \omega^2 L^2} (RL \sin \omega t - \omega L^2 \cos \omega t),$$

将上式代入前式并化简, 得方程 (4-7) 的通解

$$i(t) = \frac{E_m}{R^2 + \omega^2 L^2} (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t) + C e^{-\frac{R}{L}t},$$

其中 C 为任意常数.

将初值条件 (4-8) 代入上式, 得

$$C = \frac{\omega L E_m}{R^2 + \omega^2 L^2},$$

因此, 所求函数 $i(t)$ 为

$$i(t) = \frac{\omega L E_m}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_m}{R^2 + \omega^2 L^2} (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t). \quad (4-9)$$

为了便于说明 (4-9) 式所反映的物理现象, 下面把 $i(t)$ 中第二项的形式稍加改变.

$$\text{令 } \cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \sin \varphi = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}},$$

于是(4-9)式可写成

$$i(t) = \frac{\omega L E_m}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \varphi),$$

其中

$$\varphi = \arctan \frac{\omega L}{R}.$$

当 t 增大时, 上式右端第一项(叫做暂态电流)逐渐衰减而趋于零; 第二项(叫做稳态电流)是正弦函数, 它的周期和电动势的周期相同而相角落后 φ .

在上节中, 对于齐次方程 $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, 我们通过变量代换 $y = xu$, 把它化为变量可分离的方程, 然后分离变量, 经积分求得通解. 在本节中, 对于一阶非齐次线性方程

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

我们通过解对应的齐次线性方程找到变量代换

$$y = ue^{-\int P(x)dx},$$

利用这一代换, 把非齐次线性方程化为变量可分离的方程, 然后经积分求得通解.

利用变量代换(因变量的变量代换或自变量的变量代换)把一个微分方程化为变量可分离的方程, 或化为已经知其求解步骤的方程, 这是解微分方程最常用的方法. 下面再举一个例子.

例 3 解方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}.$

解 若把所给方程变形为

$$\frac{dx}{dy} = x+y,$$

即为一阶线性方程, 则按一阶线性方程的解法可求得通解.

也可用变量代换来解所给方程. 令 $x+y=u$, 则 $y=u-x$, $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$. 代入原方程, 得

$$\frac{du}{dx} - 1 = \frac{1}{u}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{u+1}{u}.$$

分离变量得

$$\frac{u}{u+1}du = dx,$$

两端积分得

$$u - \ln|u+1| = x + C.$$

以 $u = x+y$ 代入上式, 即得

$$y - \ln|x+y+1| = C,$$

或

$$x = C_1 e^y - y - 1 \quad (C_1 = \pm e^{-C}).$$

二、伯努利方程

方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1) \quad (4-10)$$

叫做伯努利(Bernoulli)方程. 当 $n=0$ 或 $n=1$ 时, 这是线性微分方程. 当 $n \neq 0, n \neq 1$ 时, 这方程不是线性的, 但是通过变量的代换, 便可把它化为线性的. 事实上, 以 y^n 除方程(4-10)的两端, 得

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x). \quad (4-11)$$

容易看出, 上式左端第一项与 $\frac{d}{dx}(y^{1-n})$ 只差一个常数因子 $1-n$, 因此我们引入新的因变量

$$z = y^{1-n},$$

那么

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx}.$$

用 $(1-n)$ 乘方程(4-11)的两端, 再通过上述代换便得线性方程

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x).$$

求出这方程的通解后, 以 y^{1-n} 代 z 便得到伯努利方程的通解.

例 4 求方程

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = a(\ln x)y^2$$

的通解.

解 以 y^2 除方程的两端, 得

$$y^{-2} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y^{-1} = a \ln x,$$

即

$$-\frac{d(y^{-1})}{dx} + \frac{1}{x} y^{-1} = a \ln x,$$

令 $z = y^{-1}$, 则上述方程成为

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x} z = -a \ln x.$$

这是一个线性方程, 它的通解为

$$z = x \left[C - \frac{a}{2} (\ln x)^2 \right].$$

以 y^{-1} 代 z , 得所求方程的通解为

$$yx \left[C - \frac{a}{2} (\ln x)^2 \right] = 1.$$

习 题 7-4

1. 求下列微分方程的通解:

(1) $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x};$

(2) $xy' + y = x^2 + 3x + 2;$

(3) $y' + y \cos x = e^{-\sin x};$

(4) $y' + y \tan x = \sin 2x;$

(5) $(x^2 - 1)y' + 2xy - \cos x = 0;$

(6) $\frac{dp}{d\theta} + 3p = 2;$

(7) $\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x;$

(8) $y \ln y dx + (x - \ln y) dy = 0;$

(9) $(x-2) \frac{dy}{dx} = y + 2(x-2)^3;$

(10) $(y^2 - 6x) \frac{dy}{dx} + 2y = 0.$

2. 求下列微分方程满足所给初值条件的特解:

(1) $\frac{dy}{dx} - y \tan x = \sec x, y|_{x=0} = 0;$

(2) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}, y|_{x=\pi} = 1;$

(3) $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x}, y|_{x=\frac{\pi}{2}} = -4;$

(4) $\frac{dy}{dx} + 3y = 8, y|_{x=0} = 2;$

(5) $\frac{dy}{dx} + \frac{2-3x^2}{x^3} y = 1, y|_{x=1} = 0.$

3. 求一曲线的方程, 这曲线通过原点, 并且它在点 (x, y) 处的切线斜率等于 $2x + y$.

4. 设有一质量为 m 的质点做直线运动. 从速度等于零的时刻起, 有一个与运动方向一致、大小与时间成正比(比例系数为 k_1)的力作用于它, 此外还受一与速度成正比(比例系数为 k_2)的阻力作用. 求质点运动的速度与时间的函数关系.

5. 设有一个由电阻 $R = 10 \Omega$ 、电感 $L = 2 \text{ H}$ 和电源电压 $E = 20 \sin 5t \text{ V}$ 串联组成的电路. 开

关 S 合上后, 电路中有电流通过. 求电流 i 与时间 t 的函数关系.

6. 验证形如 $y f(xy) dx + x g(xy) dy = 0$ 的微分方程可经变量代换 $v = xy$ 化为可分离变量的方程, 并求其通解.

7. 用适当的变量代换将下列方程化为可分离变量的方程, 然后求出通解:

$$(1) \frac{dy}{dx} = (x+y)^2;$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-y} + 1;$$

$$(3) xy' + y = y(\ln x + \ln y);$$

$$(4) y' = y^2 + 2(\sin x - 1)y + \sin^2 x - 2\sin x - \cos x + 1;$$

$$(5) y(xy+1)dx + x(1+xy+x^2y^2)dy = 0.$$

* 8. 求下列伯努利方程的通解:

$$(1) \frac{dy}{dx} + y = y^2(\cos x - \sin x);$$

$$(2) \frac{dy}{dx} - 3xy = xy^2;$$

$$(3) \frac{dy}{dx} + \frac{1}{3}y = \frac{1}{3}(1-2x)y^4;$$

$$(4) \frac{dy}{dx} - y = xy^5;$$

$$(5) xdy - [y + xy^3(1 + \ln x)]dx = 0.$$

第五节 可降阶的高阶微分方程

从这一节起我们将讨论二阶及二阶以上的微分方程, 即所谓高阶微分方程. 对于有些高阶微分方程, 我们可以通过代换将它化成较低阶的方程来求解. 以二阶微分方程

$$y'' = f(x, y, y') \quad (5-1)$$

而论, 如果我们能设法作代换把它从二阶降至一阶, 那么就有可能应用前面几节中所讲的方法来求出它的解了.

下面介绍三种容易降阶的高阶微分方程的求解方法.

一、 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

微分方程

$$y^{(n)} = f(x) \quad (5-2)$$

的右端仅含有自变量 x . 容易看出, 只要把 $y^{(n-1)}$ 作为新的未知函数, 那么 (5-2) 式就是新未知函数的一阶微分方程. 两边积分, 就得到一个 $n-1$ 阶的微分方程

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1.$$

同理可得

$$y^{(n-2)} = \int \left[\int f(x) dx + C_1 \right] dx + C_2.$$

依此法继续进行, 接连积分 n 次, 使得方程(5-2)的含有 n 个任意常数的通解.

例 1 求微分方程

$$y''' = e^{2x} - \cos x$$

的通解.

解 对所给方程接连积分三次, 得

$$y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1,$$

$$y' = \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1x + C_2,$$

$$y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + C_1x^2 + C_2x + C_3 \quad \left(C_1 = \frac{C}{2}\right),$$

这就是所求的通解.

例 2 质量为 m 的质点受力 F 的作用沿 Ox 轴做直线运动. 设力 $F = F(t)$ 在开始时刻 $t = 0$ 时 $F(0) = F_0$, 随着时间 t 的增大, 力 F 均匀地减小, 直到 $t = T$ 时, $F(T) = 0$. 如果开始时质点位于原点, 且初速度为零, 求这质点的运动规律.

解 设 $x = x(t)$ 表示在时刻 t 时质点的位置, 根据牛顿第二定律, 质点运动的微分方程为

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(t). \quad (5-3)$$

由题设, 力 $F(t)$ 随 t 增大而均匀地减小, 且 $t = 0$ 时, $F(0) = F_0$, 所以 $F(t) = F_0 - kt$; 又当 $t = T$ 时, $F(T) = 0$, 从而

$$F(t) = F_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right).$$

于是方程(5-3)可以写成

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{F_0}{m} \left(1 - \frac{t}{T}\right). \quad (5-4)$$

其初值条件为

$$x|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

把(5-4)式两端积分, 得

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m} \int \left(1 - \frac{t}{T}\right) dt,$$

即

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m} \left(t - \frac{t^2}{2T}\right) + C_1. \quad (5-5)$$

将条件 $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = 0$ 代入(5-5)式,得

$$C_1 = 0,$$

于是(5-5)式成为

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m} \left(t - \frac{t^2}{2T} \right). \quad (5-6)$$

把(5-6)式两端积分,得

$$x = \frac{F_0}{m} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6T} \right) + C_2,$$

将条件 $x|_{t=0} = 0$ 代入上式,得

$$C_2 = 0.$$

于是所求质点的运动规律为

$$x = \frac{F_0}{m} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6T} \right), \quad 0 \leq t \leq T.$$

二、 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程

方程

$$y'' = f(x, y') \quad (5-7)$$

的右端不显含未知函数 y . 如果我们设 $y' = p$, 那么

$$y'' = \frac{dp}{dx} = p',$$

而方程(5-7)就成为

$$p' = f(x, p).$$

这是一个关于变量 x, p 的一阶微分方程. 设其通解为

$$p = \varphi(x, C_1),$$

但是 $p = \frac{dy}{dx}$, 因此又得到一个一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, C_1).$$

对它进行积分, 便得方程(5-7)的通解为

$$y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2.$$

例 3 求微分方程

$$(1+x^2)y'' = 2xy'$$

满足初值条件

$$y|_{x=0}=1, \quad y'|_{x=0}=3$$

的特解.

解 所给方程是 $y''=f(x, y')$ 型的. 设 $y'=p$, 代入方程并分离变量后, 有

$$\frac{dp}{p} = \frac{2x}{1+x^2} dx.$$

两端积分, 得

$$\ln |p| = \ln(1+x^2) + C,$$

即

$$p = y' = C_1(1+x^2) \quad (C_1 = \pm e^C).$$

由条件 $y'|_{x=0}=3$, 得

$$C_1 = 3,$$

所以

$$y' = 3(1+x^2).$$

两端再积分, 得

$$y = x^3 + 3x + C_2.$$

又由条件 $y|_{x=0}=1$, 得

$$C_2 = 1,$$

于是所求的特解为

$$y = x^3 + 3x + 1.$$

例 4 设有一均匀、柔软的绳索, 两端固定, 绳索仅受重力的作用而下垂. 试问该绳索在平衡状态时是怎样的曲线?

解 设绳索的最低点为 A . 取 y 轴通过点 A 铅直向上, 并取 x 轴水平向右. 且 $|OA|$ 等于某个定值 (这个定值将在以后说明). 设绳索曲线的方程为 $y = \varphi(x)$. 考察绳索上点 A 到另一点 $M(x, y)$ 间的一段弧 $\widehat{AM}$,

设其长为 s . 假定绳索的线密度为 ρ , 则弧 $\widehat{AM}$ 所受重力为 $\rho g s$. 由于绳索是柔软的, 因而在点 A 处的张力沿水平的切线方向, 其大小设为 H ; 在点 M 处的张力沿该点处的切线方向, 设其倾角为 θ , 其大小为 T (图 7-6). 因作用于弧段 $\widehat{AM}$ 的外力相互平衡, 把作用于弧 $\widehat{AM}$ 上的力沿铅直及水平两方向分解, 得

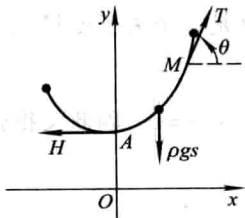


图 7-6

$$T \sin \theta = \rho g s, \quad T \cos \theta = H.$$

将此两式相除, 得

$$\tan \theta = \frac{1}{a}s \quad \left(a = \frac{H}{\rho g} \right).$$

由于 $\tan \theta = y'$, $s = \int_0^x \sqrt{1+y'^2} dx$, 代入上式即得

$$y' = \frac{1}{a} \int_0^x \sqrt{1+y'^2} dx.$$

将上式两端对 x 求导, 使得 $y = \varphi(x)$ 满足的微分方程

$$y'' = \frac{1}{a} \sqrt{1+y'^2}. \quad (5-8)$$

取原点 O 到点 A 的距离为定值 a , 即 $|OA| = a$, 那么初值条件为

$$y|_{x=0} = a, y'|_{x=0} = 0.$$

下面来解方程(5-8).

方程(5-8)属于 $y'' = f(x, y')$ 的类型. 设 $y' = p$, 则 $y'' = \frac{dp}{dx}$, 代入方程(5-8), 并分离变量, 得

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dx}{a}.$$

两端积分, 得

$$\ln(p + \sqrt{1+p^2}) = \frac{x}{a} + C_1. \quad (5-9)$$

把条件 $y'|_{x=0} = p|_{x=0} = 0$ 代入(5-9)式, 得

$$C_1 = 0,$$

于是(5-9)式成为

$$\ln(p + \sqrt{1+p^2}) = \frac{x}{a},$$

解得

$$p = \frac{1}{2} (e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}),$$

即

$$y' = \frac{1}{2} (e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}).$$

积分上式两端, 使得

$$y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) + C_2. \quad (5-10)$$

将条件 $y|_{x=0}=a$ 代入(5-10)式,得

$$C_2=0.$$

于是该绳索的形状可由曲线方程

$$y=\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$$

来表示. 这曲线叫做悬链线.

三、 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程

方程

$$y''=f(y, y') \quad (5-11)$$

中不明显地含自变量 x . 为了求出它的解. 我们令 $y'=p$, 并利用复合函数的求导法则把 y'' 化为对 y 的导数, 即

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}=p \frac{dp}{dy}.$$

这样, 方程(5-11)就成为

$$p \frac{dp}{dy}=f(y, p).$$

这是一个关于变量 y, p 的一阶微分方程. 设它的通解为

$$y'=p=\varphi(y, C_1),$$

分离变量并积分, 便得方程(5-11)的通解为

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2.$$

例 5 求微分方程

$$yy''-y'^2=0 \quad (5-12)$$

的通解.

解 方程(5-12)不明显地含自变量 x , 设

$$y'=p,$$

则 $y''=p \frac{dp}{dy}$, 代入方程(5-12), 得

$$yp \frac{dp}{dy} - p^2 = 0.$$

在 $y \neq 0, p \neq 0$ 时, 约去 p 并分离变量, 得

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}.$$

两端积分,得

$$\ln |p| = \ln |y| + C,$$

即

$$p = C_1 y \quad \text{或} \quad y' = C_1 y \quad (C_1 = \pm e^C).$$

再分离变量并两端积分,使得方程(5-12)的通解为

$$\ln |y| = C_1 x + C_2',$$

或

$$y = C_2 e^{C_1 x} \quad (C_2 = \pm e^{C_2'}).$$

例 6 一个离地面很高的物体,受地球引力的作用由静止开始落向地面. 求它落到地面时的速度和所需的时间(不计空气阻力).

解 取联结地球中心与该物体的直线为 y 轴,其方向铅直向上,取地球的圆心为原点 O (图 7-7).

设地球的半径为 R ,物体的质量为 m ,物体开始下落时与地球中心的距离为 l ($l > R$),在时刻 t 物体所在位置为 $y = \varphi(t)$,于是速度为 $v(t) = \frac{dy}{dt}$. 根据万有引力定律,即得微分

方程

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{GmM}{y^2},$$

即

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{GM}{y^2}, \quad (5-13)$$

其中 M 为地球的质量, G 为引力常数. 因为当 $y = R$ 时,

$\frac{d^2 y}{dt^2} = -g$ (这里置负号是由于物体运动加速度的方向与 y 轴的正向相反的缘

故),所以 $g = \frac{GM}{R^2}$, $GM = gR^2$. 于是方程(5-13)成为

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{gR^2}{y^2}. \quad (5-14)$$

初值条件是

$$y|_{t=0} = l, y'|_{t=0} = 0.$$

先求物体到达地面时的速度. 由 $\frac{dy}{dt} = v$, 得

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = v \frac{dv}{dy},$$

代入方程(5-14)并分离变量,得

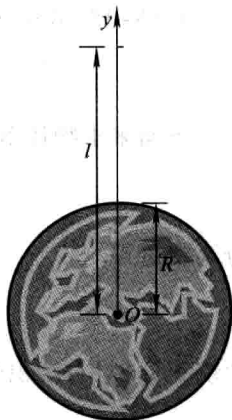


图 7-7

$$v dv = -\frac{gR^2}{y^2} dy.$$

两端积分,得

$$v^2 = \frac{2gR^2}{y} + C_1.$$

把初值条件代入上式,得

$$C_1 = -\frac{2gR^2}{l},$$

于是

$$v^2 = 2gR^2 \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{l} \right), \quad v = -R \sqrt{2g \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{l} \right)}. \quad (5-15)$$

这里取负号是由于物体运动的方向与 y 轴的正向相反的缘故.

在(5-15)式中令 $y=R$, 就得到物体到达地面时的速度为

$$v = -\sqrt{\frac{2gR(l-R)}{l}}.$$

下面来求物体落到地面所需的时间. 由(5-15)式有

$$\frac{dy}{dt} = v = -R \sqrt{2g \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{l} \right)},$$

分离变量得

$$dt = -\frac{1}{R} \sqrt{\frac{l}{2g}} \sqrt{\frac{y}{l-y}} dy.$$

两端积分(对右端积分利用置换 $y = l \cos^2 u$), 得

$$t = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{l}{2g}} \left(\sqrt{ly-y^2} + l \arccos \sqrt{\frac{y}{l}} \right) + C_2. \quad (5-16)$$

由条件 $y|_{t=0} = l$, 得

$$C_2 = 0.$$

于是(5-16)式成为

$$t = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{l}{2g}} \left(\sqrt{ly-y^2} + l \arccos \sqrt{\frac{y}{l}} \right).$$

在上式中令 $y=R$, 便得到物体到达地面所需的时间为

$$t = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{l}{2g}} \left(\sqrt{lR-R^2} + l \arccos \sqrt{\frac{R}{l}} \right).$$

习 题 7-5

1. 求下列各微分方程的通解:

- (1) $y'' = x + \sin x$; (2) $y''' = xe^x$;
 (3) $y'' = \frac{1}{1+x^2}$; (4) $y'' = 1 + y'^2$;
 (5) $y'' = y' + x$; (6) $xy'' + y' = 0$;
 (7) $yy'' + 2y'^2 = 0$; (8) $y^3 y'' - 1 = 0$;
 (9) $y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}$; (10) $y'' = (y')^3 + y'$.

2. 求下列各微分方程满足所给初值条件的特解:

- (1) $y^3 y'' + 1 = 0, y|_{x=1} = 1, y'|_{x=1} = 0$;
 (2) $y'' - ay'^2 = 0, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = -1$;
 (3) $y''' = e^{ax}, y|_{x=1} = y'|_{x=1} = y''|_{x=1} = 0$;
 (4) $y'' = e^{2y}, y|_{x=0} = y'|_{x=0} = 0$;
 (5) $y'' = 3\sqrt{y}, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2$;
 (6) $y'' + (y')^2 = 1, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 0$.

3. 试求 $y'' = x$ 的经过点 $M(0, 1)$ 且在此点与直线 $y = \frac{x}{2} + 1$ 相切的积分曲线.

4. 设有一质量为 m 的物体在空中由静止开始下落, 如果空气阻力 $R = cv$ (其中 c 为常数, v 为物体运动的速度), 试求物体下落的距离 s 与时间 t 的函数关系.

第六节 高阶线性微分方程

本节和以下两节, 我们将讨论在实际问题中应用得较多的所谓高阶线性微分方程. 讨论时以二阶线性微分方程为主.

一、二阶线性微分方程举例

例 1 设有一个弹簧, 它的上端固定, 下端挂一个质量为 m 的物体. 当物体处于静止状态时, 作用在物体上的重力与弹性力大小相等、方向相反. 这个位置就是物体的平衡位置. 如图 7-8, 取 x 轴铅直向下, 并取物体的平衡位置为坐标原点.

如果使物体具有一个初始速度 $v_0 \neq 0$, 那么物体便离开平衡位置, 并在平衡位置附近做上下振动. 在振动过程中, 物体的位置 x 随时间 t 变化, 即 x 与 t 之间存在函数关系: $x = x(t)$. 要确定物体的振动规律, 就要求出函数 $x = x(t)$.

由力学知道, 弹簧使物体回到平衡位置的弹性恢复力 f (它不包括在平衡位置时和重力 mg 相平衡的那一部分弹性力) 和物体离开平

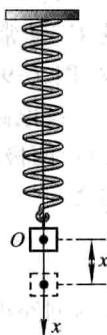


图 7-8

衡位置的位移 x 成正比:

$$f = -cx,$$

其中 c 为弹簧的劲度系数, 负号表示弹性恢复力的方向和物体位移的方向相反.

另外, 物体在运动过程中还受到阻尼介质(如空气、油等)的阻力的作用, 使得振动逐渐趋向停止. 由实验知道, 阻力 R 的方向总与运动方向相反, 当运动速度不大时, 其大小与物体运动的速度成正比, 设比例系数为 μ , 则有

$$R = -\mu \frac{dx}{dt}.$$

根据上述关于物体受力情况的分析, 由牛顿第二定律得

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx - \mu \frac{dx}{dt}.$$

移项, 并记

$$2n = \frac{\mu}{m}, \quad k^2 = \frac{c}{m},$$

则上式化为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = 0. \quad (6-1)$$

这就是在有阻尼的情况下, 物体自由振动的微分方程.

如果物体在振动过程中, 还受到铅直干扰力

$$F = H \sin pt$$

的作用, 则有

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2 x = h \sin pt, \quad (6-2)$$

其中 $h = \frac{H}{m}$. 这就是强迫振动的微分方程.

例 2 设有一个由电阻 R 、自感 L 、电容 C 和电源 E 串联组成的电路, 其中 R, L 及 C 为常数, $E = E_m \sin \omega t$, 这里 E_m 及 ω 也是常数(图 7-9).

设电路中的电流为 $i(t)$, 电容器极板上的电荷量为 $q(t)$, 两极板间的电压为 u_c , 自感电动势为 E_L . 由电学知道

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad u_c = \frac{q}{C}, \quad E_L = -L \frac{di}{dt},$$

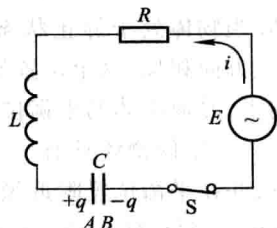


图 7-9

根据回路电压定律, 得

$$E - L \frac{di}{dt} - \frac{q}{C} - Ri = 0,$$

即

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = E_m \sin \omega t,$$

或写成

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + 2\beta \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = \frac{E_m}{LC} \sin \omega t. \quad (6-3)$$

式中 $\beta = \frac{R}{2L}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. 这就是串联电路的振荡方程.

如果电容器经充电后撤去外电源 ($E=0$), 那么方程 (6-3) 成为

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + 2\beta \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0. \quad (6-4)$$

例 1 和例 2 虽然是两个不同的实际问题, 但是仔细观察一下所得出的方程 (6-2) 和 (6-3), 就会发现它们可以归结为同一个形式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x), \quad (6-5)$$

而方程 (6-1) 和方程 (6-4) 都是方程 (6-5) 的特殊情形: $f(x) \equiv 0$. 在工程技术的其他许多问题中, 也会遇到上述类型的微分方程.

方程 (6-5) 叫做二阶线性微分方程. 当方程右端 $f(x) \equiv 0$ 时, 方程叫做齐次的; 当 $f(x) \neq 0$ 时, 方程叫做非齐次的.

于是方程 (6-2)、(6-3) 都是二阶非齐次线性微分方程, 方程 (6-1)、(6-4) 都是二阶齐次线性微分方程.

要进一步讨论例 1 和例 2 中的问题, 就需要解二阶线性微分方程. 为此, 下面来讨论二阶线性微分方程的解的一些性质, 这些性质可以推广到 n 阶线性方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x).$$

二、线性微分方程的解的结构

先讨论二阶齐次线性方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \quad (6-6)$$

定理 1 如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程 (6-6) 的两个解, 那么

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad (6-7)$$

也是 (6-6) 的解, 其中 C_1, C_2 是任意常数.

证 将(6-7)式代入(6-6)式左端,得

$$\begin{aligned} & [C_1 y_1'' + C_2 y_2''] + P(x)[C_1 y_1' + C_2 y_2'] + Q(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2] \\ &= C_1 [y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] + C_2 [y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2]. \end{aligned}$$

由于 y_1 与 y_2 是方程(6-6)的解,上式右端方括号中的表达式都恒等于零,因而整个式子恒等于零,所以(6-7)式是方程(6-6)的解.

解(6-7)从形式上来看含有 C_1 与 C_2 两个任意常数,但它不一定是方程(6-6)的通解.例如,设 $y_1(x)$ 是(6-6)的一个解,则 $y_2(x) = 2y_1(x)$ 也是(6-6)的解.这时(6-7)式成为 $y = C_1 y_1(x) + 2C_2 y_1(x)$,可以把它改写成 $y = C y_1(x)$,其中 $C = C_1 + 2C_2$.这显然不是(6-6)的通解.那么在什么情况下(6-7)式才是方程(6-6)的通解呢?要解决这个问题,还得引入一个新的概念,即所谓函数组的线性相关与线性无关.

设 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ 为定义在区间 I 上的 n 个函数,如果存在 n 个不全为零的常数 $k_1, k_2, \dots, k_n$,使得当 $x \in I$ 时有恒等式

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + \dots + k_n y_n \equiv 0$$

成立,那么称这 n 个函数在区间 I 上线性相关;否则称线性无关.

例如,函数 $1, \cos^2 x, \sin^2 x$ 在整个数轴上是线性相关的.因为取 $k_1 = 1, k_2 = k_3 = -1$,就有恒等式

$$1 - \cos^2 x - \sin^2 x \equiv 0.$$

又如,函数 $1, x, x^2$ 在任何区间 (a, b) 内是线性无关的.因为如果 k_1, k_2, k_3 不全为零,那么在该区间内至多只有两个 x 值能使二次三项式

$$k_1 + k_2 x + k_3 x^2$$

为零;要使它恒等于零,必须 k_1, k_2, k_3 全为零.

应用上述概念可知,对于两个函数的情形,它们线性相关与否,只要看它们的比是否为常数:如果比为常数,那么它们就线性相关;否则就线性无关.

有了一组函数线性相关或线性无关的概念后,我们有如下关于二阶齐次线性微分方程(6-6)的通解结构的定理.

定理 2 如果 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程(6-6)的两个线性无关的特解,那么

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad (C_1, C_2 \text{ 是任意常数})$$

就是方程(6-6)的通解.

例如,方程 $y'' + y = 0$ 是二阶齐次线性方程(这里 $P(x) \equiv 0, Q(x) \equiv 1$).容易验证, $y_1 = \cos x$ 与 $y_2 = \sin x$ 是所给方程的两个解,且 $\frac{y_2}{y_1} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x \neq \text{常数}$,即它们是线性无关的.因此方程 $y'' + y = 0$ 的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

又如, 方程 $(x-1)y'' - xy' + y = 0$ 也是二阶齐次线性方程 (这里 $P(x) = -\frac{x}{x-1}, Q(x) = \frac{1}{x-1}$). 容易验证 $y_1 = x, y_2 = e^x$ 是所给方程的两个解, 且 $\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^x}{x} \neq \text{常数}$, 即它们是线性无关的. 因此方程的通解为

$$y = C_1 x + C_2 e^x.$$

定理 2 不难推广到 n 阶齐次线性方程.

推论 如果 $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ 是 n 阶齐次线性方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

的 n 个线性无关的解, 那么, 此方程的通解为

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

其中 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 为任意常数.

下面讨论二阶非齐次线性方程 (6-5). 我们把方程 (6-6) 叫做与非齐次方程 (6-5) 对应的齐次方程.

在第四节中我们已经看到, 一阶非齐次线性微分方程的通解由两部分构成: 一部分是对应的齐次方程的通解, 另一部分是非齐次方程本身的一个特解. 实际上, 不仅一阶非齐次线性微分方程的通解具有这样的结构, 而且二阶及更高阶的非齐次线性微分方程的通解也具有同样的结构.

定理 3 设 $y^*(x)$ 是二阶非齐次线性方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \quad (6-5)$$

的一个特解. $Y(x)$ 是与 (6-5) 对应的齐次方程 (6-6) 的通解, 则

$$y = Y(x) + y^*(x) \quad (6-8)$$

是二阶非齐次线性微分方程 (6-5) 的通解.

证 把 (6-8) 式代入方程 (6-5) 的左端, 得

$$\begin{aligned} & (Y'' + y^{*''}) + P(x)(Y' + y^{*'}) + Q(x)(Y + y^*) \\ &= [Y'' + P(x)Y' + Q(x)Y] + [y^{*''} + P(x)y^{*'} + Q(x)y^*], \end{aligned}$$

由于 Y 是方程 (6-6) 的解, y^* 是 (6-5) 的解, 可知第一个括号内的表达式恒等于零, 第二个恒等于 $f(x)$. 这样, $y = Y + y^*$ 使 (6-5) 的两端恒等. 即 (6-8) 式是方程 (6-5) 的解.

由于对应的齐次方程 (6-6) 的通解 $Y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 中含有两个任意常数, 所以 $y = Y + y^*$ 中也含有两个任意常数, 从而它就是二阶非齐次线性方程 (6-5) 的通解.

例如, 方程 $y''+y=x^2$ 是二阶非齐次线性微分方程. 已知 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$ 是对应的齐次方程 $y''+y=0$ 的通解; 又容易验证 $y^*=x^2-2$ 是所给方程的一个特解. 因此

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2-2$$

是所给方程的通解.

非齐次线性微分方程(6-5)的特解有时可用下述定理来帮助求出.

定理 4 设非齐次线性方程(6-5)的右端 $f(x)$ 是两个函数之和, 即

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x), \quad (6-9)$$

而 $y_1^*(x)$ 与 $y_2^*(x)$ 分别是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$$

与

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$$

的特解, 则 $y_1^*(x)+y_2^*(x)$ 就是原方程的特解.

证 将 $y=y_1^*+y_2^*$ 代入方程(6-9)的左端, 得

$$(y_1^*+y_2^*)''+P(x)(y_1^*+y_2^*)'+Q(x)(y_1^*+y_2^*)$$

$$= [y_1^{*''}+P(x)y_1^{*'}+Q(x)y_1^*] + [y_2^{*''}+P(x)y_2^{*'}+Q(x)y_2^*]$$

$$= f_1(x) + f_2(x).$$

因此 $y_1^*+y_2^*$ 是方程(6-9)的一个特解.

这一定理通常称为线性微分方程的解的叠加原理.

定理 3 和定理 4 也可推广到 n 阶非齐次线性方程, 这里不再赘述.

* 三、常数变易法

在第四节中, 为解一阶非齐次线性方程, 我们用了常数变易法. 这方法的特点是: 如果 $Cy_1(x)$ 是齐次线性方程的通解, 那么, 可以利用变换 $y=uy_1(x)$ (这变换是把齐次方程的通解中的任意常数 C 换成未知函数 $u(x)$ 而得到的) 去解非齐次线性方程. 这一方法也适用于解高阶线性方程. 下面就二阶线性方程来作讨论.

如果已知齐次方程(6-6)的通解为

$$Y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x),$$

那么, 可以用如下的常数变易法去求非齐次方程(6-5)的通解. 令

$$y=y_1(x)v_1+y_2(x)v_2, \quad (6-10)$$

要确定未知函数 $v_1(x)$ 及 $v_2(x)$ 使(6-10)式所表示的函数满足非齐次方程

(6-5). 为此, 对(6-10)式求导, 得

$$y' = y_1 v_1' + y_2 v_2' + y_1' v_1 + y_2' v_2.$$

由于两个未知函数 v_1, v_2 只需使(6-10)式所表示的函数满足一个关系式(6-5), 所以可规定它们再满足一个关系式. 从 y' 的上述表示式可看出, 为了使 y'' 的表示式中不含 v_1'' 和 v_2'' , 可设

$$y_1 v_1' + y_2 v_2' = 0, \quad (6-11)$$

从而

$$y' = y_1' v_1 + y_2' v_2,$$

再求导, 得

$$y'' = y_1' v_1' + y_2' v_2' + y_1'' v_1 + y_2'' v_2.$$

把 y, y', y'' 代入方程(6-5), 得

$$y_1' v_1' + y_2' v_2' + y_1'' v_1 + y_2'' v_2 + P(y_1' v_1 + y_2' v_2) + Q(y_1 v_1 + y_2 v_2) = f,$$

整理得

$$y_1' v_1' + y_2' v_2' + (y_1'' + P y_1' + Q y_1) v_1 + (y_2'' + P y_2' + Q y_2) v_2 = f.$$

注意到 y_1 及 y_2 是齐次方程(6-6)的解, 故上式即为

$$y_1' v_1' + y_2' v_2' = f. \quad (6-12)$$

联立方程(6-11)与(6-12), 在系数行列式

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2 \neq 0$$

时, 可解得

$$v_1' = -\frac{y_2 f}{W}, \quad v_2' = \frac{y_1 f}{W}.$$

对上两式积分(假定 $f(x)$ 连续), 得

$$v_1 = C_1 + \int \left(-\frac{y_2 f}{W} \right) dx, \quad v_2 = C_2 + \int \frac{y_1 f}{W} dx.$$

于是得非齐次方程(6-5)的通解为

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 - y_1 \int \frac{y_2 f}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 f}{W} dx.$$

例 3 已知齐次方程 $(x-1)y'' - xy' + y = 0$ 的通解为 $Y(x) = C_1 x + C_2 e^x$, 求非齐次方程 $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2$ 的通解.

解 把所给方程写成标准形式

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = x-1.$$

令 $y = xv_1 + e^x v_2$. 按照

$$\begin{cases} y_1 v_1' + y_2 v_2' = 0, \\ y_1' v_1 + y_2' v_2 = f. \end{cases}$$

有

$$\begin{cases} x v_1' + e^x v_2' = 0, \\ v_1' + e^x v_2' = x - 1, \end{cases}$$

解得

$$v_1' = -1, \quad v_2' = x e^{-x}.$$

积分,得

$$v_1 = C_1 - x, \quad v_2 = C_2 - (x+1)e^{-x}.$$

于是所求非齐次方程的通解为

$$y = C_1 x + C_2 e^x - (x^2 + x + 1).$$

如果只知齐次方程(6-6)的一个不恒为零的解 $y_1(x)$, 那么, 利用变换 $y = u y_1(x)$, 可把非齐次方程(6-5)化为一阶线性方程.

事实上, 把

$$y = y_1 u, \quad y' = y_1 u' + y_1' u, \quad y'' = y_1 u'' + 2y_1' u' + y_1'' u$$

代入方程(6-5), 得

$$y_1 u'' + 2y_1' u' + y_1'' u + P(y_1 u' + y_1' u) + Q y_1 u = f,$$

即

$$y_1 u'' + (2y_1' + P y_1) u' + (y_1'' + P y_1' + Q y_1) u = f,$$

由于 $y_1'' + P y_1' + Q y_1 = 0$, 故上式为

$$y_1 u'' + (2y_1' + P y_1) u' = f.$$

令 $u' = z$, 上式即化为一阶线性方程

$$y_1 z' + (2y_1' + P y_1) z = f. \quad (6-13)$$

把方程(6-5)化为方程(6-13)以后, 按一阶线性方程的解法, 设求得方程(6-13)的通解为

$$z = C_2 Z(x) + z^*(x),$$

积分得 $u = C_1 + C_2 U(x) + u^*(x)$ (其中 $U'(x) = Z(x)$, $u^{*'}(x) = z^*(x)$),

上式两端乘 $y_1(x)$, 便得方程(6-5)的通解

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 U(x) y_1(x) + u^*(x) y_1(x).$$

上述方法显然也适用于求齐次方程(6-6)的通解.

例 4 已知 $y_1(x) = e^x$ 是齐次方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解, 求非齐次方程 $y'' - 2y' + y = \frac{1}{x} e^x$ 的通解.

解 令 $y = e^x u$, 则 $y' = e^x(u' + u)$, $y'' = e^x(u'' + 2u' + u)$, 代入非齐次方程, 得

$$e^x(u'' + 2u' + u) - 2e^x(u' + u) + e^x u = \frac{1}{x}e^x,$$

即

$$e^x u'' = \frac{1}{x}e^x, u'' = \frac{1}{x}.$$

这里不需再作变换去化为一阶线性方程, 只要直接积分, 使得

$$u' = C + \ln|x|,$$

再积分得

$$u = C_1 + Cx + x \ln|x| - x,$$

即

$$u = C_1 + C_2 x + x \ln|x| \quad (C_2 = C - 1).$$

于是所求通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + x e^x \ln|x|.$$

习 题 7-6

1. 下列函数组在其定义区间内哪些是线性无关的?

- | | |
|--------------------------------|--|
| (1) x, x^2 ; | (2) $x, 2x$; |
| (3) $e^{2x}, 3e^{2x}$, | (4) e^{-x}, e^x ; |
| (5) $\cos 2x, \sin 2x$; | (6) e^{x^2}, xe^{x^2} ; |
| (7) $\sin 2x, \cos x \sin x$; | (8) $e^x \cos 2x, e^x \sin 2x$; |
| (9) $\ln x, x \ln x$; | (10) $e^{ax}, e^{bx} \quad (a \neq b)$. |

2. 验证 $y_1 = \cos \omega x$ 及 $y_2 = \sin \omega x$ 都是方程 $y'' + \omega^2 y = 0$ 的解, 并写出该方程的通解.

3. 验证 $y_1 = e^{x^2}$ 及 $y_2 = xe^{x^2}$ 都是方程 $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$ 的解, 并写出该方程的通解.

4. 验证:

(1) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{12} e^{5x}$ (C_1, C_2 是任意常数) 是方程 $y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$ 的通解;

(2) $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{32} (4x \cos x + \sin x)$ (C_1, C_2 是任意常数) 是方程 $y'' + 9y = x \cos x$

的通解;

(3) $y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x$ (C_1, C_2 是任意常数) 是方程 $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$ 的通解;

(4) $y = C_1 x^5 + \frac{C_2}{x} - \frac{x^2}{9} \ln x$ (C_1, C_2 是任意常数) 是方程 $x^2 y'' - 3xy' - 5y = x^2 \ln x$ 的通解;

(5) $y = \frac{1}{x} (C_1 e^x + C_2 e^{-x}) + \frac{e^x}{2}$ (C_1, C_2 是任意常数) 是方程 $xy'' + 2y' - xy = e^x$ 的通解;

(6) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x^2$ (C_1, C_2, C_3, C_4 是任意常数) 是方程 $y^{(4)} - y = x^2$ 的通解.

*5. 已知 $y_1(x) = e^x$ 是齐次线性方程 $(2x-1)y'' - (2x+1)y' + 2y = 0$ 的一个解, 求此方程的通解.

*6. 已知 $y_1(x) = x$ 是齐次线性方程 $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$ 的一个解, 求非齐次线性方程 $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x^3$ 的通解.

*7. 已知齐次线性方程 $y'' + y = 0$ 的通解为 $Y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, 求非齐次线性方程 $y'' + y = \sec x$ 的通解.

*8. 已知齐次线性方程 $x^2 y'' - xy' + y = 0$ 的通解为 $Y(x) = C_1 x + C_2 x \ln |x|$, 求非齐次线性方程 $x^2 y'' - xy' + y = x$ 的通解.

第七节 常系数齐次线性微分方程

先讨论二阶常系数齐次线性微分方程的解法, 再把二阶方程的解法推广到 n 阶方程.

在二阶齐次线性微分方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (7-1)$$

中, 如果 y', y 的系数 $P(x), Q(x)$ 均为常数, 即(7-1)式成为

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (7-2)$$

其中 p, q 是常数, 那么称(7-2)为二阶常系数齐次线性微分方程. 如果 p, q 不全为常数, 称(7-1)为二阶变系数齐次线性微分方程.

由上节讨论可知, 要找微分方程(7-2)的通解, 可以先求出它的两个解 y_1, y_2 , 如果它们之比不为常数, 即 y_1 与 y_2 线性无关, 那么 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 就是方程(7-2)的通解.

当 r 为常数时, 指数函数 $y = e^{rx}$ 和它的各阶导数都只相差一个常数因子. 由于指数函数有这个特点, 因此我们用 $y = e^{rx}$ 来尝试, 看能否选取适当的常数 r , 使 $y = e^{rx}$ 满足方程(7-2).

将 $y = e^{rx}$ 求导①, 得到

① 当 r 为复数 $a+bi$, x 为实变数时, 导数公式 $\frac{d}{dx} e^{rx} = r e^{rx}$ 仍成立. 事实上, 对欧拉公式

$$e^{(a+bi)x} = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx)$$

两端求导, 得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^{(a+bi)x} &= a e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) + e^{ax} (-b \sin bx + i b \cos bx) \\ &= (a+bi) e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) = (a+bi) e^{(a+bi)x}. \end{aligned}$$

$$y' = r e^{rx}, \quad y'' = r^2 e^{rx}$$

把 y, y' 和 y'' 代入方程 (7-2), 得

$$(r^2 + pr + q)e^{rx} = 0.$$

由于 $e^{rx} \neq 0$, 所以

$$r^2 + pr + q = 0. \quad (7-3)$$

由此可见, 只要 r 满足代数方程 (7-3), 函数 $y = e^{rx}$ 就是微分方程 (7-2) 的解, 我们把代数方程 (7-3) 叫做微分方程 (7-2) 的特征方程.

特征方程 (7-3) 是一个二次代数方程, 其中 r^2, r 的系数及常数项恰好依次是微分方程 (7-2) 中 y'', y' 及 y 的系数.

特征方程 (7-3) 的两个根 r_1, r_2 可以用公式

$$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

求出. 它们有三种不同的情形:

(i) 当 $p^2 - 4q > 0$ 时, r_1, r_2 是两个不相等的实根

$$r_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad r_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2};$$

(ii) 当 $p^2 - 4q = 0$ 时, r_1, r_2 是两个相等的实根

$$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2};$$

(iii) 当 $p^2 - 4q < 0$ 时, r_1, r_2 是一对共轭复根

$$r_1 = \alpha + \beta i, \quad r_2 = \alpha - \beta i,$$

其中

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}.$$

相应地, 微分方程 (7-2) 的通解也有三种不同的情形. 分别讨论如下:

(i) 特征方程有两个不相等的实根: $r_1 \neq r_2$

由上面的讨论知道, $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$ 是微分方程 (7-2) 的两个解, 并且 $\frac{y_2}{y_1} =$

$\frac{e^{r_2 x}}{e^{r_1 x}} = e^{(r_2 - r_1)x}$ 不是常数, 因此微分方程 (7-2) 的通解为

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

(ii) 特征方程有两个相等的实根: $r_1 = r_2$

这时, 只得到微分方程 (7-2) 的一个解

$$y_1 = e^{r_1 x}.$$

为了得出微分方程(7-2)的通解,还需求出另一个解 y_2 , 并且要求 $\frac{y_2}{y_1}$ 不是常数.

设 $\frac{y_2}{y_1} = u(x)$, 即 $y_2 = e^{r_1 x} u(x)$. 下面来求 $u(x)$. 将 y_2 求导, 得

$$y_2' = e^{r_1 x} (u' + r_1 u),$$

$$y_2'' = e^{r_1 x} (u'' + 2r_1 u' + r_1^2 u),$$

将 y_2, y_2' 和 y_2'' 代入微分方程(7-2), 得

$$e^{r_1 x} [(u'' + 2r_1 u' + r_1^2 u) + p(u' + r_1 u) + qu] = 0,$$

约去 $e^{r_1 x}$, 并合并同类项, 得

$$u'' + (2r_1 + p)u' + (r_1^2 + pr_1 + q)u = 0.$$

由于 r_1 是特征方程(7-3)的二重根. 因此 $r_1^2 + pr_1 + q = 0$, 且 $2r_1 + p = 0$, 于是得

$$u'' = 0.$$

因为这里只要得到一个不为常数的解, 所以不妨选取 $u = x$, 由此得到微分方程(7-2)的另一个解

$$y_2 = x e^{r_1 x}.$$

从而微分方程(7-2)的通解为

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x},$$

即

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}.$$

(iii) 特征方程有一对共轭复根: $r_1 = \alpha + \beta i, r_2 = \alpha - \beta i$ ($\beta \neq 0$)

这时, $y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x}, y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x}$ 是微分方程(7-2)的两个解, 但它们是复值函数形式. 为了得出实值函数形式的解, 先利用欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 把 y_1, y_2 改写为

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\beta x i} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x),$$

$$y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-\beta x i} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x).$$

由于复值函数 y_1 与 y_2 之间成共轭关系, 因此, 取它们的和除以 2 就得到它们的实部, 取它们的差除以 $2i$ 就得到它们的虚部. 由于方程(7-2)的解符合叠加原理, 所以实值函数

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{2} (y_1 + y_2) = e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{2i} (y_1 - y_2) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

还是微分方程(7-2)的解, 且 $\frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2} = \frac{e^{\alpha x} \cos \beta x}{e^{\alpha x} \sin \beta x} = \cot \beta x$ 不是常数, 所以微分方程

(7-2)的通解为

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

综上所述,求二阶常系数齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (7-2)$$

的通解的步骤如下:

第一步 写出微分方程(7-2)的特征方程

$$r^2 + pr + q = 0. \quad (7-3)$$

第二步 求出特征方程(7-3)的两个根 r_1, r_2 .

第三步 根据特征方程(7-3)的两个根的不同情形,按照下列表格写出微分方程(7-2)的通解:

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的两个根 r_1, r_2	微分方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的通解
两个不相等的实根 r_1, r_2	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
两个相等的实根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

例 1 求微分方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解.

解 所给微分方程的特征方程为

$$r^2 - 2r - 3 = 0,$$

其根 $r_1 = -1, r_2 = 3$ 是两个不相等的实根,因此所求通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

例 2 求方程 $\frac{d^2 s}{dt^2} + 2 \frac{ds}{dt} + s = 0$ 满足初值条件 $s|_{t=0} = 4, s'|_{t=0} = -2$ 的特解.

解 所给方程的特征方程为

$$r^2 + 2r + 1 = 0,$$

其根 $r_1 = r_2 = -1$ 是两个相等的实根,因此所求微分方程的通解为

$$s = (C_1 + C_2 t) e^{-t}.$$

将条件 $s|_{t=0} = 4$ 代入通解,得 $C_1 = 4$,从而

$$s = (4 + C_2 t) e^{-t}.$$

将上式对 t 求导,得

$$s' = (C_2 - 4 - C_2 t) e^{-t}.$$

再把条件 $s'|_{t=0} = -2$ 代入上式,得 $C_2 = 2$. 于是所求特解为

$$s = (4 + 2t) e^{-t}.$$

例 3 求微分方程 $y'' - 2y' + 5y = 0$ 的通解.

解 所给方程的特征方程为

$$r^2 - 2r + 5 = 0,$$

其根 $r_{1,2} = 1 \pm 2i$ 为一对共轭复根. 因此所求通解为

$$y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

例 4 在第六节例 1 中, 设物体只受弹性恢复力 f 的作用, 且在初始时刻 $t=0$ 的位置为 $x = x_0$, 初始速度为 $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v_0$. 求反映物体运动规律的函数 $x = x(t)$.

解 由于不计阻力 R , 即假设 $-\mu \frac{dx}{dt} = 0$, 所以方程 (6-1) 成为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0, \quad (7-4)$$

方程 (7-4) 叫做无阻尼自由振动的微分方程.

反映物体运动规律的函数 $x = x(t)$ 是满足微分方程 (7-4) 及初值条件

$$x|_{t=0} = x_0, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v_0$$

的特解.

方程 (7-4) 的特征方程为 $r^2 + k^2 = 0$, 其根 $r = \pm ki$ 是一对共轭复根, 所以方程 (7-4) 的通解为

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

应用初值条件, 定出 $C_1 = x_0$, $C_2 = \frac{v_0}{k}$. 因此, 所求的特解为

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt. \quad (7-5)$$

为了便于说明特解所反映的振动现象, 我们令

$$x_0 = A \sin \varphi, \quad \frac{v_0}{k} = A \cos \varphi \quad (0 \leq \varphi < 2\pi),$$

于是 (7-5) 式成为

$$x = A \sin(kt + \varphi), \quad (7-6)$$

其中

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}, \quad \tan \varphi = \frac{kx_0}{v_0}.$$

函数 (7-6) 的图形如图 7-10 所示 (图中假定 $x_0 > 0, v_0 > 0$).

函数 (7-6) 所反映的运动就是简谐振动. 这个振动的振幅为 A , 初相为 φ , 周

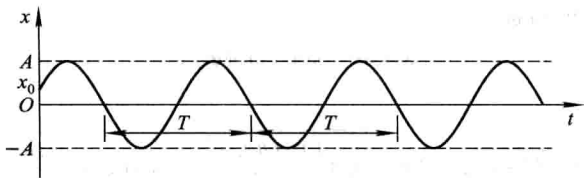


图 7-10

期为 $T = \frac{2\pi}{k}$, 角频率为 k . 由于 $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ (见第六节例 1), 它与初值条件无关, 而完全由振动系统 (在本例中就是弹簧和物体所组成的系统) 本身所确定. 因此, k 又叫做系统的固有频率. 固有频率是反映振动系统特性的一个重要参数.

例 5 在第六节例 1 中, 设物体受弹簧的恢复力 f 和阻力 R 的作用, 且在初始时刻 $t=0$ 的位置 $x=x_0$, 初始速度 $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v_0$, 求反映物体运动规律的函数 $x=x(t)$.

解 这就是要找满足有阻尼的自由振动方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + k^2x = 0 \quad (7-7)$$

及初值条件

$$x|_{t=0} = x_0, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v_0$$

的特解.

方程 (7-7) 的特征方程为 $r^2 + 2nr + k^2 = 0$, 其根为

$$r = \frac{-2n \pm \sqrt{4n^2 - 4k^2}}{2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}.$$

以下按 $n < k$, $n > k$ 及 $n = k$ 三种不同情形分别进行讨论.

(i) 小阻尼情形: $n < k$

特征方程的根 $r = -n \pm \omega i$ ($\omega = \sqrt{k^2 - n^2}$) 是一对共轭复根, 所以方程 (7-7) 的通解为

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t).$$

应用初值条件定出 $C_1 = x_0$, $C_2 = \frac{v_0 + nx_0}{\omega}$, 因此所求特解为

$$x = e^{-nt} \left(x_0 \cos \omega t + \frac{v_0 + nx_0}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (7-8)$$

如例 4 中所做的那样, 令

$$x_0 = A \sin \varphi, \quad \frac{v_0 + nx_0}{\omega} = A \cos \varphi \quad (0 \leq \varphi < 2\pi), \quad (7-9)$$

那么(7-8)式又可写成

$$x = Ae^{-nt} \sin(\omega t + \varphi), \quad (7-10)$$

其中

$$\omega = \sqrt{k^2 - n^2}, \quad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{\omega^2}}, \quad \tan \varphi = \frac{x_0 \omega}{v_0 + nx_0}.$$

从(7-10)式看出,物体的运动是周期为 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 的振动. 但与简谐振动不同, 它的振幅 Ae^{-nt} 随时间 t 的增大而逐渐减小. 因此, 物体随时间 t 的增大而趋于平衡位置.

函数(7-10)的图形如图 7-11 所示(图中假定 $x_0 = 0, v_0 > 0$).

(ii) 大阻尼情形: $n > k$

特征方程的根 $r_1 = -n + \sqrt{n^2 - k^2}, r_2 = -n - \sqrt{n^2 - k^2}$ 是两个不相等的负实根, 所以方程(7-7)的通解为

$$x = C_1 e^{-(n - \sqrt{n^2 - k^2})t} + C_2 e^{-(n + \sqrt{n^2 - k^2})t}, \quad (7-11)$$

其中任意常数 C_1, C_2 可以由初值条件来确定.

从(7-11)式看出, 使 $x = 0$ 的 t 值最多只有一个, 即物体最多越过平衡位置一次, 因此物体已不再有振动现象. 又当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $x \rightarrow 0$. 因此, 物体随时间 t 的增大而趋于平衡位置.

函数(7-11)的图形如图 7-12 所示(图中假定 $x_0 > 0, v_0 > 0$).

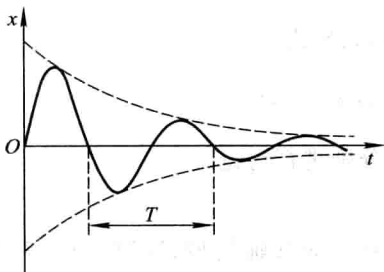


图 7-11

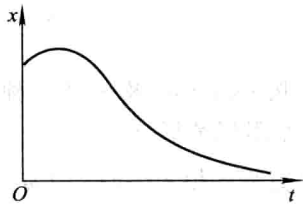


图 7-12

(iii) 临界阻尼情形: $n = k$

特征方程的根 $r_1 = r_2 = -n$ 是两个相等的实根, 所以方程(7-7)的通解为

$$x = e^{-nt}(C_1 + C_2 t),$$

其中任意常数 C_1 及 C_2 可由初值条件来确定. 由上式可看出, 在临界阻尼情形使 $x = 0$ 的 t 值也最多只有一个, 因此物体也不再有振动现象. 又由于

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t e^{-nt} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{nt}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{n e^{nt}} = 0,$$

从而可以看出,当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $x \rightarrow 0$. 因此,在临界阻尼情形,物体也随时间 t 的增大而趋于平衡位置.

上面讨论二阶常系数齐次线性微分方程所用的方法以及方程的通解的形式,可推广到 n 阶常系数齐次线性微分方程上去,对此我们不再详细讨论,只简单地叙述于下:

n 阶常系数齐次线性微分方程的一般形式是

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0, \quad (7-12)$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}, p_n$ 都是常数.

有时我们用记号 D (叫做微分算子) 表示对 x 求导的运算 $\frac{d}{dx}$, 把 $\frac{dy}{dx}$ 记作 Dy , 把 $\frac{d^n y}{dx^n}$ 记作 $D^n y$, 并把方程(7-12)记作

$$(D^n + p_1 D^{n-1} + \cdots + p_{n-1} D + p_n) y = 0. \quad (7-13)$$

记

$$L(D) = D^n + p_1 D^{n-1} + \cdots + p_{n-1} D + p_n,$$

$L(D)$ 叫做微分算子 D 的 n 次多项式. 于是方程(7-13)可记作

$$L(D)y = 0.$$

如同讨论二阶常系数齐次线性微分方程那样,令 $y = e^{rx}$. 由于 $De^{rx} = re^{rx}, \cdots, D^n e^{rx} = r^n e^{rx}$, 故 $L(D)e^{rx} = L(r)e^{rx}$. 因此把 $y = e^{rx}$ 代入方程(7-13), 得

$$L(r)e^{rx} = 0.$$

由此可见,如果选取 r 是 n 次代数方程 $L(r) = 0$, 即

$$r^n + p_1 r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + \cdots + p_{n-1} r + p_n = 0 \quad (7-14)$$

的根,那么作出的函数 $y = e^{rx}$ 就是方程(7-13)的一个解.

方程(7-14)叫做方程(7-13)的特征方程.

根据特征方程的根,可以写出其对应的微分方程的解如下:

特征方程的根	微分方程通解中的对应项
单实根 r	给出一项: Ce^{rx}
一对单复根 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	给出两项: $e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$
k 重实根 r	给出 k 项: $e^{rx} (C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1})$
一对 k 重复根 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	给出 $2k$ 项: $e^{\alpha x} [(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x + (D_1 + D_2 x + \cdots + D_k x^{k-1}) \sin \beta x]$

从代数学知道, n 次代数方程有 n 个根(重根按重数计算), 而特征方程的每

一个根都对应着通解中的一项,且每项各含一个任意常数,这样就得到 n 阶常系数齐次线性微分方程的通解

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n.$$

例 6 求方程 $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' = 0$ 的通解.

解 这里的特征方程为

$$r^4 - 2r^3 + 5r^2 = 0,$$

即

$$r^2(r^2 - 2r + 5) = 0.$$

它的根是 $r_1 = r_2 = 0$ 和 $r_{3,4} = 1 \pm 2i$. 因此所给微分方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 x + e^x (C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x).$$

例 7 求方程 $\frac{d^4 w}{dx^4} + \beta^4 w = 0$ 的通解, 其中 $\beta > 0$.

解 这里的特征方程为

$$r^4 + \beta^4 = 0.$$

由于

$$\begin{aligned} r^4 + \beta^4 &= r^4 + 2r^2\beta^2 + \beta^4 - 2r^2\beta^2 = (r^2 + \beta^2)^2 - 2r^2\beta^2 \\ &= (r^2 - \sqrt{2}\beta r + \beta^2)(r^2 + \sqrt{2}\beta r + \beta^2), \end{aligned}$$

所以特征方程可以写为

$$(r^2 - \sqrt{2}\beta r + \beta^2)(r^2 + \sqrt{2}\beta r + \beta^2) = 0.$$

它的根为 $r_{1,2} = \frac{\beta}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$, $r_{3,4} = -\frac{\beta}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$, 因此所给方程的通解为

$$w = e^{\frac{\beta}{\sqrt{2}}x} \left(C_1 \cos \frac{\beta}{\sqrt{2}}x + C_2 \sin \frac{\beta}{\sqrt{2}}x \right) + e^{-\frac{\beta}{\sqrt{2}}x} \left(C_3 \cos \frac{\beta}{\sqrt{2}}x + C_4 \sin \frac{\beta}{\sqrt{2}}x \right).$$

习 题 7-7

1. 求下列微分方程的通解:

(1) $y'' + y' - 2y = 0$;

(2) $y'' - 4y' = 0$;

(3) $y'' + y = 0$;

(4) $y'' + 6y' + 13y = 0$;

(5) $4 \frac{d^2 x}{dt^2} - 20 \frac{dx}{dt} + 25x = 0$;

(6) $y'' - 4y' + 5y = 0$;

(7) $y^{(4)} - y = 0$;

(8) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$;

(9) $y^{(4)} - 2y''' + y'' = 0$;

(10) $y^{(4)} + 5y'' - 36y = 0$.

2. 求下列微分方程满足所给初值条件的特解:

(1) $y'' - 4y' + 3y = 0, y|_{x=0} = 6, y'|_{x=0} = 10$;

- (2) $4y''+4y'+y=0, y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=0$;
 (3) $y''-3y'-4y=0, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=-5$;
 (4) $y''+4y'+29y=0, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=15$;
 (5) $y''+25y=0, y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=5$;
 (6) $y''-4y'+13y=0, y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=3$.

3. 一个单位质量的质点在数轴上运动, 开始时质点在原点 O 处且速度为 v_0 , 在运动过程中, 它受到一个力的作用, 这个力的大小与质点到原点的距离成正比(比例系数 $k_1 > 0$) 而方向与初速度一致. 又介质的阻力与速度成正比(比例系数 $k_2 > 0$). 求反映这质点的运动规律的函数.

4. 在图 7-13 所示的电路中先将开关 S 拨向 A , 达到稳定状态后再将开关 S 拨向 B , 求电压 $u_C(t)$ 及电流 $i(t)$. 已知 $E = 20 \text{ V}$, $C = 0.5 \times 10^{-6} \text{ F}$, $L = 0.1 \text{ H}$, $R = 2000 \text{ }\Omega$.

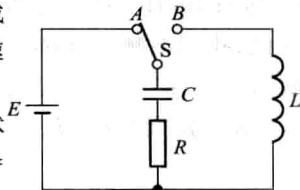


图 7-13

5. 设圆柱形浮筒的底面直径为 0.5 m , 将它铅直放在水中, 当稍向下压后突然放开, 浮筒在水中上下振动的周期为 2 s , 求浮筒的质量.

第八节 常系数非齐次线性微分方程

本节着重讨论二阶常系数非齐次线性微分方程的解法, 并对 n 阶方程的解法作必要的说明.

二阶常系数非齐次线性微分方程的一般形式是

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (8-1)$$

其中 p, q 是常数.

由第六节定理 3 可知, 求二阶常系数非齐次线性微分方程的通解, 归结为求对应的齐次方程

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (8-2)$$

的通解和非齐次方程(8-1)本身的一个特解. 由于二阶常系数齐次线性微分方程的通解的求法已在第七节得到解决, 所以这里只需讨论求二阶常系数非齐次线性微分方程的一个特解 y^* 的方法.

本节只介绍当方程(8-1)中的 $f(x)$ 取两种常见形式时求 y^* 的方法. 这种方法的特点是不用积分就可求出 y^* 来, 它叫做待定系数法. $f(x)$ 的两种形式是

(1) $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$, 其中 λ 是常数, $P_m(x)$ 是 x 的一个 m 次多项式:

$$P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m;$$

(2) $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + Q_n(x) \sin \omega x]$, 其中 λ, ω 是常数, $\omega \neq 0$, $P_l(x)$ 、 $Q_n(x)$ 分别是 x 的 l 次、 n 次多项式, 且仅有一个可为零.

下面分别介绍 $f(x)$ 为上述两种形式时 y^* 的求法.

一、 $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型

我们知道,方程(8-1)的特解 y^* 是使(8-1)成为恒等式的函数. 怎样的函数能使(8-1)成为恒等式呢? 因为(8-1)式右端 $f(x)$ 是多项式 $P_m(x)$ 与指数函数 $e^{\lambda x}$ 的乘积,而多项式与指数函数乘积的导数仍然是多项式与指数函数的乘积,因此,我们推测 $y^* = R(x)e^{\lambda x}$ (其中 $R(x)$ 是某个多项式)可能是方程(8-1)的特解. 把 y^* , $y^{*'}$ 及 $y^{*''}$ 代入方程(8-1),然后考虑能否选取适当的多项式 $R(x)$,使 $y^* = R(x)e^{\lambda x}$ 满足方程(8-1). 为此,将

$$\begin{aligned} y^* &= R(x)e^{\lambda x}, \\ y^{*'} &= e^{\lambda x} [\lambda R(x) + R'(x)], \\ y^{*''} &= e^{\lambda x} [\lambda^2 R(x) + 2\lambda R'(x) + R''(x)] \end{aligned}$$

代入方程(8-1)并消去 $e^{\lambda x}$, 得

$$R''(x) + (2\lambda + p)R'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = P_m(x). \quad (8-3)$$

(i) 如果 λ 不是(8-2)式的特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的根,即 $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$, 由于 $P_m(x)$ 是一个 m 次多项式,要使(8-3)的两端恒等,那么可令 $R(x)$ 为另一个 m 次多项式 $R_m(x)$:

$$R_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m,$$

代入(8-3)式,比较等式两端 x 同次幂的系数,就得到以 $b_0, b_1, \dots, b_m$ 作为未知数的 $m+1$ 个方程的联立方程组. 从而可以定出这些 $b_i (i=0, 1, \dots, m)$, 并得到所求的特解 $y^* = R_m(x)e^{\lambda x}$.

(ii) 如果 λ 是特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的单根,即 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, 但 $2\lambda + p \neq 0$, 要使(8-3)的两端恒等,那么 $R'(x)$ 必须是 m 次多项式. 此时可令

$$R(x) = xR_m(x),$$

并且可用同样的方法来确定 $R_m(x)$ 的系数 $b_i (i=0, 1, 2, \dots, m)$.

(iii) 如果 λ 是特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的重根,即 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, 且 $2\lambda + p = 0$, 要使(8-3)的两端恒等,那么 $R''(x)$ 必须是 m 次多项式. 此时可令

$$R(x) = x^2 R_m(x),$$

并用同样的方法来确定 $R_m(x)$ 中的系数.

综上所述,我们有如下结论:

如果 $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$, 那么二阶常系数非齐次线性微分方程(8-1)具有形如

$$y^* = x^k R_m(x) e^{\lambda x} \quad (8-4)$$

的特解,其中 $R_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 同次 (m 次) 的多项式,而 k 按 λ 不是特征方程的根、是特征方程的单根或是特征方程的重根依次取为 0、1 或 2.

上述结论可推广到 n 阶常系数非齐次线性微分方程,但要注意 (8-4) 式中的 k 是特征方程含根 λ 的重复次数 (即若 λ 不是特征方程的根,则 k 取为 0;若 λ 是特征方程的 s 重根,则 k 取为 s).

例 1 求微分方程 $y''-2y'-3y=3x+1$ 的一个特解.

解 这是二阶常系数非齐次线性微分方程,且函数 $f(x)$ 是 $e^{\lambda x}P_m(x)$ 型 (其中 $\lambda=0, P_m(x)=3x+1$).

与所给方程对应的齐次方程为

$$y''-2y'-3y=0,$$

它的特征方程为

$$r^2-2r-3=0.$$

由于这里 $\lambda=0$ 不是特征方程的根,所以应设特解为

$$y^*=b_0x+b_1.$$

把它代入所给方程,得

$$-3b_0x-2b_0-3b_1=3x+1,$$

比较两端 x 同次幂的系数,得

$$\begin{cases} -3b_0=3, \\ -2b_0-3b_1=1. \end{cases}$$

由此求得 $b_0=-1, b_1=\frac{1}{3}$. 于是求得一个特解为

$$y^*=-x+\frac{1}{3}.$$

例 2 求微分方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$ 的通解.

解 所给方程也是二阶常系数非齐次线性微分方程,且 $f(x)$ 呈 $e^{\lambda x}P_m(x)$ 型 (其中 $\lambda=2, P_m(x)=x$).

与所给方程对应的齐次方程为

$$y''-5y'+6y=0,$$

它的特征方程

$$r^2-5r+6=0$$

有两个实根 $r_1=2, r_2=3$. 于是与所给方程对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}.$$

由于 $\lambda=2$ 是特征方程的单根,所以应设 y^* 为

$$y^*=x(b_0x+b_1)e^{2x}.$$

把它代入所给方程,得

$$-2b_0x+2b_0-b_1=x.$$

比较等式两端同次幂的系数,得

$$\begin{cases} -2b_0=1, \\ 2b_0-b_1=0. \end{cases}$$

解得 $b_0=-\frac{1}{2}, b_1=-1$. 因此求得一个特解为

$$y^* = x\left(-\frac{1}{2}x-1\right)e^{2x}.$$

从而所求的通解为

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{2}(x^2 + 2x)e^{2x}.$$

二、 $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + Q_n(x) \sin \omega x]$ 型

应用欧拉公式

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad \sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}),$$

把 $f(x)$ 表示成复变指数函数的形式,有

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\lambda x} [P_l \cos \omega x + Q_n \sin \omega x] \\ &= e^{\lambda x} \left[P_l \frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2} + Q_n \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i} \right] \\ &= \left(\frac{P_l}{2} + \frac{Q_n}{2i} \right) e^{(\lambda + i\omega)x} + \left(\frac{P_l}{2} - \frac{Q_n}{2i} \right) e^{(\lambda - i\omega)x} \\ &= P(x) e^{(\lambda + i\omega)x} + \bar{P}(x) e^{(\lambda - i\omega)x}, \end{aligned}$$

其中

$$P(x) = \frac{P_l}{2} + \frac{Q_n}{2i} = \frac{P_l}{2} - \frac{Q_n}{2}i, \quad \bar{P}(x) = \frac{P_l}{2} - \frac{Q_n}{2i} = \frac{P_l}{2} + \frac{Q_n}{2}i$$

是互成共轭的 m 次多项式 (即它们对应项的系数是共轭复数), 而 $m = \max\{l, n\}$.

应用上一目的结果, 对于 $f(x)$ 中的第一项 $P(x)e^{(\lambda + i\omega)x}$, 可求出一个 m 次多项式 $R_m(x)$, 使得 $y_1^* = x^k R_m e^{(\lambda + i\omega)x}$ 为方程

$$y'' + py' + qy = P(x)e^{(\lambda + i\omega)x}$$

的特解,其中 k 按 $\lambda + \omega i$ 不是特征方程的根或是特征方程的单根依次取 0 或 1. 由于 $f(x)$ 的第二项 $\bar{P}(x)e^{(\lambda - \omega i)x}$ 与第一项 $P(x) \cdot e^{(\lambda + \omega i)x}$ 成共轭,所以与 y_1^* 成共轭的函数 $y_2^* = x^k \bar{R}_m e^{(\lambda - \omega i)x}$ 必然是方程

$$y'' + py' + qy = \bar{P}(x)e^{(\lambda - \omega i)x}$$

的特解,这里 $\bar{R}_m$ 表示与 R_m 成共轭的 m 次多项式. 于是,根据第六节定理 4,方程 (8-1) 具有形如

$$y^* = x^k R_m e^{(\lambda + \omega i)x} + x^k \bar{R}_m e^{(\lambda - \omega i)x}$$

的特解. 上式可写为

$$\begin{aligned} y^* &= x^k e^{\lambda x} [R_m e^{\omega x i} + \bar{R}_m e^{-\omega x i}] \\ &= x^k e^{\lambda x} [R_m (\cos \omega x + i \sin \omega x) + \bar{R}_m (\cos \omega x - i \sin \omega x)], \end{aligned}$$

由于括号内的两项是互成共轭的,相加后即无虚部,所以可以写成实函数的形式

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos \omega x + R_m^{(2)}(x) \sin \omega x].$$

综上所述,我们有如下结论:

如果 $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + Q_n(x) \sin \omega x]$, 则二阶常系数非齐次线性微分方程 (8-1) 的特解可设为

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m^{(1)}(x) \cos \omega x + R_m^{(2)}(x) \sin \omega x], \quad (8-5)$$

其中 $R_m^{(1)}(x)$ 、 $R_m^{(2)}(x)$ 是 m 次多项式, $m = \max\{l, n\}$, 而 k 按 $\lambda + \omega i$ (或 $\lambda - \omega i$) 不是特征方程的根、或是特征方程的单根依次取 0 或 1.

上述结论可推广到 n 阶常系数非齐次线性微分方程,但要注意 (8-5) 式中的 k 是特征方程中含根 $\lambda + \omega i$ (或 $\lambda - \omega i$) 的重复次数.

例 3 求微分方程 $y'' + y = x \cos 2x$ 的一个特解.

解 所给方程是二阶常系数非齐次线性方程,且 $f(x)$ 属于 $e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + Q_n(x) \sin \omega x]$ 型 (其中 $\lambda = 0, \omega = 2, P_l(x) = x, Q_n(x) = 0$).

与所给方程对应的齐次方程为

$$y'' + y = 0,$$

它的特征方程为

$$r^2 + 1 = 0.$$

由于这里 $\lambda + \omega i = 2i$ 不是特征方程的根,所以应设特解为

$$y^* = (ax + b) \cos 2x + (cx + d) \sin 2x.$$

把它代入所给方程,得

$$(-3ax - 3b + 4c) \cos 2x - (3cx + 3d + 4a) \sin 2x = x \cos 2x.$$

比较两端同类项的系数,得

$$\begin{cases} -3a=1, \\ -3b+4c=0, \\ -3c=0, \\ -3d-4a=0, \end{cases}$$

由此解得

$$a=-\frac{1}{3}, b=0, c=0, d=\frac{4}{9}.$$

于是求得一个特解为

$$y^* = -\frac{1}{3}x \cos 2x + \frac{4}{9} \sin 2x.$$

例 4 求微分方程 $y'' - y = e^x \cos 2x$ 的一个特解.

解 这是二阶常系数非齐次线性方程, 且 $f(x)$ 属 $e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + Q_n(x) \sin \omega x]$ 型 (这里 $\lambda=1, \omega=2, P_l(x)=1, Q_n(x)=0$).

特征方程为 $r^2 - 1 = 0$, 由于 $\lambda + \omega i = 1 + 2i$ 不是特征方程的根, 所以应设特解为

$$y^* = e^x (a \cos 2x + b \sin 2x).$$

求得

$$\begin{aligned} y^{*'} &= e^x [(a+2b) \cos 2x + (-2a+b) \sin 2x], \\ y^{*''} &= e^x [(-3a+4b) \cos 2x + (-4a-3b) \sin 2x]. \end{aligned}$$

代入所给方程, 得

$$4e^x [(-a+b) \cos 2x - (a+b) \sin 2x] = e^x \cos 2x,$$

比较两端同类项的系数, 有

$$\begin{cases} -a+b=\frac{1}{4}, \\ a+b=0, \end{cases} \quad \text{得} \quad \begin{cases} a=-\frac{1}{8}, \\ b=\frac{1}{8}. \end{cases}$$

因此所给方程的一个特解为

$$y^* = \frac{1}{8} e^x (\sin 2x - \cos 2x).$$

例 5 在第六节例 1 中, 设物体受弹性恢复力 f 和铅直干扰力 F 的作用. 试求物体的运动规律.

解 这里需要求出无阻尼强迫振动方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = h \sin pt \quad (8-6)$$

的通解.

对应的齐次微分方程 (即无阻尼自由振动方程) 为

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0, \quad (8-7)$$

它的特征方程 $r^2 + k^2 = 0$ 的根为 $r = \pm ki$. 故方程(8-7)的通解为

$$X = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

令 $C_1 = A \sin \varphi$, $C_2 = A \cos \varphi$, 则方程(8-7)的通解又可写成

$$X = A \sin(kt + \varphi),$$

其中, A, φ 为任意常数.

方程(8-6)右端的函数

$$f(t) = h \sin pt$$

与 $f(t) = e^{\lambda t} [P_l(t) \cos \omega t + Q_n(t) \sin \omega t]$ 相比较, 有 $\lambda = 0$, $\omega = p$, $P_l(t) = 0$, $Q_n(t) = h$. 现在分别就 $p \neq k$ 和 $p = k$ 两种情形讨论如下:

(i) 如果 $p \neq k$, 则 $\lambda \pm \omega i = \pm pi$ 不是特征方程的根, 故设

$$x^* = a_1 \cos pt + b_1 \sin pt.$$

代入方程(8-6)求得

$$a_1 = 0, \quad b_1 = \frac{h}{k^2 - p^2},$$

于是

$$x^* = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt.$$

从而当 $p \neq k$ 时, 方程(8-6)的通解为

$$x = X + x^* = A \sin(kt + \varphi) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt.$$

上式表示, 物体的运动由两部分组成, 这两部分都是简谐振动. 上式第一项表示自由振动, 第二项所表示的振动叫做强迫振动. 强迫振动是干扰力引起的, 它的角频率即是干扰力的角频率 p ; 当干扰力的角频率 p 与振动系统的固有频率

k 相差很小时, 它的振幅 $\left| \frac{h}{k^2 - p^2} \right|$ 可以很大.

(ii) 如果 $p = k$ 那么 $\lambda \pm \omega i = \pm pi$ 是特征方程的根. 故设

$$x^* = t(a_1 \cos kt + b_1 \sin kt).$$

代入方程(8-6)求得

$$a_1 = -\frac{h}{2k}, \quad b_1 = 0.$$

于是

$$x^* = -\frac{h}{2k} t \cos kt.$$

从而当 $p=k$ 时, 方程(8-6)的通解为

$$x = X + x^* = A \sin(kt + \varphi) - \frac{h}{2k} t \cos kt.$$

上式右端第二项表明, 强迫振动的振幅 $\frac{h}{2k}t$ 随时间 t 的增大而无限增大. 这就发生所谓共振现象. 为了避免共振现象, 应使干扰力的角频率 p 不要靠近振动系统的固有频率 k . 反之, 如果要利用共振现象, 那么应使 $p=k$ 或使 p 与 k 尽量靠近.

有阻尼的强迫振动问题可作类似的讨论, 这里从略了.

习 题 7-8

1. 求下列各微分方程的通解:

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| (1) $2y'' + y' - y = 2e^x$; | (2) $y'' + a^2y = e^x$; |
| (3) $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$; | (4) $y'' + 3y' + 2y = 3xe^{-x}$; |
| (5) $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin 2x$; | (6) $y'' - 6y' + 9y = (x+1)e^{3x}$; |
| (7) $y'' + 5y' + 4y = 3 - 2x$; | (8) $y'' + 4y = x \cos x$; |
| (9) $y'' + y = e^x + \cos x$; | (10) $y'' - y = \sin^2 x$. |

2. 求下列各微分方程满足已给初值条件的特解:

- (1) $y'' + y + \sin 2x = 0, y|_{x=\pi} = 1, y'|_{x=\pi} = 1$;
- (2) $y'' - 3y' + 2y = 5, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2$;
- (3) $y'' - 10y' + 9y = e^{2x}, y|_{x=0} = \frac{6}{7}, y'|_{x=0} = \frac{33}{7}$;
- (4) $y'' - y = 4xe^x, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1$;
- (5) $y'' - 4y' = 5, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 0$.

3. 大炮以仰角 α 、初速度 v_0 发射炮弹, 若不计空气阻力, 求弹道曲线.

4. 在 RLC 含源串联电路中, 电动势为 E 的电源对电容器 C 充电. 已知 $E = 20$ V, $C = 0.2 \mu\text{F}$, $L = 0.1$ H, $R = 1000 \Omega$, 试求合上开关 S 后的电流 $i(t)$ 及电压 $u_C(t)$.

5. 一条链悬挂在一钉子上, 起动时一端离开钉子 8 m 另一端离开钉子 12 m, 分别在以下两种情况下求链条滑下来所需要的时间:

- (1) 若不计钉子对链条所产生的摩擦力;
- (2) 若摩擦力的大小等于 1 m 长的链条所受重力的大小.

6. 设函数 $\varphi(x)$ 连续, 且满足

$$\varphi(x) = e^x + \int_0^x t\varphi(t) dt - x \int_0^x \varphi(t) dt,$$

求 $\varphi(x)$.

* 第九节 欧拉方程

变系数的线性微分方程,一般说来都是不容易求解的.但是有些特殊的变系数线性微分方程,则可以通过变量代换化为常系数线性微分方程,因而容易求解,欧拉方程就是其中的一种.

形如

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x) \quad (9-1)$$

的方程(其中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为常数),叫做欧拉方程.

作变换 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$, 将自变量 x 换成 t ①, 我们有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right),$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{1}{x^3} \left(\frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right).$$

如果采用记号 D 表示对 t 求导的运算 $\frac{d}{dt}$, 那么上述计算结果可以写成

$$x y' = D y,$$

$$x^2 y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = \left(\frac{d^2}{dt^2} - \frac{d}{dt} \right) y = (D^2 - D) y = D(D-1) y,$$

$$x^3 y''' = \frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} = (D^3 - 3D^2 + 2D) y = D(D-1)(D-2) y,$$

一般地,有

$$x^k y^{(k)} = D(D-1) \cdots (D-k+1) y.$$

把它代入欧拉方程(9-1),便得一个以 t 为自变量的常系数线性微分方程. 在求出这个方程的解后,把 t 换成 $\ln x$,即得原方程的解.

例 求欧拉方程 $x^3 y''' + x^2 y'' - 4xy' = 3x^2$ 的通解.

解 作变换 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$, 原方程化为

$$D(D-1)(D-2)y + D(D-1)y - 4Dy = 3e^{2t},$$

① 这里仅在 $x > 0$ 范围内求解. 如果要在 $x < 0$ 内求解,那么可作变换 $x = -e^t$ 或 $t = \ln(-x)$, 所得结果与 $x > 0$ 内的结果相类似.

即

$$D^3y - 2D^2y - 3Dy = 3e^{2t},$$

或

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 2\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} = 3e^{2t}. \quad (9-2)$$

方程(9-2)所对应的齐次方程为

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 2\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} = 0, \quad (9-3)$$

其特征方程为

$$r^3 - 2r^2 - 3r = 0,$$

它有三个根: $r_1 = 0, r_2 = -1, r_3 = 3$. 于是方程(9-3)的通解为

$$Y = C_1 + C_2 e^{-t} + C_3 e^{3t} = C_1 + \frac{C_2}{x} + C_3 x^3.$$

根据上节第一目,特解的形式为

$$y^* = be^{2t} = bx^2,$$

代入原方程,求得 $b = -\frac{1}{2}$, 即

$$y^* = -\frac{x^2}{2}.$$

于是,所给欧拉方程的通解为^①

$$y = C_1 + \frac{C_2}{x} + C_3 x^3 - \frac{1}{2}x^2.$$

* 习 题 7-9

求下列欧拉方程的通解:

- $x^2 y'' + xy' - y = 0;$
- $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x};$
- $x^3 y''' + 3x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0;$
- $x^2 y'' - 2xy' + 2y = \ln^2 x - 2 \ln x;$
- $x^2 y'' + xy' - 4y = x^3;$
- $x^2 y'' - xy' + 4y = x \sin(\ln x);$
- $x^2 y'' - 3xy' + 4y = x + x^2 \ln x;$
- $x^3 y''' + 2xy' - 2y = x^2 \ln x + 3x.$

① 这是在 $x > 0$ 内所求得通解. 容易验证, 在 $x < 0$ 内, 它也是所给方程的通解.

* 第十节 常系数线性微分方程组解法举例

前面讨论的是由一个微分方程求解一个未知函数的情形,但在研究某些实际问题时,还会遇到由几个微分方程联立起来共同确定几个具有同一自变量的函数的情形.这些联立的微分方程称为微分方程组.

如果微分方程组中的每一个微分方程都是常系数线性微分方程,那么,这种微分方程组就叫做常系数线性微分方程组.

对于常系数线性微分方程组,我们可以用下述方法求它的解:

第一步 从方程组中消去一些未知函数及其各阶导数,得到只含有一个未知函数的高阶常系数线性微分方程.

第二步 解此高阶微分方程,求出满足该方程的未知函数.

第三步 把已求得的函数代入原方程组,一般说来,不必经过积分就可求出其余的未知函数.

例 1 解微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 3y - 2z, \\ \frac{dz}{dx} = 2y - z. \end{cases} \quad (10-1)$$

$$(10-2)$$

解 这是含有两个未知函数 $y(x)$ 、 $z(x)$ 的由两个一阶常系数线性方程组成的方程组.

设法消去未知函数 y . 由 (10-2) 式得

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{dz}{dx} + z \right). \quad (10-3)$$

对上式两端求导,有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{dz}{dx} \right). \quad (10-4)$$

把 (10-3)、(10-4) 两式代入 (10-1) 式并化简,得

$$\frac{d^2z}{dx^2} - 2 \frac{dz}{dx} + z = 0.$$

这是一个二阶常系数线性微分方程,它的通解是

$$z = (C_1 + C_2 x) e^x. \quad (10-5)$$

再把 (10-5) 式代入 (10-3) 式,得

$$y = \frac{1}{2} (2C_1 + C_2 + 2C_2 x) e^x. \quad (10-6)$$

将(10-5)、(10-6)联立起来,就得到所给方程组的通解.

如果我们要得到方程组满足初值条件

$$y|_{x=0}=1, \quad z|_{x=0}=0$$

的特解,只需将此条件代入(10-6)和(10-5)式,得

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{2}(2C_1 + C_2), \\ 0 = C_1. \end{cases}$$

由此求得

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 2.$$

于是所给微分方程组满足上述初值条件的特解为

$$\begin{cases} y = (1+2x)e^x, \\ z = 2xe^x. \end{cases}$$

在讨论常系数线性微分方程(或方程组)时,常采用第七节中引入的记号 D 表示对自变量 x 求导的运算 $\frac{d}{dx}$.

例2 解微分方程组

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - x = e^t, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + y = 0. \end{cases}$$

解 用记号 D 表示 $\frac{d}{dt}$,则方程组可记作

$$\begin{cases} (D^2 - 1)x + Dy = e^t, & (10-7) \\ Dx + (D^2 + 1)y = 0. & (10-8) \end{cases}$$

我们可以类似于解代数方程组那样消去一个未知数,例如为消去 x ,可作如下运算:

$$(10-7) - D(10-8): -x - D^3 y = e^t, \quad (10-9)$$

$$(10-8) + D(10-9): (-D^4 + D^2 + 1)y = De^t,$$

即

$$(-D^4 + D^2 + 1)y = e^t. \quad (10-10)$$

(10-10)式为四阶非齐次线性方程,其特征方程为

$$-r^4 + r^2 + 1 = 0,$$

解得特征根为

$$r_{1,2} = \pm\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, \quad r_{3,4} = \pm\beta i = \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}},$$

容易求得一个特解 $y^* = e^t$, 于是得 (10-10) 的通解为

$$y = C_1 e^{-\alpha t} + C_2 e^{\alpha t} + C_3 \cos \beta t + C_4 \sin \beta t + e^t. \quad (10-11)$$

再求 x . 由 (10-9) 式, 即有

$$x = -D^3 y - e^t,$$

以 (10-11) 式代入上式, 即得

$$x = \alpha^3 C_1 e^{-\alpha t} - \alpha^3 C_2 e^{\alpha t} - \beta^3 C_3 \sin \beta t + \beta^3 C_4 \cos \beta t - 2e^t. \quad (10-12)$$

将 (10-11) 和 (10-12) 两个函数联立, 就是所求方程组的通解.

这里要注意, 在求得一个未知函数以后, 再求另一个未知函数时, 一般不再积分 (积分就会出现新的任意常数, 从 (10-11)、(10-12) 两式可知两式中的任意常数之间有着确定的关系).

我们也可用行列式解上述方程组. 由 (10-7) 和 (10-8), 有

$$\begin{vmatrix} D^2 - 1 & D \\ D & D^2 + 1 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} D^2 - 1 & e^t \\ D & 0 \end{vmatrix},$$

即

$$(D^4 - D^2 - 1)y = -e^t.$$

这与 (10-10) 式是一样的. 但再求 x 时, 不宜再次应用行列式. 如再应用行列式, 得

$$\begin{vmatrix} D^2 - 1 & D \\ D & D^2 + 1 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} e^t & D \\ 0 & D^2 + 1 \end{vmatrix},$$

即

$$(D^4 - D^2 - 1)x = 2e^t,$$

解得

$$x = A_1 e^{-\alpha t} + A_2 e^{\alpha t} + A_3 \cos \beta t + A_4 \sin \beta t - 2e^t,$$

则必须说明 A_1, A_2, A_3, A_4 与 C_1, C_2, C_3, C_4 之间的关系.

注意这里的“系数行列式”

$$\begin{vmatrix} D^2 - 1 & D \\ D & D^2 + 1 \end{vmatrix} = D^4 - D^2 - 1$$

是 D 的四次多项式, 这就标志着微分方程组是四阶的, 它的通解中一定恰含四个任意常数.

* 习 题 7-10

1. 求下列微分方程组的通解:

$$(1) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = z, \\ \frac{dz}{dx} = y; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = y, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = x; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = -x + y + 3, \\ \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = x + y - 3; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 5x + y = e^t, \\ \frac{dy}{dt} - x - 3y = e^{2t}; \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x + \frac{dy}{dt} + y = t, \\ 5x + \frac{dy}{dt} + 3y = t^2; \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} \frac{dx}{dt} - 3x + 2 \frac{dy}{dt} + 4y = 2 \sin t, \\ 2 \frac{dx}{dt} + 2x + \frac{dy}{dt} - y = \cos t. \end{cases}$$

2. 求下列微分方程组满足所给初值条件的特解:

$$(1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \quad x|_{t=0} = 0, \\ \frac{dy}{dt} = -x, \quad y|_{t=0} = 1; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} - x = 0, \quad x|_{t=0} = 1, \\ \frac{dx}{dt} + y = 0, \quad y|_{t=0} = 0; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 3x - y = 0, \quad x|_{t=0} = 1, \\ \frac{dy}{dt} - 8x + y = 0, \quad y|_{t=0} = 4; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 2 \frac{dx}{dt} - 4x + \frac{dy}{dt} - y = e^t, \quad x|_{t=0} = \frac{3}{2}, \\ \frac{dx}{dt} + 3x + y = 0, \quad y|_{t=0} = 0; \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x - \frac{dy}{dt} = 10 \cos t, \quad x|_{t=0} = 2, \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2y = 4e^{-2t}, \quad y|_{t=0} = 0; \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} \frac{dx}{dt} - x + \frac{dy}{dt} + 3y = e^{-t} - 1, \quad x|_{t=0} = \frac{48}{49}, \\ \frac{dx}{dt} + 2x + \frac{dy}{dt} + y = e^{2t} + t, \quad y|_{t=0} = \frac{95}{98}. \end{cases}$$

总习题七

1. 填空:

(1) $xy''' + 2x^2y'' + x^3y' = x^4 + 1$ 是 _____ 阶微分方程;

(2) 一阶线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 的通解为 _____.

(3) 与积分方程 $y = \int_{x_0}^x f(x, y) dx$ 等价的微分方程初值问题是 _____.

(4) 已知 $y=1, y=x, y=x^2$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解, 则该方程的通解为 _____.

2. 以下两题中给出了四个结论, 从中选出一个正确的结论:

(1) 设非齐次线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 有两个不同的解: $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$, C 为任意

常数,则该方程的通解是();

(A) $C[y_1(x)-y_2(x)]$ (B) $y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$

(C) $C[y_1(x)+y_2(x)]$ (D) $y_1(x)+C[y_1(x)+y_2(x)]$

(2) 具有特解 $y_1=e^{-x}$, $y_2=2xe^{-x}$, $y_3=3e^x$ 的三阶常系数齐次线性微分方程是().

(A) $y'''-y''-y'+y=0$ (B) $y'''+y''-y'-y=0$

(C) $y'''-6y''+11y'-6y=0$ (D) $y'''-2y''-y'+2y=0$

3. 求以下列各式所表示的函数为通解的微分方程:

(1) $(x+C)^2+y^2=1$ (其中 C 为任意常数);

(2) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$ (其中 C_1, C_2 为任意常数).

4. 求下列微分方程的通解:

(1) $xy'+y=2\sqrt{xy}$; (2) $xy'\ln x+y=ax(\ln x+1)$;

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2(\ln y-x)}$; (4) $\frac{dy}{dx}+xy-x^3y^3=0$;

(5) $y''+y'^2+1=0$; (6) $yy''-y'^2-1=0$;

(7) $y''+2y'+5y=\sin 2x$; (8) $y''' + y'' - 2y' = x(e^x + 4)$;

(9) $(y^4-3x^2)dy+xydx=0$; (10) $y'+x=\sqrt{x^2+y}$.

5. 求下列微分方程满足所给初值条件的特解:

(1) $y^3dx+2(x^2-xy^2)dy=0$, $x=1$ 时 $y=1$;

(2) $y''-ay'^2=0$, $x=0$ 时 $y=0$, $y'=-1$;

(3) $2y''-\sin 2y=0$, $x=0$ 时 $y=\frac{\pi}{2}$, $y'=1$;

(4) $y''+2y'+y=\cos x$, $x=0$ 时 $y=0$, $y'=\frac{3}{2}$.

6. 已知某曲线经过点 $(1,1)$, 它的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标, 求它的方程.

7. 已知某车间的体积为 $30 \times 30 \times 6 \text{ m}^3$, 其中的空气含 0.12% 的 CO_2 (以体积计算). 现以含 CO_2 0.04% 的新鲜空气输入, 问每分钟应输入多少, 才能在 30 min 后使车间空气中 CO_2 的含量不超过 0.06% ? (假定输入的新鲜空气与原有空气很快混合均匀后, 以相同的流量排出.)

8. 设可导函数 $\varphi(x)$ 满足

$$\varphi(x) \cos x + 2 \int_0^x \varphi(t) \sin t dt = x + 1,$$

求 $\varphi(x)$.

9. 设光滑曲线 $y=\varphi(x)$ 过原点, 且当 $x>0$ 时 $\varphi(x)>0$. 对应于 $[0, x]$ 一段曲线的弧长为 e^x-1 , 求 $\varphi(x)$.

10. 设 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶齐次线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的两个解, 令

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x),$$

证明: (1) $W(x)$ 满足方程 $W'+p(x)W=0$;

$$(2) W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt}.$$

* 11. 求下列欧拉方程的通解:

$$(1) x^2 y'' + 3xy' + y = 0;$$

$$(2) x^2 y'' - 4xy' + 6y = x.$$

* 12. 求下列常系数线性微分方程组的通解:

$$(1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2 \frac{dy}{dt} + y = 0, \\ 3 \frac{dx}{dt} + 2x + 4 \frac{dy}{dt} + 3y = t; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + x + \frac{dy}{dt} + y = 0, \\ \frac{dx}{dt} + x + \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = e^t. \end{cases}$$

附录 I 二阶和三阶行列式简介

给出二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad (1)$$

求这方程组的解.

用大家熟知的消元法, 分别消去方程组(1)中的 x_2 及 x_1 , 得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}. \end{cases} \quad (2)$$

下面引入二阶行列式, 然后利用二阶行列式来进一步讨论上述问题.

设已知四个数排成正方形表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

则数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为对应于这个表的二阶行列式, 用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (3)$$

表示, 因此

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 叫做行列式(3)的元素, 横排叫做行, 竖排叫做列. 元素 a_{ij} 中的第一个指标 i 和第二个指标 j 依次表示该元素所在的行数和列数. 例如, 元素 a_{21} 在行列式(3)中位于第二行和第一列.

现在, 方程组(2)可利用行列式来表示. 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21},$$

则方程组(2)可写成

$$\begin{cases} Dx_1 = D_1, \\ Dx_2 = D_2. \end{cases} \quad (2')$$

我们注意到, D 就是方程组(1)中 x_1 及 x_2 的系数构成的行列式, 因此称为系数行列式, 而 D_1 和 D_2 分别是用方程组(1)右端的常数项代替 D 的第一列和第二列而形成的.

若 $D \neq 0$, 则方程组(2)的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}. \quad (4)$$

把(4)中 x_1 及 x_2 的值代入方程组(1), 便可证实 x_1 及 x_2 的这对值也是方程组(1)的解. 另一方面, (2)是由(1)导出的, 因此(1)的解一定是(2)的解. 现在(2)只有一组解(4), 所以(4)是方程组(1)的唯一解. 由此得出结论:

在 $D \neq 0$ 的条件下, 方程组(1)有唯一的解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 2x+3y=8, \\ x-2y=-3. \end{cases}$$

$$\text{解} \quad D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 3 \times 1 = -7,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 8 \times (-2) - 3 \times (-3) = -7,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \times (-3) - 8 \times 1 = -14.$$

因 $D = -7 \neq 0$, 故所给方程组有唯一解

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-7}{-7} = 1, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{-14}{-7} = 2.$$

下面介绍三阶行列式概念.

设已知九个数排成正方形表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

则数 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$ 称为对应于这个表的三阶行列式, 用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

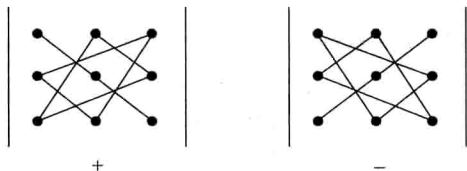
表示,因此

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (5)$$

关于三阶行列式的元素、行、列等概念,与二阶行列式的相应概念类似,不再重复.

(5)式右端相当复杂,我们可以借助下列图形得出它的计算法则(通常称为对角线法则):



行列式中从左上角到右下角的直线称为主对角线,从右上角到左下角的直线称为次对角线.主对角线上元素的乘积以及位于主对角线的平行线上的元素与对角上的元素的乘积,前面都取正号.次对角线上元素的乘积以及位于次对角线的平行线上的元素与对角上的元素的乘积,前面都取负号.

例 2 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned} &= 2 \times 3 \times 5 + 1 \times 1 \times 2 + 2 \times (-4) \times 3 - 2 \times 3 \times 2 - 1 \times (-4) \times 5 - 2 \times 1 \times 3 \\ &= 30 + 2 - 24 - 12 + 20 - 6 = 10. \end{aligned}$$

利用交换律及结合律,可把(5)式改写如下:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

把上式右端三个括号中的式子表示为二阶行列式,则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

上式称为三阶行列式按第一行的展开式.

例 3 将例 2 中的行列式按第一行展开并计算它的值.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times 12 - (-22) + 2 \times (-18) \\ &= 24 + 22 - 36 = 10. \end{aligned}$$

习 题

1. 利用二阶行列式解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} 5x - y = 2, \\ 3x + 2y = 9; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 3x + 4y = 2, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$$

2. 利用对角线法则, 计算下列各行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 10 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}; \quad (4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}.$$

3. 将下列行列式按第一行展开并计算它们的值:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

4. 证明下列等式:

$$(1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

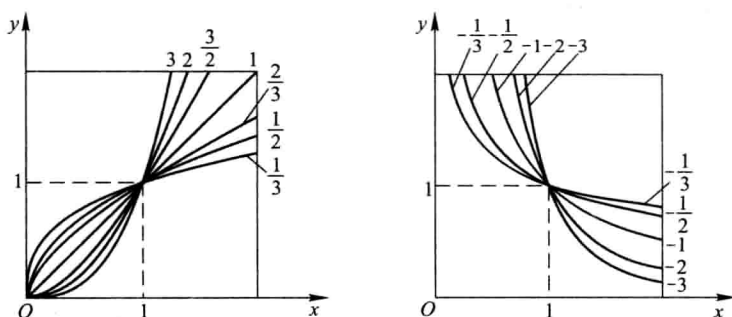
注: 上面这两个等式分别称为三阶行列式按第二行和按第三行的展开式.

答 案

1. (1) $x=1, y=3$; (2) $x=-22, y=17$.
2. (1) -4 ; (2) 8 ; (3) -48 ; (4) ab .
3. (1) 18 ; (2) 27 .
4. 略.

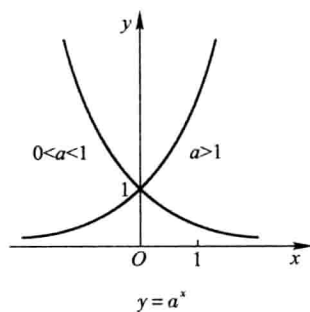
附录 II 基本初等函数的图形

幂函数



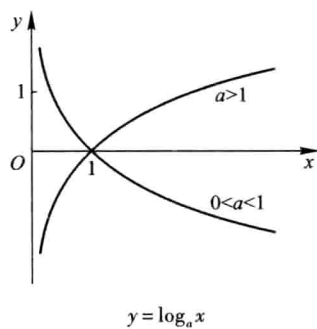
$$y = x^\mu$$

指数函数



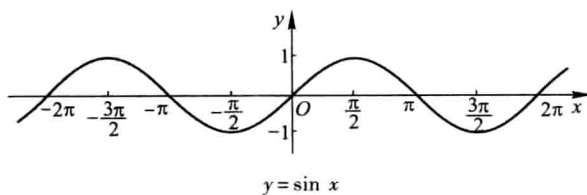
$$y = a^x$$

对数函数

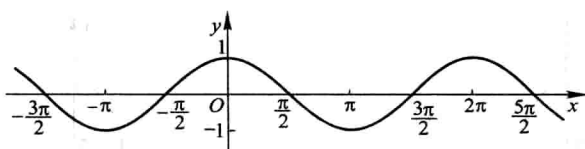


$$y = \log_a x$$

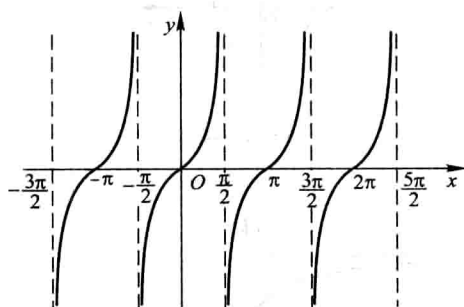
三角函数



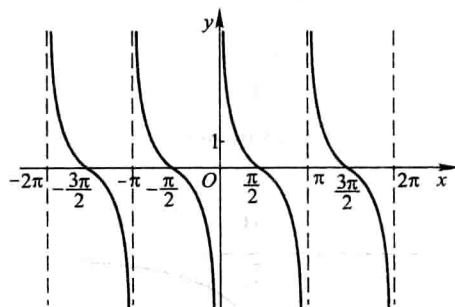
$$y = \sin x$$



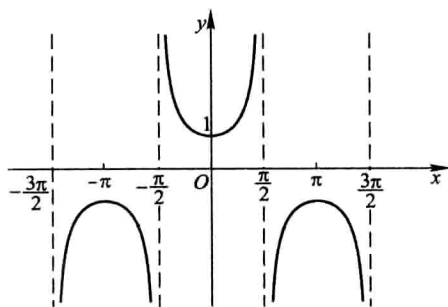
$$y = \cos x$$



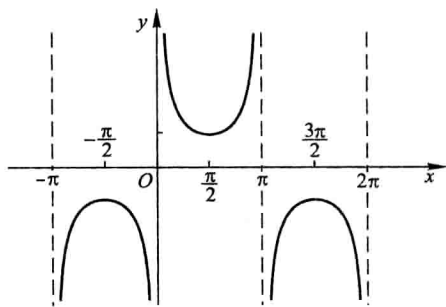
$$y = \tan x$$



$$y = \cot x$$

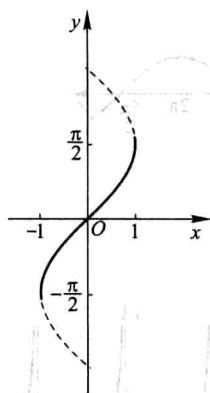


$$y = \sec x$$

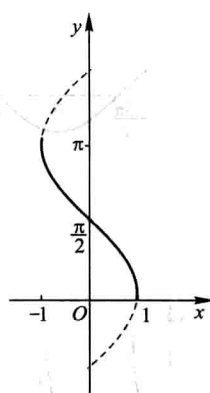


$$y = \csc x$$

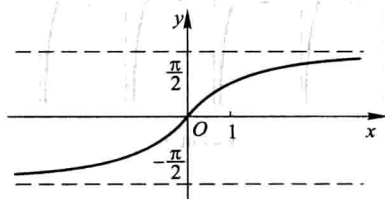
反三角函数



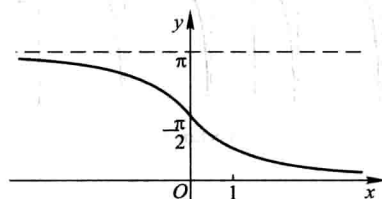
$$y = \arcsin x$$



$$y = \arccos x$$



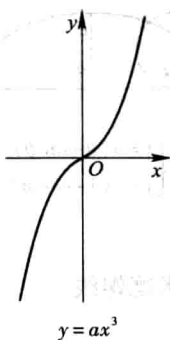
$$y = \arctan x$$



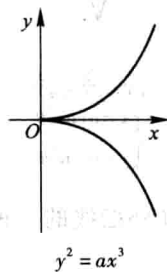
$$y = \operatorname{arccot} x$$

附录Ⅲ 几种常用的曲线

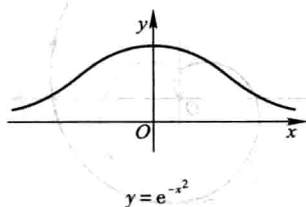
(1) 三次抛物线



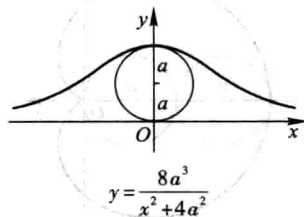
(2) 半立方抛物线



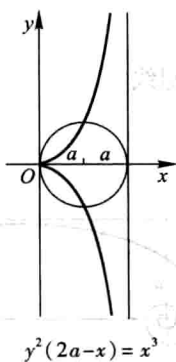
(3) 概率曲线



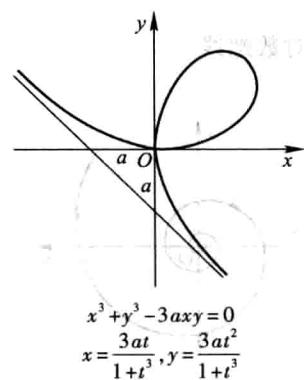
(4) 箕舌线



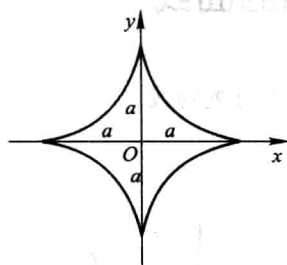
(5) 蔓叶线



(6) 笛卡儿叶形线

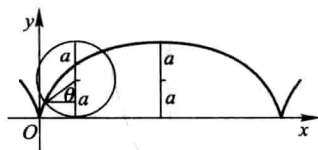


(7) 星形线(内摆线的一种)



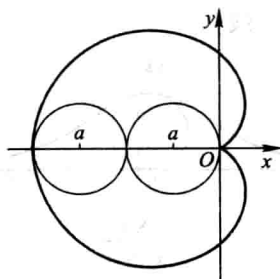
$$\begin{cases} x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \\ x = a \cos^3 \theta \\ y = a \sin^3 \theta \end{cases}$$

(8) 摆线



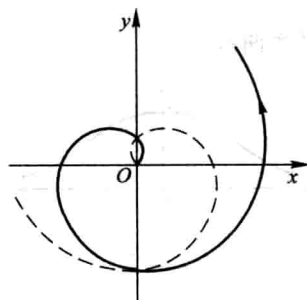
$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta) \\ y = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

(9) 心形线(外摆线的一种)



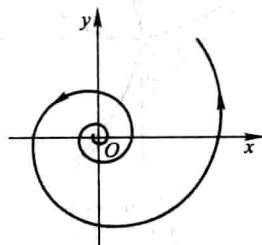
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax = a \sqrt{x^2 + y^2} \\ \rho = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

(10) 阿基米德螺线



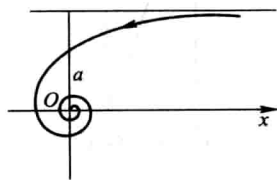
$$\rho = a\theta$$

(11) 对数螺线



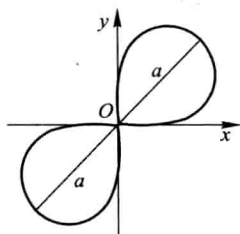
$$\rho = e^{a\theta}$$

(12) 双曲螺线



$$\rho\theta = a$$

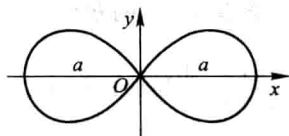
(13) 伯努利双纽线



$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$$

$$\rho^2 = a^2 \sin 2\theta$$

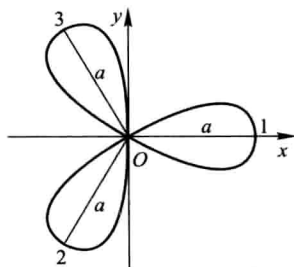
(14) 伯努利双纽线



$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$$

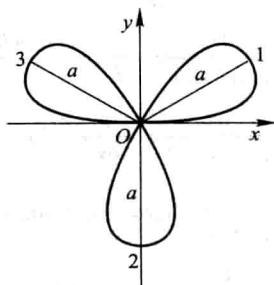
$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$$

(15) 三叶玫瑰线



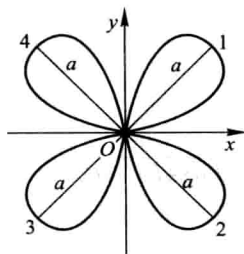
$$\rho = a \cos 3\theta$$

(16) 三叶玫瑰线



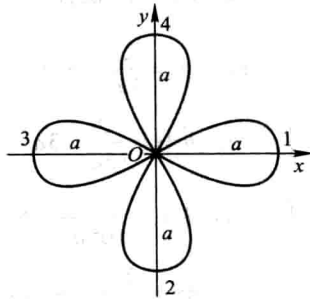
$$\rho = a \sin 3\theta$$

(17) 四叶玫瑰线



$$\rho = a \sin 2\theta$$

(18) 四叶玫瑰线



$$\rho = a \cos 2\theta$$

附录IV 积分表

(一) 含有 $ax+b$ 的积分

$$1. \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C.$$

$$2. \int (ax+b)^\mu dx = \frac{1}{a(\mu+1)} (ax+b)^{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1).$$

$$3. \int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{1}{a^2} (ax+b - b \ln |ax+b|) + C.$$

$$4. \int \frac{x^2}{ax+b} dx = \frac{1}{a^3} \left[\frac{1}{2} (ax+b)^2 - 2b(ax+b) + b^2 \ln |ax+b| \right] + C.$$

$$5. \int \frac{dx}{x(ax+b)} = -\frac{1}{b} \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right| + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{x^2(ax+b)} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2} \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right| + C.$$

$$7. \int \frac{x}{(ax+b)^2} dx = \frac{1}{a^2} \left(\ln |ax+b| + \frac{b}{ax+b} \right) + C.$$

$$8. \int \frac{x^2}{(ax+b)^2} dx = \frac{1}{a^3} \left(ax+b - 2b \ln |ax+b| - \frac{b^2}{ax+b} \right) + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{x(ax+b)^2} = \frac{1}{b(ax+b)} - \frac{1}{b^2} \ln \left| \frac{ax+b}{x} \right| + C.$$

(二) 含有 $\sqrt{ax+b}$ 的积分

$$10. \int \sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{3a} \sqrt{(ax+b)^3} + C.$$

$$11. \int x \sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{15a^2} (3ax-2b) \sqrt{(ax+b)^3} + C.$$

$$12. \int x^2 \sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{105a^3} (15a^2x^2 - 12abx + 8b^2) \sqrt{(ax+b)^3} + C.$$

$$13. \int \frac{x}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{2}{3a^2} (ax-2b) \sqrt{ax+b} + C.$$

$$14. \int \frac{x^2}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{2}{15a^3} (3a^2x^2 - 4abx + 8b^2) \sqrt{ax+b} + C.$$

$$15. \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \left| \frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}} \right| + C & (b>0), \\ \frac{2}{\sqrt{-b}} \arctan \sqrt{\frac{ax+b}{-b}} + C & (b<0). \end{cases}$$

$$16. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}.$$

$$17. \int \frac{\sqrt{ax+b}}{x} dx = 2\sqrt{ax+b} + b \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}.$$

$$18. \int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2} \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}.$$

(三) 含有 $x^2 \pm a^2$ 的积分

$$19. \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$

$$20. \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}.$$

$$21. \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

(四) 含有 ax^2+b ($a>0$) 的积分

$$22. \int \frac{dx}{ax^2+b} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctan \sqrt{\frac{a}{b}} x + C & (b>0), \\ \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \ln \left| \frac{\sqrt{a}x-\sqrt{-b}}{\sqrt{a}x+\sqrt{-b}} \right| + C & (b<0). \end{cases}$$

$$23. \int \frac{x}{ax^2+b} dx = \frac{1}{2a} \ln |ax^2+b| + C.$$

$$24. \int \frac{x^2}{ax^2+b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{ax^2+b}.$$

$$25. \int \frac{dx}{x(ax^2+b)} = \frac{1}{2b} \ln \frac{x^2}{|ax^2+b|} + C.$$

$$26. \int \frac{dx}{x^2(ax^2+b)} = -\frac{1}{bx} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{ax^2+b}.$$

$$27. \int \frac{dx}{x^3(ax^2+b)} = \frac{a}{2b^2} \ln \frac{|ax^2+b|}{x^2} - \frac{1}{2bx^2} + C.$$

$$28. \int \frac{dx}{(ax^2+b)^2} = \frac{x}{2b(ax^2+b)} + \frac{1}{2b} \int \frac{dx}{ax^2+b}.$$

(五) 含有 ax^2+bx+c ($a>0$) 的积分

$$29. \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \arctan \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C & (b^2 < 4ac), \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln \left| \frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}} \right| + C & (b^2 > 4ac). \end{cases}$$

$$30. \int \frac{x}{ax^2+bx+c} dx = \frac{1}{2a} \ln |ax^2+bx+c| - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

(六) 含有 $\sqrt{x^2+a^2}$ ($a>0$) 的积分

$$31. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \operatorname{arsh} \frac{x}{a} + C_1 = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

$$32. \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C.$$

$$33. \int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \sqrt{x^2+a^2} + C.$$

$$34. \int \frac{x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} + C.$$

$$35. \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

$$36. \int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} dx = -\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

$$37. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a} \ln \frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{|x|} + C.$$

$$38. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x} + C.$$

$$39. \int \sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

$$40. \int \sqrt{(x^2+a^2)^3} dx = \frac{x}{8} (2x^2+5a^2) \sqrt{x^2+a^2} + \frac{3}{8} a^4 \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

$$41. \int x \sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2+a^2)^3} + C.$$

$$42. \int x^2 \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{8} (2x^2 + a^2) \sqrt{x^2 + a^2} - \frac{a^4}{8} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C.$$

$$43. \int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 + a^2} + a \ln \frac{\sqrt{x^2 + a^2} - a}{|x|} + C.$$

$$44. \int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} + \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C.$$

(七) 含有 $\sqrt{x^2 - a^2}$ ($a > 0$) 的积分

$$45. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{x}{|x|} \operatorname{arch} \frac{|x|}{a} + C_1 = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C.$$

$$46. \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}} = -\frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 - a^2}} + C.$$

$$47. \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \sqrt{x^2 - a^2} + C.$$

$$48. \int \frac{x}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}} dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} + C.$$

$$49. \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C.$$

$$50. \int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}} dx = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} + \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C.$$

$$51. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \arccos \frac{a}{|x|} + C.$$

$$52. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a^2 x} + C.$$

$$53. \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C.$$

$$54. \int \sqrt{(x^2 - a^2)^3} dx = \frac{x}{8} (2x^2 - 5a^2) \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{3}{8} a^4 \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C.$$

$$55. \int x \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 - a^2)^3} + C.$$

$$56. \int x^2 \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{8} (2x^2 - a^2) \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^4}{8} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C.$$

$$57. \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a \arccos \frac{a}{|x|} + C.$$

$$58. \int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} + \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C.$$

(八) 含有 $\sqrt{a^2 - x^2}$ ($a > 0$) 的积分

$$59. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$60. \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}} + C.$$

$$61. \int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

$$62. \int \frac{x}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C.$$

$$63. \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$64. \int \frac{x^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} dx = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$65. \int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{|x|} + C.$$

$$66. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x} + C.$$

$$67. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$68. \int \sqrt{(a^2 - x^2)^3} dx = \frac{x}{8} (5a^2 - 2x^2) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{3}{8} a^4 \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$69. \int x \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{1}{3} \sqrt{(a^2 - x^2)^3} + C.$$

$$70. \int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{8} (2x^2 - a^2) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{8} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$71. \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 - x^2} + a \ln \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{|x|} + C.$$

$$72. \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

(九) 含有 $\sqrt{\pm ax^2+bx+c}$ ($a>0$) 的积分

$$73. \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}| + C.$$

$$74. \int \sqrt{ax^2+bx+c} dx = \frac{2ax+b}{4a} \sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{4ac-b^2}{8\sqrt{a^3}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}| + C.$$

$$75. \int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2\sqrt{a^3}} \ln |2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}| + C.$$

$$76. \int \frac{dx}{\sqrt{c+bx-ax^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin \frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C.$$

$$77. \int \sqrt{c+bx-ax^2} dx = \frac{2ax-b}{4a} \sqrt{c+bx-ax^2} + \frac{b^2+4ac}{8\sqrt{a^3}} \arcsin \frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C.$$

$$78. \int \frac{x}{\sqrt{c+bx-ax^2}} dx = -\frac{1}{a} \sqrt{c+bx-ax^2} + \frac{b}{2\sqrt{a^3}} \arcsin \frac{2ax-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C.$$

(十) 含有 $\sqrt{\pm \frac{x-a}{x-b}}$ 或 $\sqrt{(x-a)(b-x)}$ 的积分

$$79. \int \sqrt{\frac{x-a}{x-b}} dx = (x-b) \sqrt{\frac{x-a}{x-b}} + (b-a) \ln(\sqrt{|x-a|} + \sqrt{|x-b|}) + C.$$

$$80. \int \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx = (x-b) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + (b-a) \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C.$$

$$81. \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C \quad (a < b).$$

$$82. \int \sqrt{(x-a)(b-x)} dx = \frac{2x-a-b}{4} \sqrt{(x-a)(b-x)} + \frac{(b-a)^2}{4} \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C \quad (a < b).$$

(十一) 含有三角函数的积分

$$83. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$84. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$85. \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C.$$

$$86. \int \cot x dx = \ln |\sin x| + C.$$

$$87. \int \sec x dx = \ln \left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C = \ln |\sec x + \tan x| + C.$$

$$88. \int \csc x dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C = \ln |\csc x - \cot x| + C.$$

$$89. \int \sec^2 x dx = \tan x + C.$$

$$90. \int \csc^2 x dx = -\cot x + C.$$

$$91. \int \sec x \tan x dx = \sec x + C.$$

$$92. \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C.$$

$$93. \int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

$$94. \int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

$$95. \int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx.$$

$$96. \int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx.$$

$$97. \int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}.$$

$$98. \int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}.$$

$$99. \int \cos^m x \sin^n x dx = \frac{1}{m+n} \cos^{m-1} x \sin^{n+1} x + \frac{m-1}{m+n} \int \cos^{m-2} x \sin^n x dx \\ = -\frac{1}{m+n} \cos^{m+1} x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{m+n} \int \cos^m x \sin^{n-2} x dx.$$

$$100. \int \sin ax \cos bx dx = -\frac{1}{2(a+b)} \cos(a+b)x - \frac{1}{2(a-b)} \cos(a-b)x + C.$$

$$101. \int \sin ax \sin bx dx = -\frac{1}{2(a+b)} \sin(a+b)x + \frac{1}{2(a-b)} \sin(a-b)x + C.$$

$$102. \int \cos ax \cos bx dx = \frac{1}{2(a+b)} \sin (a+b)x + \frac{1}{2(a-b)} \sin (a-b)x + C.$$

$$103. \int \frac{dx}{a+b \sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \arctan \frac{a \tan \frac{x}{2} + b}{\sqrt{a^2-b^2}} + C \quad (a^2 > b^2).$$

$$104. \int \frac{dx}{a+b \sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \left| \frac{a \tan \frac{x}{2} + b - \sqrt{b^2-a^2}}{a \tan \frac{x}{2} + b + \sqrt{b^2-a^2}} \right| + C \quad (a^2 < b^2).$$

$$105. \int \frac{dx}{a+b \cos x} = \frac{2}{a+b} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \arctan \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \tan \frac{x}{2} \right) + C \quad (a^2 > b^2).$$

$$106. \int \frac{dx}{a+b \cos x} = \frac{1}{a+b} \sqrt{\frac{a+b}{b-a}} \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}{\tan \frac{x}{2} - \sqrt{\frac{a+b}{b-a}}} \right| + C \quad (a^2 < b^2).$$

$$107. \int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{ab} \arctan \left(\frac{b}{a} \tan x \right) + C.$$

$$108. \int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x - b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{2ab} \ln \left| \frac{b \tan x + a}{b \tan x - a} \right| + C.$$

$$109. \int x \sin ax dx = \frac{1}{a^2} \sin ax - \frac{1}{a} x \cos ax + C.$$

$$110. \int x^2 \sin ax dx = -\frac{1}{a} x^2 \cos ax + \frac{2}{a^2} x \sin ax + \frac{2}{a^3} \cos ax + C.$$

$$111. \int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{1}{a} x \sin ax + C.$$

$$112. \int x^2 \cos ax dx = \frac{1}{a} x^2 \sin ax + \frac{2}{a^2} x \cos ax - \frac{2}{a^3} \sin ax + C.$$

(十二) 含有反三角函数的积分(其中 $a > 0$)

$$113. \int \arcsin \frac{x}{a} dx = x \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

$$114. \int x \arcsin \frac{x}{a} dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

$$115. \int x^2 \arcsin \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{9} (x^2 + 2a^2) \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

$$116. \int \arccos \frac{x}{a} dx = x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

$$117. \int x \arccos \frac{x}{a} dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \arccos \frac{x}{a} - \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

$$118. \int x^2 \arccos \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \arccos \frac{x}{a} - \frac{1}{9} (x^2 + 2a^2) \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

$$119. \int \arctan \frac{x}{a} dx = x \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln(a^2 + x^2) + C.$$

$$120. \int x \arctan \frac{x}{a} dx = \frac{1}{2} (a^2 + x^2) \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} x + C.$$

$$121. \int x^2 \arctan \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{6} x^2 + \frac{a^3}{6} \ln(a^2 + x^2) + C.$$

(十三) 含有指数函数的积分

$$122. \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C.$$

$$123. \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C.$$

$$124. \int x e^{ax} dx = \frac{1}{a^2} (ax - 1) e^{ax} + C.$$

$$125. \int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx.$$

$$126. \int x a^x dx = \frac{x}{\ln a} a^x - \frac{1}{(\ln a)^2} a^x + C.$$

$$127. \int x^n a^x dx = \frac{1}{\ln a} x^n a^x - \frac{n}{\ln a} \int x^{n-1} a^x dx.$$

$$128. \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx) + C.$$

$$129. \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} (b \sin bx + a \cos bx) + C.$$

$$130. \int e^{ax} \sin^n bx dx = \frac{1}{a^2 + b^2 n^2} e^{ax} \sin^{n-1} bx (a \sin bx - nb \cos bx) + \\ \frac{n(n-1)b^2}{a^2 + b^2 n^2} \int e^{ax} \sin^{n-2} bx dx.$$

$$131. \int e^{ax} \cos^n bx dx = \frac{1}{a^2 + b^2 n^2} e^{ax} \cos^{n-1} bx (a \cos bx + nb \sin bx) + \\ \frac{n(n-1)b^2}{a^2 + b^2 n^2} \int e^{ax} \cos^{n-2} bx dx.$$

(十四) 含有对数函数的积分

$$132. \int \ln x dx = x \ln x - x + C.$$

$$133. \int \frac{dx}{x \ln x} = \ln |\ln x| + C.$$

$$134. \int x^n \ln x dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C.$$

$$135. \int (\ln x)^n dx = x (\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx.$$

$$136. \int x^m (\ln x)^n dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} (\ln x)^n - \frac{n}{m+1} \int x^m (\ln x)^{n-1} dx.$$

(十五) 含有双曲函数的积分

$$137. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$138. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

$$139. \int \operatorname{th} x dx = \ln \operatorname{ch} x + C.$$

$$140. \int \operatorname{sh}^2 x dx = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + C.$$

$$141. \int \operatorname{ch}^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + C.$$

(十六) 定积分

$$142. \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0.$$

$$143. \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0.$$

$$144. \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n. \end{cases}$$

$$145. \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n. \end{cases}$$

$$146. \int_0^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \int_0^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, & m = n. \end{cases}$$

$$147. I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx,$$

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$= \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} & (n \text{ 为大于 } 1 \text{ 的正奇数}), I_1 = 1, \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & (n \text{ 为正偶数}), I_0 = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

习题答案与提示

第 一 章

习题 1-1 (第 16 页)

1. (1) $\left[-\frac{2}{3}, +\infty\right)$; (2) $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$;
(3) $[-1, 0) \cup (0, 1]$; (4) $(-2, 2)$;
(5) $[0, +\infty)$; (6) $\mathbf{R} \setminus \left\{ \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$;
(7) $[2, 4]$; (8) $(-\infty, 0) \cup (0, 3]$;
(9) $(-1, +\infty)$; (10) $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

2. 略.

3. $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \varphi(-2) = 0$.

4—6. 略.

7. (1) 偶函数; (2) 既非奇函数又非偶函数; (3) 偶函数;
(4) 奇函数; (5) 既非奇函数又非偶函数; (6) 偶函数.

8. (1) 是周期函数, 周期 $l = 2\pi$; (2) 是周期函数, 周期 $l = \frac{\pi}{2}$;

(3) 是周期函数, 周期 $l = 2$; (4) 不是周期函数;

(5) 是周期函数, 周期 $l = \pi$.

9. (1) $y = x^3 - 1$; (2) $y = \frac{1-x}{1+x}$; (3) $y = \frac{-dx+b}{cx-a}$;

(4) $y = \frac{1}{3} \arcsin \frac{x}{2}$; (5) $y = e^{x-1} - 2$; (6) $y = \log_2 \frac{x}{1-x}$.

10. 略.

11. (1) $y = \sin^2 x, y_1 = \frac{1}{4}, y_2 = \frac{3}{4}$;

(2) $y = \sin 2x, y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, y_2 = 1$;

- (3) $y = \sqrt{1+x^2}$, $y_1 = \sqrt{2}$, $y_2 = \sqrt{5}$;
 (4) $y = e^{x^2}$, $y_1 = 1$, $y_2 = e$;
 (5) $y = e^{2x}$, $y_1 = e^2$, $y_2 = e^{-2}$.
12. (1) $[-1, 1]$; (2) $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [2n\pi, (2n+1)\pi]$; (3) $[-a, 1-a]$;
 (4) 若 $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, 则 $D = [a, 1-a]$; 若 $a > \frac{1}{2}$, 则 $D = \emptyset$.
13. $f[g(x)] = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x > 0; \end{cases} \quad g[f(x)] = \begin{cases} e, & |x| < 1, \\ 1, & |x| = 1, \\ e^{-1}, & |x| > 1. \end{cases}$
14. $L = \frac{S_0}{h} + \frac{2 - \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} h, h \in (0, \sqrt{S_0 \tan 40^\circ})$.
15. $S(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, & 0 \leq t \leq 1, \\ -\frac{1}{2}t^2 + 2t - 1, & 1 < t \leq 2, \\ 1, & t > 2. \end{cases}$
16. $F = 1.8C + 32$ 或 $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.
 (1) $90^\circ\text{F} = 32.2^\circ\text{C}$, $-5^\circ\text{C} = 23^\circ\text{F}$; (2) $-40^\circ\text{F} = -40^\circ\text{C}$.
17. $y = \begin{cases} x^2, & 0 < x < 10, \\ -\frac{4}{5}x^2 + 18x, & 10 \leq x \leq 15, \\ -18x + 360, & 15 < x < 20. \end{cases}$
18. 在 2008 年后的第 t 年, 世界人口数为 $P(t) = 6\,708.2 \cdot 1.011^t$ 百万, 2020 年对应 $t = 12$, $P(12) \approx 76$ 亿.

习题 1-2 (第 26 页)

1. (1) 收敛, 0; (2) 收敛, 0; (3) 收敛, 2; (4) 收敛, 1; (5) 发散;
 (6) 收敛, 0; (7) 发散; (8) 发散.
2. (1) 必要条件; (2) 一定发散;
 (3) 不一定收敛, 例如数列 $\{(-1)^n\}$ 有界, 但发散.
3. (1) 错误, 反例略; (2) 错误, 反例略; (3) 正确, 理由略;
 (4) 正确, 理由略.

* 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil = 1000$.

* 5—* 8. 略.

习题 1-3(第 33 页)

- (1) 0; (2) -1; (3) 不存在, 因为 $f(0^+) \neq f(0^-)$.
- (1) 错; (2) 对; (3) 错; (4) 错; (5) 对; (6) 对.
- (1) 对; (2) 对; (3) 对; (4) 错; (5) 对; (6) 对; (7) 对; (8) 错.
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$;
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)$ 不存在.
- *5—*6. 略.
- *7. $\delta = 0.0002$. 提示: 因为 $x \rightarrow 2$, 所以不妨设 $1 < x < 3$.
- *8. $X \geq \sqrt{397}$.
- *9—*12. 略.

习题 1-4(第 37 页)

- 两个无穷小的商不一定是无穷小, 例如: $\alpha = 4x, \beta = 2x$, 当 $x \rightarrow 0$ 时都是无穷小, 但 $\frac{\alpha}{\beta}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时不是无穷小.
- *2. 略.
- *3. $0 < |x| < \frac{1}{10^4 + 2}$.
- (1) 2, 提示: 应用本节定理 1; (2) 1, 提示: 应用本节定理 1.
- 略.
- $y = x \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上无界, 但当 $x \rightarrow \infty$ 时, 此函数不是无穷大.
- *7. 略.
- 水平渐近线 $y = 0$, 铅直渐近线 $x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$.

习题 1-5(第 45 页)

- (1) -9; (2) 0; (3) 0; (4) $\frac{1}{2}$; (5) $2x$; (6) 2; (7) $\frac{1}{2}$;
 (8) 0; (9) $\frac{2}{3}$; (10) 2; (11) 2; (12) $\frac{1}{2}$; (13) $\frac{1}{5}$; (14) -1.
- (1) ∞ ; (2) ∞ ; (3) ∞ .
- (1) 0; (2) 0.

4. (1) 错, 例如 $a_n = \frac{1}{n}, b_n = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbf{N}_+$;
 (2) 错, 例如 $b_n = \frac{n}{n+1}, c_n = (-1)^n n, n \in \mathbf{N}_+$;
 (3) 错, 例如 $a_n = \frac{1}{n^2}, c_n = n, n \in \mathbf{N}_+$;
 (4) 对, 因为, 假若 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n c_n)$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n c_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n}$ 也存在, 与已知条件矛盾.
 5. (1) 对, 因为, 假若 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 也存在, 与已知条件矛盾;
 (2) 错, 例如 $f(x) = \operatorname{sgn} x, g(x) = -\operatorname{sgn} x$ 当 $x \rightarrow 0$ 时的极限都不存在, 但 $f(x) + g(x) \equiv 0$ 当 $x \rightarrow 0$ 时的极限存在;
 (3) 错, 例如 $f(x) = x, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, g(x) = \sin \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 不存在, 但 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0} (x \sin \frac{1}{x}) = 0$.

* 6. 略.

习题 1-6 (第 52 页)

1. (1) ω ; (2) 3; (3) $\frac{2}{5}$; (4) 1; (5) 2; (6) x .
 2. (1) $\frac{1}{e}$; (2) e^2 ; (3) e^2 ; (4) e^{-k} .
 * 3. 略.
 4. (1) 提示: $1 < \sqrt{1 + \frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n}$;
 (2) 提示: $\frac{n}{n+\pi} \leq n \left(\frac{1}{n^2+\pi} + \frac{1}{n^2+2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2+n\pi} \right) \leq \frac{n^2}{n^2+\pi}$;
 (3) 提示: $x_n = \sqrt{2+x_{n-1}}$, 数列 $\{x_n\}$ 单调增加且有界;
 (4) 提示: 当 $x > 0$ 时, $1 < \sqrt{1+x} < 1+x$,
 当 $-1 < x < 0$ 时, $1+x < \sqrt{1+x} < 1$;
 (5) 提示: 当 $x > 0$ 时, $1-x < x \left[\frac{1}{x} \right] \leq 1$.

习题 1-7 (第 55 页)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2 - x^3$ 是比 $2x - x^2$ 高阶的无穷小.
2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x)^2$ 是比 $\sin^2 x$ 高阶的无穷小.
3. (1) 同阶, 不等价; (2) 等价无穷小.
4. 略.
5. (1) $\frac{3}{2}$; (2) $0 (m < n), 1 (m = n), \infty (m > n)$; (3) $\frac{1}{2}$; (4) -3 .
6. 略.

习题 1-8 (第 61 页)

1. $x = -1, 0, 1, 2$ 均为 $f(x)$ 的间断点, 除 $x = 0$ 外它们均为 $f(x)$ 的可去间断点. 补充定义 $f(-1) = f(2) = 0$, 修改定义, 使 $f(1) = 2$.
 2. (1) $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续;
(2) $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 与 $(-1, +\infty)$ 内连续, $x = -1$ 为跳跃间断点.
 3. (1) $x = 1$ 为可去间断点, $x = 2$ 为第二类间断点;
(2) $x = 0$ 和 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 为可去间断点, $x = k\pi (k \neq 0)$ 为第二类间断点;
(3) $x = 0$ 为第二类间断点;
(4) $x = 1$ 为第一类间断点.
 4.
$$f(x) = \begin{cases} x, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -x, & |x| > 1. \end{cases}$$
 $x = 1$ 和 $x = -1$ 为第一类间断点.
 5. (1) 对, 因为 $||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)|$, 由此可推出结论;
(2) 错, 例如 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ -1, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases} \quad \forall a \in \mathbf{R}.$
- *6—*7. 略.
- *8. $f(x) = \cot(\pi x) + \cot \frac{\pi}{x}.$

习题 1-9 (第 65 页)

1. 连续区间: $(-\infty, -3), (-3, 2), (2, +\infty)$;
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -\frac{8}{5}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty.$$
2. 略.

3. (1) $\sqrt{5}$; (2) 1; (3) 0; (4) $\frac{1}{2}$; (5) 2; (6) $\cos \alpha$; (7) 1; (8) $-\frac{1}{3}$.

4. (1) 1; (2) 0; (3) $\sqrt{e}$; (4) e^3 ; (5) $e^{-\frac{3}{2}}$; (6) $\frac{1}{2}$; (7) $\frac{1}{e}$; (8) -6.

5. (1) 错, 例如 $\varphi(x) = \operatorname{sgn} x, f(x) = e^x, \varphi[f(x)] \equiv 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处连续;

(2) 错, 例如 $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ -1, & x \in \mathbf{Q}^c, \end{cases} [\varphi(x)]^2 \equiv 1$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处连续;

(3) 对, 例如 $\varphi(x)$ 同(2), $f(x) = |x| + 1, f[\varphi(x)] \equiv 2$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处连续;

(4) 对, 若 $F(x) = \frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续, 则 $\varphi(x) = F(x)f(x)$ 也在 $\mathbf{R}$ 上连续, 与已知条件矛盾.

6. $a = 1$.

习题 1-10 (第 70 页)

1—4. 略.

5. 提示: $m \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \leq M$, 其中 m, M 分别为 $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$

上的最小值及最大值.

*6. 提示: 证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

*7. 略.

*8. 若 $f(a^+)$ 及 $f(b^-)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内一致连续.

总习题一 (第 70 页)

1. (1) 必要, 充分; (2) 必要, 充分; (3) 必要, 充分; (4) 充分必要.

2. 1.

3. (1) (B); (2) (B).

4. (1) $(-\infty, 0]$; (2) $[1, e]$; (3) $[0, \tan 1]$; (4) $\bigcup_{n \in \mathbf{Z}} \left[2n\pi - \frac{\pi}{2}, 2n\pi + \frac{\pi}{2} \right]$.

5. $f[f(x)] = f(x), g[g(x)] = 0, f[g(x)] = 0, g[f(x)] = g(x)$.

6. 略.

7. $V = \frac{R^3}{24\pi^2} (2\pi - \alpha)^2 \sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2} \quad (0 < \alpha < 2\pi)$.

*8. 略.

9. (1) ∞ ; (2) $\frac{1}{2}$; (3) e ; (4) $\frac{1}{2}$; (5) $\sqrt[3]{abc}$; (6) 1; (7) $\frac{1}{a}$; (8) -2.

10. $a=0$.
 11. $x=1$ 是第一类间断点.
 12—13. 略.
 14. (1) 略; (2) $y=2x+1$.

第 二 章

习题 2-1 (第 83 页)

- $\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{t=t_0}$.
- $\frac{dT}{dt}$.
- (1) $C'(100)=80$ (元/件);
 (2) $C(101)-C(100)=79.9$ (元) ≈ 80 (元), 边际成本 $C'(x)$ 近似于产量达到 x 单位时再增加 1 个单位产品所需的成本.
- 20.
- 略.
- (1) $-f'(x_0)$; (2) $f'(0)$; (3) $2f'(x_0)$.
- (B).
- (A).
- (1) $4x^3$; (2) $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$; (3) $1.6x^{0.6}$; (4) $-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$;
 (5) $-\frac{2}{x^3}$; (6) $\frac{16}{5}x^{\frac{11}{5}}$; (7) $\frac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}}$.
- 12 m/s.
- 略.
- $k_1=y'|_{x=\frac{2}{3}\pi}=-\frac{1}{2}$, $k_2=y'|_{x=\pi}=-1$.
- 切线方程为 $\frac{\sqrt{3}}{2}x+y-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right)=0$;
 法线方程为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}x-y+\frac{1}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi=0$.
- $x-y+1=0$.
- (2,4).

16. (1) 在 $x=0$ 处连续,不可导; (2) 在 $x=0$ 处连续且可导.

17. $a=2, b=-1$.

18. $f'_+(0)=0, f'_-(0)=-1, f'(0)$ 不存在.

19. $f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$

20. 略.

习题 2-2 (第 94 页)

1. 略.

2. (1) $3x^2 - \frac{28}{x^5} + \frac{2}{x^2}$; (2) $15x^2 - 2^x \ln 2 + 3e^x$; (3) $\sec x(2\sec x + \tan x)$;

(4) $\cos 2x$; (5) $x(2\ln x + 1)$; (6) $3e^x(\cos x - \sin x)$;

(7) $\frac{1 - \ln x}{x^2}$; (8) $\frac{e^x(x-2)}{x^3}$;

(9) $2x \ln x \cos x + x \cos x - x^2 \ln x \sin x$; (10) $\frac{1 + \sin t + \cos t}{(1 + \cos t)^2}$.

3. (1) $y'|_{x=\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, y'|_{x=\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$; (2) $\frac{\sqrt{2}}{4} \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$;

(3) $f'(0) = \frac{3}{25}, f'(2) = \frac{17}{15}$.

4. (1) $v(t) = v_0 - gt$; (2) $t = \frac{v_0}{g}$.

5. 切线方程为 $2x - y = 0$, 法线方程为 $x + 2y = 0$.

6. (1) $8(2x+5)^3$; (2) $3\sin(4-3x)$; (3) $-6xe^{-3x^2}$; (4) $\frac{2x}{1+x^2}$;

(5) $\sin 2x$; (6) $-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$; (7) $2x\sec^2(x^2)$; (8) $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$;

(9) $\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$; (10) $-\tan x$.

7. (1) $-\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$; (2) $\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$;

(3) $-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(\cos 3x + 6\sin 3x)$; (4) $\frac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}$;

(5) $-\frac{2}{x(1+\ln x)^2}$; (6) $\frac{2x\cos 2x - \sin 2x}{x^2}$;

- (7) $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$;
- (9) $\sec x$;
8. (1) $\frac{2\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}$;
- (3) $\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$;
- (5) $n\sin^{n-1} x \cos(n+1)x$;
- (7) $\frac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}(\arccos x)^2}$;
- (9) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}+1-x^2}$;
9. $\frac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}$.
10. (1) $2xf'(x^2)$;
11. (1) $e^{-x}(-x^2+4x-5)$;
- (3) $\frac{4}{4+x^2}\arctan \frac{x}{2}$;
- (5) $\frac{4}{e^{2t}+e^{-2t}+2}$ 或 $\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$;
- (7) $\frac{1}{x^2}\sin \frac{2}{x} \cdot e^{-\sin^2 \frac{1}{x}}$;
- (9) $\arcsin \frac{x}{2}$;
- * 12. (1) $\operatorname{sh}(\operatorname{sh} x) \cdot \operatorname{ch} x$;
- (3) $\frac{1}{x\operatorname{ch}^2(\ln x)}$;
- (5) $-\frac{2x}{\operatorname{ch}^2(1-x^2)}$;
- (7) $\frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-1}}$;
- (8) $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$;
- (10) $\csc x$.
- (2) $\csc x$;
- (4) $\frac{e^{\arctan \sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1+x)}$;
- (6) $-\frac{1}{1+x^2}$;
- (8) $\frac{1}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)}$;
- (10) $-\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}$.
- (2) $\sin 2x[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]$.
- (2) $\sin 2x \sin(x^2)+2x \sin^2 x \cos(x^2)$;
- (4) $\frac{1-n \ln x}{x^{n+1}}$;
- (6) $\frac{1}{x^2} \tan \frac{1}{x}$;
- (8) $\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;
- (10) $y' = \begin{cases} \frac{2}{1+t^2}, & t^2 < 1, \\ -\frac{2}{1+t^2}, & t^2 > 1. \end{cases}$
- (2) $e^{\operatorname{ch} x}(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh}^2 x)$;
- (4) $(3\operatorname{sh} x + 2)\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$;
- (6) $\frac{2x}{\sqrt{x^4+2x^2+2}}$;
- (8) $\frac{1}{1+2\operatorname{sh}^2 x}$;

(9) $\operatorname{th}^3 x$;

(10) $\frac{2}{(x+1)^2} \operatorname{sh}\left(2 \cdot \frac{x-1}{x+1}\right)$.

13. $f(x)g(x)$ 在 x_0 处可导, 其导数为 $f'(x_0)g(x_0)$.

14. 略.

习题 2-3 (第 100 页)

1. (1) $4 - \frac{1}{x^2}$;

(2) $4e^{2x-1}$;

(3) $-2\sin x - x\cos x$;

(4) $-2e^{-t}\cos t$;

(5) $-\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$;

(6) $-\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$;

(7) $2\sec^2 x \tan x$;

(8) $\frac{6x(2x^3-1)}{(x^3+1)^3}$;

(9) $2\arctan x + \frac{2x}{1+x^2}$;

(10) $\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$;

(11) $2xe^{x^2}(3+2x^2)$;

(12) $-\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$.

2. $f'''(2) = 207\,360$.

3. (1) $2f'(x^2) + 4x^2f''(x^2)$;

(2) $\frac{f''(x)f(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2}$.

4. 略.

5. $\frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega^2 \sin \omega t$.

6. 略.

7. $\frac{d^2x}{dt^2} = f(x)f'(x)$.

8—9. 略.

10. (1) $-4e^x \cos x$; (2) $2^{50}(-x^2 \sin 2x + 50x \cos 2x + \frac{1}{2} \frac{225}{2} \sin 2x)$.

* 11. (1) $n!$; (2) $2^{n-1} \sin\left[2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right]$;

(3) $(-1)^n \frac{(n-2)!}{x^{n-1}} (n \geq 2)$; (4) $e^x(x+n)$.

* 12. $(-1)^{n-1} \frac{n!}{n-2} (n \geq 3)$.

习题 2-4 (第 108 页)

1. (1) $\frac{y}{y-x}$; (2) $\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$; (3) $\frac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}}$; (4) $-\frac{e^y}{1+xe^y}$.
2. 切线方程为 $x+y-\frac{\sqrt{2}}{2}a=0$, 法线方程为 $x-y=0$.
3. (1) $-\frac{1}{y^3}$; (2) $-\frac{b^4}{a^2y^3}$; (3) $-2\csc^2(x+y)\cot^3(x+y)$;
(4) $\frac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^3}$.
4. (1) $\left(\frac{x}{1+x}\right)^x \left(\ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}\right)$;
(2) $\frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{x-5}{x^2+2}} \left[\frac{1}{x-5} - \frac{2x}{5(x^2+2)}\right]$;
(3) $\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5} \left[\frac{1}{2(x+2)} - \frac{4}{3-x} - \frac{5}{x+1}\right]$;
(4) $\frac{1}{2}\sqrt{x\sin x}\sqrt{1-e^x} \left[\frac{1}{x} + \cot x - \frac{e^x}{2(1-e^x)}\right]$.
5. (1) $\frac{3b}{2a}t$; (2) $\frac{\cos \theta - \theta \sin \theta}{1 - \sin \theta - \theta \cos \theta}$.
6. $\sqrt{3}-2$.
7. (1) 切线方程为 $2\sqrt{2}x+y-2=0$, 法线方程为 $\sqrt{2}x-4y-1=0$;
(2) 切线方程为 $4x+3y-12a=0$, 法线方程为 $3x-4y+6a=0$.
8. (1) $\frac{1}{t^3}$; (2) $-\frac{b}{a^2\sin^3 t}$; (3) $\frac{4}{9}e^{3t}$; (4) $\frac{1}{f''(t)}$.
- *9. (1) $-\frac{3}{8t^5}(1+t^2)$; (2) $\frac{t^4-1}{8t^3}$.
10. $144\pi \text{ m}^2/\text{s}$.
11. $\frac{16}{25\pi} \approx 0.204 \text{ m/min}$.
12. 0.64 cm/min .

习题 2-5 (第 120 页)

1. 当 $\Delta x=1$ 时, $\Delta y=18$, $dy=11$; 当 $\Delta x=0.1$ 时, $\Delta y=1.161$, $dy=1.1$; 当 $\Delta x=0.01$ 时, $\Delta y=0.110601$, $dy=0.11$.

2. (a) $\Delta y > 0, dy > 0, \Delta y - dy > 0$;
 (b) $\Delta y > 0, dy > 0, \Delta y - dy < 0$;
 (c) $\Delta y < 0, dy < 0, \Delta y - dy < 0$;
 (d) $\Delta y < 0, dy < 0, \Delta y - dy > 0$.
3. (1) $\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{x}\right) dx$; (2) $(\sin 2x + 2x \cos 2x) dx$;
 (3) $(x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} dx$; (4) $\frac{2 \ln(1-x)}{x-1} dx$;
 (5) $2x(1+x)e^{2x} dx$; (6) $e^{-x} [\sin(3-x) - \cos(3-x)] dx$;
 (7) $dy = \begin{cases} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & -1 < x < 0, \\ -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & 0 < x < 1; \end{cases}$
 (8) $8x \tan(1+2x^2) \sec^2(1+2x^2) dx$;
 (9) $-\frac{2x}{1+x^4} dx$; (10) $A\omega \cos(\omega t + \varphi) dt$.
4. (1) $2x + C$; (2) $\frac{3}{2}x^2 + C$; (3) $\sin t + C$; (4) $-\frac{1}{\omega} \cos \omega x + C$;
 (5) $\ln(1+x) + C$; (6) $-\frac{1}{2}e^{-2x} + C$; (7) $2\sqrt{x} + C$; (8) $\frac{1}{3} \tan 3x + C$.
5. 约为 $\frac{8f}{3l} \Delta f$.
6. 约减少 43.63 cm^2 , 约增加 104.72 cm^2 .
7. (1) 0.87475 ; (2) -0.96509 .
8. (1) $30^\circ 47''$; (2) $60^\circ 2'$.
9. $\tan 45' \approx 0.01309, \ln 1.002 \approx 0.002$.
10. (1) 9.9867 ; (2) 2.0052 .
- * 11. 0.667% .
- * 12. $\delta_\alpha = 0.00056 \text{ rad} = 1'55''$.

提示: 先求出圆心角 α 与弦长 l 的函数关系式.

总习题二 (第 122 页)

1. (1) 充分, 必要; (2) 充分必要; (3) 充分必要.
 2. $n!$.
 3. (D).

4. $\left. \frac{dm}{dx} \right|_{x=x_0}$.
5. $-\frac{1}{x^2}$.
6. (1) $f'_-(0)=f'_+(0)=f'(0)=1$;
(2) $f'_-(0)=1, f'_+(0)=0, f'(0)$ 不存在.
7. 在 $x=0$ 处连续,不可导.
8. (1) $\frac{\cos x}{|\cos x|}$; (2) $\frac{1}{1+x^2}$; (3) $\sin x \cdot \ln \tan x$; (4) $\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$;
(5) $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$.
9. (1) $-2\cos 2x \cdot \ln x - \frac{2\sin 2x}{x} - \frac{\cos^2 x}{x^2}$; (2) $\frac{3x}{(1-x^2)^{5/2}}$.
- * 10. (1) $\frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \cdots \left(\frac{1}{m} - n + 1 \right) (1+x)^{\frac{1}{m}-n}$; (2) $(-1)^n \frac{2 \cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$.
11. $y''(0) = \frac{1}{e^2}$.
12. (1) $\frac{dy}{dx} = -\tan \theta, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3a} \sec^4 \theta \csc \theta$;
(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}, \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1+t^2}{t^3}$.
13. 切线方程为 $x+2y-4=0$, 法线方程为 $2x-y-3=0$.
14. 切线方程为 $y=2x-12$.
- 提示: 先求 $f(1), f'(1)$, 再利用周期性, 求 $f(6), f'(6)$.
15. $y = H \left[2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$.
16. -2.8 km/h .
17. 1.007 .
18. 约需加长 2.23 cm .

第 三 章

习题 3-1 (第 132 页)

- 1—4. 略.

5. 有分别位于区间 $(1,2)$, $(2,3)$ 及 $(3,4)$ 内的三个根.

6—*13. 略.

14. 提示: 令 $\varphi(x) = f(x)e^{-x}$, 先证明 $\varphi(x)$ 为常数.

*15. 略.

习题 3-2 (第 137 页)

1. (1) 1; (2) 2; (3) 2; (4) $-\frac{3}{5}$; (5) $-\frac{1}{8}$; (6) $\frac{m}{n}a^{m-n}$;
 (7) 1; (8) 3; (9) 1; (10) 1; (11) $\frac{1}{2}$; (12) ∞ ;
 (13) $-\frac{1}{2}$; (14) e^a ; (15) 1; (16) 1.

2—3. 略.

*4. 连续.

习题 3-3 (第 143 页)

1. $f(x) = -56 + 21(x-4) + 37(x-4)^2 + 11(x-4)^3 + (x-4)^4.$

2. $f(x) = x^6 - 9x^5 + 30x^4 - 45x^3 + 30x^2 - 9x + 1.$

3. $\sqrt{x} = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 -$

$$\frac{15(x-4)^4}{4! [4 + \theta(x-4)]^{\frac{7}{2}}} \quad (0 < \theta < 1).$$

4. $\ln x = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{2^3}(x-2)^2 + \frac{1}{3 \cdot 2^3}(x-2)^3 - \cdots +$

$$(-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n} (x-2)^n + o((x-2)^n).$$

5. $\frac{1}{x} = -[1 + (x+1) + (x+1)^2 + \cdots + (x+1)^n] +$

$$(-1)^{n+1} \frac{(x+1)^{n+1}}{[-1 + \theta(x+1)]^{n+2}} \quad (0 < \theta < 1).$$

6. $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$

7. $xe^x = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{(n-1)!} + o(x^n) \quad (0 < \theta < 1).$

8. $\sqrt{e} \approx 1.645.$

9. (1) $\sqrt[3]{30} \approx 3.107\,24, |R_3| < 1.88 \times 10^{-5};$

$$(2) \sin 18^\circ \approx 0.3090, |R_3| < 1.3 \times 10^{-4}.$$

$$* 10. (1) \frac{3}{2}; (2) \frac{1}{6}; (3) -\frac{1}{12}; (4) \frac{1}{2}.$$

习题 3-4 (第 150 页)

1. 单调减少.

2. 单调增加.

3. (1) 在 $(-\infty, -1]$ 、 $[3, +\infty)$ 内单调增加, 在 $[-1, 3]$ 上单调减少;

(2) 在 $(0, 2]$ 内单调减少, 在 $[2, +\infty)$ 内单调增加;

(3) 在 $(-\infty, 0)$ 、 $(0, \frac{1}{2}]$ 、 $[1, +\infty)$ 内单调减少, 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上单调增加;

(4) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加;

(5) 在 $(-\infty, \frac{1}{2}]$ 内单调减少, 在 $[\frac{1}{2}, +\infty)$ 内单调增加;

(6) 在 $(-\infty, \frac{2}{3}a]$ 、 $[a, +\infty)$ 内单调增加, 在 $[\frac{2}{3}a, a]$ 上单调减少;

(7) 在 $[0, n]$ 上单调增加, 在 $[n, +\infty)$ 内单调减少;

(8) 在 $[\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}]$ 上单调增加, 在 $[\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}]$ 上单调减少
($k \in \mathbf{Z}$).

4. (D).

5. 略.

6. 当 $a > \frac{1}{e}$ 时没有实根, 当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时有两个实根, 当 $a = \frac{1}{e}$ 时只有 $x = e$ 一个实根.

7. 不一定. $f(x) = x + \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调, 但 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不单调.

8. 略.

9. (i) 是凸的;

(2) 在 $(-\infty, 0]$ 内是凸的, 在 $[0, +\infty)$ 内是凹的;

(3) 是凹的; (4) 是凹的.

10. (1) 拐点 $(\frac{5}{3}, \frac{20}{27})$, 在 $(-\infty, \frac{5}{3}]$ 内是凸的, 在 $[\frac{5}{3}, +\infty)$ 内是凹的;

(2) 拐点 $(2, \frac{2}{e^2})$, 在 $(-\infty, 2]$ 内是凸的, 在 $[2, +\infty)$ 内是凹的;

(3) 没有拐点, 处处是凹的;

(4) 拐点 $(-1, \ln 2)$, $(1, \ln 2)$, 在 $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$ 内是凸的, 在 $[-1, 1]$ 上是凹的;

(5) 拐点 $\left(\frac{1}{2}, e^{\arctan \frac{1}{2}}\right)$, 在 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ 内是凹的, 在 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 内是凸的;

(6) 拐点 $(1, -7)$, 在 $(0, 1]$ 内是凸的, 在 $[1, +\infty)$ 内是凹的.

11. 略.

* 12. 拐点: $(-1, -1)$, $\left(2-\sqrt{3}, \frac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}\right)$, $\left(2+\sqrt{3}, \frac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}\right)$.

13. $a = -\frac{3}{2}$, $b = \frac{9}{2}$.

14. $a = 1$, $b = -3$, $c = -24$, $d = 16$.

15. $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{8}$.

* 16. $(x_0, f(x_0))$ 为拐点.

习题 3-5 (第 161 页)

1. (1) 极大值 $f(-1) = 17$, 极小值 $f(3) = -47$;

(2) 极小值 $f(0) = 0$;

(3) 极大值 $f(\pm 1) = 1$, 极小值 $f(0) = 0$;

(4) 极大值 $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}$;

(5) 极大值 $f\left(\frac{12}{5}\right) = \frac{1}{10}\sqrt{205}$;

(6) 极大值 $f(0) = 4$, 极小值 $f(-2) = \frac{8}{3}$;

(7) 极大值 $f\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}$, 极小值 $f\left(\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi} (k \in \mathbf{Z})$;

(8) 极大值 $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$; (9) 没有极值; (10) 没有极值.

2. 略.

3. $a = 2$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ 为极大值.

4. 略.

5. 极小值 $f(0) = 4$.

6. (1) 最大值 $f(4) = 80$, 最小值 $f(-1) = -5$;

(2) 最大值 $f(3) = 11$, 最小值 $f(2) = -14$;

(3) 最大值 $f\left(\frac{3}{4}\right) = 1.25$, 最小值 $f(-5) = -5 + \sqrt{6}$.

7. 当 $x = 1$ 时函数有最大值 -29 .

8. 当 $x = -3$ 时函数有最小值 27 .

9. 当 $x = 1$ 时函数有最大值 $\frac{1}{2}$.

10. 长为 10 m , 宽为 5 m .

11. $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, $h = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$; $d : h = 1 : 1$.

12. 底宽为 $\sqrt{\frac{40}{4+\pi}} = 2.367 (\text{m})$.

13. 当 $\alpha = \arctan \mu = \arctan 0.25 \approx 14^\circ 2'$ 时, 可使力 F 最小.

14. 杆长为 1.4 m .

15. $\varphi = \frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$.

16. 当 $\varphi = 54^\circ 13'$ 时, 屋架可吊到最大高度 7.506 m , 而柱子高只有 6 m , 所以能吊得上去.

提示: 设吊臂对地面的倾角为 φ 时, 屋架吊起的高度为 h , 建立 h 与 φ 间的函数关系式, 然后求出 h 的最大值.

17. $7\,200$ 元.

18. 60 元.

习题 3-6 (第 167 页)

1. 在 $(-\infty, -2]$ 内单调减少, 在 $[-2, +\infty)$ 内单调增加; 在 $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$ 内是凹的, 在 $[-1, 1]$ 上是凸的; 拐点 $\left(-1, -\frac{6}{5}\right)$, $(1, 2)$.

2. 对称于原点; 在 $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$ 内单调减少, 在 $[-1, 1]$ 上单调增加; 在 $(-\infty, -\sqrt{3}]$, $[0, \sqrt{3}]$ 上是凸的, 在 $[-\sqrt{3}, 0]$, $[\sqrt{3}, +\infty)$ 内是凹的; 拐点 $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0, 0)$, $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$; 水平渐近线 $y = 0$.

3. 在 $(-\infty, 1]$ 内单调增加, 在 $[1, +\infty)$ 内单调减少; 在 $\left(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$,

$\left[1+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ 内是凹的, 在 $\left[1-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ 上是凸的; 拐点 $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right), \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$; 水平渐近线 $y=0$.

4. 在 $(-\infty, 0)$, $\left(0, \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right]$ 内单调减少, 在 $\left[\frac{\sqrt[3]{4}}{2}, +\infty\right)$ 内单调增加; 在 $(-\infty, -1]$, $(0, +\infty)$ 内是凹的, 在 $[-1, 0)$ 内是凸的; 拐点 $(-1, 0)$; 铅直渐近线 $x=0$.

5. 定义域为 $x \neq \left(\frac{k}{2} + \frac{1}{4}\right)\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$); 周期为 2π ; 图形对称于 y 轴; 在 $[0, \pi]$ 部分: 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right), \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ 内单调增加; 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ 内是凹的, 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ 内是凸的, 在 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ 内是凹的, 在 $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ 内是凸的; 拐点 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$; 铅直渐近线 $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}$.

习题 3-7 (第 176 页)

1. $K=2$.

2. $K = |\cos x|, \rho = |\sec x|$.

3. $K=2, \rho = \frac{1}{2}$.

4. $K = \left| \frac{2}{3a \sin 2t_0} \right|$.

5. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\ln 2}{2}\right)$ 处曲率半径有最小值 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

* 6. 略.

7. 约 1 246 N.

提示: 沿曲线运动的物体所受的向心力为 $F = \frac{mv^2}{\rho}$, 这里 m 为物体的质量, v

为它的速率, ρ 为运动轨迹的曲率半径.

8. 约 45 400 N.

参看上题提示.

* 9. $(\xi-3)^2 + (\eta+2)^2 = 8$.

* 10. $\left(\xi - \frac{\pi-10}{4}\right)^2 + \left(\eta - \frac{9}{4}\right)^2 = \frac{125}{16}$.

$$* 11. \begin{cases} \alpha = \frac{3\gamma^2}{2p} + p, \\ \beta = -\frac{\gamma^3}{p^2} \end{cases} \quad \text{或} \quad 27p\beta^2 = 8(\alpha - p)^3.$$

习题 3-8 (第 181 页)

1. $0.18 < \xi < 0.19$.
2. $-0.20 < \xi < -0.19$.
3. $0.32 < \xi < 0.33$.
4. $2.50 < \xi < 2.51$.

总习题三 (第 181 页)

1. 2.

2. (1) (B); (2) (D).

3. $f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$.4. ka .

5—9. 略.

10. (1) 2; (2) $\frac{1}{2}$; (3) $e^{-\frac{2}{\pi}}$; (4) $a_1 a_2 \cdots a_n$.11. (1) $x^3 \ln x = (x-1) + \frac{5}{2!}(x-1)^2 + \frac{11}{3!}(x-1)^3 + \frac{6}{4!}(x-1)^4 -$

$$\frac{6}{5!}\xi^2(x-1)^5, \text{ 其中 } \xi \text{ 介于 } 1 \text{ 与 } x \text{ 之间};$$
(2) $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$;(3) $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$;(4) $\ln \cos x = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6)$.

12. 略.

13. $a = e^e$, 最小值 $1 - \frac{1}{e}$.

14. (1, 2) 和 (-1, -2).

15. $\sqrt[3]{3}$.16. $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ 处曲率半径有最小值 1.

17. $2.414 < x_0 < 2.415$.

* 18. 提示: 可以先用一次洛必达法则.

19. 提示: 记 $x_0 = (1-t)x_1 + tx_2$, 先证

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

然后在上式中分别令 $x = x_1$ 及 $x = x_2$, 可得两个不等式, 由此推出结论.

20. $a = \frac{4}{3}, b = -\frac{1}{3}$.

第 四 章

习题 4-1 (第 192 页)

1. 略.

2. (1) $-\frac{1}{x} + C$;

(2) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$;

(3) $2\sqrt{x} + C$;

(4) $\frac{3}{10}x^{\frac{10}{3}} + C$;

(5) $-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}} + C$;

(6) $\frac{m}{m+n}x^{\frac{m+n}{m}} + C$;

(7) $\frac{5}{4}x^4 + C$;

(8) $\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$;

(9) $\sqrt{\frac{2h}{g}} + C$;

(10) $\frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3 + x + C$;

(11) $\frac{x^3}{3} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x + C$;

(12) $2\sqrt{x} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$;

(13) $2e^x + 3\ln|x| + C$;

(14) $3\arctan x - 2\arcsin x + C$;

(15) $e^x - 2\sqrt{x} + C$;

(16) $\frac{3^x e^x}{\ln 3 + 1} + C$;

(17) $2x - \frac{5\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln 2 - \ln 3} + C$;

(18) $\tan x - \sec x + C$;

(19) $\frac{x + \sin x}{2} + C$;

(20) $\frac{1}{2}\tan x + C$;

(21) $\sin x - \cos x + C$;

(22) $-(\cot x + \tan x) + C$;

(23) $-\cot x - x + C$;

(24) $-\cos \theta + \theta + C$;

(25) $x - \arctan x + C$;

(26) $x^3 - x + \arctan x + C$.

$$3. (1) y = \frac{1}{3}(x^3 - 6x^2 + 12x - 8); \quad (2) x = \frac{1}{t} + 2t - 2.$$

$$4. (1) s = 20t - \frac{1}{2}kt^2; \quad (2) t = \frac{20}{k}, s = \frac{200}{k}; \quad (3) k = 4.$$

答: 刹车加速度为 -4 m/s^2 .

$$5. y = \ln x + 1.$$

$$6. (1) 27 \text{ m}; \quad (2) \sqrt[3]{360} \approx 7.11(\text{s}).$$

7. 略.

习题 4-2 (第 207 页)

$$1. (1) \frac{1}{a}; \quad (2) \frac{1}{7}; \quad (3) \frac{1}{2}; \quad (4) \frac{1}{10}; \quad (5) -\frac{1}{2}; \quad (6) \frac{1}{12}; \quad (7) \frac{1}{2};$$

$$(8) -2; \quad (9) -\frac{2}{3}; \quad (10) \frac{1}{5}; \quad (11) -\frac{1}{5}; \quad (12) \frac{1}{3}; \quad (13) -1;$$

$$(14) -1.$$

$$2. (1) \frac{1}{5}e^{5t} + C; \quad (2) -\frac{1}{8}(3-2x)^4 + C;$$

$$(3) -\frac{1}{2}\ln|1-2x| + C; \quad (4) -\frac{1}{2}(2-3x)^{\frac{2}{3}} + C;$$

$$(5) -\frac{1}{a}\cos ax - be^{\frac{x}{b}} + C; \quad (6) -2\cos\sqrt{t} + C;$$

$$(7) -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C; \quad (8) \frac{1}{2}\sin(x^2) + C;$$

$$(9) -\frac{1}{3}(2-3x^2)^{\frac{1}{2}} + C; \quad (10) -\frac{3}{4}\ln|1-x^4| + C;$$

$$(11) \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + C; \quad (12) -\frac{1}{3\omega}\cos^3(\omega t + \varphi) + C;$$

$$(13) \frac{1}{2\cos^2 x} + C; \quad (14) \frac{3}{2}\sqrt[3]{(\sin x - \cos x)^2} + C;$$

$$(15) \frac{1}{11}\tan^{11} x + C; \quad (16) \ln|\ln \ln x| + C;$$

$$(17) -\frac{1}{\arcsin x} + C; \quad (18) -\frac{10^{2\arccos x}}{2\ln 10} + C;$$

$$(19) -\ln|\cos\sqrt{1+x^2}| + C; \quad (20) (\arctan\sqrt{x})^2 + C;$$

$$(21) -\frac{1}{x\ln x} + C; \quad (22) \ln|\tan x| + C;$$

- (23) $\frac{1}{2}(\ln \tan x)^2 + C$; (24) $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$;
- (25) $\frac{t}{2} + \frac{1}{4\omega} \sin 2(\omega t + \varphi) + C$; (26) $\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{10} \cos 5x + C$;
- (27) $\frac{1}{3} \sin \frac{3x}{2} + \sin \frac{x}{2} + C$; (28) $\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{24} \sin 12x + C$;
- (29) $\frac{1}{3} \sec^3 x - \sec x + C$; (30) $\arctan e^x + C$;
- (31) $\frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{3} + \frac{1}{4} \sqrt{9-4x^2} + C$;
- (32) $\frac{x^2}{2} - \frac{9}{2} \ln(x^2+9) + C$; (33) $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}x-1}{\sqrt{2}x+1} \right| + C$;
- (34) $\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C$; (35) $\frac{2}{3} \ln |x-2| + \frac{1}{3} \ln |x+1| + C$;
- (36) $\frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{a^2} \sqrt{a^2-x^2} \right) + C$;
- (37) $\arccos \frac{1}{|x|} + C$; (38) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$;
- (39) $\sqrt{x^2-9} - 3 \arccos \frac{3}{|x|} + C$; (40) $\sqrt{2x} - \ln(1+\sqrt{2x}) + C$;
- (41) $\arcsin x - \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + C$;
- (42) $\frac{1}{2}(\arcsin x + \ln|x+\sqrt{1-x^2}|) + C$;
- (43) $\frac{1}{2} \ln(x^2+2x+3) - \sqrt{2} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$;
- (44) $\frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{x^2+1} + \ln(x^2+1) + \arctan x \right) + C$.

习题 4-3 (第 212 页)

- $-x \cos x + \sin x + C$.
- $x(\ln x - 1) + C$.
- $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.
- $-e^{-x}(x+1) + C$.
- $\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$.

6. $\frac{e^{-x}}{2}(\sin x - \cos x) + C.$
7. $-\frac{2}{17}e^{-2x}\left(\cos \frac{x}{2} + 4\sin \frac{x}{2}\right) + C.$
8. $2x\sin \frac{x}{2} + 4\cos \frac{x}{2} + C.$
9. $\frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C.$
10. $-\frac{1}{2}x^2 + x\tan x + \ln|\cos x| + C.$
11. $x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C.$
12. $-\frac{e^{-2t}}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right) + C.$
13. $x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C.$
14. $-\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C.$
15. $\frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x^2 \sin x + x\cos x - \sin x + C.$
16. $\frac{1}{2}(x^2 - 1)\ln(x-1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + C.$
17. $-\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{3}{2}\right)\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + C.$
18. $-\frac{1}{x}(\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6) + C.$
19. $3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2) + C.$
20. $\frac{x}{2}(\cos \ln x + \sin \ln x) + C.$
21. $x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.$
22. $\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{5}e^x \sin 2x - \frac{1}{10}e^x \cos 2x + C.$
23. $\frac{1}{2}x^2\left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}\right) + C.$
24. $\frac{2}{3}(\sqrt{3x+9} - 1)e^{\sqrt{3x+9}} + C.$

习题 4-4 (第 218 页)

1. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 9x - 27\ln|x+3| + C.$

$$2. \ln|x-2|+\ln|x+5|+C.$$

$$3. \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5)+\arctan\frac{x-1}{2}+C.$$

$$4. \ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

$$5. \ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

$$6. \frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+C.$$

$$7. 2\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{3}{2}\ln|x+3|+C.$$

$$8. \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+8\ln|x|-4\ln|x+1|-3\ln|x-1|+C.$$

$$9. \ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

$$10. \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

$$11. -\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+x+1}+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

$$12. \arctan x-\frac{1}{x^2+1}+C.$$

$$13. -\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

$$14. \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan x}{\sqrt{3}}+C.$$

$$15. \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}+C.$$

$$16. \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C.$$

$$17. \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

$$18. \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C.$$

$$19. \frac{3}{2}\sqrt[3]{(1+x)^2} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3\ln|1+\sqrt[3]{1+x}| + C.$$

$$20. \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + x - 4\sqrt{x} + 4\ln(\sqrt{x}+1) + C.$$

$$21. x - 4\sqrt{x+1} + 4\ln(\sqrt{1+x}+1) + C.$$

$$22. 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln(\sqrt[4]{x}+1) + C.$$

$$23. \ln \left| \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}} \right| + 2\arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C \quad \text{或} \quad \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{|x|} - \arcsin x + C.$$

$$24. -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C.$$

习题 4-5 (第 221 页)

$$1. \frac{1}{2}\ln|2x+\sqrt{4x^2-9}| + C.$$

$$2. \frac{1}{2}\arctan \frac{x+1}{2} + C.$$

$$3. \ln \left[(x-2) + \sqrt{5-4x+x^2} \right] + C.$$

$$4. \frac{x}{2}\sqrt{2x^2+9} + \frac{9\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+9}) + C.$$

$$5. \frac{x}{2}\sqrt{3x^2-2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\ln|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2}| + C.$$

$$6. \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.$$

$$7. \left(\frac{x^2}{2} - 1 \right) \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{4}\sqrt{4-x^2} + C.$$

$$8. \frac{x}{18(9+x^2)} + \frac{1}{54}\arctan \frac{x}{3} + C.$$

$$9. -\frac{1}{2}\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$10. -\frac{e^{-2x}}{13}(2\sin 3x + 3\cos 3x) + C.$$

$$11. -\frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

$$12. x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6x\ln x - 6x + C.$$

$$13. -\frac{1}{x} - \ln \left| \frac{1-x}{x} \right| + C.$$

14. $2\sqrt{x-1}-2\arctan\sqrt{x-1}+C.$
15. $\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\arctan x+C.$
16. $\arccos \frac{1}{|x|}+C.$
17. $\frac{1}{9}\left(\ln|2+3x|+\frac{2}{2+3x}\right)+C.$
18. $\frac{\cos^5 x \sin x}{6}+\frac{5\cos^3 x \sin x}{24}+\frac{5}{32}(2x+\sin 2x)+C.$
19. $\frac{x(x^2-1)\sqrt{x^2-2}}{4}-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-2}|+C.$
20. $\frac{1}{\sqrt{21}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}+\sqrt{7}}{\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}-\sqrt{7}}\right|+C.$
21. $\frac{\sqrt{2x-1}}{x}+2\arctan\sqrt{2x-1}+C.$
22. $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$
23. $\frac{1}{2}\ln|x^2-2x-1|+\frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-1-\sqrt{2}}{x-1+\sqrt{2}}\right|+C.$
24. $-\sqrt{1+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C.$
25. $\frac{1}{12}x^3-\frac{25}{16}x+\frac{125}{32}\arctan\frac{2x}{5}+C.$

总习题四(第 222 页)

1. (1) $\frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2}+C;$ (2) $\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)+4\arctan\frac{x-3}{2}+C.$
2. (1) (B); (2) (C).
3. $x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C.$
4. (1) $\frac{1}{2}\ln\frac{|e^x-1|}{e^x+1}+C;$
- (2) $\frac{1}{2(1-x)^2}-\frac{1}{1-x}+C;$
- (3) $\frac{1}{6a^3}\ln\left|\frac{a^3+x^3}{a^3-x^3}\right|+C;$

- (4) $\ln|x+\sin x|+C$;
- (5) $\ln x(\ln \ln x-1)+C$;
- (6) $\frac{1}{2}\arctan \sin^2 x+C$;
- (7) $\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C$;
- (8) $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}\cos 6x-\frac{1}{2}\cos 4x-\cos 2x\right)+C$;
- (9) $\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{24}\ln(x^6+4)+C$;
- (10) $a\arcsin \frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C$;
- (11) $\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x(x+1)}\right|+C$;
- (12) $\frac{1}{4}x^2+\frac{x}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$;
- (13) $\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)+C$;
- (14) $\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$;
- (15) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$;
- (16) $\frac{1}{3a^4}\left[\frac{3x}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{x^3}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}\right]+C$;
- (17) $-\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C$;
- (18) $(4-2x)\cos\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+C$;
- (19) $x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+C$;
- (20) $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|+C$;
- (21) $(x+1)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$;
- (22) $\sqrt{2}\ln\left(\left|\csc \frac{x}{2}\right|-\left|\cot \frac{x}{2}\right|\right)+C$;
- (23) $\frac{x^4}{8(1+x^8)}+\frac{1}{8}\arctan x^4+C$;

$$(24) \frac{x^4}{4} + \ln \frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x^4+2} + C;$$

$$(25) \frac{1}{32} \ln \left| \frac{2+x}{2-x} \right| + \frac{1}{16} \arctan \frac{x}{2} + C;$$

$$(26) \frac{2}{1+\tan \frac{x}{2}} + x + C \text{ 或 } \sec x + x - \tan x + C;$$

$$(27) x \tan \frac{x}{2} + C;$$

$$(28) e^{\sin x} (x - \sec x) + C;$$

$$(29) \ln \frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6} + C;$$

$$(30) \frac{1}{1+e^x} + \ln \frac{e^x}{1+e^x} + C;$$

$$(31) \arctan(e^x - e^{-x}) + C;$$

$$(32) \frac{x e^x}{e^x+1} - \ln(1+e^x) + C;$$

$$(33) x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 2x + C;$$

$$(34) \frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C;$$

$$(35) \frac{1}{4} (\arcsin x)^2 + \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} \arcsin x - \frac{x^2}{4} + C;$$

$$(36) -\frac{1}{3} \sqrt{1-x^2} (x^2+2) \arccos x - \frac{1}{9} x (x^2+6) + C;$$

$$(37) -\ln |\csc x + 1| + C;$$

$$(38) \ln |\tan x| - \frac{1}{2 \sin^2 x} + C;$$

$$(39) \frac{1}{3} \ln(2+\cos x) - \frac{1}{2} \ln(1+\cos x) + \frac{1}{6} \ln(1-\cos x) + C;$$

$$(40) \frac{1}{2} (\sin x - \cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\tan(x/2) - 1 + \sqrt{2}}{\tan(x/2) - 1 - \sqrt{2}} \right| + C.$$

第 五 章

习题 5-1 (第 236 页)

- * 1. $\frac{1}{3}(b^3 - a^3) + b - a$.
- * 2. (1) $\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$; (2) $e - 1$.
3. 略.
4. (1) $\frac{1}{2}t^2$; (2) 21; (3) $\frac{5}{2}$; (4) $\frac{9\pi}{2}$.
5. $a = 0, b = 1$.
6. $\ln 2 \approx 0.6931$.
7. (1) 6; (2) -2; (3) -3; (4) 5.
8. 88.2 kN.
9. 略.
10. (1) $6 \leq \int_1^4 (x^2 + 1) dx \leq 51$; (2) $\pi \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (1 + \sin^2 x) dx \leq 2\pi$;
 (3) $\frac{\pi}{9} \leq \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x \arctan x dx \leq \frac{2}{3}\pi$; (4) $-2e^2 \leq \int_2^0 e^{x^2-x} dx \leq -2e^{-\frac{1}{4}}$.
11. 提示: 设 $\int_0^1 f(x) dx = a$, 有 $\int_0^1 [f(x) - a]^2 dx \geq 0$.
12. 略.
13. (1) $\int_0^1 x^2 dx$ 较大; (2) $\int_1^2 x^3 dx$ 较大; (3) $\int_1^2 \ln x dx$ 较大;
 (4) $\int_0^1 x dx$ 较大; (5) $\int_0^1 e^x dx$ 较大.

习题 5-2 (第 244 页)

1. $0, \frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. $\cot t$.
3. $\frac{\cos x}{\sin x - 1}$.
4. 当 $x = 0$ 时.

$$5. (1) 2x\sqrt{1+x^4}; \quad (2) \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}};$$

$$(3) (\sin x - \cos x) \cdot \cos(\pi \sin^2 x).$$

$$6. \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$7. (C).$$

$$8. (1) a\left(a^2 - \frac{a}{2} + 1\right); \quad (2) \frac{21}{8}; \quad (3) \frac{271}{6}; \quad (4) \frac{\pi}{6}; \quad (5) \frac{\pi}{3};$$

$$(6) \frac{\pi}{3a}; \quad (7) \frac{\pi}{6}; \quad (8) \frac{\pi}{4} + 1; \quad (9) -1; \quad (10) 1 - \frac{\pi}{4}; \quad (11) 4;$$

$$(12) \frac{8}{3}.$$

9. 略.

10. 提示:应用三角学中的积化和差公式.

$$11. (1) 1; \quad (2) 2.$$

$$12. \Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^3, & x \in [0, 1), \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}, & x \in [1, 2], \end{cases} \quad \Phi(x) \text{ 在 } (0, 2) \text{ 内连续.}$$

$$13. \Phi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

14. 略.

15. 1.

16. 1.

习题 5-3 (第 254 页)

$$1. (1) 0; \quad (2) \frac{51}{512}; \quad (3) \frac{1}{4}; \quad (4) \pi - \frac{4}{3};$$

$$(5) \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}; \quad (6) \frac{\pi}{2}; \quad (7) \sqrt{2}(\pi + 2); \quad (8) 1 - \frac{\pi}{4};$$

$$(9) \frac{\pi}{16}a^4; \quad (10) \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}; \quad (11) \frac{1}{6}; \quad (12) 2 + 2\ln \frac{2}{3};$$

$$(13) 1 - 2\ln 2; \quad (14) (\sqrt{3} - 1)a; \quad (15) 1 - e^{-\frac{1}{2}}; \quad (16) 2(\sqrt{3} - 1);$$

$$(17) \frac{\pi}{2}; (18) \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}; (19) 0; (20) \frac{3}{2}\pi; (21) \frac{\pi^3}{324};$$

$$(22) 0; (23) \frac{2}{3}; (24) \frac{4}{3}; (25) 2\sqrt{2}; (26) 4.$$

2—6. 略.

$$7. (1) 1 - \frac{2}{e}; (2) \frac{1}{4}(e^2 + 1); (3) -\frac{2\pi}{\omega^2}; (4) \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{9}\right)\pi + \frac{1}{2}\ln \frac{3}{2};$$

$$(5) 4(2\ln 2 - 1); (6) \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}; (7) \frac{1}{5}(e^\pi - 2); (8) 2 - \frac{3}{4\ln 2};$$

$$(9) \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}; (10) \frac{1}{2}(e \sin 1 - e \cos 1 + 1); (11) 2\left(1 - \frac{1}{e}\right);$$

$$(12) \begin{cases} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot m}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (m+1)} \cdot \frac{\pi}{2}, & m \text{ 为奇数,} \\ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (m+1)}, & m \text{ 为偶数;} \end{cases}$$

$$(13) J_m = \begin{cases} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot m} \cdot \frac{\pi^2}{2}, & m \text{ 为偶数,} \\ \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (m-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot m} \pi, & m \text{ 为大于 1 的奇数,} \end{cases}$$

$$J_1 = \pi.$$

习题 5-4 (第 262 页)

$$1. (1) \frac{1}{3}; (2) \text{发散}; (3) \frac{1}{a}; (4) \frac{\pi}{4}; (5) \frac{\omega}{p^2 + \omega^2};$$

$$(6) \pi; (7) 1; (8) \text{发散}; (9) \frac{8}{3}; (10) \frac{\pi}{2}.$$

2. 当 $k > 1$ 时收敛于 $\frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}$; 当 $k \leq 1$ 时发散; 当 $k = 1 - \frac{1}{\ln \ln 2}$ 时取得最小值.

$$3. n!.$$

$$4. -1.$$

习题 5-5 (第 270 页)

$$1. (1) \text{收敛}; (2) \text{收敛}; (3) \text{收敛}; (4) \text{发散};$$

$$(5) \text{收敛}; (6) \text{发散}; (7) \text{收敛}; (8) \text{收敛}.$$

2. 略.

3. (1) $\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right), n>0$; (2) $\Gamma(p+1), p>-1$;

(3) $\frac{1}{|n|}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right), \frac{m+1}{n}>0$.

4—5. 略.

总习题五(第 270 页)

1. (1) 必要, 充分; (2) 充分必要; (3) 收敛; (4) 不一定;
(5) $xf(-x^2)$.

2. (1) (B); (2) (A).

3. (1) 表示曲线 $y=f(x)$ 、 $y=g(x)$ 和直线 $x=a$ 、 $x=b$ 所围图形的面积;
(2) 表示曲线 $y=f(x)$ 和直线 $y=0$ 、 $x=a$ 、 $x=b$ 所围曲边梯形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积;
(3) 表示 $[t_1, t_2]$ 这段时间内流入水池的水量;
(4) 表示 $[T_1, T_2]$ 这段时期内该国人口增加的数量;
(5) 表示该公司经营该种产品自第 1001 件至第 2000 件所得利润.

4. (1) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$; (2) $\frac{1}{p+1}$.

5. (1) $af(a)$; (2) $\frac{\pi^2}{4}$.

6—7. 略.

8. 提示: $1-x^p < \frac{1}{1+x^p} < 1$.

9. 提示: (1) 对任意实数 t ,

$$\int_a^b f^2(x) dx + 2t \int_a^b f(x)g(x) dx + t^2 \int_a^b g^2(x) dx \geq 0;$$

(2) 利用柯西-施瓦茨不等式.

10. 提示: 利用柯西-施瓦茨不等式.

11. (1) $\frac{\pi}{2}$; (2) $\frac{\pi}{8}\ln 2$, 提示: 令 $x = \frac{\pi}{4} - u$; (3) $\frac{\pi}{4}$; (4) $2(\sqrt{2}-1)$;

(5) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; (6) $\frac{\pi}{2}$; (7) $\frac{\pi^2}{2} + 2\pi - 4$; (8) $e^{-2}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan e^{-1}\right)$;

$$(9) \frac{\pi}{2} + \ln(2 + \sqrt{3}); \quad (10) \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}, & \text{当 } x < -1, \\ x, & \text{当 } -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{4}, & \text{当 } x > 1. \end{cases}$$

12—13. 略.

14. $1 + \ln(1 + e^{-1})$.

15—*16. 略.

*17. (1) 收敛; (2) 收敛; (3) 收敛, 提示: 先分部积分, 再判别;
(4) 收敛.

*18. (1) $-\frac{\pi}{2} \ln 2$, 提示: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$;

(2) $\frac{\pi}{4}$, 提示: 令 $x = \frac{1}{t}$.

第 六 章

习题 6-2 (第 286 页)

1. (1) $\frac{1}{6}$; (2) 1; (3) $\frac{32}{3}$; (4) $\frac{32}{3}$.

2. (1) $2\pi + \frac{4}{3}, 6\pi - \frac{4}{3}$; (2) $\frac{3}{2} - \ln 2$; (3) $e + \frac{1}{e} - 2$; (4) $b - a$.

3. $\frac{9}{4}$.

4. $\frac{16}{3}p^2$.

5. (1) πa^2 ; (2) $\frac{3}{8}\pi a^2$; (3) $18\pi a^2$.

6. $3\pi a^2$.

7. $\frac{a^2}{4}(e^{2\pi} - e^{-2\pi})$.

8. (1) $\frac{5}{4}\pi$; (2) $\frac{\pi}{6} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

9. $\frac{e}{2}$.

10. $\frac{8}{3}a^2$.

11. 当 $p = -\frac{4}{5}$ 、 $q = 3$ 时, A 达到最大值 $\frac{225}{32}$.

12. $\frac{128}{7}\pi, \frac{64}{5}\pi$.

13. $\frac{32}{105}\pi a^3$.

14. 略.

15. (1) $\frac{3}{10}\pi$; (2) $\frac{\pi^3}{4} - 2\pi$; (3) $160\pi^2$; (4) $7\pi^2 a^3$.

16. $2\pi^2 a^2 b$.

17. $\frac{1}{6}\pi h[2(ab+AB)+aB+bA]$.

18. $\frac{4\sqrt{3}}{3}R^3$.

19. 略.

20. $2\pi^2$.

21. (1) $V_1 = \frac{4\pi}{5}(32-a^5)$, $V_2 = \pi a^4$;

(2) 当 $a = 1$ 时, $V_1 + V_2$ 取得最大值 $\frac{129}{5}\pi$.

22. $1 + \frac{1}{2}\ln \frac{3}{2}$.

23. $\frac{8}{9}\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$.

24. $\frac{y}{2p}\sqrt{p^2+y^2} + \frac{p}{2}\ln \frac{y+\sqrt{p^2+y^2}}{p}$.

25. $6a$.

26. $\frac{a}{2}\pi^2$.

27. $\left(\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a, \frac{3}{2}a\right)$.

28. $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}(e^{a\varphi} - 1)$.

29. $\ln \frac{3}{2} + \frac{5}{12}$.

30. $8a$.

习题 6-3 (第 293 页)

1. $0.18k \text{ J}$.
2. $800\pi \ln 2 \text{ J}$.
3. (1) 略; (2) $9.72 \times 10^5 \text{ kJ}$.
4. $\frac{27}{7}kc^{\frac{2}{3}}a^{\frac{7}{3}}$ (其中 k 为比例常数).
5. $(\sqrt{2}-1) \text{ cm}$.
6. $57\,697.5 \text{ kJ}$.
7. 205.8 kN .
8. 17.3 kN .
9. $14\,373 \text{ kN}$.
10. 1.65 N .
11. 取 y 轴通过细直棒, 则

$$F_y = Gm\mu \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2+l^2}} \right), F_x = -\frac{Gm\mu l}{a\sqrt{a^2+l^2}}.$$

12. 引力的大小为 $\frac{2Gm\mu}{R} \sin \frac{\varphi}{2}$, 方向为 M 指向圆弧的中点.

总习题六 (第 294 页)

1. (1) $\frac{37}{12}$; (2) $2\sqrt{3} - \frac{4}{3}$.
2. (1) (A); (2) (D).
3. $\frac{5}{4} \text{ m}$.
4. $\frac{\pi-1}{4}a^2$.
5. $x = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{y}{2}}$ 或 $y = \frac{32}{9}x^2$ ($x \geq 0$).
6. $a = -\frac{5}{3}, b = 2, c = 0$.
7. (1) $\frac{1}{2}e-1$; (2) $\frac{\pi}{6}(5e^2-12e+3)$.

8. $\frac{512}{7}\pi$.

9. $4\pi^2$.

10. $\sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

11. $\frac{4}{3}\pi r^4 g$.

12. $\frac{1}{2}\rho g a b(2h + b \sin \alpha)$.

13. $F_x = \frac{3}{5}Ga^2, F_y = \frac{3}{5}Ga^2$.

14. (1) $\sqrt{1+r+r^2} a \text{ m};$ (2) $\frac{1}{\sqrt{1-r}} a \text{ m}.$

第 七 章

习题 7-1 (第 301 页)

1. (1) 一阶; (2) 二阶; (3) 三阶; (4) 一阶; (5) 二阶; (6) 一阶.

2. (1) 是; (2) 是; (3) 不是; (4) 是.

3. 略.

4. (1) $y^2 - x^2 = 25$; (2) $y = xe^{2x}$; (3) $y = -\cos x$.5. (1) $y' = x^2$; (2) $yy' + 2x = 0$.6. $\frac{dp}{dT} = k \frac{p}{T^2}$, k 为比例系数.

7. 6 小时.

习题 7-2 (第 308 页)

1. (1) $y = e^{Cx}$; (2) $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x^3 + C$;

(3) $\arcsin y = \arcsin x + C$; (4) $\frac{1}{y} = a \ln |x+a-1| + C$;

(5) $\tan x \tan y = C$; (6) $10^{-y} + 10^x = C$;

(7) $(e^x + 1)(e^y - 1) = C$; (8) $\sin x \sin y = C$;

(9) $3x^4 + 4(y+1)^3 = C$; (10) $(x-4)y^4 = Cx$.

2. (1) $e^y = \frac{1}{2}(e^{2x} + 1)$; (2) $\cos x - \sqrt{2} \cos y = 0$;

(3) $\ln y = \tan \frac{x}{2}$; (4) $(1 + e^x) \sec y = 2\sqrt{2}$; (5) $x^2 y = 4$.

3. $t = -0.0305 h^{\frac{5}{2}} + 9.64$, 水流完所需的时间约为 10 s.

4. $v = \sqrt{72500} \approx 269.3$ (cm/s).

5. $R = R_0 e^{-0.000433t}$, 时间以年为单位.

6. $xy = 6$.

7. 取 O 为原点, 河岸朝顺水方向为 x 轴, y 轴指向对岸, 则所求航线为

$$x = \frac{k}{a} \left(\frac{h}{2} y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right).$$

习题 7-3 (第314页)

1. (1) $y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2$ ($x > 0$), $y - \sqrt{y^2 - x^2} = C$ ($x < 0$);

(2) $\ln \frac{y}{x} = Cx + 1$;

(3) $y^2 = x^2(2\ln|x| + C)$; (4) $x^3 - 2y^3 = Cx$;

(5) $x^2 = C \sin^3 \frac{y}{x}$; (6) $x + 2ye^{\frac{x}{y}} = C$.

2. (1) $y^3 = y^2 - x^2$; (2) $y^2 = 2x^2(\ln x + 2)$; (3) $\frac{x+y}{x^2+y^2} = 1$.

3. $y = x(1 - 4\ln x)$.

4. (1) $(4y - x - 3)(y + 2x - 3)^2 = C$;

(2) $\ln [4y^2 + (x-1)^2] + \arctan \frac{2y}{x-1} = C$;

(3) $(y-x+1)^2(y+x-1)^5 = C$;

(4) $x + 3y + 2\ln|x+y-2| = C$.

习题 7-4 (第320页)

1. (1) $y = e^{-x}(x+C)$; (2) $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 + \frac{C}{x}$;

(3) $y = (x+C)e^{-\sin x}$; (4) $y = C \cos x - 2 \cos^2 x$;

(5) $y = \frac{\sin x + C}{x^2 - 1}$; (6) $3\rho = 2 + Ce^{-3\theta}$;

(7) $y = 2 + Ce^{-x^2}$; (8) $2x \ln y = \ln^2 y + C$;

(9) $y = (x-2)^3 + C(x-2)$; (10) $x = Cy^3 + \frac{1}{2}y^2$.

2. (1) $y = \frac{x}{\cos x}$; (2) $y = \frac{\pi - 1 - \cos x}{x}$;
 (3) $y \sin x + 5e^{\cos x} = 1$; (4) $y = \frac{2}{3}(4 - e^{-3x})$;
 (5) $2y = x^3 - x^3 e^{x^2-1}$.
 3. $y = 2(e^x - x - 1)$.
 4. $v = \frac{k_1}{k_2}t - \frac{k_1 m}{k_2^2}(1 - e^{\frac{k_2}{m}t})$.
 5. $i = e^{-5t} + \sqrt{2} \sin\left(5t - \frac{\pi}{4}\right)$ A.
 6. $\ln |x| + \int \frac{g(v) dv}{v[f(v) - g(v)]} = C$, 求出后将 $v = xy$ 代回, 得通解.
 7. (1) $y = -x + \tan(x + C)$; (2) $(x - y)^2 = -2x + C$;
 (3) $y = \frac{1}{x}e^{Cx}$; (4) $y = 1 - \sin x - \frac{1}{x + C}$;
 (5) $2x^2 y^2 \ln |y| - 2xy - 1 = Cx^2 y^2$.
 * 8. (1) $\frac{1}{y} = -\sin x + Ce^x$; (2) $\frac{3}{2}x^2 + \ln \left|1 + \frac{3}{y}\right| = C$;
 (3) $\frac{1}{y^3} = Ce^x - 1 - 2x$; (4) $\frac{1}{y^4} = -x + \frac{1}{4} + Ce^{-4x}$;
 (5) $\frac{x^2}{y^2} = -\frac{2}{3}x^3\left(\frac{2}{3} + \ln x\right) + C$.

习题 7-5 (第 328 页)

1. (1) $y = \frac{1}{6}x^3 - \sin x + C_1 x + C_2$;
 (2) $y = (x - 3)e^x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$;
 (3) $y = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C_1 x + C_2$;
 (4) $y = -\ln |\cos(x + C_1)| + C_2$;
 (5) $y = C_1 e^x - \frac{1}{2}x^2 - x + C_2$;
 (6) $y = C_1 \ln |x| + C_2$;
 (7) $y^3 = C_1 x + C_2$;
 (8) $C_1 y^2 - 1 = (C_1 x + C_2)^2$;
 (9) $x + C_2 = \pm \left[\frac{2}{3}(\sqrt{y} + C_1)^{\frac{3}{2}} - 2C_1 \sqrt{y} + C_1 \right]$;
 (10) $y = \arcsin(C_2 e^x) + C_1$.

2. (1) $y = \sqrt{2x-x^2}$; (2) $y = -\frac{1}{a} \ln(ax+1)$;
 (3) $y = \frac{1}{a^3} e^{ax} - \frac{e^a}{2a} x^2 + \frac{e^a}{a^2} (a-1)x + \frac{e^a}{2a^3} (2a-a^2-2)$;
 (4) $y = \ln \sec x$; (5) $y = \left(\frac{1}{2}x+1\right)^4$; (6) $y = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln 2$.
 3. $y = \frac{x^3}{6} + \frac{x}{2} + 1$.
 4. $s = \frac{mg}{c} \left(t + \frac{m}{c} e^{-\frac{c}{m}t} - \frac{m}{c} \right)$.

习题 7-6 (第337页)

1. (1) 线性无关; (2) 线性相关; (3) 线性相关;
 (4) 线性无关; (5) 线性无关; (6) 线性无关;
 (7) 线性相关; (8) 线性无关; (9) 线性无关;
 (10) 线性无关.
 2. $y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$.
 3. $y = (C_1 + C_2 x) e^{x^2}$.
 4. 略.
 * 5. $y = C_1 e^x + C_2 (2x+1)$.
 * 6. $y = C_1 x + C_2 x^2 + x^3$.
 * 7. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x + \cos x \ln |\cos x|$.
 * 8. $y = C_1 x + C_2 x \ln |x| + \frac{1}{2} x \ln^2 |x|$.

习题 7-7 (第346页)

1. (1) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$; (2) $y = C_1 + C_2 e^{4x}$;
 (3) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$; (4) $y = e^{-3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$;
 (5) $x = (C_1 + C_2 t) e^{\frac{5}{2}t}$; (6) $y = e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$;
 (7) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$;
 (8) $y = (C_1 + C_2 x) \cos x + (C_3 + C_4 x) \sin x$;
 (9) $y = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x) e^x$;
 (10) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x$.
 2. (1) $y = 4e^x + 2e^{3x}$; (2) $y = (2+x) e^{-\frac{x}{2}}$; (3) $y = e^{-x} - e^{4x}$;
 (4) $y = 3e^{-2x} \sin 5x$; (5) $y = 2 \cos 5x + \sin 5x$; (6) $y = e^{2x} \sin 3x$.

$$3. x = \frac{v_0}{\sqrt{k_2^2 + 4k_1}} (1 - e^{-\sqrt{k_2^2 + 4k_1} t}) e^{(-\frac{k_2}{2} + \frac{\sqrt{k_2^2 + 4k_1}}{2})t}.$$

$$4. u_c(t) = \frac{10}{9} (19e^{-10^3 t} - e^{-1.9 \times 10^4 t}) \text{ V}; \quad i(t) = \frac{19}{18} \times 10^{-2} (-e^{-10^3 t} + e^{-1.9 \times 10^4 t}) \text{ A}.$$

$$5. M = 195 \text{ kg}.$$

习题 7-8 (第 354 页)

$$1. (1) y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{-x} + e^x;$$

$$(2) y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \frac{e^x}{1+a^2};$$

$$(3) y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x;$$

$$(4) y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \left(\frac{3}{2}x^2 - 3x\right) e^{-x};$$

$$(5) y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{1}{4} x e^x \cos 2x;$$

$$(6) y = (C_1 + C_2 x) e^{3x} + \frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{3}x + 1\right) e^{3x};$$

$$(7) y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x} + \frac{11}{8} - \frac{1}{2}x;$$

$$(8) y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{3} x \cos x + \frac{2}{9} \sin x;$$

$$(9) y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{e^x}{2} + \frac{x}{2} \sin x;$$

$$(10) y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cos 2x, \text{提示: } \sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x).$$

$$2. (1) y = -\cos x - \frac{1}{3} \sin x + \frac{1}{3} \sin 2x;$$

$$(2) y = -5e^x + \frac{7}{2}e^{2x} + \frac{5}{2};$$

$$(3) y = \frac{1}{2} (e^{9x} + e^x) - \frac{1}{7} e^{2x};$$

$$(4) y = e^x - e^{-x} + e^x (x^2 - x);$$

$$(5) y = \frac{11}{16} + \frac{5}{16} e^{4x} - \frac{5}{4} x.$$

3. 取炮口为原点, 炮弹前进的水平方向为 x 轴, 铅直向上为 y 轴建立直角坐标系, 弹道曲线为

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha \cdot t, \\ y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

4. $u_c(t) = 20 - 20e^{-5 \times 10^3 t} [\cos(5 \times 10^3 t) + \sin(5 \times 10^3 t)] \text{ V};$

$i(t) = 4 \times 10^{-2} e^{-5 \times 10^3 t} \sin(5 \times 10^3 t) \text{ A},$

提示: 电路方程参见第六节例 2.

5. (1) $t = \sqrt{\frac{10}{g}} \ln(5 + 2\sqrt{6}) \text{ s};$ (2) $t = \sqrt{\frac{10}{g}} \ln\left(\frac{19 + 4\sqrt{22}}{3}\right) \text{ s}.$

6. $\varphi(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x + e^x).$

* 习题 7-9 (第 356 页)

1. $y = C_1 x + \frac{C_2}{x}.$

2. $y = x(C_1 + C_2 \ln|x|) + x \ln^2|x|.$

3. $y = C_1 x + C_2 x \ln|x| + C_3 x^{-2}.$

4. $y = C_1 x + C_2 x^2 + \frac{1}{2}(\ln^2 x + \ln x) + \frac{1}{4}.$

5. $y = C_1 x^2 + C_2 x^{-2} + \frac{1}{5} x^3.$

6. $y = x[C_1 \cos(\sqrt{3} \ln x) + C_2 \sin(\sqrt{3} \ln x)] + \frac{1}{2} x \sin(\ln x).$

7. $y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x + x + \frac{1}{6} x^2 \ln^3 x.$

8. $y = C_1 x + x[C_2 \cos(\ln x) + C_3 \sin(\ln x)] + \frac{1}{2} x^2 (\ln x - 2) + 3x \ln x.$

* 习题 7-10 (第 359 页)

1. (1) $\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \\ z = C_1 e^x - C_2 e^{-x}; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t, \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \cos t - C_4 \sin t; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = 3 + C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t; \end{cases}$

$$(4) \begin{cases} x = C_1 e^{(-1+\sqrt{15})t} + C_2 e^{(-1-\sqrt{15})t} + \frac{2}{11}e^t + \frac{1}{6}e^{2t}, \\ y = (-4-\sqrt{15})C_1 e^{(-1+\sqrt{15})t} - (4-\sqrt{15})C_2 e^{(-1-\sqrt{15})t} - \frac{e^t}{11} - \frac{7}{6}e^{2t}; \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} x = \frac{C_1 - 3C_2}{5} \sin t - \frac{3C_1 + C_2}{5} \cos t - t^2 + t + 3, \\ y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 2t^2 - 3t - 4; \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} x = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-\frac{t}{3}} + \frac{8 \sin t + \cos t}{65}, \\ y = -\frac{4}{3}C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-\frac{t}{3}} + \frac{61 \sin t - 33 \cos t}{130}. \end{cases}$$

$$2. (1) \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t; \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x = e^t, \\ y = 4e^t; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x = 2 \cos t - 4 \sin t - \frac{1}{2}e^t, \\ y = 14 \sin t - 2 \cos t + 2e^t; \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} x = 4 \cos t + 3 \sin t - 2e^{-2t} - 2e^{-t} \sin t, \\ y = \sin t - 2 \cos t + 2e^{-t} \cos t; \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} x = \frac{12}{17}e^{-\frac{7}{5}t} + \frac{5}{17}e^{2t} + \frac{3}{7}t - \frac{1}{49}, \\ y = \frac{18}{17}e^{-\frac{7}{5}t} - \frac{1}{17}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{7}t - \frac{26}{49}. \end{cases}$$

总习题七(第 360 页)

$$1. (1) 3; \quad (2) y = e^{-\int P(x) dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right);$$

$$(3) y' = f(x, y), y \Big|_{x=x_0} = 0; \quad (4) y = C_1(x-1) + C_2(x^2-1) + 1.$$

$$2. (1) (B); \quad (2) (B).$$

$$3. (1) y^2(y'^2 + 1) = 1; \quad (2) y'' - 3y' + 2y = 0.$$

$$4. (1) x - \sqrt{xy} = C; \quad (2) y = ax + \frac{C}{\ln x};$$

$$(3) x = Cy^{-2} + \ln y - \frac{1}{2}; \quad (4) y^{-2} = Ce^{x^2} + x^2 + 1;$$

$$(5) y = \ln |\cos(x + C_1)| + C_2; \quad (6) y = \frac{1}{2C_1} (e^{C_1 x + C_2} + e^{-C_1 x - C_2});$$

$$(7) y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{4}{17} \cos 2x + \frac{1}{17} \sin 2x;$$

$$(8) y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-2x} + \left(\frac{1}{6} x^2 - \frac{4}{9} x \right) e^x - x^2 - x;$$

$$^*(9) x^2 = C y^6 + y^4; \quad (10) \sqrt{(x^2 + y)^3} = x^3 + \frac{3}{2} xy + C.$$

$$^* 5. (1) x(1 + 2 \ln y) - y^2 = 0; \quad (2) y = -\frac{1}{a} \ln(ax + 1);$$

$$(3) y = 2 \arctan e^x; \quad (4) y = x e^{-x} + \frac{1}{2} \sin x.$$

$$6. y = x - x \ln x.$$

$$7. \text{约 } 250 \text{ m}^3.$$

$$8. \varphi(x) = \cos x + \sin x.$$

$$9. \varphi(x) = \sqrt{e^{2x} - 1} - \arctan \sqrt{e^{2x} - 1}.$$

10. 略.

$$^* 11. (1) y = \frac{1}{x} (C_1 + C_2 \ln |x|); \quad (2) y = C_1 x^2 + C_2 x^3 + \frac{1}{2} x.$$

$$^* 12. (1) \begin{cases} x = (C_1 + C_2 t) e^{-t} + \frac{1}{2} t, \\ y = -(C_1 + C_2 + C_2 t) e^{-t} - \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{-t} + C_3 e^{-2t} - \frac{1}{6} e^t, \\ y = C_4 e^{-t} - C_1 + C_3 e^{-2t} + \frac{1}{3} e^t. \end{cases}$$